UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES LOCALES PARA LA ECUACIÓN TIPO KIRCHHOFF - CARRIER

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA

PEDRO MIGUEL AYASTA CORNEJO

CALLAO – DICIEMBRE 2015

PERU

Hoja de referencia del jurado y aprobación

Existencia y unicidad de soluciones locales para la ecuación tipo Kirchhoff – Carrier

Pedro Miguel Ayasta Cornejo

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de la Licenciatura en Matemática.
Aprobada por

Lic. Cesar Augusto Ávila Celis

Presidente

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Vocal

Lic. Sofia Irena Duran Quiñones

Secretario

FICHA CATALOGRÁFICA

PEDRO MIGUEL AYASTA CORNEJO

Existencia y unicidad de soluciones locales para la ecuación tipo Kirchhoff - Carrier, Callao [2015].

iX, 92 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2015)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

1. UNAC/FCNM II. Titulo (Serie)

Dedicatoria

A mis padres por constituir el pilar fundamental en lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de mi vida personal, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

Agradecimiento

El presente trabajo de investigación fue realizado bajo la supervisión del Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega, a quien me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento, por hacer posible la realización de este trabajo.

Además de agradecer su paciencia, tiempo y dedicación que tuvo para que resultara este trabajo de manera exitosa, gracias por su apoyo. También quiero agradecer:

- A Dios, por darme la oportunidad de vivir, por permitir disfrutar cada momento de mi vida y guiarme por el camino.
- A mis padres, por darme la vida y apoyarme en todo lo que me propuesto, por ser el apoyo más grande durante mi educación universitaria, ya que sin ellos no hubiese logrado mis metas y sueños, son un ejemplo a seguir.
- A mis hermanos, mi esposa y mis hijos, los cuales son el motor que me impulsa ser mejor cada día, para que siempre se sientan orgullosos de mí.
- Finalmente, a mis profesores de la facultad que me enseñaron las materias básicas y de especialidad para mi formación profesional, a ellos, mi eterno agradecimiento, estoy en deuda con ellos.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES LOCALES PARA LA ECUACIÓN TIPO KIRCHHOFF - CARRIER

PEDRO MIGUEL AYASTA CORNEJO

Septiembre - 2015

Asesor: Mg. Dionisio Orlando Moreno Vega

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones locales, del problema (1).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2, \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\|^2)\Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{en} \quad Q = \Omega\times\left]0,T\right[\\ u(x,t) = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma\times\left]0,T\right[\; (1) \\ u(x,0) = u_0(x) \;;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Dónde $(x,t)\in Q$. Tal que Ω denota un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, con frontera $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fijo y para un $T\geq 0$ arbitrario, Q denota el cilindro $Q = \Omega\times\left]0,T\right[$ con frontera lateral $\sum = \Gamma\times\left]0,T\right[$.

Sea Δ el operador Laplaciano definido por la terna $\{V,H,((,))\}$, donde V y H son espacios de Hilbert, la inmersión de V en H es densa y compacta, $M(s,r)$ es una función real derivable en las dos variables y no negativa.

Palabras Claves: Método de Faedo Galerkin, Inmersiones de Sobolev, Teorema del punto fijo de Banach.

ABSTRACT

LOCAL EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR TYPE EQUATION KIRCHHOFF - CARRIER

PEDRO MIGUEL AYASTA CORNEJO

Septiembre - 2015

Adviser: Mg. Dionisio Orlando Moreno Vega

Title obtained: Licenciated in Mathematic

In this paper we study the existence and uniqueness of local solutions of the problem (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2, \left\|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\|^2)\Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{en} \quad Q = \Omega\times\left]0,T\right[\\ u(x,t) = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma\times\left]0,T\right[\; (1) \\ u(x,0) = u_0(x) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Where $(x,t)\in Q$.such that Ω denotes an open limited of $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$. and $\partial\Omega = \Gamma$ with soft border. For each real number fixed to an arbitrary $T\geq 0$. Q is denoted for $Q = \Omega\times\left]0,T\right[$ cylinder with lateral border $\sum = \Gamma\times\left]0,T\right[$.

Let Δ be the operator Laplaciano defined by the triad $\{V,H,((,))\}$, where A and $B$are Hilbert spaces, immersion in dense and compact, and $M(s,r)$ is a real differentiable function in two variables and not negative.

Key Words:

Faedo Galerkin method, the Sobolev spaces Immersion. Brower fixed-point theorem.

CAPÍTULOI

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del problema

El modelo matemático original que describe las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda es:

$$\sigma h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(\rho+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f$$

Donde $0\leq x\leq L$ y $t>0$, $u(x,t)$ es el desplazamiento lateral en el eje x en el tiempo t, E el módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal, σ es la densidad de la masa de la cuerda, h es el área de la sección transversal, ρ es la tensión axial y f es la fuerza externa. El cual indujo a un modelo matemático más general definido de la siguiente manera.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$ con frontera regular Γ; Q el cilindro $\Omega\times[0,T]$, $0<T<\infty$ con frontera lateral $\sum=\Gamma\times]0,T[$. La ecuación diferencial parcial no-lineal

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\left(\rho(x)+\displaystyle\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx\right)(-\Delta u(x,t))=f(x,t) & \text{en } Q\\ u(x,t)=0 & \text{sobre } \Sigma \text{ (P)}\\ u(x,0)=u_0(x)\ ;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & \text{en } \Omega\end{cases}$$

Que es un modelo generalizado de la ecuación de Kirchhoff estudiado en [17], planteada para estudiar las vibraciones de pequeña amplitud, de una cuerda fija en sus extremos y ~~cuando la dependencia de la tensión ρ no puede dejarse de lado en el modelo (P). Asimismo~~ el problema mixto.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\left(\rho(x)+\displaystyle\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx\right)(-\Delta u(x,t))=f(x,t) & \text{en} \quad Q \\ u(x,t)=0 & \text{sobre} \quad \Sigma\ (Q) \\ u(x,0)=u_0(x)\ ;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Es una generalización de un problema estudiado por Carrier en [25].con los mismos argumentos dados en problema (P) por Kirchhoff.

Otra manera general de tratar unificadamente los sistemas (P) y (Q), ha sido considerar el siguiente modelo abstracto.

Sea A el operador definido por la terna {H; V; ((;))}, donde H y V son espacios de Hilbert, la inmersión de V en H es densa y compacta.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+M\left(\left|A^\alpha u(x,t)\right|^2,\left|A^\beta u(x,t)\right|^2\right)A^\gamma u(x,t)=f(x,t) & en \quad Q=\ \Omega\times\left]0,T\right[\\ u(x,t)=0 & \text{sobre} \quad \sum=\Gamma\times\left]0,T\right[\\ u(x,0)=u_0(x)\ ;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases} \qquad \text{(R)}$$

Donde $M(s,r)$ es una función real derivable en las dos variables y no negativa, se demuestra la existencia y unicidad de la solución local para α, un número real positivo; β y γ, números reales no negativos. Debo indicar que este tema fue investigado por El Dr. Raúl Izaguirre Maguiña, UNMSM, que fue publicado por una revista denominada Pesquimat en el año 2009.

Una forma particular es tratar con las siguientes condiciones específicas para $A=-\Delta$, $A^{\frac{1}{2}}=\nabla$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$ y $\gamma=1$, con datos iniciales en Espacios de Sobolev, luego el sistema (R) se representa mediante el siguiente modelo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|^2, \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\|^2)\Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u(x,t) = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\; (1) \\ u(x,0) = u_0(x) \; ; \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Dónde $(x,t) \in Q$. Tal que Ω denota un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontera $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fijo y para un $T \geq 0$ arbitrario, Q denota el cilindro $Q = \Omega \times]0,T[$ con frontera lateral $\sum = \Gamma \times]0,T[$ .Sea Δ el operador Laplaciano definido por la terna $\{V, H, ((,))\}$, donde V y H son espacios de Hilbert, la inmersión de V en H es densa y compacta, $M(s,r)$ es una función real derivable en las dos variables y no negativa.

1.2 Formulación del problema

Buscaremos respuesta a través de nuestra Investigación, a las siguientes interrogantes:
¿El problema (1) es un modelo abstracto que abarca diferentes modelos?

¿Existirá alguna solución del problema (1)?
¿Habrá para el problema (1) solución única?
¿Qué aplicaciones tendrá el problema (1)?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo General:

Este trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada de la existencia y unicidad de la solución del problema (1) cuya ecuación es un modelo de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico no lineal.

1.3.2 Objetivos Específicos:

Hallar la solución de la ecuación abstracta de la onda, vía la descomposición espectral del operador Δ y el método de Faedo - Galerkin.

Ilustrar mediante ejemplos concretos la aplicación de los resultados sobre la ecuación abstracta de onda: en el caso unidimensional, las vibraciones de una cuerda; en el caso bidimensional, las vibraciones de una membrana.

Proponer otros modelos físicos de aplicación inmediata.

1.4 Justificación.

El presente proyecto se encuentra inmerso en un nivel de Investigación básica tanto en la parte teórica como en la práctica.

El sector que se verá beneficiado con los resultados de esta investigación son los estudiantes de Ciencias e Ingeniería Eléctrica y Electrónica y profesionales afines.

En este trabajo investigaremos la ecuación abstracta de la onda y sus aplicaciones a diferentes áreas, como la Física, Ciencias, e Ingenierías, por lo que es de gran importancia el trabajo en lo que corresponde al desarrollo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de evolución de Segundo orden.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes, sus demostraciones serán omitidas porque se tratan de resultados ya conocidos. Solo se citaran las referencias donde serán encontrados con sus respectivas demostraciones.

2.1.1 Notaciones

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ para

  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{R}$

  $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{R}$

- Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f será denotado por ∇f y definido como un vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

- El Laplaciano de una función f está definido como:

$$\Delta f = \nabla . \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}$$

- Sean u y $v \in L^2(\Omega)$, entonces el producto interno entre u y v está definido por:

$$(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \int_\Omega u(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx}$$

  Y la norma de u en $L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ es dado por:

$$\|u\| = (\int_\Omega |u(\mathrm{x})|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\nabla u\| = \left[\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x})\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- El divergente de un campo $F:\Omega\subset IR^n \rightarrow IR$ y definido de la siguiente manera:

$$divF = \nabla.F = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Siendo F_i la i -èsima componente de F.

2.1.2. Identidades Usuales

Sean f y g dos funciones escalares de clase $C^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ siendo c una constante real, F y G dos campos vectoriales de clase $C^1(\Omega)$ entonces las siguientes identidades son válidas:

I. $\nabla(\mathrm{f}+\mathrm{g}) = \nabla\mathrm{f}+\nabla\mathrm{g}$

II. $\nabla(\mathrm{cf}) = \mathrm{c}\nabla\mathrm{f}$

III. $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$

IV. $\nabla.(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \nabla.F + \nabla.G$

V. $\nabla.(\mathrm{fF}) = \mathrm{f}\,\nabla.\mathrm{F}+\mathrm{F}.\nabla f$

2.1.3 Espacios $L^p(\Omega)$

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

El Espacio Euclidiano de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n - uplas ordenadas $x = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,...,n$

Definición II.1 Sea $p\in\mathbb{R}$ con $1\le p<\infty$ y $\Omega\in\mathbb{R}^n$ medible, denotaremos con $L^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $|u(\mathrm{x})|^p$ es integral en el sentido de Lebesgue, es decir

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}/u \quad es \quad \text{medible} \quad y\int_\Omega |u(\mathrm{x})|^p\, dx<\infty\right\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $\ell^p(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y la aplicación $\|\ \|_p$ definida por:

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |u(\mathrm{t})|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}}, u\in\ell^p(\Omega)$$

Es una seminorma en $\ell^p(\Omega)$.

Observación II.1 Se dice que $u=v$ casi siempre (c.s) en Ω sí y solo si $\exists M\subseteq\Omega$ tal que $u(x)=v(x) \quad \forall x\in\Omega/M$ y $med(\mathrm{M})=0$

Para obtener una norma se define una relación de equivalencia en $\ell^p(\Omega)$ mediante

$$u\equiv v \text{ Si y solo si } u=v \text{ c.s en } \Omega$$

Denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio cociente

$$\ell^p(\Omega)=\frac{\ell^p(\Omega)}{\equiv}=\left\{[u]:u\in\ell^p(\Omega)\right\}$$

El cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |f(\mathrm{t})|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}}; u\in L^p(\Omega)$$

Cuando $p=2$, tenemos $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno

$$(\mathrm{u},\mathrm{v})=\int_\Omega u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}; \qquad u,v\in L^2(\Omega)$$

Su norma inducida será denotada por

$$\|u\|_2 = \left[\int_\Omega |f(\mathrm{t})|^p dt \right]^{\frac{1}{2}} ; u \in L^2(\Omega)$$

Si $p=\infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible entonces denotaremos con $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω esencialmente acotadas en Ω es decir

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, \text{es medible y } \exists C > 0 \text{ tal que } |u(\mathrm{x})| \leq C \ c.s \text{ en } \Omega\}$$

Definición II.2 Definimos el supremo esencial como

$$\sup_{x\in\Omega} ess|u(\mathrm{x})| = \inf\{C > 0; |u(\mathrm{x})| \leq C \ c.s \ en \ \Omega\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $L^\infty(\Omega)$ se toma un espacio vectorial y

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(\mathrm{x})|; u \in L^\infty(\Omega)$$

Define una norma.

Demostración. Ver Medeiros y Milla [5]

Proposición II.1 (Desigualdad de Cauchy – Schwarz para funciones en $L^2(\Omega)$)

Sean $u:\Omega \to \mathbb{R}$ y $v:\Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones cuadrado integrables, entonces:

$$|(\mathrm{u},\mathrm{v})| \leq \|u\|\|v\|$$

Demostración. Ver Brezis [4]

Proposición II.2 (Desigualdad de Young)

Sea $a \geq 0, b \geq 0$ y $1 < p,q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Demostración. Ver L.A. Medeiros y E.A de Mello [5]

Proposición II.3 (Desigualdad de Hölder)

Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ($q=1$ si $p=\infty$ y $q=\infty$ si $p=\infty$).

Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver L.A. Medeiros y E.A de Mello [5]

Sean V, W dos espacios de Banach con $V \subseteq W$ como subespacio vectorial (ambos con norma probablemente diferentes), diremos que V está inmerso continuamente en W y denotaremos por $V \subseteq W$ sí y solo si $\exists C > 0$ tal que $\|\cdot\|_W > C\|\cdot\|_V$; $\forall u \in V$.

Proposición II.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $1 \leq p \leq \infty$

$$L^q(\Omega) \subseteq \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_p \leq \|u\|_q (\mathrm{med}(\Omega))^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

Demostración. Ver Adams [1]

Proposición II.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $L^p(\Omega) \subseteq \mathrm{L}^1_{Loc}(\Omega)$.

Teorema II.2: (Teorema de Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1 < p < \infty$, $\varphi \in (\mathrm{L}^p(\Omega))'$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}, \forall\, \mathrm{v} \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración. Ver Adams [1]

Teorema II.3 (Teorema de Representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

Sea $T \in \left[L^1(\Omega)\right]'$ a entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \text{ y } \|u\|_\infty = \|T\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Así $(L^1(\Omega))' \equiv L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Ver Adams [1]

Sea $v \in L^1(0,T)$ decimos que $s \in [0,T]$ en un punto de Lebesgue para v, si $h > 0$ tal que $[s-h, s+h] \subseteq]0,T[$ entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} v(\varepsilon) d\varepsilon = v(s)$$

Proposición II.6 Si $v \in L^1(0,T)$ entonces casi todos los puntos s de $[0,T]$ son puntos de Lebesgue para v.

Demostración. Ver L.A. Medeiros y E.A de Mello [6]

Definición II.4 Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}^n$. La derivada de orden α de T denotado por $D^\alpha T$ y su distribución está definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{Para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

Así mismo si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con esta definición se tiene $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$ para todo $|\alpha| \leq k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u.

Definición II.5 Decimos que $u_k \to u$ casi siempre en Ω si $u_k(t) \to u(t)$ para casi todo $t \in \Omega$

Teorema II.4 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)

Sea $(u_k)_{k\in N}$ una sucesión de funciones integrables en un abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, que converge casi siempre a la función u. Si existe una función u_0 tal que $|u_k|\leq u_0$ casi siempre para todo $k\in\mathbb{R}$ entonces u es integrable y se tiene:

$$\int_\Omega u=\lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k$$

Demostración. Ver H. Brezis [4]

2.1.4 Distribuciones

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u:\Omega\to\mathbb{R}$, una función escalar, el soporte de u es la clausura de Ω del conjunto y lo denotamos por:

$$sop(\mathrm{u})=\{x\in\Omega\,/\,u(\mathrm{x})\neq 0\}$$

Observación II.2 El soporte de u es el menor conjunto cerrado de Ω fuera del cual $u=0$ en el siguiente sentido

I. $sop(\mathrm{u})$ es cerrado en Ω y $u=0$ en $\Omega\setminus\mathrm{sop(u)}$

II. Si W es un conjunto cerrado Ω y $u=0$ en $\Omega\setminus W$ entonces el $sop(\mathrm{u})\subseteq\mathrm{W}$

Por $C_0^\infty(\Omega)$ se denotara el espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto de Ω que posean derivadas continuas de todos los órdenes en Ω.

2.1.5 Noción de Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición II.6 Sea $(\varphi_k)_{k\in N}$ una sucesión de $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ decimos que $\varphi_k\to\varphi$ si:

I. $\exists K\subset\Omega$, K compacto, tal que $Sop\varphi_k\subset K$, para todo $K\in\mathbb{R}$;

II. Para cada $\alpha\in\mathbb{R}^n, D^\alpha\phi_k(\mathrm{x})\to\mathrm{D}^\alpha\phi(\mathrm{x})$ uniformemente en $x\in\Omega$

Definición II.7 El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida anteriormente es denotada por $D(\Omega)$ y es llamado función de prueba.

Definición II.8 Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continua en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$:

$$D'(\Omega)=\{T:D(\Omega)\rightarrow\mathbb{R}\,/\,\text{T es lineal y continua}\}$$

El conjunto $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Si $T\in D'(\Omega)$ y $\varphi\in D(\Omega)$ denotaremos por $\langle T,\varphi\rangle$ al valor de T aplicado al elemento φ.

2.1.6 Noción de Convergencia en $D'(\Omega)$

Definición II.6 Diremos que $T_k\rightarrow T$ en $D'(\Omega)$ sí $\langle T_k,\varphi\rangle\rightarrow\langle T,\varphi\rangle$, para toda $\varphi\in D(\Omega)$.

2.1.7 Los Espacios L^P

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

Definición 1.6 Sea Ω un conjunto numerable y $1\leq p\leq\infty$. Indicamos por $L^P(\Omega)$ al conjunto de las funciones numerables $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\|f\|_p<\infty$ donde:

$$\|f\|_p=\left[\int_\Omega|f(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}\text{ si }\quad 1\leq p<\infty$$

y

$$\|f\|_\infty=\underset{t\in\Omega}{Sup\,ess}|f(t)|=\inf\left\{C\in\mathbb{R}^+\,/\,med\left\{t\in\Omega\,/\,|f(t)|>C\right\}=0\right\}$$

$$=\inf\{C;\quad |f|\leq C;\quad c.s\}\text{c.s = casi siempre}$$

Observación Los espacios $L^p(\Omega), 1\leq p\leq\infty$, son espacios de Banach, siendo $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert con su producto interno usual de integral.

2.1.8 Espacios $L^p_{Loc}(\Omega)$

Definición 1.7 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por $L^p_{Loc}(\Omega)$ al conjunto de las funciones medibles $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_{X_k} \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, X_K es la función característica de K.

Observación: $L^1_{Loc}(\Omega)$ es llamado el espacio de las funciones localmente integrales.

Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ consideremos el funcional $T = T_u : D(\Omega) \longrightarrow IK$ definido por:

$$< T,\varphi >=< T_u,\varphi >= \int u(x)\varphi(x)dx.$$

2.1.9 El Espacio de las Distribuciones

Se denomina Distribuciones sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(\Omega)$, es decir una Distribución es una aplicación

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

tal que:

i. $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_1) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_1); \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

ii. T es continua, esto es si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{R}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$ entonces $(\mathrm{T}(\varphi_k))_{k\in\mathbb{R}}$ converge para $(\mathrm{T}(\varphi))$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio vectorial de todas las Distribuciones sobre Ω en este espacio, una sucesión $(\mathrm{T}_k)_{k\in\mathbb{R}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ sí y solo si la sucesión $(\mathrm{T}_k(\varphi))_{k\in\mathbb{R}}$ converge para $(\mathrm{T}(\varphi))$ en $\mathbb{R}$ y para todo φ en $D(\Omega)$.

El espacio de las Distribuciones sobre Ω, con esta noción de convergencia será denotado por $D'(\Omega)$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$\begin{array}{llll} T_u: & D(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & (T_u, \varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

El valor de las Distribuciones T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ dualidad entre $D'(\Omega)$ si y solo si es lineal, continua e inyectiva en dicha recurrencia es común identificar una Distribución T_u con la función $u \in L^1_{Loc}$. En ese sentido se tiene que $L^1_{Loc} \subset D'(\Omega)$, como $L^p(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una Distribución sobre Ω esta y toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una Distribución.

Observación II.3 L^1_{Loc} es llamado el espacio de las funciones localmente integrales. Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ consideremos el funcional $T = T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Observación II.4 El valor de la Distribución T en φ se representa también por (T, φ) (Dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$).

Lema II.5 (Du Bois Reymond)

Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$ para todo $\varphi \in D'(\Omega)$ entonces $u(x) = 0$ c.s en Ω

Demostración. Ver Rivera [9]

Observamos que la aplicación

$$\begin{array}{lll} L^1_{Loc}(\Omega) & \to & D'(\Omega) \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

es lineal, continua e inyectiva (Lema II.5) en dicha recurrencia es común identificar una distribución T_u con la función $u \in L^1_{Loc}$. En ese sentido se tiene que $L^1_{Loc} \subset D'(\Omega)$.

Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{Loc}$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω esta y toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Observación II.5 Las Distribuciones T_u definidas por las funciones $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas por esta razón se identifica u con las funciones con la Distribución T_u luego $L^1_{Loc}(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$.

2.1.10 Derivada Distribucional

Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ un multi-indice se denotara como la derivada de orden α de T si la Distribución $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Esto nos indica que cada Distribución T sobre Ω tiene derivada de todos los órdenes. Asilas funciones de $L^1_{Loc}(\Omega)$ poseen derivadas de todos los órdenes en el sentido de las Distribuciones.

Así mismo si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in IN^n$ con esta definición se tiene $u \in C^k(\Omega)$ *entonces* $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$ *para todo* $|\alpha| \le k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u.

2.1.11 Resultados Básicos

En este caso reuniremos algunos resultados básicos necesarios para obtener la existencia y unicidad de soluciones para nuestros propósitos.

Definición 2.10 Decimos que $u_k \to u$ casi siempre en Ω si $u_k(t) \to u(t)$ para casi todo $t \in \Omega$.

Teorema 1.2 (Teorema de Lebesgue) Sea $(u_k)_{k\in IN}$ una sucesión de funciones integrables en un abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, que converge casi siempre a la función u. Si existe una función u_0 tal que $|u_k|\leq u_0$ casi siempre par todo $k\in\mathbb{N}$ entonces u es integrable y se tiene:

$$\int_\Omega u = \underset{k\to\infty}{Lim}\int_\Omega u_k$$

2.1.12 Distribuciones Vectoriales.

Sea V un espacio de Banach. Se denomina Distribución Vectorial sobre $[0,T]$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0,\mathrm{T})$.

Dada una Distribución T su valor en φ se representa por $\langle T,\varphi\rangle$. Al espacio de las Distribuciones Vectoriales sobre $[0,T]$, denotaremos por $D'(0,T,V)$.

Sea $u\in L^p(0,\mathrm{T},\mathrm{V});1\leq \mathrm{p}\leq\infty$ definimos

$$T_u: D(0,\mathrm{T})\to \mathrm{V}/\langle T_u,\varphi\rangle=\int_0^T u(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

Observación II.7

Se verifica que T_u es una Distribución y están definidas por funciones $u\in L^p(0,\mathrm{T},\mathrm{V})$, $\varphi\in D(0,\mathrm{T})$ .Luego $\varphi u\in L^1(0,\mathrm{T},\mathrm{V})$. T_u Es lineal y continua en $D(0,\mathrm{T})$ T_u Esta unívocamente determinado por u.

Lema II.2 Sea V un espacio de Banach,si $u\in L^1(0,\mathrm{T},\mathrm{V})$ y $\int_0^T u(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=0$ para todo φ en $D(0,\mathrm{T})$ entonces $u(\mathrm{t})=0$ c.s en $]0,T[$.

Demostración. Ver E. Zeidler [3].

2.1.13 Derivación en $D'(0,T,V)$

Dada una Distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las Distribuciones Vectoriales denotado por u' ó $\dfrac{du}{dt}$ como

$$\left\langle \frac{du}{dt},\varphi \right\rangle = -\left\langle u,\frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En general la derivada de orden n se define como

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n},\varphi \right\rangle = (1-)^n \left\langle u,\frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle, \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En particular todo elemento $u \in L^p(0,T,V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las Distribuciones Vectoriales sobre $]0,T[$.

Sea V un espacio de Banach, representaremos con $C([0,T],V)$. El espacio de las funciones ~~que son continúas~~ $[0,T]$ ~~en~~ V.

Sean V y H dos espacio de Hilbert reales con sus respectivas estructuras de Hilbert $(V,(.,.)_V,\|\ \|_V)$ y $(H,(.,.)_H,\|\ \|_H)$ se supone que $V \subseteq H$ con inmersión compacta y continua denso en $H(\overline{V}^{\|\ \|_H} = H)$.

Lema II.3 (Teman) Sea X un espacio de Banach con X', sean u, g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T,X)$. Entonces son equivalentes

1. u es c.s igual a la primitiva de g, es decir $\exists \xi \in X$ tal que

$$u(x) = \xi + \int_0^T g(s)ds, \quad \text{c.s } t \in [0,T]$$

2. Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)\,ds = \int_0^T g(s)\varphi(s)\,ds$$

3. Para todo $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}(\eta, u(t))_{X' \times X} = (\eta, g(t))_{X' \times X}$$

En el sentido Distribucional sobre $]0,T[$.

Demostración. Ver R. Temam [25]

Lema II.4 Sean V, H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso ($V \subseteq H \subseteq V'$), V' dual de V. Si $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$ entonces $u \in ([0,T];H)$ y tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2(u'(t), u(t))_{V' \times V}$$

En el sentido de las Distribuciones Vectoriales sobre $[0,T]$

Demostración. Ver R. Teman [25]

2.1.14 Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistas en las referencias Adams [1], Brezis [4], Kesevan [5], Medeiros [6], [7] y Rivera [9].

Definición II.10 Sean $m \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u. El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p; D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

2.1.15 Norma en $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y sea la expresión

$$\|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |(\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{u})(\mathrm{x})|^{p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)},\ p = \infty$$

Define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observación II.8

1. $(\mathrm{W}^{m,p}(\Omega), \|\|_{m,p})$ es un espacio de Banach.
2. Cuando $p = 2$, el espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno denotado por:

$$(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \sum_{|\alpha|\leq m} (\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{u}, \mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{v})_{L^{2}(\Omega)}\ u, v \in W^{m,2}(\Omega)$$

3. Se denota a $W^{m,2}(\Omega)$ también como $H^{m}(\Omega)$ donde:

En $H^{m}(\Omega) = \{u \in L^{2}(\Omega) / \mathrm{D}^{\alpha} u \in L^{2}(\Omega); \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$ en el sentido Distribucional $D'(\Omega)$, así:

$$H^{1}(\Omega) = \{u \in L^{2}(\Omega) / \mathrm{D}u \in L^{2}(\Omega);\ en\ D'(\Omega)\}$$

$$H^{2}(\Omega) = \{u \in L^{2}(\Omega) / \mathrm{D}^{\alpha} u \in L^{2}(\Omega); |\alpha| \leq m;\ en\ D'(\Omega)\}$$

La forma bilineal

$$((\mathrm{u},\mathrm{v})) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\mathrm{x})}{\partial x_{i}} \frac{\partial v(\mathrm{x})}{\partial x_{i}} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = (\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v})_{L^{2}(\Omega)} = (\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v})$$

Define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ e induce una norma y la denotamos por

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = ((\mathrm{u},\mathrm{v})) = (\nabla \mathrm{u}, \nabla u)_{L^2(\Omega)} = (\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{u}) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|^2$$

En el espacio $H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, definamos la forma bilineal

$$(.)_{\Delta} = H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Mediante

$$(\mathrm{u},\mathrm{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)$$

Que resulta ser un producto interno y la norma inducida es:

$$\|u\|^2_{\Delta} = (\Delta u, \Delta u)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta u) = \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\Delta u\|^2$$

2.1.16 Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{-m,p}(\Omega)$

Definición II.11 La clausura del espacio vectorial $D(\Omega)$ con la norma de $W_0^{m,p}(\Omega)$ se designa por $W_0^{m,p}(\Omega)$ es decir $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$

1. Cuando $p = 2$ se tiene $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_m}$, si $m = 1$ se tiene $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$ para Ω en las condiciones dadas se prueba que:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \mathrm{u}|_{\Gamma=\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) / \mathrm{u}|_{\Gamma} = 0\}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} = H^1(\Omega)$

2. Si $W_0^{m,p}(\Omega) = \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ es nula.
3. También se tiene que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Definición II.12 Sea $1\leq p<\infty$ y $q>1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Representa a $W^{-m,p}(\Omega)$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se representa como $H^{-m}(\Omega)$.

2.1.17 Inmersiones de Sobolev

Teorema II.6 (Teorema de Sobolev) Sean $m\geq 1$ y $1\leq p<\infty$. Entonces:

i. Si $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega), \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}$

ii. Si $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega), q\in\left[p,\infty\right\rangle$,

iii. Si $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$

Siendo todas las inmersiones continúas.

2.1.18 Espacios $L^p(0,T;V)$

Sea $0<t<\infty$ y V un espacio de Banach, una función $u:[0,T]\to V$ es llamada medible en $[0,T]$ si la función real $t\to\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}$ es medible Lebesgue en $[0,T]$ para todo $f\in V'$ donde V' es el dual topológico de V y $\langle\cdot\rangle_{V'\times V}$ denota la dualidad entre V' y V en este caso, decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u:[0,T]\to V$ es llamada integrable en el sentido de Bochner en $[0,T]$, si u es medible en $[0,T]$ y la función real $t\to\|u(t)\|_{V}$, es integrable a Lebesgue en $[0,T]$ en este caso la integral de esta función, es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt\in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad

$$\left\langle f,\int_0^T u(t)dt\right\rangle_{V'\times V}=\int_0^T\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt\ \forall f\in V$$

Si $1 \leq p < \infty$ denotaremos por $L^p(0,T,V)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u:[0,T] \to V$ y tales que $t \to \|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $[0,T]$, este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ y V es un espacio de Banach, entonces $L^2(0,T,V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)} = \int_0^T (u(t),v(t))\, dt$$

Si $p = \infty$ representamos por $L^\infty(0,T,V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:[0,T] \to V$ que son medibles y tal que el supremo esencial $(\|u(t)_V\|; t \in [0,T])$ es finito $L^\infty(0,T,V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{u \in [0,T]} ess \|u(t)\|_V$$

Proposición II.7 Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$, y entonces $L^p(0,T,V)$ es separable en el caso que V sea separable y $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ver E. Zeidler [3]

Proposición II.8 Sea V un espacio de Banach. Si la inmersión $X \subseteq Y$ es continua. Entonces $\forall, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ la inmersión $L^p(0,T,X) \subseteq L^p(0,T,Y)$ es también continua.

Demostración. Ver E. Zeidler [3]

Proposición II.9 Sea V un espacio de Banach. El espacio dual de $L^p(0,T,V)$ es isomorfo al espacio $L^p(0,T,V')$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $1 \leq p,q < \infty$

Demostración. Ver E. Zeidler [3]

Teorema II.6 (Desigualdad de Poincare)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante C, que depende de Ω tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \qquad (1.1)$$

La constante C es llamada la constante de Poincare para Ω.

Observación II.9

1. La desigualdad de Poincare también es válida si $u \in H^1(\Omega)$ y el trazo de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anula sobre alguna parte de Γ. (Ver. H. Brezis [4]).
2. La desigualdad de Poincare continua valida en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2.1.19 Consecuencias de la Desigualdad de Poincare

1. La norma de Sobolev $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma del gradiente en $L^2(\Omega)$. Donde existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$
2. La norma de Sobolev $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ es equivalente a la norma del Laplaciano en $L^2(\Omega)$ para funciones en $H_0^2(\Omega)$, esto es existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^2(\Omega)$. De esto se sigue que si $u \in H_0^2(\Omega)$ entonces se tiene que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ donde se da la desigualdad de Poincare.

2.1.20 Convergencia en $L^p(0,T,V)$

Sea V un espacio de un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{R}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{R}}$ converge fuerte en V si $\exists u \in V$ tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando en tal caso denotaremos por $u_k \to u$.

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{R}}$ converge débil en V, si existe $u\in V$ tal que $\langle f,u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f,u\rangle_{V'\times V}$; $\forall f \in V'$ con inmersión compacta y continua en este caso denotaremos por $u_k \to u$.

Observación II.10

En el caso $V = H_0^1(\Omega)$ entonces $V' = H^{-1}(\Omega)$

$$\langle G,v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (G,v);\ \forall G\in L^2(\Omega); \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' = L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

Luego

$$\int_0^T (w(t),u_k(t))\,dt \to \int_0^T (w(t),u(t))\,dt$$

Donde $(u_k)_{k\in\mathbb{R}} \subseteq L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ y $w\in L^2(0,T,L^2(\Omega))$. Sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual de la forma

$\|f\|_{V'} = \sup_{\|u\|_V} |\langle f,u\rangle|$ Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{R}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k \overset{*}{\to} u$ sí y solo si $\langle u_k, w\rangle \to \langle u,w\rangle$ para todo $w\in V$.

Así $u_k \overset{*}{\to} u$ en $L^\infty(0,T,V)$ sí y solo si $\langle f,u_k\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle f,u\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$ $\forall w\in L^1(0,T;V)$ es decir

$$\int_0^T (\mathrm{w(t)}, \mathrm{u}_k(\mathrm{t}))_{V'\times V}\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (\mathrm{w(t)}, \mathrm{u(t)})_{V'\times V}\,\mathrm{dt}; \forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};\mathrm{V})$$

Observación II.11

Si $V = L^2(\Omega)$ y $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')$ significa que

$$(\mathrm{u}_k, \mathrm{w})_{L^\infty(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')\times \mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))} \to (\mathrm{u}, \mathrm{w})_{L^\infty(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')\times \mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))}; \forall w \in L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$$

Es decir

$$\int_0^T (\mathrm{u}_k, \mathrm{w})_{(\mathrm{L}^2(\Omega))'\times \mathrm{L}^2(\Omega)} dt \to \int_0^T (\mathrm{u}, \mathrm{w})_{(\mathrm{L}^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt; \forall w \in L^1(0,\mathrm{T};L^2(\Omega))$$

Por lo tanto $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$ sí y solo si $\int_0^T (\mathrm{u}_k, \mathrm{w})\,\mathrm{dt} \to \int_0^T (\mathrm{u}, \mathrm{w})\,\mathrm{dt}$, $\forall w \in L^1(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$.

2.1.21 Topología Débil y Débil Estrella

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado V se denomina un espacio de Hilbert de V, si V es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno.

Un espacio E es separable si existe un sub conjunto $D \subseteq E$, tal que D es denso y numerable en E. Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$, siendo E' el dual topológico de E y designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(\mathrm{x}) = \langle f, x \rangle$.

La topología débil de $\sigma(\mathrm{E},\mathrm{E}')$ sobre E es una topología menos fina en E que hace continua a todas las aplicaciones $(\mathrm{T}_f)_{f\in E'}$. Dada una sucesión $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ en E, la notación de convergencia débil en general está indicada como:

$$x_n \to x \text{ Débil en } \sigma(\mathrm{E},\mathrm{E}')$$

O simplemente $x_n \to x$ débil en E.

Proposición II.11 Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, entonces:

i. $x_n \to x$ débil en $\sigma(E,E')$ sí y solo si $\langle f,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle, \forall f\in E'$

ii. $x_n \to x$ fuerte en E entonces $x_n \to x$ débil en E.

Demostración. Ver H. Brezis [4].

Sea E un espacio de Banach y E' su dual, dotado por la norma $\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|$ y" E'' el bi-dual dotado por la norma $\|\xi\|_{E''} = \sup_{f\in E'}|\langle \xi, f\rangle|$. La topología débil estrella sobre E' también denotada por $\sigma(E',E)$ es la topología menos fina sobre E' que hace continua a todas las aplicaciones $(T_x)_{x\in E}$ siendo $T_x : E' \to \mathbb{R}$ definida como: $T_x(f) = \langle f,x\rangle$, $\forall f\in E'$.

Dada una sucesión (f_n) y f en E', la notación de convergencia débil estrella (débil $*$) en general es indicada como:

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E',E)$$

O simplemente $f_n \to f$ débil $*$ en $\sigma(E',E)$ o $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$.

Proposición II.12 Sea E un espacio de Banach y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E' entonces se tiene:

i. $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$ sí y solo si $\langle f_n,x\rangle \to \langle f,x\rangle, \forall x\in E$;

ii. $f_n \to f$ fuerte en E' entonces $f_n \to f$ para $\sigma(E',E'')$.

iii. $f_n \to f$ débil en $\sigma(E',E)$ entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$;

iv. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y $\|f\| \leq Lim\inf\|f_n\|$;

v. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, y si $x_n \to x$ fuerte en E entonces $\langle f_n,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle$

Demostración. Ver H. Brezis [4]

Lema II.6 Sean $X;Y;Z$ espacios de Banach tal que $X \subset Y \subseteq Z$ con inmersiones continuas y la inmersión $X \subset Y$, sea.

$W = \{u \in L^p(0,T;X) \; ; \; u' \in L^p(0,T;Y)\}$

Donde u' denota la derivada generalizada de $u:[0,T] \to X$ sobre $(0,T)$, Entonces

(i) Si $p = \infty$, $q > 1$ entonces $W \subseteq ([0,T];\, Z)$ es compacta

(ii) Si $1 \leq p < \infty$, $q = 1$ entonces $W \subseteq ([0,T];\, Y)$ es compacta

Demostración: Ver J. Simons [26]

2.1.22 Desigualdad de Gronwall

Sean f, g y φ funciones positivas que satisfacen:

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \; \forall t \in [0,T]$$

Entonces se tiene que

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s) g(s) e^{\int_s^t f(r)dr} ds, \; \forall t \in [0,T]$$

Un resultado muy importante es respecto a los espacios $L^p(0,T;H)$, que permiten identificar $(L^p(0,T;H))' \approx L^{p'}(0,T;H')$. Para el caso en que $p = 1$ se identifica $(L^p(0,T;H))' \approx L^\infty(0,T;H')$. Analicemos ahora el caso en que $p = 1$ y $H = L^2(\Omega)$, para esto se define:

$$F : L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \to (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'$$

$$u \to F(u)$$

donde:

$F(\mathrm{u}):\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')\to\mathbb{R}$

$$\xi\to\langle F(\mathrm{u}),\xi\rangle=\int_0^t\langle\xi(\mathrm{t}),\mathrm{u}(\mathrm{t})\rangle_{(\mathrm{L}^2(\Omega))'\times\mathrm{L}^2(\Omega)}\,dt$$

F es lineal continua y biyectiva, de este modo habremos identificado:

$$L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))\approx(\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))'))',$$

Donde sus elementos de $L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$ pueden ser vistos como elementos del dual de $L^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')$. Entonces cuando decimos que:

$$u_m\ \xrightarrow{\ *\ }\ u \text{ en } L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega)),$$

Tenemos que:

$$\langle u_m,\xi\rangle\to\langle u,\xi\rangle_{(\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')'\times\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')},\ \forall\xi\in L^1(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')$$

lo que significa también que:

$$\int_0^T\langle\xi(\mathrm{t}),\mathrm{u}_m(\mathrm{t})\rangle_{(\mathrm{L}^2(\Omega))'\times\mathrm{L}^2(\Omega)}dt\to\int_0^T\langle\xi(\mathrm{t}),\mathrm{u}(\mathrm{t})\rangle_{(\mathrm{L}^2(\Omega))'\times\mathrm{L}^2(\Omega)}\,dt\ ,\ \forall\xi\in L^2(0,\mathrm{T};(\mathrm{L}^2(\Omega))')$$

La siguiente proposición relaciona la convergencia débil estrella antes mencionada con la convergencia débil.

Proposición II.14 Sea $u_m\overset{*}{\to}u$ en $L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$, entonces $u_m\overset{*}{\to}u$ en $L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{L}^2(\Omega))$.

Teorema 1.3 (de Divergencia y Formula de Green)

Los siguientes resultados son válidos:

I. $\int_\Omega(\nabla.F)(x)dx=\int_{\partial\Omega}F(x).\eta(x)d\Gamma\ ,\qquad F\in[H^1(\Omega)]^n$

II. $\int_{\Omega} v\Delta u dx = -\int_{\Omega} \nabla v.\nabla u\, dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega) \quad y \quad u \in H^2(\Omega)$

III. $\int_{\Omega} v.\Delta u\, dx = \int_{\Omega} (\Delta v).u\, dx, \qquad v \in H_0^2(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$

Donde Ω es un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^2 y $\eta(x)$ es denotada como la normal exterior unitaria en el punto $x \in \partial\Omega$.

Definición II.14

Iteración, es un método tal que dada $T: X \to X$ una aplicación, elegimos un punto arbitrario x_0 en X y determinamos sucesivamente $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la forma $x_{n+1} = Tx_n$; con $n = 0,1,2,..$ es decir

$x_1 = Tx_0$; $x_2 = Tx_1$;..........; $x_{n+1} = Tx_n$

Los procedimientos de iteración son usados a menudo en muchas ramas de la matemática aplicada, y las pruebas de convergencia y de estimaciones de error son comúnmente obtenidas aplicando el T.P.F.B.

Teorema II.8 (Teorema del Punto Fijo de Banach (T.P.F.B.))

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico completo. Supongamos que $T: X \to X$ es una contracción en X. Entonces

i) Existe un único $\bar{x} \in X$ punto fijo de T

ii) Cualquiera sea $x_0 \in X$, la sucesión iterada $x_n = Tx_{n-1}$ con $n = 1,2,\ldots\ldots$ converge a x

Demostración; Ver J.L Loayza Cerrón [22]

2.1.23 Resultados de la Teoría Espectral

A continuación seguimos con la demostración de la teoría espectral, que es esencial para la obtención del problema aproximado. Que consiste en proyectar el problema 2.1 de dimensión finita.

Sean V y H dos espacios de Hilbert completos, cuyos productos internos y normas serán denotados por $(.)_V, \|.\|_V$ y $(.)_H, \|.\|_H$ respectivamente, supongamos que:

1. V es denso en H;
2. $V \subset H$ con inmersión compacta;
3. Está definida una forma sesquilineal y continua $a(u,v)$ en $V \times V$;
4. Existen α_0 y α en $\mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, tal que:

$$\operatorname{Re}\left[a(v,v)+\alpha_0(v,v)\right] \geq \alpha\|v\|_V^2, \forall v \in V;$$

5. $a(u,v)$ es hermitiana;
6. A es denotado como el operador definido por la terna $(V,H;a(u,v))$.

Teorema II.7 (Teorema Espectral) *Con las hipótesis anteriores obtenemos que:*

i. A es auto – adjunto y existe un sistema ortonormal y completo $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ los w_i forman una colección numerable de H constituido por los vectores propios de A.

ii. Si $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son los valores propios o autovalores de A correspondientes a la sucesión $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces:

$0<\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots$ y $\lambda_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$

iii. El dominio de A esta dado por:

$$D(A)=\left\{u \in H; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |(u,w_i)|^{\infty} < \infty\right\}$$

iv. $Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u,w_i) w_i$.

Para obtener la solución del problema aproximado, el cual será utilizado en el capítulo siguiente para resolver el problema en cuestión, necesitaremos dos resultados a seguir.

Teorema II.8 Prolongamiento de Soluciones para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^n$ y sea $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t,Y(t)) \\ Y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{(i)}$$

Se dice que $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre D si:

i. $F(t,Y)$ es medible en t para cada x fijo;

ii. $F(t,Y)$ es continua en x para casi todo t fijo

iii. Para cada compacto $K \subset D$, existe una función real m_K(t) integrable tal que:

$$|F(t,Y)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t);\ \forall (t,x) \in K$$

Teorema II.9 (Teorema de Caratheodory) Sea $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre D. Entonces existe una solución de (i) en x(t) sobre algún intervalo $|t-t_0|_{\mathbb{R}^n} \leq \beta$, $(\beta > 0)$

Lema II.9 Sea $D = [0,T) \times B$ con $T > 0$ y $B = \{Y \in \mathbb{R}^n; |Y| \leq b\}$, $b > 0$. Sea $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple con las condiciones de Caratheodory sobre D. Supongamos que $Y(t)$ es una solución de (i) tal que $|Y_0| \leq b$ en cualquier intervalo I, donde $Y(t)$ está definida, se tendrá $|Y(t)| \leq M, \forall t \in I$, M independiente de I y $M < b$ entonces Y posee un prolongamiento en $[0,T]$.

2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

2.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado con frontera Γ bien regular y $T > 0$. En $Q = \Omega \times \left]0,\infty\right[$ consideraremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u''(x,t)-M(\|\nabla u(x,t)\|^2,\|u'(x,t)\|^2)\Delta u(x,t)=f(x,t) & \text{en} \quad Q=\Omega\times]0,T[\\ u(x,0)=0 & \text{sobre} \quad \sum=\Gamma\times]0,T[\ (1) \\ u(x,0)=u_0(x) \ ; \ u'(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

$u_0 \neq 0 : u_0 \in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.Donde la función no – lineal $M(s,r)$es no negativa de claseC^1 en las dos variables.

Preliminares

Sean $(V,a(u,v)),(H,(u,v))$ espacios de Hilbert, $V\subset H$, la inmersión de V en H es densa y compacta. Sea también A , el operador definido por la terna $\{V,H,a(u,v)\}$. Entonces, $D(A)$ es un subespacio denso en H; A es un operador no acotado autoadjunto y positivo de H, con espectro discreto;

$$Aw_v=\lambda_v w_v \quad ; \quad 0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq...\leq\lambda_v\leq... \quad ; \quad \lambda_v \xrightarrow{v\to\infty} \infty$$

$\{w_v\}_{v\geq 1}$ es un sistema ortonormal completo de H de modo que

$$D(A)=\left\{u\in H;\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^2|(u,w_v)|^2<\infty\right\}$$

$$Au=\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v(u,w_v)w_v; \quad \forall u\in D(A)$$

Asimismo, para todo $\alpha>0$,el operador $A^{\frac{1}{2}}$ está bien definido por

$$D(A^{\frac{1}{2}})=\left\{u\in H;\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v|(u,w_v)|^2<\infty\right\}$$

$$A^{\frac{1}{2}}u=\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\frac{1}{2}}(u,w_v)w_v;\forall u\in D(A^{\frac{1}{2}})$$

$$|u|_{\frac{1}{2}}^2 = \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |(u, w_v)|^2$$

Usaremos el método de Faedo – Galerkin para demostrar la existencia de la solución del problema de Cauchy asociado a (1).

La Unicidad de la solución será demostrada utilizando la técnica de contradicción con el auxilio de la desigualdad de Gronwall.

Para alcanzar los objetivos mencionados anteriormente, dividimos este trabajo en las siguientes etapas:

I. Estudiar la existencia local a través del método de Faedo – Galerkin
II. Obtener estimativas a priori y prolongamiento de la solución (solución local).
III. Demostración de la unicidad de la solución.

Donde las funciones M, f, u_0 y u_1 verifican las siguientes hipótesis

Hipótesis

H - 1 $M \in C^1([0,T_0]\times[0,T_0];\mathbb{R}^+)$, donde T_0 es un número real positivo.

H – 2 Si $s_1 \le s_2$, $r_1 \le r_2$, entonces $M(s_1,r_1) \le M(s_2,r_2)$

H – 3 $M(0,0)=0$, si $s>0$ entonces $M(s,r)>0$; $\forall r \ge 0$

H- 4 $f \in L^\infty(0,T_0,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)); f' \in L^\infty(0,T_0,L^2(\Omega))$

H-5 $0 \ne u_0 \in D(\Delta^2)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$

Definición de II.15 Sean las siguientes constantes:

C-1 $\|v(t)\| \le d_0 \|\nabla v(t)\| \le d_1 \|\Delta v(t)\| \le d_2 \left\|\Delta^{3/2} v(t)\right\| \le d_3 \left\|\Delta^2 v(t)\right\|$; $\dfrac{d_i}{d_j} = d_{ij} > 0$; $\forall i, j = 0,1,2,3$

C-2 $2M_1 d_{20} d_{10} + 2M_2 d_1 k^2 = b^*$

C-3 $a_1 = M(d_{20}^2 k^2, d_1^2 k^2)$

C-4 Desde que por continuidad $a_1 = M(s,r) \to 0$ si $(s,r) \to 0$ podemos elegir un k suficientemente pequeño tal que

$$a_1^2 \le \frac{d_1^2}{6}$$

Para k seleccionado de esta forma consideramos:

C-6 $M_1 = \max\{M_s(s,r)\}$; $0 \le s \le d_{20}^2 k^2$; $0 \le r \le d_1^2 k^2$

C-7 $M_1 = \max\{M_r(s,r)\}$; $0 \le s \le d_{20}^2 k^2$; $0 \le r \le d_1^2 k^2$

Para datos iniciales $u_0 \ne 0; u_1$ y f convenientes consideramos

C-8 $\alpha \|\Delta u'(0)\|^2 + \beta \|\Delta f(t)\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} + \gamma a_1 \|\Delta^2 u(0)\|^2 = C_1$;

Donde $\alpha, \beta = \max\{d_1^2, d_{10}^2, 1\}$; $\gamma = \max\{d_{31}^2, d_{21}^2, d_{32}^2\}$

Por la H-3, podemos definir

C-9 Si $m_0 > 0$ tal que $m_0 = M(\frac{\|\nabla u_0\|^2}{4}, 0)$; $C_0 = \max(1, \frac{2b^* k^2}{m_0})$.

C-10 $d^* = \dfrac{\max\{d_{10}^2, d_{21}\}}{\min\{1, m_0\}}$

C-11 $T^* = \dfrac{\|\nabla u_0\|}{2d_0 k}$

C-12 $T_0 = \min\left\{T^*, \dfrac{1}{b^* k^2}\right\}$

Definición II.16 Consideremos el siguiente conjunto

$$G=\Big\{v\in L^{\infty}(0,T;D(\Delta^{3/2}))\,/\,v'\in L^{\infty}(0,\mathrm{T};D(\Delta));v''\in L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega))$$

$$\left.v(0)=u_0\neq 0;\ v'(0)=u_1;\|v''(t)\|^2+\|\Delta v'(t)\|^2+\left\|\Delta^{3/2}v\right\|^2\leq k^2;\ \forall t\in\left[0,T_0\right]\right\}\quad(2.1)$$

LEMA II .10. Si $v\in G$ y $\psi(t)=M\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)$entonces

a) $0<m_0\leq\psi(t)$; $\forall t\in\left[0,T^{*}\right]$

b) $|\psi'(t)|\leq b^{*}k^2$

Demostración: sea $v\in G$, entonces

$$\big|\|\nabla v(t)\|-\|\nabla v(0)\|\big|\leq\|\nabla v(t)-\nabla v(0)\|=\left\|\int_0^t\nabla v'(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\right\|\leq\int_0^t\|\nabla v'(\mathrm{s})\|ds\leq C\|\Delta v'(s)\|\leq d_0tk$$

$$\big|\,\|\nabla v(t)\|-\|\nabla v(0)\|\,\big|=\big|\,\|\nabla v(0)\|-\|\nabla v(t)\|\,\big|\leq d_0tk$$

De esta desigualdad obtenemos

$$\|\nabla v_0\|-d_0tk=\|\nabla v(0)\|-d_0tk\leq\|\nabla v(\mathrm{t})\|$$

Luego;

$$0<\frac{\|\nabla v_0\|}{2}=\|\nabla v_0\|-\frac{\|\nabla v_0\|}{2}\leq\|\nabla v_0\|-d_0T_1^{*}k\leq\|\nabla v_0\|-d_0tk\leq\|\nabla v(\mathrm{t})\|\ ;\ \forall t\in\left[0,T^{*}\right]$$

$$\|\nabla v(\mathrm{t})\|^2\geq\frac{\|\nabla v_0\|^2}{4}$$

Luego por Hipótesis

$$\psi(t)=M\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\geq M\left(\frac{\|\nabla v_0\|^2}{4},0\right)=m_0>0$$

Lo que demuestra (a).

Debemos obtener ahora estimativas para $\psi'(t)$. Tenemos que:

$$\psi'(t)=2M_r\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)(\nabla v(t),\nabla v'(t))+2M_s\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)(v'(t),v''(t))$$

Donde M_r y M_s representan las derivadas parciales con respecto a las variables s y r entonces:

$$\begin{aligned}|\psi'(t)|\le&\left|M_r\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)(\nabla v(t),\nabla v'(t))\right|+\left|M_s\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)(v'(t),v''(t))\right|\le\\ \le&\left|M_r\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\|\nabla v(t)\|\|\nabla v'(t)\|+\left|M_s\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\|v'(t)\|\|v''(t))\|\le\\ \le& sup\left|M_r\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\|\nabla v(t)\|\|\nabla v'(t)\|+sup\left|M_s\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\|v'(t)\|\|v''(t))\|\le\\ \le& sup\left|M_r\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\left\|\Delta^{3/2}v(t)\right\|\|\Delta v'(t)\|+sup\left|M_s\left(\|\nabla v(t)\|^2,\|v'(t)\|^2\right)\right|\|\Delta v'(t)\|\|v''(t))\|\end{aligned}$$

luego por la definición II.15 (de constantes)

$$|\psi'(t)|\le 2M_1d_{20}d_{10}+2M_2d_1k^2=b^*k^2$$

lo que demuestra (b)

2.2.2 PROBLEMA LINEAL.

Sea entonces $v\in G$. Nos planteamos resolver el problema siguiente:

$$\begin{aligned}&u''-M(\|\nabla u\|^2,\|u'\|^2)\Delta u=f(t)\\ &u(0)=u_0\ ;\ u'(0)=u_1\end{aligned}\qquad(2.2)$$

Teorema II.12 (Existencia Local)

Sean, $0\ne u_0\in D(\Delta^2)$ y $u_1\in D(\Delta^{3/2})$ además $f\in L^\infty(0,T_0;D(\Delta^{3/2}),\ f'\in L^\infty(0,T_0\in D(\Delta))$. Que satisfacen las siguientes condiciones:

$$C_1\le k^2C_2$$

donde

$$C_2 = \min\left\{\frac{1}{3d^* e}, \frac{1}{6d_1^2 d_2^2 c_4^2}\right\}$$

Entonces para todo $v \in G$, existe una única solución $u \in G$ del problema (2.2) tal que:

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

$$(u''(t),w) + M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)(-\Delta u(t), w) = (f(t),w), \quad \forall w \in L^2(0,T_0;D(\Delta^{3/2}))$$

2.2.3 Formulación Variacional

Para estudiar la existencia de la solución del problema (2.2), se considerara el siguiente problema variacional asociada al problema (2.2), definido sobre $V = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Determinar que para $u = u(x,t)$ tal que para todo $v \in V$ se tiene:

$$\begin{cases} (u'',v) + M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)(\nabla u, \nabla v) = (f(t),v) & ; t > 0 \\ u(0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u'(0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Donde para una clase de funciones u, u_t y u_{tt} se cumple que:

$$\begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \tag{2.4}$$

Entonces u es llamada solución fuerte del sistema (2.3).

2.3 Método de Faedo - Galerkin

2.3.1 Soluciones Aproximadas (Solución Local)

En el presente capitulo utilizaremos el Teorema Espectral para proyectar el problema en estudio a espacios de dimensión finita, obteniendo un problema más simple que tendrá solución garantizada por el teorema de Carathedory.

El teorema espectral para operadores autoadjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal completo $(w_j)_{j\in IN}$ en $L^2(\Omega)$ constituidas por las auto-funciones del operador $-\Delta$, que son soluciones del problema de Dirichlet:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j \\ w_j|\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Donde $(\lambda_j)_{j\in IN}$ son los correspondientes autovalores de $-\Delta$, siendo,

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots\ldots \le \lambda_j \le \ldots\ldots \quad y \quad \lambda_j \to \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

también se sigue que:

$\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j\in IN}$ Es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)$

$\left(\dfrac{w_j}{\lambda_j}\right)_{j\in IN}$ Es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Para cada m denotamos por $V_m = [w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m]$ al espacio generado por las m primeras autofunciones del sistema $(w_j)_{j\in IN}$, queremos encontrar una función u_m tal que:

$$\begin{array}{l} u_m : (0,t_m) \longrightarrow V_m \\ \quad t \quad \longrightarrow \quad u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \end{array} \quad (2.6)$$

Donde las funciones g_{im} son funciones reales definidas en algún intervalo $[0,t_m]$ y que satisface las condiciones iníciales del siguiente problema aproximado:

$$\left|\begin{array}{l}(u''_m(t),w_j)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2,\|u'_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla w_j)=(f(t),w_j),\ \forall w_j\in V_m\\ u_m(0)=u_{om}\to u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\text{ cuando } m\to\infty\\ u'_m(t)=u_{1m}\to u_1\in H_0^1(\Omega)\text{ cuando } m\to\infty\end{array}\right. \quad (2.7)$$

para $1\leq j\leq m$.

Este sistema tiene solución sobre $[0,T_m]$ por medio del teorema de Caratheodory.

En efecto:

$$(u''_m(t),w_j)=(\sum_{i=1}^{m}g''_{im}(t)w_i,w_j)=\sum_{i=1}^{m}g''_{im}(t)(w_i,w_j)=g''_{jm}(t)\,(2.8)$$

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2,\|u'\|^2)(-\Delta u_m(t),w_j)=M\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{im}^2(t),\sum_{i=1}^{m}g'_{im}(t)\right)(-\Delta(\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i),w_i)\,(2.9)$$

donde: $r_m(t)=M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m\|^2)$ es continua en $C[0,T]$

I. $(-\Delta u'_m(t),w_j)=(-\Delta(\sum_{i=1}^{m}g'_{im}w_i),w_j)=\lambda_i g'_{im}(t)$, $1\leq j\leq m$, $\forall j=1,2,\ldots\ldots,m$.(2.10)

entonces la ecuación (2.7) se convierte en:

$$g''_{jm}(t)+r_m(t)\lambda_j g_{jm}(t)=G_j(t)\,(2.11)$$

Donde $G_j(t)=(f(t),w_j)$; $\forall j=1,2,\ldots\ldots,m$

Y como u_{0m} y $u_{1m}\in V_m$, tal que $u_{om}\to u_0$ converge en V y $u_{1m}\to u_1$ converge fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Como $(w_j)_{j\in IN}$ es una base de V y de $H_0^1(\Omega)$, entonces se puede escribir:

$$u_0(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i w_i(x),\qquad u_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}d_i w_i(x)\,(2.12)$$

Y por lo tanto es fácil deducir que

$$u_{0m}(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i w_i(x), \qquad u_{1m}(x)=\sum_{i=1}^{m}d_i w_i(x) \quad (2.13)$$

también concluimos que:

$$g_{jm}(t)=c_j \quad y \quad g'_{jm}(t)=d_j \quad (2.14)$$

De (2.13) y (2.14) tenemos $\forall j=1,2,......,m$

$$g''_{jm}(t)+r_m(t)\lambda_j g_{jm}(t)=G_j(t) \quad (2.15)$$

$g_{jm}(t)=c_j \quad y \quad g'_{jm}(t)=d_j,\ j=1,2,......,m$

Ahora en forma matricial, haciendo

$$Y(t)=\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ g_{mm}(t) \\ g'_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \qquad (2.16)$$

Se tiene

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ g''_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ -r_m(t)\lambda_1 g_{1m}+G_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -r_m(t)\lambda_m g_{mm}+G_m(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \qquad (2.17)$$

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_m(t)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -r_m(t) g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_m(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \qquad (2.18)$$

entonces:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} \cdot Y(t)+R(t)+G(t)=F(t,Y) \qquad (2.19)$$

0 = matriz nula $m\times m$, I = matriz identidad $m\times m$ y $Y=Y(t)$ = matriz $2m\times 1$

además;

$$r_m(t) = r(\vec{g}_m(t))$$
$$\vec{g}_m(t) = (g_{1m}(t), \ldots\ldots\ldots, g_{mm}(t)),\ y\ \ \vec{g}'_m(t) = (g_{1m}(t), \ldots\ldots\ldots, g_{mm}(t))$$

$$R(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_m(t)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ -r_m(t)\lambda_m g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \quad ; \quad G(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ G_m(t)) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = Y_0 \qquad (2.20)$$

así tenemos el siguiente sistema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Y'(\mathrm{t}) = F(t, Y) \\ \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \qquad (2.21)$$

Ahora mostraremos que (2.21) satisface las condiciones del teorema II.9 (Teorema de Caratheodory)

Entonces si $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}^{2m}$ tal que:

$D=[0,T]\times B,\ T$ finito $>0,\ B=\{Y\in\mathbb{R}^{2m},|Y|\leq b\},\ b>0,\ Y_0\in B$

Probemos que:

a. $F(t,Y)$ es medible en t para cada Y fijo.

Si fijamos Y tendremos $-r_m(t)\lambda_j g_{jm}(t)$ es medible en $[0,T]$ pues $r_m(t)$ es continua

, entonces $F(t,Y)$ es medible.

b. $F(t,Y)$ es continua en Y para cada t fijo.
c. Si t es fijado, entonces el vector F es continua en Y.

Prueba:

Sea $u_m=\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j$, depende solo de $g_{jm}(t)$ y para cada $u\in D$ compacto existe una función real integrable $m_v(t)$ tal que:

$$|F(t,Y)|\leq m_v(t)$$

En efecto

1. Como r_m es continúa entonces existe una constante K tal que

$$|r_m(t)|\leq K;\quad \text{donde}\quad K=\max_{t\in[0,T]}\{r_m(t)\}$$

2. Probemos que los G_j son continúas para todo $j=1,2,...,m$. Entonces existen constantes, además K_j donde $j=1,2,.......,m$, respectivamente tal que:

$$|G_j(t)|\leq\hat{K}$$

Prueba:

Con relación a G_j se tiene que:

$|G_j(\mathrm{t})|=|(f(t),w_j)|\leq|f(t)||w_j|\leq k|w_j|\leq K_j\leq\hat{K};$

donde $\hat{K} = \max\{K_j\}$; $\forall j = 1,2,...,m$

3. $|Y|^2 = |g_{1m}(t)|^2 + |g_{2m}(t)|^2 + ... + |g_{mm}(t)|^2 + |g'_{1m}(t)|^2 + |g'_{2m}(t)|^2 + ... + |g'_{mm}(t)|^2$

4. $\widetilde{\lambda} = \{\lambda_j\ ;\ 1 \leq j \leq m\}$

5. $Y \in B,\ \ |g_{jn}(t)| \leq b;\ |g'_{jm}(t)| \leq b \quad 1 \leq j \leq m$

Luego de (1), (2) y (3) se tiene

$$|G| \leq \sum_{j=1}^{m} |(f(t), w_j)| \leq |f(t)| \sum_{j=1}^{m} |w_j| \leq m\hat{K} \ (2.22)$$

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{m} |-r_m(t)\lambda_j g_{jm}(t)| \leq K\tilde{\lambda}b = L \ (2.23)$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \leq |I| \leq m \ (2.24)$$

luego de (2.19) se tiene

$$|F(t,Y)| = \left|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} \cdot Y(t) + R(t) + G(t)\right| \leq \left|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m}\right| |Y(t)| + |R(t)| + |G(t)|$$

$$\leq \left|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m}\right| |Y(t)| + |R(t)| + |G(t)|$$

En conclusión remplazando de (2.22), (2.23) y (2.24) se concluye

$$|F(t,Y)| \leq mb + L + m\hat{K} = m_v(t)$$

Siendo $m_v(t)$ una función real integrable pues b, L y $\hat{K}$ son funciones integrables $\forall t \geq 0$, entonces concluimos que (2.21) satisface las condiciones de Caratheodory.

Así tenemos que existe y una solución definida en $[0,T_m[$, $0<t_m<T$ y por lo tanto u_m es solución del problema aproximado en el intervalo $[0,T_m[$. Para extender esta solución al intervalo $[0,T]$ tomaremos las estimativas a priori que se mostrara a continuación.

2.3.2 Acotación de la Sucesión (u_m)
Estimativas a priori:

ESTIMATIVA 1.

Multiplicando a (2.7) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene:

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}w_j)+M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}w_j)=(f(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}w_j)\ (2.25)$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),u'_m(t))=(f(t),u'_m(t))\ (2.26)$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))=(f(t),u'_m(t))\ (2,27)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2=(f(t),u'_m(t))\ (2.28)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\right\}=2(f(t),u'_m(t))+2\psi'(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\ (2.29)$$

usando Cauchy-Schwats en (2.29) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\right\}\leq\|f(t)\|^2+\|u'_m(t)\|^2+2|\psi'(t)|\|\nabla u_m(t)\|^2\ (2.30)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\right\}\leq d_1^2\|\Delta f(t)\|^2+\|u'_m(t)\|^2+2|\psi'(t)|\|\nabla u_m(t)\|^2$$

Integrando (2.30) de *0 a t*

$$\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\leq d_1^2\int_0^T\|\Delta f(t)\|^2\,dt+\int_0^t(\|u'_m(t)\|^2+2b^*k^2\|\nabla u_m(t)\|^2)dt$$

$$+\|u'_m(0)\|^2+\psi(0)\|\nabla u_m(0)\|^2\ (2.31)$$

$$\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\leq d_1^2\int_0^t\|\Delta f(t)\|^2\,dt+\max(1,\frac{2b^*k^2}{m_0})\int_0^t(\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2)dt$$

$$+d_1^2\|\Delta u'_m(0)\|^2+\psi(0)d_{20}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2$$

$$d_1^2\|\Delta u'_m(0)\|^2+d_1^2\int_0^t\|\Delta f(t)\|^2dt+\psi(0)d_{20}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2\leq C_1$$

$$\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2\leq\|u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\nabla u_m(t)\|^2\leq C_1+C_0\int_0^t(\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2)dt$$

$$\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2\leq C_1+C_0\int_0^t(\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2)dt\ (2.32)$$

Por el Lema de Gronwall

$$\|u'_m(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2\leq C_1e^{C_0t}\ (2.33)$$

$$\left.\begin{array}{l}(u_m)\text{ esta acotada en }L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\\(u'_m)\text{ esta acotada en }L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\end{array}\right.(2.34)$$

ESTIMATIVA 2.

Multiplicando a (2.7) por $-\Delta g'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene lo siguiente:

$$(u''_m(t),-\Delta\sum_{j=1}^m g'_{jm}w_j)+M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),-\Delta\sum_{i=1}^m g'_{jm}w_j)$$

$$=(f(t),-\Delta\sum_{i=1}^m g'_{jm}w_j)\ (2.35)$$

$$(u''_m(t),-\Delta u'_m(t))+M(\|\nabla v_m(t)\|^2,\|v'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),-\Delta u'_m(t))=(f(t),-\Delta u'_m(t))\ (2.36)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\Delta u_m(t)\|^2\right\}=(\nabla f(t),\nabla u'_m(t))+\psi'(t)\|\Delta u_m(t)\|^2 \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\Delta u_m(t)\|^2\right\}=\|\nabla f(t)\|^2+\|\nabla u'_m(t)\|^2+2\psi'(t)\|\Delta u_m(t)\|^2$$

Integrando (2.37) por el lema 1 y procediendo como en la estimativa 1 obtenemos

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\Delta u_m(t)\|^2\le\int_0^t\|\nabla f(t)\|^2dt+\int_0^t(\|\nabla u'_m(t)\|^2+2b^*k^2\|\Delta u_m(t)\|^2)dt$$

$$+\|\nabla u'_m(0)\|^2+\psi(0)\|\Delta u_m(0)\|^2 \quad (2.38)$$

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\Delta u_m(t)\|^2\le d_{10}^2\int_0^t\|\Delta f(t)\|^2\,dt+\int_0^t(\|\nabla u'_m(t)\|^2+2b^*k^2\|\Delta u_m(t)\|^2)dt$$

$$+d_{10}^2\|\Delta u'_m(0)\|^2+\psi(0)d_{21}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2$$

Sea $\qquad \varphi(t)=\|\nabla u'_m(t)\|^2+m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 \quad (2.39)$

$$\begin{aligned}\|\nabla u'_m(t)\|^2+\psi(t)\|\Delta u_m(t)\|^2\le d_{10}^2\int_0^t\|\Delta f(t)\|^2\,dt+\int_0^t(\|\nabla u'_m(t)\|^2+2b^*k^2\|\Delta u_m(t)\|^2)dt\\ +d_{10}^2\|\Delta u'_m(0)\|^2+\psi(0)d_{21}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2\end{aligned} \quad (2.40)$$

donde

$$d_{10}^2\|\Delta u'_m(0)\|^2+d_{10}^2\int_0^t\|\Delta f(t)\|^2\,dt+\psi(0)d_{21}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2\le C_1 \quad (2.41)$$

$$\varphi(t)\le C_1+C_0\int_0^t\left(\|\nabla u'_m(t)\|^2+m_0\|\Delta u_m(t)\|^2\right)dt$$

$$\varphi(t)\le C_1+C_0\int_0^t\varphi(t)dt \quad (2.42)$$

Por el Lema de Gronwall concluimos que:

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 \le C_1 e^{C_0 t} \qquad (2.43)$$

De aquí se deduce que

$$\left.\begin{array}{l}(u_m) \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H^2(\Omega)) \\ (u'_m) \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\end{array}\right. (2.44)$$

ESTIMATIVA 3.

Multiplicando a (2.7) por $\Delta^2 g'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene lo siguiente:

$$(u''_m(t), \Delta^2\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}w_j) + M(\|\nabla v_m(t)\|^2, \|v'_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \Delta^2\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}w_j)$$

$$= (f(t), \Delta^2\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}w_j)(2.45)$$

$$(\Delta u''_m(t), \Delta u'_m(t)) + M(\|\nabla v_m(t)\|^2, \|v'_m(t)\|^2)(\Delta^{3/2}u_m(t), \Delta^{3/2}u'_m(t)) = (\Delta f(t), \Delta u'_m(t))\,(2.46)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\Delta u'_m(t)\|^2 + \psi(t)\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\|^2\right\} = (\Delta f(t), \Delta u'_m(t)) + \psi'(t)\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\|^2 (2.47)$$

Integrando (2.47)de 0 a ty usando el lema 1, obtenemos

$$\|\Delta u'_m(t)\|^2 + \psi(t)\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\|^2 \le \int_0^t \|\Delta f(t)\|^2 dt + \int_0^t (\|\Delta u'_m(t)\|^2 + 2b^*k^2\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\|^2)dt$$

$$+\|\Delta u'_m(0)\|^2 + \psi(0)\left\|\Delta^{3/2}u_m(0)\right\|^2 (2.48)$$

Sea $\gamma(t) = \|\Delta u'_m(t)\|^2 + m_0\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\|^2$ luego se tiene

Donde $\|\Delta u'_m(0)\|^2 + \int_0^t \|\Delta f(t)\|^2 dt + \psi(0)\left\|\Delta^{3/2} u_m(0)\right\|^2 \leq C_1$ (2.49)

$$\gamma(t) \leq C_1 + \int_0^t (\|\Delta u'_m(t)\|^2 + 2b^* k^2 \left\|\Delta^{3/2} u_m(t)\right\|^2) dt \quad (2.50)$$

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_0 \int_0^t \gamma(t) dt \quad (2.51)$$

Por el Lema de Gronwall concluimos que:

$$\|\Delta u'_m(t)\|^2 + m_0 \left\|\Delta^{3/2} u_m(t)\right\|^2 \leq C_1 e^{C_0 t} \quad (2.52)$$

$$\left.\begin{array}{l} (u'_m) \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H^2(\Omega)) \\ (u_m) \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;D(\Delta^{3/2})) \end{array}\right. \quad (2.53)$$

ESTIMATIVA 4.

A continuación obtenemos una acotación para la sucesión (u''_m). Tenemos que la proyección ortogonal $P_m : H \longrightarrow V_m$ dado por

$$P_m(v) = \sum_{j=1}^{m} (v, w_j) w_j$$

Es un operador acotado y con norma $\|P\| = 1$; $\|P\| \leq 1$ y además $P_m(u) = u, \forall u \in V_m$

Haciendo $w_j = \Delta^{1/2} w_j$ en la ecuación aproximada y multiplicando por el vector w_j luego sumando desde $j = 1$ hasta $j = m$, obtenemos.

$$\sum_{j=1}^{m} (\Delta^{1/2} u''_m(t), w_j) w_j + \psi(t) \sum_{j=1}^{m} (\Delta^{3/2} u_m(t), w_j) w_j = \sum_{j=1}^{m} (\Delta^{1/2} f(t), w_j) w_j \quad (2.54)$$

Ahora para cada término se tiene:

$$\sum_{j=1}^{m}(\Delta^{1/2}u_m''(t),w_j)w_j = P_m\Delta^{1/2}u_m''(t) = \Delta^{1/2}u_m''(t) \quad (2.55)$$

$$\sum_{j=1}^{m}(\Delta^{3/2}u_m(t),w_j)w_j = P_m\Delta^{3/2}u_m(t) = \Delta^{3/2}u_m(t) \quad (2.56)$$

$$\sum_{j=1}^{m}(\Delta^{1/2}f(t),w_j)w_j = P_m\Delta^{1/2}f(t) \quad (2.57)$$

Luego se tiene

$$\Delta^{1/2}u_m''(t) = -\psi(t)\Delta^{3/2}u_m(t) + P_m\Delta^{1/2}f(t) \quad (2.58)$$

$$\|\nabla u_m''(t)\| \le |\psi(t)|\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\| + \|P_m\nabla f(t)\| \quad (2.59)$$

$$\|\nabla u_m''(t)\| \le a_1k + d_{10}\|\Delta f(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \quad (2.60)$$

$$\|\nabla u_m''(t)\|^2 \le 2\left(a_1^2k^2 + d_{10}^2\|\Delta f(t)\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))}\right) \le 2\left(\frac{d_1^2k^2}{6} + d_{10}^2\|\Delta f(t)\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))}\right) \quad (2.61)$$

$$\|\nabla u_m''(t)\|^2 \le 2\left(\frac{d_1^2k^2}{6} + C_1\right) \quad (2.62)$$

entonces

$$(u_m'') \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \quad (2.63)$$

ESTIMATIVA 5

Derivando el problema aproximado tenemos:

$$(u'''_m(t), w_j) + \psi(t)(-\Delta u'_m(t), w_j) + \psi'(t)(-\Delta u_m(t), w_j) = (f'(t), w_j) \quad (2.64)$$

$$(u'''_m(t), u''_m(t)) + \psi(t)(-\Delta u'_m(t), u''_m(t)) + \psi'(t)(-\Delta u_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t)) \quad (2.65)$$

Luego multiplicando por w_j y sumando desde $j = 1$ hasta $j = m$

$$\sum_{j=1}^{m}(u'''_m(t), w_j)w_j + \psi(t)\sum_{j=1}^{m}(-\Delta u'_m(t), w_j)w_j + \psi'(t)\sum_{j=1}^{m}(-\Delta u_m(t), w_j)w_j = \sum_{j=1}^{m}(f'(t), w_j)w_j \quad (2.66)$$

Analizando cada termino

$$\sum_{j=1}^{m}(u'''_m(t), w_j)w_j = P_m u'''_m(t) = u'''_m(t) \quad (2.67)$$

$$\psi(t)\sum_{j=1}^{m}(-\Delta u'_m(t), w_j)w_j = P_m(-\Delta u'_m(t)) = -\Delta u'_m(t) \quad (2.68)$$

$$\psi'(t)\sum_{j=1}^{m}(-\Delta u_m(t), w_j)w_j = P_m(-\Delta u_m(t)) = -\Delta u_m(t) \quad (2.69)$$

$$\sum_{j=1}^{m}(f'(t), w_j)w_j = P_m(f'(t)) \quad (2.70)$$

Luego

$$u'''_m(t) = \psi(t)\Delta u'_m(t) + \psi'(t)\Delta u_m(t) - P_m(f'(t)) \quad (2.71)$$

$$\|u'''_m(t)\| \le |\psi(t)|\|\Delta u'_m(t)\| + |\psi'(t)|\|\Delta u_m(t)\| + \|P_m f'(t)\| \quad (2.72)$$

$$\|u'''_m(t)\| \le a_1\|\Delta u'_m(t)\| + |\psi'(t)|d_{21}\left\|\Delta^{3/2}u_m(t)\right\| + \|f'(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \quad (2.73)$$

$$\|u'''_m(t)\| \le a_1 k + b^* k^3 d_{21} + \|f'(t)\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} \quad (2.74)$$

$$\|u'''_m(t)\| \le C \quad (2.75)$$

(u_m''') esta acotada en $L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))$(2.76)

CONVERGENCIA DE LAS SOLUCIONES APROXIMADAS

De las estimativas 1,2 ,3 ,4 y 5 tenemos:

$$\begin{aligned}
&(u_m) \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;D(\Delta^{3/2})\cap(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)))\\
&(u_m') \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\\
&(u_m'') \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\\
&(u_m''') \text{ esta acotada en } L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))
\end{aligned} \qquad (2.77)$$

por las inmersiones compactas: $D(\Delta^{3/2})\subset(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\subset H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$

y de las estimativas 1, 2, 3 ,4,5 y aplicando el Lema II.6, existe una función

$u\in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ tal que:

$u_m \to u$ fuerte en $C(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$

$u_m' \to u'$ fuerte en $C(0,T_0;H_0^1(\Omega))$(2.78)

$u_m'' \to u''$ fuerte en $C(0,T_0;L^2(\Omega))$

Ahora probaremos que para números suficientemente pequeños y una conveniente constante k la solución u del problema (2.2) pertenece al conjunto G .En efecto por (2.78) tenemos.

$$\|\Delta u_m\|^2 \xrightarrow{m\to\infty} \|\Delta u\|^2 \text{ fuerte en } L^2(0,T_0)$$

$$\|\nabla u_m'\|^2 \xrightarrow{m\to\infty} \|\nabla u'\|^2 \text{ fuerte en } L^2(0,T_0)\ (2.79)$$

$$\|u_m''\|^2 \xrightarrow{m\to\infty} \|u''\|^2 \text{ fuerte en } L^2(0,T_0)$$

Por otro lado

$$\|u_m''\|^2+\|\nabla u_m'\|^2+\|\Delta u_m\|^2 \le d_0^2\|\nabla u_m''\|^2+d_{10}^2\|\Delta u_m'\|^2+d_{21}^2\left\|\Delta^{3/2}u_m\right\|^2 \le (2.80)$$

$$\leq 2d_0^2\left(\frac{d_1^2k^2}{6}+C_1\right)+d_{10}^2C_1e^{C_0t}+\frac{d_{21}^2}{m_0}C_1e^{C_0t}(2.81)$$

$$\leq \frac{2d_0d_1^2k^2}{6}+2d_0^2C_1+\max\left(d_{10}^2,\frac{d_{21}}{m_0}\right)e^{C_0t}C_1\,(2.82)$$

$$\leq \frac{2d_0d_1^2k^2}{6}+2d_0^2C_1+\frac{\max\left\{d_{10}^2,d_{21}\right\}}{\min\left\{1,m_0\right\}}e^{C_0t}C_1\,(2.83)$$

$$\leq \frac{2d_0^2d_1^2k^2}{6}+2d_0^2C_1+d^*e^{C_0t}C_1\leq \frac{d_0^2d_1^2k^2}{3}+\frac{6d_0^2k^2C_2}{3}+\frac{3e^{C_0t}d^*k^2C_2}{3}(2.84)$$

$$\leq \max\left\{6d_0^2d_1^2,3e^{C_0t}d^*\right\}\frac{k^2}{3}C_2=\frac{\max\left\{6d_0^2d_1^2,3e^{C_0t}d^*\right\}k^2}{\max\left\{6d_0^2d_1^2,3e^{C_0t}d^*\right\}3}\leq k^2(2.85)$$

Entonces pasando a límite cuando $m\to\infty$ teniendo en cuenta (2.7) en (2.85)

$$\|u''\|^2+\|\nabla u'\|^2+\|\Delta u\|^2\leq k^2$$

Lo que demuestra el teorema 1

PROBLEMA NO LINEAL.

En esta parte demostraremos la existencia de la solución del problema no lineal

$$\begin{aligned} &u''-M(\|\nabla v\|^2,\|v'\|^2)\Delta u=f \\ &u(0)=u_0\ ;\ u'(0)=u_1 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Utilizando una técnica de aproximaciones sucesivas aplicado al conjunto G definido anteriormente. En las condiciones establecidas en el Teorema 1 se tiene que para todo $v\in G$ existe una única solución del problema (2.86). La idea es resolver una sucesión de problemas de la forma

$$
\begin{aligned}
&z_p'' - M(\|\nabla z_{p-1}\|^2, \|z_{p-1}'\|^2)\Delta z_p = f \\
&z_p(0) = u_0 \ ; \ z_p'(0) = u_1 \qquad\qquad (2.87) \\
&p \geq 2
\end{aligned}
$$

Donde z_2 es la única solución del problema,

$$
\begin{aligned}
&z_2'' - M(\|\nabla u_0\|^2, \|u_1'\|^2)\Delta z_2 = f \quad (2.88) \\
&z_2(0) = u_0 \ ; \ z_2'(0) = u_1
\end{aligned}
$$

De la definición TPFB sea $S : G \to G$ tal que $Sz_{p-1} = z_p$; $p \geq 3$, donde z_p es la única solución del problema (2.86).

La dificultad principal es demostrar la convergencia.

$$N(z_p)\Delta z_p \xrightarrow{m\to\infty} N(z)\Delta z \text{ en } L^2(0, \mathrm{T}_0; D(\Delta)) \ (2.89)$$

donde

$$N(z_p) = M(\|\nabla u_{p-1}\|^2, \|u_{p-1}'\|^2) \ ; \ N(z) = M(\|\nabla u\|^2, \|u'\|^2)$$

En primer lugar probaremos que:

$N(z_p) \to N(u)$ fuerte en $L^2(0, T_0)$

En efecto la sucesión $(z_p)_{p\geq 2} \subset G$ y con argumentos de compacidad similares a los utilizados en la demostración del teorema 1, obtenemos que existe una función $z \in L^\infty(0, T_0; D(\Delta^{3/2}))$ tal que

$$\|\nabla z_p\|^2 \to \|\nabla z\|^2 \text{ fuerte en } L^2(0, T_0) (2.90)$$

$$\|u_p'\|^2 \to \|u'\|^2 \text{ fuerte en } L^2(0, T_0) (2.91)$$

Ahora por la hipótesis sobre la función M

$$M(s_1,r_1)-M(s_2,r_2)=M_s(\theta_1,r_1)(s_1-s_2)+M_r(s_1,\theta_2)(r_1-r_2)$$
$$\forall s_1,r_1,s_2,r_1\in\mathbb{R};\ \theta_1\in[s_1,s_2]\ ;\ \theta_2\in[r_1,r_2] \quad (2.92)$$

Entonces

$$\int_0^{T_0}\left|M(\|\nabla z_{p-1}\|^2,\|z'_{p-1}\|^2)-M(\|\nabla z\|^2,\|z'\|^2)\right|dt\le\int_0^{T_0}\left|M_s(\theta_1,\|z'_{p-1}\|^2)\right|\left|\|\nabla z_{p-1}\|^2-\|\nabla z\|^2\right|^2dt$$

$$+\int_0^{T_0}\left|M_r(\|\nabla z_{p-1}\|^2,\theta_2)\right|\left|\|z'_{p-1}\|^2-\|z'\|^2\right|^2dt$$

$$\le C\int_0^{T_0}\left|\|\nabla z_{p-1}\|^2-\|\nabla z\|^2\right|dt+C\int_0^{T_0}\left|\|z'_{p-1}\|^2-\|z'\|^2\right|dt\xrightarrow{p\to\infty}0\ (2.93)$$

luego

$$\int_0^{T_0}\left|N(z_{p-1}(t))(\Delta z_p(t),w(t))-N(z(t))(\Delta z(t),w(t))\right|dt\le\int_0^{T_0}\left|N(z_{p-1}(t))\right|\|\Delta z_{p-1}(t)-\Delta z(t)\|\|w(t)\|dt$$

$$+\int_0^{T_0}\left|N(z_{p-1}(t))-N(z_p(t))\right|\|\Delta z(t)\|\|w(t)\|dt\xrightarrow{p\to\infty}0\ (2.94)$$

Utilizando (2.93) y (2.94), obtenemos finalmente que la función z verifique la ecuación (2.86)

2.3.3 Verificación de los datos iníciales

El objetivo de esta sección es mostrar que para una función dada en (2.77) satisface las condiciones iníciales dado en (2.7) esto es;

$$u(0)=u_0\ \text{y}\ u'(0)=u_1\ (2.95)$$

Luego de (2.77) y de la Proposición II.9para $p=\infty$, $V_1=D(\Delta^{3/2})$ $V_2=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$y sea

$$W_1(0,T)=\left\{u\in L^\infty(0,T;D(\Delta^{3/2}));\ u'\in L^\infty(0,T:H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\right\}$$

entonces:

$$u \in C(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\,(2.96)$$

de forma análoga haciendo $v = u'$, $p = \infty$; $V_1 = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y

$V_2 = H_0^1(\Omega)$ y sea:

$$W_2(0,T) = \left\{v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega));\quad v' \in L^\infty(0,T:H_0^1(\Omega))\right\}$$

entonces:

$$u' \in C(0,T;H_0^1(\Omega))\,(2.97)$$

de esta forma tiene sentido verificar $u(0)\ y\ u'(0)$

Verificación de $u(0)$: de (2.77) se tiene:

$$u'_m \xrightarrow{\ \bullet\ } u' \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

Es decir

$$(u'_m,w) \to (u'_m,w) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))\ (2.98)$$

tomando $w = v\theta$ con $v \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $\theta \in L^1(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \quad \forall \theta \in L^1(0,T) \qquad (2.99)$$

en particular el resultado anterior es válido para todo $\theta \in C(0,T)$ pues $C(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$

También se tiene

$$u_m \xrightarrow{\ \bullet\ } u \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.100)$$

Es decir

$$(u_m,w) \to (u_m,w) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (2.101)$$

Entonces haciendo $w = v\varphi$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\varphi \in C^1(0,T)$ luego se tiene que:

$$\int_0^T (u_m(t),v)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T (u(t),v)\varphi(t)dt \quad \forall\varphi\in L^1(0,T) \quad (2.102)$$

En particular el resultado es para todo $\varphi\in C(0,T)$ pues $C(0,T)\hookrightarrow L^1(0,T)$ luego haciendo $\varphi=\theta'$ con $\theta\in C^1(0,T)$ se concluye que

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \qquad (2.103)$$

$$\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \;\to\; \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt \qquad (2.104)$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y para todo $\theta\in C^1(0,T)$ tal que $\theta(0)=1$ y $\theta(T)=0$: sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u_m(t),v)\theta(t)\big]=-(u_m(0),v) \quad (2.105)$$

por otro lado:

$$\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u(t),v)\theta(t)\big]=-(u(0),v)(2.106)$$

es decir

$$(u_m',w)\to(u_m',w) \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \quad (2.107)$$

tomando $w=v\theta$ con $v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $\theta\in L^1(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \quad \forall\theta\in L^1(0,T) \qquad (2.108)$$

en particular el resultado anterior es válido para todo $\theta\in C(0,T)$ pues $C(0,T)\hookrightarrow L^1(0,T)$

También se tiene

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad (2.109)$$

Es decir

$$(u_m,w)\to(u_m,w)\quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))\qquad (2.110)$$

Entonces haciendo $w=v\varphi$ con $v\in H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\varphi\in C^1(0,T)$ luego se tiene que:

$$\int_0^T (u_m(t),v)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T (u(t),v)\varphi(t)dt \quad \forall\varphi\in L^1(0,T)\qquad (2.111)$$

En particular el resultado es para todo $\varphi\in C(0,T)$ pues $C(0,T)\hookrightarrow L^1(0,T)$ luego haciendo $\varphi=\theta'$ con $\theta\in C^1(0,T)$ se concluye que

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \qquad (2.112)$$

$$\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \;\to\; \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt \qquad (2.113)$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y para todo $\theta\in C^1(0,T)$ tal que $\theta(0)=1$ y $\theta(T)=0$: sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u_m(t),v)\theta(t)\big]=-(u_m(0),v)\qquad (2.114)$$

por otro lado:

$$\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u(t),v)\theta(t)\big]=-(u(0),v)\qquad (2.115)$$

2.3.4 UNICIDAD

Sean u,v dos soluciones de (2.86) Entonces se verifica que

$$u'',\ v''\ L^\infty\in(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

$$u,v\ \in L^\infty(0,T_0;D(\Delta^{3/2}))\,(2.116)$$

$$u',v'\in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$

$u(0)=v(0)=u_0$; $u'(0)=v'(0)=u_1$

Sea $w = u - v$ entonces

$$u, v \in L^\infty(0, T_0; D(\Delta^{3/2}))$$

$$w \in L^\infty(0, T_0; D(\Delta^{3/2}))$$

$$w' \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \quad (2.117)$$

$$w'' \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$$

$$w(0) = w_0$$

$$w'(0) = w_1$$

Satisface la ecuación

$$(w''(t), z) + N(u(\mathrm{t}))(\Delta w(t), z) = (N(v(t)) - N(u(t)))(\Delta u(t), z) \qquad (2.118)$$

Haciendo $z = w'(t)$ en (2.121) obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\left\{\|w''(t)\|^2 + N(u(t))\|\nabla w(t)\|^2\right\} = (N(v(t)) - N(u(t))(\Delta v(t), w') + N'(u(t))\|\nabla w(t)\|^2 \qquad (2.119)$$

Por otro lado tenemos

$$\left|M(\|\nabla v(t)\|^2, \|v'(t)\|^2) - M(\|\nabla u(t)\|^2, \|u'(t)\|^2)\right| \le \left|M_s(\theta_1, \|v'(t)\|^2)\right| \left| \|\nabla v(t)\|^2 - \|\nabla u(t)\|^2 \right| (2.120)$$

$$+ \left|M_r(|\nabla v(t)|, \theta_2)\right| \left| \|\nabla w(t)\|^2 - \|w'(t)\|^2 \right| (2.121)$$

$$\le C \left| \|\nabla w(t)\|^2 - \|\nabla w'(t)\|^2 \right| (2.122)$$

Reemplazando en (2.119) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\|w''(t)\|^2 + N(u(t))\|\nabla w(t)\|^2\right\} \le C\left\{\|\nabla w(t)\| - \|w'(t)\|\right\}\|w'(t)\|$$

$$\leq C\left\|w'(t)\right\|^2 + C\left\|\Delta w(t)\right\|^2 \quad (2.123)$$

Integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $w(0) = w'(0) = 0$ obtenemos

$$n(t) = \left\|w'(t)\right\|^2 + d_0\left\|\Delta w(t)\right\|^2 \leq C\int_0^t n(s)ds \quad (2.124)$$

Entonces, por el Lema de Gronwall

$$\varphi(t) = \left\|w'(t)\right\|^2 + \left\|\Delta w(t)\right\|^2 \leq 0 \times e^{\int_0^t \beta(s)ds} = 0. \quad (2.125)$$

esto implica:

$$\left\|w'(t)\right\|^2 + \left\|\Delta w(t)\right\|^2 = 0 \quad (2.126)$$

$$\left\|w'(t)\right\|^2 = 0 \text{ y } \left\|\Delta w(t)\right\|^2 = \left\|w(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = 0 \quad (2.127)$$

$$\Rightarrow w(t) = 0;\ \forall t \in [0,T] \quad (2.128)$$

$$\therefore u(t) = v(t) \quad \forall t \in [0,T] \quad (2.129)$$

lo que prueba la unicidad de la solución.

2.3.5 Ejemplos de aplicación en $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}x\mathbb{R}^2$

Se utilizó el programa (WOLFRAM MATHEMATICA 10), para datos en M, f, u_0, u_1 y se obtuvo los siguientes resultados:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad \text{en} \quad Q=\left]-5,5\right[\times\left]0,t\right[$$

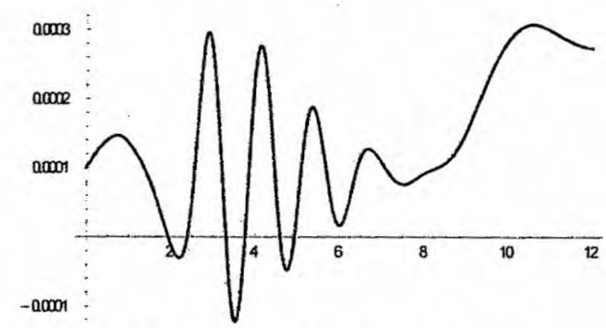
$$u(-5,t)=u(5,t)=0$$

$$u(x,0)=0.0001e^{\frac{-1}{x^4}};\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.0001e^{\frac{-1}{x^4}} \quad \text{en} \quad \Omega=\left]-5,5\right[$$

Plot[*First*[*u*[*t*,0] /.%],{*t*,0,12}, *PlotRange* → *All*]

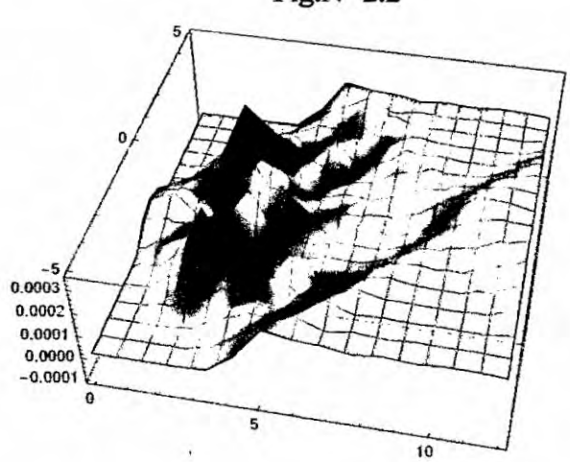
{u -> InterpolatingFunction[{{0., 12}, {-5., 5.}}, <>]

Fig. N° 2.1



Plot3D[First[u[t, x]/. %], {t, 0,12}, {x, −5,5}, PlotRange → All]

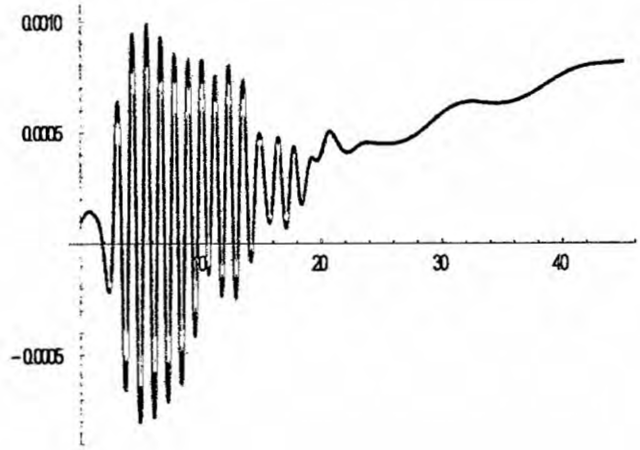
Fig.N° 2.2



Plot[*First*[*u*[*t*,0] / .%], {*t*,0,12}, *PlotRange* → *All*]

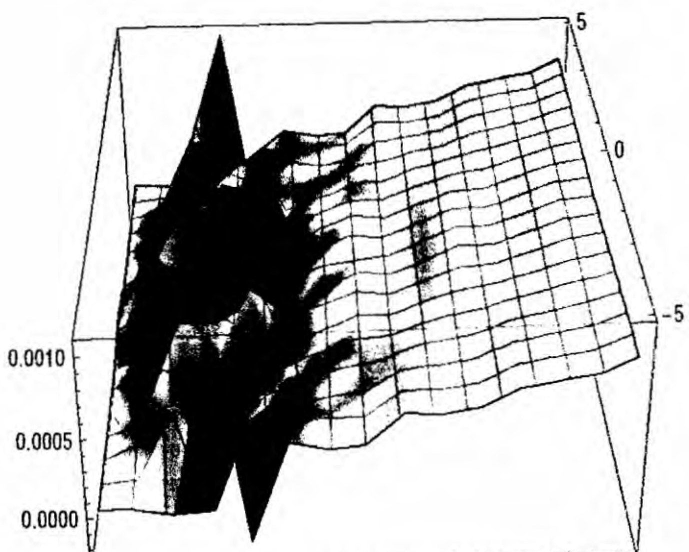
{u -> InterpolatingFunction[{{0., 45}, {-5., 5.}}, <>]

Fig.N° 2.3



Plot3D[First[*u*[*t*, *x*]/. %], {*t*, 0,45}, {*x*, −5,5}, PlotRange → All]

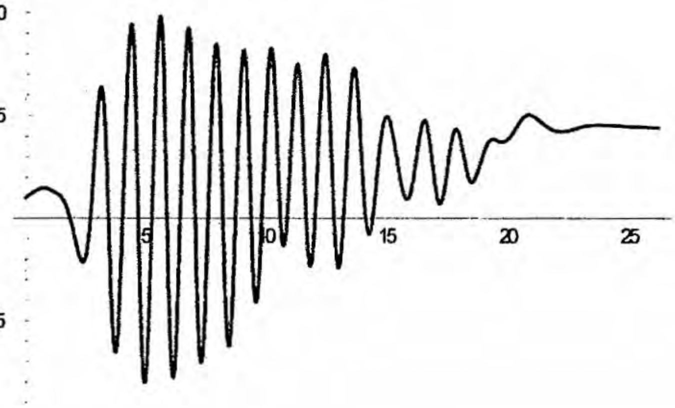
Fig N° 2.4



$$Plot[First[(\int_{-5}^{5} D[u[t,x],x]^{\wedge}2dx)\,/.\%],\{t,0,26\},PlotRange \to All]$$

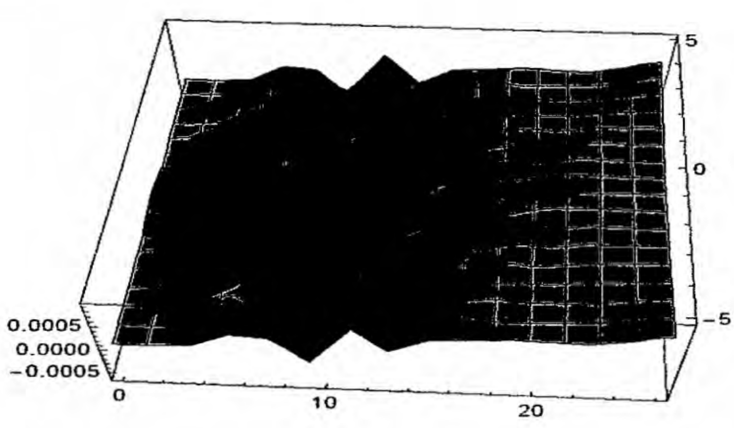
{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 26.}, {-5., 5.}}, <>]}}

Fig N° 2.5



Plot3D[First[$u[t,x]$/. %], $\{t,0,26\}$, $\{x,-5,5\}$, PlotRange → All]

Fig.N° 2.6



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dx\right)^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \qquad \text{en } Q=]-5,5[\times]0,t[$$

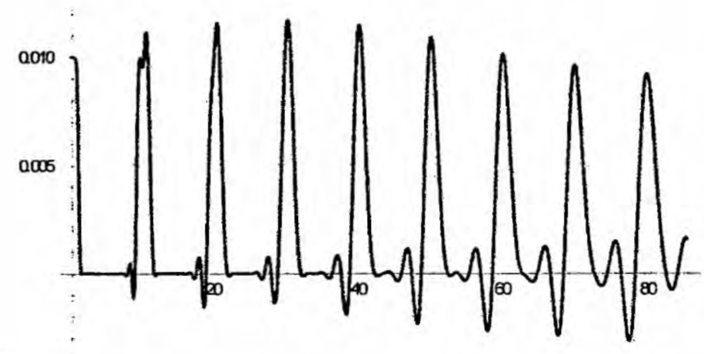
$$u(-5,t)=u(5,t)=0$$

$$u(x,0)=0.01e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en } \Omega=]-5,5[$$

Plot[First[u[t,0]/.%],{t,0,85},PlotRange → All]

{u -> InterpolatingFunction[{{0., 85}, {-5., 5.}}, <>]

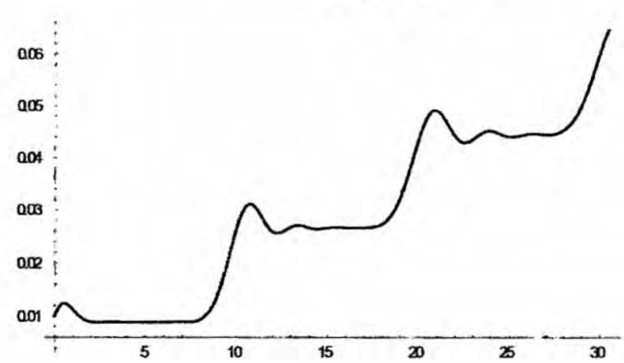
Fig.N° 2.7



Plot[First[u[t,0]/.%],{t,0,30.5},PlotRange → All]

{u -> InterpolatingFunction[{{0., 30.5}, {-5., 5.}}, <>]

Fig.N° 2.8



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dx\right)^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad \text{en} \quad Q=]-5,5[\times]0,t[$$

$$u(-5,t)=u(5,t)=0$$

$$u(x,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en} \quad \Omega=]-5,5[$$

$Plot[First[u[t,0]/.\%],\{t,0,25,5\},PlotRange\to All]$

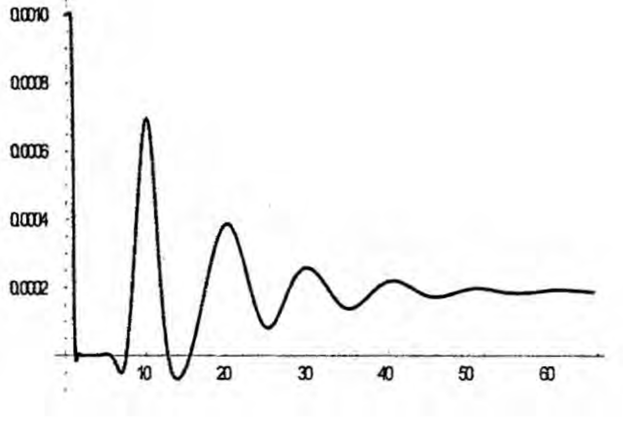
{u -> InterpolatingFunction[{{0., 25.5}, {-5., 5.}}, <>]

Fig. N° 2.9

$Plot[First[u[t,0]/.\%],\{t,0,65,5\},PlotRange\to All]$

{u -> InterpolatingFunction[{{0., 65.5}, {-5., 5.}}, <>]

Fig. °2.10



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dx\right)^7 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

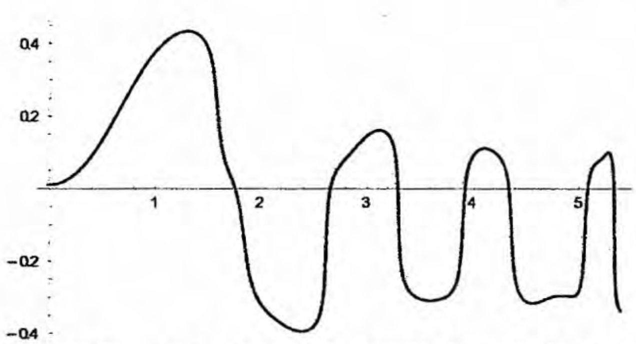
$$-sen(x^2+t^2)=0 \quad ; \quad \text{en} \quad Q=]-5,5[\times]0,t[\qquad \text{sobre } u(-5,t)=u(5,t)=0$$

$$u(x,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}}; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \qquad ;\text{en} \quad \Omega=]-5,5[$$

Plot[First[u[t,0]/.%],{t,0,5.5},PlotRange → All]

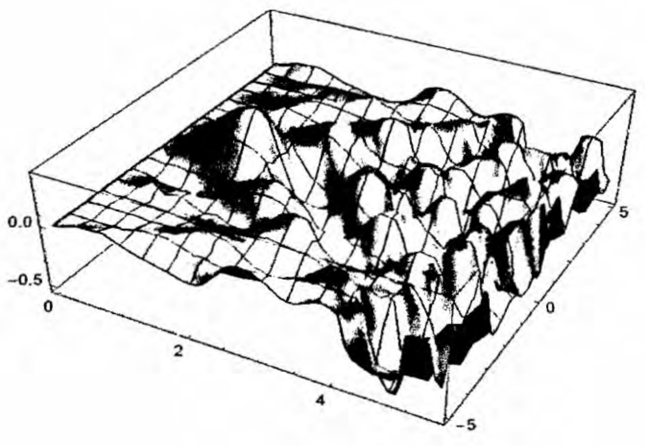
{u -> InterpolatingFunction[{{0., 5.5}, {-5., 5.}}, <>]

Fig.N° 2.11



Plot3D[First[$u[t,x]$/. %], {t, 0,5.5}, {x, −5,5}, PlotRange → All

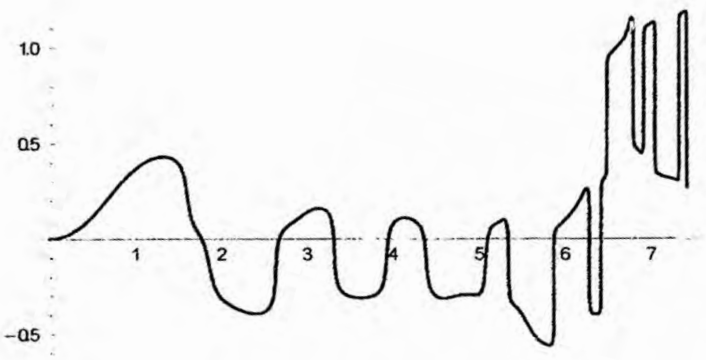
Fig N° 2.12



1) $Plot[First[u[t,0]/.\%],\{t,0,7.4\},PlotRange \to All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 7.4.}, {-5., 5.}}, <>]

Fig. N° 2.13



$$Plot[First[(\int_{-5}^{5} D[u[t,x],x]^{\wedge}2dx)/.\%],\{t,0,56\},PlotRange \to All]$$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 56.}, {-5., 5.}}, <>]

$$c)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)-\left(1+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left(\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|^2\right)dxdy+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|^2 dxdy\right)=0$$

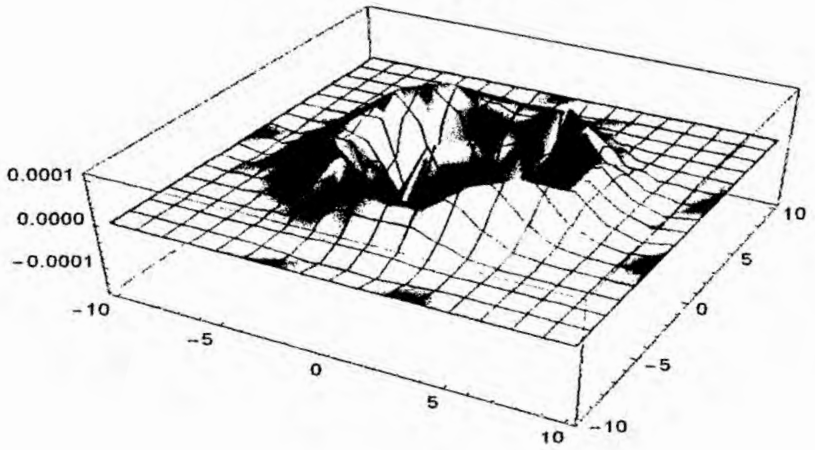
$$u(-10,y,t)=u(10,y,t)=u(x,-10,t)=u(x,10,t)=0$$

$$u(x,y,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en} \quad \Omega=]-10,10[\times]-10,10[$$

$Plot3D[First[u[5,x,y]/.\%],\{x,-10,10\},\{y,-10,10\},PlotRange \to All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 5.}, {-10., 10.}}, <>]}}

Fig. N° 2.14



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)-\left(1+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left(\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|^2\right)dxdy+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|^2dxdy\right)=0$$

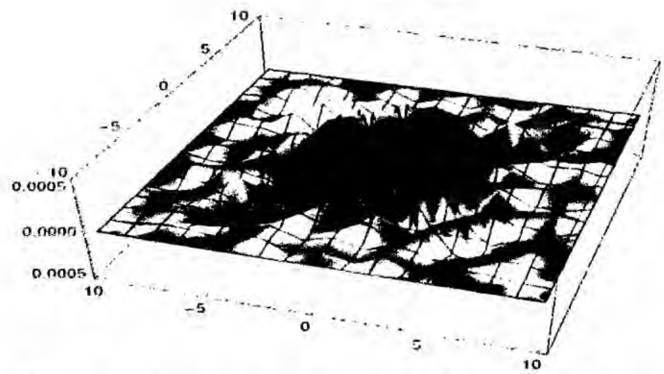
$$u(-10,y,t)=u(10,y,t)=u(x,-10,t)=u(x,10,t)=0$$

$$u(x,y,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^4}};\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en} \quad \Omega=\left]-10,10\right[\times\left]-10,10\right[$$

$Plot3D[First[u[15,x,y]/.\%],\{x,-10,10\},\{y,-10,10\},PlotRange\rightarrow All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 15.}, {-10., 10.}}, <>]}}

Fig.N° 2.15



$$c)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)-\left(1+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left(\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|^2\right)dxdy+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|^2dxdy\right)+$$

$$0.001sen(x^2+y^2)=0 \qquad \text{en} \quad Q=(\left]-10,10\right[\times\left]-10,10\right[)\times\left]0,t\right[$$

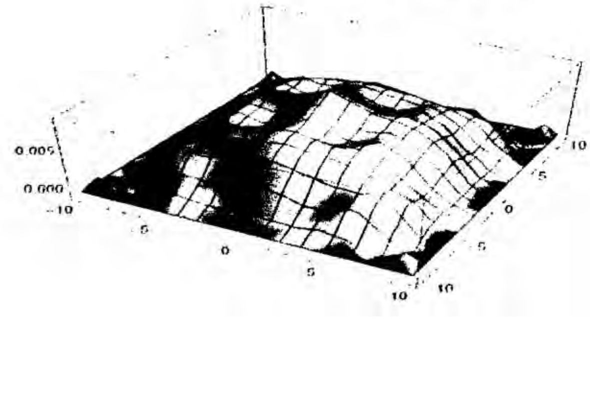
$$u(-10,y,t)=u(10,y,t)=u(x,-10,t)=u(x,10,t)=0$$

$$u(x,y,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^4}};\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en} \quad \Omega=\left]-10,10\right[\times\left]-10,10\right[$$

$Plot3D[First[u[10,x,y]/.\%],\{x,-10,10\},\{y,-10,10\},PlotRange\rightarrow All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}, {-10., 10.}}, <>]}}

Fig N° 2.16



c) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)-\left(1+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left(\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|^2\right)dxdy+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|^2 dxdy\right)+$

$$0.001e^{\frac{-1}{x^2+x^2}}=0 \qquad \text{en } Q=(]-10,10[\times]-10,10[)\times]0,t[$$

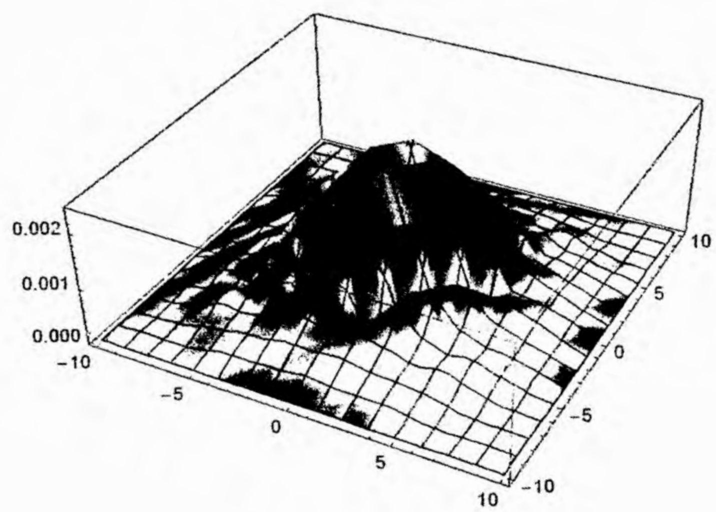
$$u(-10,y,t)=u(10,y,t)=u(x,-10,t)=u(x,10,t)=0$$

$$u(x,y,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^4}};\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \qquad \text{en} \quad \Omega=]-10,10[\times]-10,10[$$

Plot3D[First[u[10, x, y] / .%], {x, −10, 10}, {y, −10, 10}, PlotRange → All]

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}, {-10., 10.}}, <>]}}

Fig.N° 2.17



CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1 Variables de la Investigación

Para nuestro problema tenemos dos variables

* $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$; $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, Ω acotado con frontera regular y $T > 0$

3.2 Operacionalización de las variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
(x,t)	Variable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$	Solución global Del sistema	Soluciones fuertes	$\|\Delta u\| + \|\nabla u'\| + \|u''\| < k^2$

3.3 Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

La ecuación en nuestro proyecto tesis es del tipo Kirchhoff:

$$(1) \quad \begin{cases} u''(t) - M(|\nabla u(t)|^2 ; |u'(t)|^2)\Delta u(t) = f(t) & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,\infty[\\ u'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Tal que Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, y Muna función tal que:

$$M : [0,\infty[\rightarrow [0,\infty[\text{ con } M(s,r) \geq m_0 > 0 .$$

Hipótesis específica

Con la hipótesis: [H1] y el teorema dado para la ecuación (2.1) es decir respecto a M, u_0 $y\, u_1$ encontraremos la existencia local, la unicidad de las soluciones de (2.1).

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

Trabajaremos sobre el espacio de las Distribuciones, Espacios de Sobolev en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Este proyecto de tesis es el primer trabajo en nuestra Facultad que aborda la exposición didáctica de un problema no lineal, lo que permitirá el avance de esta línea de investigación en la Facultad.

4.2 Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis inicialmente está dirigido a mostrar la existencia Global de soluciones regulares del problema (1).Para esto aplicamos el método de Faedo- Galerkin que consiste en aproximarse a la solución del problema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita; resultando soluciones del tipo $u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$, donde las g_{im} , $i = 1,2,.........,m$, pueden ser determinadas (de manera única) por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (El Teorema de Caratheodory por ejemplo).

Finalmente usamos el teorema del punto fijo, para que mediante un proceso de limite y concluir para la solución del problema (1)

4.3 Población y muestra

En términos estadísticos no existe población en estudio, solo trabajamos en $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ donde $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T > 0$

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó material bibliográfico en bibliotecas y por vía internet trabajos relacionados con el tema.

4.5 Procedimientos de recolección de datos

No hubo procedimiento alguno solo el acceso a diferentes bibliotecas de universidades y las páginas web que eran accesibles para adquirir dichos materiales

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

No se realizo procesamiento ni análisis de datos solo se utilizó el programa computacional WOLFRAM MATHEMATIC 10 simular alguna aplicaciones

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este trabajo se ha estudiado el problema de Cauchy Asociado a:

$$(1)\qquad \begin{cases} u''(t) \quad - \quad M(|\nabla u(t)|^2, |u'(t)|^2)\Delta u(t) \; = f(t) & en \qquad Q = \Omega\times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 & sobre \qquad \sum = \Gamma\times]0,\infty[\\ u'(0) = u_1 & en \qquad \Omega \end{cases}$$

Y con la hipótesis $[H_1]$ respecto a $M\ u_0\ y\ u_1$ se llegan a los resultados siguientes:

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$$

$$u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

CAPÍTULO VI

DISCUSIONES

El método empleado en este trabajo puede ser dirigido y aplicado en diversas aplicaciones.

Podemos aplicar nuestro estudio, a la existencia y comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación amortiguado de la viga

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^2 u - M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_H^2, \|Au\|_H^2\right)Au + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = f & \text{en} \quad \text{H} \\ u(0) = u_0; \qquad u'(0) = u_1 \end{cases}$$

Donde $M(s,r)$ es una función real derivable en las dos variables y no negativa.

También es posible aplicar nuestro estudio al siguiente problema de Cauchy asociado al siguiente sistema.

Donde A es un operador lineal en un espacio de Hilbert H, M y ρ son funciones reales.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Las conclusiones importantes de este trabajo son los siguientes:

1. Demostramos la existencia global y la unicidad de soluciones de la ecuación de onda.

2. Demostramos la existencia local y la unicidad de solución de la ecuación de onda tipo Kirchhoff-Carrier.

$$(1)\quad \begin{cases} u''(t) - M(|\nabla u(t)|^2, |u'(t)|^2)\Delta u(t) = f(t) & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,\infty[\\ u'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Donde el problema (1) pertenece al conjunto G gracias al TPFB (Teorema del punto fijo de Banach) mediante las aproximaciones sucesivas y asi acabar con nuestra demostración.

3. Se dan diversos ejemplos de aplicación con sus respectivas graficas mediante el programa Wolfram Mathematic 10 dándole a nuestro problema una mayor ilustración y a la vez el entendimiento de nuestro problema.

4. Este resultado concuerda con distintas situaciones experimentales en lo que respecta a nuestra investigación analítica y demuestra su valor, explicando los resultados obtenidos en nuestro trabajo.

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1) Dentro de la rama del análisis funcional y específicamente sobre este proyecto de investigación se deja un material importante sobre las ecuaciones de ondas disipativas, que en un término físico es más realista en la vida cotidiana, por el cual esta aplicación es muy potente para diversas ramas de la Ingeniera y la Física sino también para lograr un modelo matemático computacional que modele los resultados con respecto al decaimiento de la Energía.

2) Los libros, revistas , papers, tesis referidas hacia este trabajo no solo son una ayuda muy importante sino también despierta motivación e interés para el futuro desarrollo de la investigación sobre el tema

CAPÍTULO IX

BIBLIOGRAFÍA

[1] ADAMS, R. A; Sobolev Spaces, Academic Press, New Cork, 1975.Aos Problemas Elípticos não Homogêneos), Río de Janeiro, 1999.

[2] BRITO, E.H., Damped Elastic Stretchet String Equation Generalized: Existence Uniqueses ,Regularity and Stability , Appl, Anal 13 (1982) 219-233

[3] EBERHARD ZEIDLER Nonlinear Functional Analysis and its Applications Vol. II/A. VOL II/ B. 1989.

[4] H.BREZIS., Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones Editorial Masson Paris (1968)

[5] S, KESAVAN, Topics in functional analysis and Applications. Wiley Eastern Limited Bangolore, 1989.

[6] L. A. MEDEIROS y E. A DE MELLO. A. Integral de Lebesgue Textos de Métodos Matemáticos N° 18, IM-UFRJ (1975)

[7] MEDEIROS, L.A. & MILLA MIRANDA, M. ;Introdução aos Espaços de Sobolev y as Equaçoes Diferenciáis Parciais, Río de Janeiro, 1989.

[8] LIMACO J. AND BECERRA S., Vibration of Elastic String. Atas do 48° Seminario Brasileiro de analice (1998), 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear)

[9] P.H. RIVERA, Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales, textos avanzados, LNCC, Rio de Janeiro 1999.

[10] LIONS, J. L. ;Quelques Methods de Resolution des aux Limits non Linéaires; Dunod Gauthier, París, 1969.

[11] ALVES DE LIMA, O., OLIVEIRA M. "Global solutions for small data of the Carrier Equationwith dissipative term".Atas do 46° Seminario Brasileiro de Analise (1997).

[12] AROSIO, A., Spagnolo S. "Global solutions of the Cauchy problem for a non-Linear Hyperbolic Equation". Universita di Pisa. Departamento de Matemática. Roma (1982).

[13] CARRIER, C. F. "On the non-linear vibration problem of the elastic string" Quart. Appl. Math. – 3 - (1945).

[14] COUSIN A.; FROTA C.; LARKIN N.; MEDEIROS, L. A. "On the abstrac model of Kirchhoff- Carrier Equation". Comm.In App. Analysis. – 3 - (1997).

[15] CRIPPA H. "On Local Solutions of Some midly Degenerate Hyperbolic Equations". Non-linear Analysis, Vol. 21 (8) (1993).

[16] EBIHARA, Y. MEDEIROS, L. A. MILLA. M. "Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equations". Nonlinear Analysis. Vol. 10. (1986).

[17] IZAGUIRRE, R. - VELIZ, V. "Solución local para una clase de ecuaciones no – lineales degeneradas tipo Kirchhoff - Carrier". I Seminario Internacional de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Universidad Ricardo Palma – Lima - Perú (1999).

[18] KIRCHHOFF G. "Vorlesungenuber mechanik". Teubner, Leipzig (1883).

[19] LIONS, J. L. "Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux limites non-lineares". Dunod. Paris. (1969).

[20] MEDEIROS, L. A., MILLA M. "Solutions for the Equation of Nonlinear VibrationsSobolev Spaces of Fractionary Order". Math.Apl. Comp. 6 (1987).

[21]MEDEIROS, L. A., MILLA M. "Remarkson a nonlinear model vibrations of string With damping". 30° Seminario Brasileiro de Analise. L.N.C.C. - R.J. (1989).

[22] LOAYZA CERRON J. L. Aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach, Tesis 2006 UNMSM

[23] PERLA, G. "On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equations".NonlinearAnalysis.Vol. 3 (1979).

[24] RIVERA, P. "On local strong solutions of a nonlinear partial diferential equation". Appl. Analysis. Vol. 10. (1980).

[25] R. TEMAN; Navier Stokes Equations, Theory and Analysis, North Holand, Amsterdam 1979

[26] SIMON J. Compact Sets in the Space $L^p(O,T; B)$. Universite Pierre etMarie Curie. Laboratoire de Analyse Numerique (1985).

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	METODOLOGIA	POBLACION
En la ecuación: $\begin{cases} u''(t) - M(\lVert\nabla u(t)\rVert^2, \lvert u'(t)\rvert^2)\Delta u(t) = f(t) \\ u(0)=u_0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma=\Gamma\times]0, \\ u'(0)=u_1 \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$ **Ω acotado en IR^n** y con las hipótesis respecto a M u_0 y u_1 tal que: $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $\lVert\Delta u_0\rVert+\lVert\nabla u_1\rVert<\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<1$ **Planteamiento del problema** Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes; 1) ¿con estos datos será posible encontrar la existencia y unicidad de (2.1)?	**Objetivo General** En objetivo generales mostrar la unicidad, la existencia local. **Objetivo Especifico** El trabajo demostramos la Existencia y Unicidad de las soluciones regulares. Del problema (2.1)	**Hipótesis General** La ecuación en nuestro proyecto tesis es del tipo Kirchhoff: $\begin{cases} u''(t) - M(\lVert\nabla u(t)\rVert^2, \lvert u'(t)\rvert^2)\Delta u(t) = f(t) \\ u(0)=u_0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma=\Gamma\times \\ u'(0)=u_1 \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$ Tal que Ω es un conjunto acotado en IR^n ; ρ una función de clase C^1 no decreciente en IR y M una función tal que: $M:[0,\infty[\to[0,\infty[$ con $M(s)\geq m_0>0$ **Hipótesis Especifica** Con las hipótesis y el teorema dado para la ecuación (2.1) es decir respecto a M, u_0 y u_1 encontraremos la existencia global, la unicidad Local de las soluciones del problema (2.1)	**Tipo de Investigación** La siguiente Investigación es del Tipo científico teórico-practico **Método** **El método realizado** Es del tipo inductivo deductivo los cálculos realizados están detallados lo mejor posible. **Diseño** para la existencia global aplicamos el método de Faedo- Galerkin En una primera estimativa aplicamos , aplicamos del punto fijo que será fundamental para obtener lo que implica la solución local, para la solución del problema 2.1	En términos estadísticos no existe población en estudio, solo trabajamos en $Q\subset IR^{n+1}$ donde $Q=\Omega\times(0,T)$ $\Omega\in IR^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T>0$

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo