UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

$$u'' - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)\Delta u + \rho(u') = 0$$

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

JESÚS MANUEL PALOMINO AQUINO

Callao-Julio 2014

PERÚ

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

Existencia global y comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación $u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(u') = 0$

Jesús Manuel Palomino Aquino

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en Matemática.
Aprobado por:

....

Mg Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente

....

Lic. Cesar Augusto Avila Celis

Objetante

....

Mg Ruth Medina Aparcana

Secretaria

....

Juan Benito Bernui Barros

Suplente

Callao-Perú

2014

FICHA CATALOGRÁFICA

PALOMINO AQUINO JESÚS MANUEL

Existencia Global y Comportamiento Asintótico de las Soluciones de la Ecuación $u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(u') = 0$, Callao [2014].

iX, 96 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2014)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

1.UNAC/FCNM II. Titulo (Serie)

Dedicatoria

Por estar siempre deseándome lo mejor para mí
Esta tesis está dedicada con mucha dedicación
A mi compañera Norma, mi querido hijo David
A mi madre Juana y mis hermanos Cesar
Herlinda, , Edgar, Heda, Rosa, Richard
A la memoria de mi padre Mariano
y de mi hermana Inés Rosario

AGRADECIMIENTO

Agradezco sinceramente por este trabajo de tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por haberme dado el tema desde un principio y haber demostrado su capacidad en la orientación del desarrollo del tema, su confianza y accesibilidad para desarrollar el presente trabajo con mi asesor, también sin duda alguna al Dr. Moisés Izaguirre Maguiña por ser el promotor de la línea de estudio así como también haber aportado en el desarrollo del trabajo dándole un enfoque científico y aplicativo para el desarrollo de este proyecto, a mi asesor Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega por confiar en mí y haberme orientado en el desarrollo riguroso de este proyecto de tesis.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

$$u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(u') = 0$$

JESÚS MANUEL PALOMINO AQUINO

Julio-2014

Asesor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Titulo Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo estudiamos la existencia global de las soluciones, la unicidad de la solución y el comportamiento asintótico de la energía asociada al siguiente sistema.

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$; ρ una función de clase C^1 no decreciente en $\mathbb{R}$ y $M : [0,\infty[\to [0,\infty[$ una función tal que $M(s) \geq m_0 > 0$.

El presente trabajo consta en dos partes, en la primera parte demostraremos la existencia y unicidad de (1) aplicando el método de Faedo-Galerking. En la segunda parte implementando el método de Nakao, estudiamos el comportamiento asintótico de la energía asociado al sistema (1)

Palabras Claves:

- Ecuación de onda
- Método de Faedo-Galerking
- Existencia de soluciones
- Decaimiento de la energía
- Lema de Nakao

ABSTRACT

GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE EQUATION $u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(u') = 0$

JESÚS MANUEL PALOMINO AQUINO

July-2014

Adviser: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Title obtained: Licenciated in Mathematic

In this paper we study the existence and uniqueness of the global solutions and the asymptotic behavior of the energy associated to the following system.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Where Ω is a bounded set in $\mathbb{R}^n$; ρ a class function C^1 not decreasising in $\mathbb{R}$ and M

a function such that $M : [0,\infty[\to [0,\infty[$ with $M(s) \geq m_0 > 0$

This work consists of two parts, the first part will demonstrate the existence and uniqueness of (1) applying the method of Faedo-Galerking. In the second part of implementing the method of Nakao, we study the asymptotic behavior of the energy associated with the system (1)

Key Words:

- Equation of onda
- Method of Faedo-Galerking
- Existence of solutions
- Decay of the energy
- Method of Nakao

CAPÍTULO I

I.PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del Problema

El modelo matemático que describe las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda es:

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(\rho_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

Y fue propuesto por Kirchhoff, donde L es la longitud en reposo, E el módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal, ρ es la densidad de la masa de la cuerda, h es el área de la sección transversal, ρ_0 es la tensión axial, α es el módulo de resistencia donde $\alpha \geq 0$.

Para $\alpha = 0$, en este caso aún no se ha demostrado la existencia de "solución global" para datos en espacios de Sobolev.

Para $\alpha > 0$, esto permite encontrar soluciones globales en espacios de Sobolev para datos $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Una generalización más realista del sistema (1) es tomar una función $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ del tipo: $\rho(s)=h_0|s|^{p-1}s$; $h_0>0$; $p\geq 1$,en este sentido hay muchas construcciones de los aspectos matemáticos del sistema

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-M(\int\limits_\Omega|\nabla u|^2)\Delta u+\rho(t,\dfrac{\partial u}{\partial t})=0 & \text{en} \quad Q=\Omega\times\,]0,\infty[\\ u=0 & \text{sobre} \quad \Gamma\times\,]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x); \quad u'(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

podemos mencionar los resultados de BRITO [2], el considera $M(r)\geq a+br$ con $a>0$; $b>0$ y $\rho(t,v)=\delta v$ para $\delta>0$; PATCHEU [13] investiga para el caso

$M(r)=a+br$ y $\rho(t,v)=g(v)$ para g no decreciente, g función de clase C^1 tal que $|g(v)|\le c_2|v|$; si $|v|\le 1$, $|g(v)|\le c_3|v|^q$ si $|v|>1$, siendo c_2,c_3 constantes positivas. También es necesario mencionar algunos de los autores que han trabajado con la ecuación (1) sin un término disipativo: POHOSAEV [17]; LIONS [10]; MEDEIROS y MILLA [7]; LIMACO y BEZERRA [8]. El término $\rho(t,u')$ de la ecuación ha sido investigado por NAKAO [12], MARTINEZ [11], entre otros. Nuestro trabajo es una generalización de la realizada por YAMADA [14] y PATCHEU [13]

1.2 Formulación del Problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

(i)¿Será posible encontrar una solución global de la ecuación (1) con las condiciones dadas para: ρ, M, u_0 y u_1

(ii) ¿Para las mismas condiciones mencionados en la parte (i), será posible estudiar el comportamiento asintótico de la energía asociado al sistema (1)?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivos Generales

El objetivo general es demostrar, la existencia y unicidad de la solución global así como el decaimiento exponencial o polinomial de la energía asociado a (1) dependiendo en este caso de la no linealidad de ρ

1.3.2 Objetivos Específicos

El presente trabajo consta en dos partes. En la primera parte demostramos la existencia de las soluciones fuertes y la unicidad del sistema (1). En la segunda parte, implementando el método de Nakao, estudiamos el decaimiento de la energía asociado al sistema (1).

Para obtener estos resultados usamos herramientas del análisis funcional, el teorema de Banach-Steinhaus, la teoría espectral y el método de Faedo-Galerkin. En la segunda parte usando el lema de Nakao, probamos que la energía asociado al sistema (1) decae exponencial o polinomialmente dependiendo de la no linealidad de ρ

1.4. Justificación

Este proyecto es el primer trabajo en nuestra facultad que implica el desarrollo minucioso y explícito posible del tema en mención, incluyendo así al final de las demostraciones, y tener un mayor panorama del tema. Mostramos con el programa computacional (Wolfram Mathematica10) algunos ejemplos de aplicación con sus respectivas ilustraciones. Lo que permitirá el avance de esta línea de investigación en la Facultad.

1.5. Importancia

El presente proyecto se encuentra en el área de las ecuaciones diferenciales parciales y reviste particular importancia, ya que aborda el problema de estudiar la existencia global del problema (1), adoptando un método indirecto, a través de sistemas aproximados en espacios de dimensión finita. Implementando el método de Nakao sobre el sistema aproximado deducimos el comportamiento asintótico y la acotación uniforme de la energía aproximada, usándose posteriormente este hecho para una segunda estimativa y así obtener la solución global.

CAPÍTULO II

II.MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes sus demostraciones serán omitidas por que se tratan de resultados ya conocidos. Solo se citaran las referencias donde serán encontrados con sus respectivas demostraciones.

2.1.1 Notaciones

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n$ para:

  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$

  $$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}$$

- Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f será denotado por ∇f

  y definido como un vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:

  $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- El Laplaciano de una función f está definido como:

  $$\Delta f = \nabla . \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}$$

- Sean $u, v \in L^2(\Omega)$, entonces el producto interno entre u y v está definido por: $(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx$

  Y la norma de u en $L^2(\Omega)$ y u en $H^1(\Omega)$ es dado respectivamente por:

  $$\|u\| = \left[\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\nabla u\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

2.1.2. Identidades Usuales

Sean f y g dos funciones escalares de clase $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, siendo c una constante real, F y G dos campos vectoriales de clase $C^1(\Omega)$ entonces las siguientes identidades son válidas:

- $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(cf) = c\nabla f$
- $\nabla f g = f\nabla g + g\nabla f$
- $\nabla.(F+G) = \nabla.F + \nabla.G$

2.1.3 Espacios $L^p(\Omega)$

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

El espacio euclidiano de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n-uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall$ i=1,2,......,n

Definición II.1 Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, denotaremos con $\ell^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue es decir:

$$\ell^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$$

con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $\ell^p(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}-$espacio vectorial y la aplicación $\| \; \|_p$ definida por

$$\|u\|_{\ell^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad ; u \in \ell^p(\Omega)$$

es una seminorma en $\ell^p(\Omega)$

Observación II.1 Se dice que $u = v$ casi siempre (c.s) en (Ω) si y solo si $\exists M \subseteq \Omega$ tal que $u(x) = v(x)$; $\forall x \in \Omega \setminus M$ y $\text{med}(M) = 0$

Para obtener una norma se define una relación de equivalencia en $\ell^p(\Omega)$ mediante

$$u \equiv v \text{ si y solo si } u = v \text{ (c.s) en } \Omega$$

Denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio cociente

$$L^p(\Omega) = \frac{\ell^p(\Omega)}{\equiv} = \{[u] : u \in \ell^p(\Omega)\}$$

El cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}}; \quad u \in L^p(\Omega)$$

Cuando $p = 2$ $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx\, ; \quad u,v \in L^2(\Omega)$$

Su norma inducido será denotado por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{2}}; \quad u \in L^2(\Omega)$$

si $p = \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible denotaremos con $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω esencialmente acotadas en Ω es decir

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, u \text{ es medible y } \exists C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \le C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Definición II.2 Definimos el supremo esencial como

$$\sup_{s\in\Omega} ess|u(x)| = \inf\{C > 0\, ; |u(x)| \le C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $L^\infty(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| \ ; \ u \in L^\infty(\Omega)$$

define una norma.

Demostración. Ver MEDEIROS y MILLA [7]

Proposición II.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) para funciones $L^2(\Omega)$)

Sean $u:\Omega \to \mathbb{R}$ y $v:\Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones cuadrado integrables entonces:

$$|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$$

Demostración. Ver BREZIS [4]

Proposición II.2 (Desigualdad de Young)

Sea $a \ge 0$, $b \ge 0$ y $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ entonces $ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Demostración. Ver L. A. MEDEIROS y E. A. DE MELLO [6]

Proposición II.3 (Desigualdad de Hölder)

Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ($q=1$ si $p=\infty$ y $q=\infty$ si $p=\infty$). Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |uv|\,dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostración. Ver L.A. MEDEIROS y E. A. DE MELLO [6].

Sean V, W dos espacios de Banach con $V \subset W$ como sub espacio vectorial (ambos con norma probablemente diferentes), Diremos que V está inmerso continuamente en W y denotaremos por $V \hookrightarrow W$ si y solo si $\exists C > 0$ tal que $\| \ \|_W < C \| \ \|_V$; $\forall u \in V$

Proposición II.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \le p \le \infty$. Entonces $1 \le p \le \infty$

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad y \quad \|u\|_p \le \|u\|_q \left(med(\Omega)\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

Demostración: Ver ADAMS [1].

Proposición II.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \le p \le \infty$ entonces $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$

Teorema II.1: (Teorema de representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1 < p < \infty$, $\varphi \in \left(L^p(\Omega)\right)'$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que:

$$< \varphi, v > = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ \forall v \in L^p(\Omega) \ y \ \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración: Ver ADAMS [1].

Teorema II.2 (Teorema de representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

sea $T \in \left[L^1(\Omega)\right]'$ a entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad y \quad \|u\|_\infty = \|T\|_{(L^1(\Omega))'} \quad \text{así} \quad \left(L^1(\Omega)\right)' \equiv L^\infty(\Omega)$$

Demostración: Ver ADAMS [1]

Sea $v \in L^1(0,T)$ decimos que $s \in [0,T]$ en un punto de Lebesgue para todo v, si $h > 0$ tal que $[s-h, s+h] \subseteq]0,T[$ entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} v(\varepsilon)d\varepsilon = v(s)$$

Proposición II.6 Si $v \in L^1(0,T)$ entonces casi todos los puntos s de $[0,T]$ son puntos de Lebesgue para v.

Demostración: Ver L.A MEDEIROS y E.A DE MELLO [6]

Definición II.3 Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de orden α de T denotado por

$D^\alpha T$ y su distribución está definido por:

$$< D^\alpha T, \phi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \phi >, \ \forall \phi \in D(\Omega)$$

Así mismo si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con esta definición se tiene que $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$; $\forall \, |\alpha| \leq k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u.

Definición II.4 Decimos que $u_k \to u$ casi siempre en Ω si $u_k(t) \to u(t)$ para casi todo $u \in \Omega$.

Teorema II.3 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)

Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, que converge casi siempre a la función u. Si existe una función u_0 tal que $|u_k| \leq u_0$ casi siempre para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces u es integrable y se tiene:

$$\int_\Omega u = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k$$

Demostración: Ver BREZIS [4]

2.1.4 Distribuciones

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$, una función escalar el soporte de u es la clausura de Ω del conjunto y lo denotamos por:

$$\text{sop}(u) = \{ x \in \Omega \, / \, u(x) \neq 0 \}$$

Observación II.2 El soporte de u es el menor conjunto cerrado de Ω fuera del cual $u = 0$ en el siguiente sentido

(i) sop(u) es cerrado en Ω y $u = 0$ en $\Omega \setminus \text{sop}(u)$

(ii) Si W es un conjunto cerrado Ω y $u = 0$ en $\Omega \setminus W$ entonces el $\operatorname{sop}(u) \subseteq W$

Por $C_0^\infty(\Omega)$ se denotara el espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto de Ω que posean derivadas continuas de todos los órdenes en Ω

Teorema II.4 C_0^∞ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Demostración. Ver ADAMS [1].

2.1.5 Noción de convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición II.5 Sea $(\varphi_k)_{k\in N}$ una sucesión de $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ decimos que: $\phi_k \to \phi$ si:

(i) $\exists\, K \subseteq \Omega$, K compacto, tal que $Sop\ \phi_k \subseteq K$, para todo $K \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \phi_k(x) \to D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en $x \in \Omega$.

Definición II.6 El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida anteriormente es denotado por $D(\Omega)$ y es llamado función de prueba.

Definición II.7 Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continua en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$:

$$D'(\Omega) = \left\{ T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua} \right\}$$

El conjunto $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre IK.

Si $T \in D'(\Omega)\ y\ \phi \in D(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ al valor T aplicado al elemento φ

2.1.6 Noción de convergencia en $D'(\Omega)$

Definición II.8 Diremos que $T_k \to T$ en $D'(\Omega)$ sí $< T_k, \phi > \to < T, \phi >$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.

2.1.7 El Espacio de las Distribuciones

Se denomina distribución sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(\Omega)$ es decir una distribución es una aplicación

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

tal que:

(i) $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

(ii) T es continua, esto es si $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$ entonces

$(T(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $(T(\varphi))$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω en este espacio una sucesión $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ si y solo si la sucesión $(T_k(\varphi))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $(T(\varphi))$ en $\mathbb{R}$ para todo φ en $D(\Omega)$

El espacio de las distribuciones sobre Ω. Con esta noción de convergencia será denotado por $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto (T_u, \varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ dualidad entre $D'(\Omega)$ si y solo y solo si y solo es lineal, continua e inyectiva en dicha recurrencia es común identificar una distribución T_u con la función $u \in L^1_{Loc}$. En ese sentido se tiene que

$L^1_{Loc} \hookrightarrow D'(\Omega)$. como $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω esta y toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Observación II.3 $L^1_{Loc}(\Omega)$ es llamado el espacio de las funciones localmente integrales. Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ consideremos el funcional $T = T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int u(x)\varphi(x)dx$.

Observación II.4 El valor de la distribución T en φ se representa también por (T, φ) (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$)

Lema II.1 (Du Bois Reymond) Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int u(x)\varphi(x)dx = 0$ para todo $\varphi \in D'(\Omega)$ entonces $u(x) = 0$ c.s en Ω

Demostración: Ver RIVERA [9]

Observación II.5 las distribuciones T_u definidas por funciones $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas por esta razón se identifica a u con las funciones y a T_u con la distribución luego $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$

2.1.8 Derivada Distribucional

Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice se denotara la derivada de orden α de T si la distribución $D^\alpha T$ definida por

$$\left(D^\alpha T, \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(T, D^\alpha \varphi\right); \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Esto nos indica que cada distribución T sobre Ω tiene derivada de todos los órdenes. Así las funciones de $L^1_{Loc}(\Omega)$ tienen derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.

Observación II.6 El operador $D^{\alpha} : D(\Omega) \to D(\Omega)$ es continuo

2.1.9 Distribuciones Vectoriales.

Sea V un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre $[0,T]$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0.T)$.

Dada una distribución T su valor en φ se representa por $\langle T,\varphi \rangle$.

Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$, denotaremos por $D'(0.T,V)$.

Sea $u \in L^p(0,T,V)$; $1 \le p \le \infty$ definimos

$$T_u : D(0,T) \to V / \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt$$

Observación II.7

Se verifica que T_u es una distribución y están definidas por funciones $u \in L^p(0,T,V)$, $\varphi \in D(0,T)$. Luego $\varphi u \in L^1(0,T,V)$.

T_u es lineal y continua en $D(0,T)$

T_u esta unívocamente determinado por u

Lema II.2 Sea V un espacio de Banach si $u \in L^1(0,T,V)$ y $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$ para todo φ en $D(0,T)$ entonces $u(t) = 0$ $c.s$ en $]0,T[$

Demostración: Ver ZEDLER [3]

2.1.10 Derivación en $D'(0,T,V)$

Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales denotado por u' ó $\frac{du}{dt}$ como:

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En general la derivada de orden n se define como

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En particular todo elemento $u \in L^p(0,T,V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$

Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $C([0,T],V)$. El espacio de las funciones que son continuas $[0,T]$ en V.

Sean V y H .dos espacios de Hilbert real con sus respectivas estructuras de Hilbert $(V,(.,.)_V,\| \|_V)$ y $(H,(.,.)_H,\| \|_H)$ se supone que $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta, continua y denso en H; $(\overline{V}^{\| \|_H} = H)$. Denotemos a $(\hookrightarrow)$ con el símbolo de inmersión.

Lema II.3 (Teman). Sea X un espacio de Banach con X' sean u, g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T,X)$. Entonces son equivalentes

1. u es c.s igual a la primitiva de g es decir $\exists \xi \in X$ tal que

$$u(t) = \xi + \int_0^T g(s)ds, \qquad c.s \;\; t \in [0,T]$$

2. Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds = \int_0^T g(s)\varphi(s)ds$$

3. para todo $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}(\eta, u(t))_{X' \times X} = (\eta, g(t))_{X' \times X}$$

En el sentido distribucional sobre $]0,T[$

Demostración: Ver TEMAM [18]

Lema II.4 Sean V, H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso V, V'dual de $(V \hookrightarrow H \hookrightarrow V')$. Si $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$, luego tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\left(u'(t), u(t)\right)_{V'\times V}$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$

Demostración. Ver TEMAM [18]

2.1.11 Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistas en las referencias ADAMS [1],

BREZIS [4], KEZAVAN [5], MEDEIROS [6],[7] y RIVERA [9].

Definición II.9 Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u. El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p;\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\, |\alpha| \leq m \right\}$$

2.1.12 Norma en $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y la sea la expresión

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \left| \left(D^\alpha u\right)(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty$$

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observación II.8

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p} \right)$ es un espacio de Banach.

2. Cuando $p=2$, el espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se convierte a un espacio de Hilbert con producto interno denotado por:

$$(u,v)=\sum_{|\alpha|\le m}(D^{\alpha}u\,,\,D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)} \qquad u,v\in W^{m,2}(\Omega)$$

3. Se denota a $W^{m,2}(\Omega)$ también como $H^m(\Omega)$ donde:

En $H^m(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\,/\,D^{\alpha}u\in L^2(\Omega);\forall\alpha.|\alpha|\le m\}$ en el sentido distribucional $D'(\Omega)$

Asi:

$H^1(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\,/\,Du\in L^2(\Omega);en\,D'(\Omega)\}$

$H^2(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\,/\,D^{\alpha}u\in L^2(\Omega),|\alpha|\le 2;en\,D'(\Omega)\}$

La forma bilineal

$$((u,v))=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}\nabla u\nabla v=(\nabla u,\nabla v)_{L^2(\Omega)}=(\nabla u,\nabla v)$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ e induce una norma y la denotamos por

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}=((u,u))=(\nabla u,\nabla u)_{L^2(\Omega)}=(\nabla u,\nabla u)=\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\nabla u\|^2$$

En el espacio $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ definamos la forma bilineal

$(\ .\ )_{\Delta}=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\to\mathbb{R}$

Mediante

$$(u,v)_{\Delta}=\int_{\Omega}\Delta u\Delta v=(\Delta u,\Delta v)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta v)$$

que resulta ser un producto interno y la norma inducida es:

$$\|u\|^2_{\Delta}=(\Delta u,\Delta u)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta u)=\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\Delta u\|^2$$

2.1.13 Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{-m,p}(\Omega)$

Definición II.10 La clausura del espacio vectorial $D(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$ se designa por $W_0^{m,p}(\Omega)$ es decir $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$

1. Cuando $p = 2$ se tiene $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_m}$

   Si m=1 se tiene

   $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$ para Ω en las condiciones dada se prueba que:

   $$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma=\partial\Omega} = 0\right\}$$

   $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega) / u|_\Gamma = 0\right\}$

   si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} = H^1(\Omega)$

2. Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ es nula.

3. También se tiene que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Definición II.11 Sea $1 \leq p < \infty$ y $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Representamos a $W^{-m,p}(\Omega)$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se representa como $H^{-m}(\Omega)$.

2.1.14 Inmersiones de Sobolev

Teorema II.5 (Teorema de Sobolev) Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces:

(*i*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

(*ii*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$,

(*iii*) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Siendo todas las inmersiones son continúas.

2.1.15 Espacios $L^p(0,T,V)$

Sea $0<T<\infty$ y V un espacio de Banach, una función $u:[0,T]\to V$ es llamada medible en $[0,T]$ si la función real $t\to\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}$ es medible Lebesgue en $[0,T]$ para todo $f\in V'$ donde V' es el dual topológico de V y $\langle\ .\ \rangle_{V'\times V}$ denota la dualidad entre V' y V en este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u:[0,T]\to V$ es llamada integrable en el sentido de Bochner en $[0,T]$, si u es medible en $[0,T]$ y la función real $t\to\|u(t)\|_V$ es integrable a Lebesgue en $[0,T]$ en este caso la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt\in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad

$$\left\langle f,\int_0^T u(t)dt\right\rangle_{V'\times V}=\int_0^T\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}dt\qquad\forall f\in V$$

Si $1\le p<\infty$ denotaremos por $L^p(0,T,V)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u:[0,T]\to V$ y tales que $t\to\|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $[0,T]$, Este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_V^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p=2$ y V es un espacio de Banach, entonces $L^2(0,T,V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)}=\int_0^T\big(u(t),v(t)\big)dt$$

Si $p=\infty$ representaremos por $L^\infty(0,T,V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:[0,T]\to V$ que son medibles y tal que el supremo esencial $(\|u(t)\|_V\ ;t\in[0,T])$ es finito $L^\infty(0.T,V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)}=\sup_{u\in[0,T]}ess\|u(t)\|_V$$

Proposición II.7 Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$, entonces $L^p(0,T,V)$ es separable en el caso que V sea separable y $1 \leq p < \infty$

Demostración: Ver ZEDLER [3]

Un resultado muy importante es respecto a dos espacios $L^p(0,T;H)$, que permiten identificar $(L^p(0,T;H))' \approx L^{p'}(0,T;H')$. Para el caso en que $p=1$ se identifica $\left(L^1(0,T;H)\right)' \approx L^\infty(0,T;H')$. Analicemos ahora el caso en que $p=1$ y $H = L^2(\Omega)$

Para esto se define:

$$F : L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \to (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'$$
$$u \to F(u)$$

donde :

$$F(u) : L^1(0,T;(L^2(\Omega))') \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$\xi \quad \to \quad < F(u), \xi >= \int_0^t < \xi(t), u(t) >_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

F es lineal continúa y biyectiva de este modo habremos identificado:

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \approx (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')',$$

donde sus elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ pueden ser vistos como elementos del dual de $L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$. Entonces cuando decimos que:

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad \text{en } L^\infty(0.T;L^2(\Omega)),$$

Tenemos:

$$< u_m, \xi > \to < u, \xi >_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))')' \times L^1(0,T;(L^2(\Omega))')}, \quad \forall \xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$$

lo que significa también:

$$\int_0^T < \xi(t), u_m(t) >_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt \to \int_0^T < \xi(t), u(t) >_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

$\forall \xi \in L^2(0.T;(L^2(\Omega))')$

La siguiente proposición relaciona la convergencia débil estrella antes mencionada con la convergencia débil.

Proposición II.8 sea V un espacio de Banach. Si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es continua. Entonces si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ la inmersión $L^p(0,T,X) \hookrightarrow L^p(0,T,Y)$ es también continua. Demostración: Ver ZEDLER [3]

Proposición II.9 Sean X e Y espacios de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ si

$u \in L^p(0,T;X)$ y

$u' \in L^p(0,T;Y)$ entonces $u \in C([0,T];Y)$

Demostración: Ver LIONS [10]

Teorema II.6 (Desigualdad de Poincare)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante C que depende Ω

tal que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

La constante C es llamada la constante de Poincare para Ω

Observación II.9

1.- La desigualdad de Poincare también es válida si $u \in H^1(\Omega)$ y el trazo de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anulan sobre alguna parte de Γ. (Ver. H. BREZIS [4]).

2.- La desigualdad de Poincare continua válida en $W_0^{1,p}(\Omega)$

2.1.16 Consecuencias de la desigualdad de Poincare

1.-La norma de Sobolev $\|.\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma del gradiente en $L^2(\Omega)$. Donde existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.- La norma de Sobolev $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ es equivalente a la norma del Laplaciano en $L^2(\Omega)$

para funciones en $H_0^2(\Omega)$, esto es existe $C>0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^2(\Omega)$. De esto se sigue que si $u \in H_0^2(\Omega)$ entonces se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ donde se da la desigualdad de Poincare.

2.1.17 Convergencia en $L^p(0,T,V)$

Sea V un espacio de un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si $\exists u \in V$ tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando $k \to \infty$ en tal caso denotaremos por $u_k \to u$

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V, si existes $u \in V$ tal que

$\langle f,u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f,u\rangle_{V'\times V}$; $\forall f \in V'$ con inmersión compacta y continua en este caso denotaremos por $u_k \to u$

Proposición II.10 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V que converge débil hacía u en V entonces

$$\|u\|_V \leq \liminf \|u_k\|_V$$

Demostración: Ver BREZIS [4]

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T,V)$ y $u \in L^p(0,T,V)$ se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u \in L^p(0,T,V)$ si :

$$\langle f,u_k\rangle_{L^p(0,T,V)\times L^p(0,T,V')} \to \langle f,u\rangle_{L^p(0,T,V)\times L^p(0,T,V')};\ \forall f \in L^q(0,T,V'),\text{ donde } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

esto significa que

$$\int_0^T \langle f, u_k\rangle_{V\times V'}\, dt \to \int_0^T \langle f, u\rangle_{V\times V'} dt; \quad \forall f \in L^q(0,T,V')$$

Observación II.10

En el caso $V = H_0^1(\Omega)$ entonces $V' = H^{-1}(\Omega)$

$$\langle G, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (G.v); \quad \forall G \in L^2(\Omega),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong \left(L^2(\Omega)\right)' = L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Luego

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))\, dt \to \int_0^T (w(t), u(t)) dt$$

donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ y $w \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$

sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual de la norma

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\|u\|_V} |\langle f, u\rangle|$$

Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k \xrightarrow{*} u$ si y solo si $\langle u_k, w\rangle \to \langle u, w\rangle$ para todo $w \in V$

Así $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;V)$ si y solo si $\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$

$\forall w \in L^1(0,T;V)$ es decir

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))_{V'\times V}\, dt \to \int_0^T (w(t), u(t))_{V'\times V} dt\ ; \ \forall w \in L^1(0,T;V)$$

Observación II.11

si $V = L^2(\Omega)$ y $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')$ significa que

$$(u_k, w)_{L^\infty(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to (u, w)_{L^\infty(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))};\ \forall w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

es decir

$$\int_0^T (u_k,w)_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}dt \to \int_0^T (u,w)_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}dt;\ \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

por tanto $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ si y solo si $\int_0^T (u_k,w)dt \to \int_0^T (u,w)dt$ $\forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

2.1.18 .Topologías débil y débil estrella

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado V se denomina un espacio de Hilbert de V, si V es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno.

Un espacio E es separable si existe un sub-conjunto $D\subseteq E$, tal que D es denso numerable en E.

Sea E un espacio de Banach y sea $f\in E'$, siendo E' el dual topológico de E y designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(x) = <f,x>$.

La topología débil $\sigma(E,E')$ sobre E es una topología menos fina en E que hace continua a todas las aplicaciones $(T_f)_{f\in E'}$. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en E, la notación de convergencia débil en general está indicada como:

$$x_n \to x \text{ débil } \sigma(E,E')$$

o simplemente $x_n \to x$ débil en E

Proposición II.11 Sea $(x_n)_{n\in N}$ una sucesión de E entonces:

(*i*) $x_n \to x$ débil en $\sigma(E,E')$ sí y solo si $<f,x_n> \to <f,x>, \forall f\in E'$

(*ii*) $x_n \to x$ fuerte en E entonces $x_n \to x$ débil en E

La demostración de esta proposición puede ser vista en H. BREZIS [4].

Proposición II.12 Se E un espacio de Banach y sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de E' entonces se tiene:

(*i*) $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$ si y solo si $< f_n,x > \to < f,x >, \forall x \in E$;

(*ii*) $f_n \longrightarrow f$ fuerte en E' entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E',E'')$.

(*iii)* $f_n \longrightarrow f$ débil en $\sigma(E',E'')$ entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$;

(*iv*) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y

$\|f\| \le Lim \inf \|f_n\|$;

Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, y si $x_n \to x$ fuerte en E entonces

$< f_n,x_n > \to < f,x >$

Donde ($\xrightarrow{*}$) denota la convergencia débil estrella

La demostración de esta proposición puede ser vista en H. BREZIS [4].

Proposición II.13 Sea $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, entonces $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Teorema II.7 (Aloglu-Bourbarki)

Sea E un espacio normado separable y sea $\{x_k\}$ una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{x_k\}$ de $\{x_m\}$ y $x \in E'$ tal que:

$$x_k \xrightarrow{*} x \text{ en } E'$$

Demostración: Ver BREZIS [4]

Teorema II.8 (Ausbin-Lions)

Sean B_0, B_1 y B tres espacios de Banach tales que B_0 y B_1 son espacios reflexivos además $B_0 \hookrightarrow B$ con inmersión compacta y $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas.

Sea $W(0.T) = \{u \in L^p(0,T,B_0);\ u' \in L^q(0,T,B_1)\}$, donde $0 < T < \infty$; $1 < p,q < \infty$ con la norma definida por: $\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0.T,B_0)} + \|u'\|_{L^q(0.T,B_1)}$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T,B)$ con inmersión continua

Demostración: Ver LIONS [10]

Lema II.5 (Lema de Lions). Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; g_n y g funciones de $L^q(\Omega)$; $1<q<\infty$ tal que:

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C \ \text{ y } \ g_n \to g \ \text{ c.s en } \Omega$$

Demostración: Ver LIONS [10]

Teorema II.9 (Teorema de Banach-Steinhaus)

Sean X e Y dos espacios de Banach y $(T_i)_{i\in I}$ una familia de operadores lineales y continuos de X en Y. Si se cumple:

para todo $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $||T_i x|| \leq M_x$, $\forall i \in I$, entonces existe $M > 0$ tal que $||T_i|| \leq M, \ \forall i \in I.$

Proposición II.14 La norma en todo espacio de Banach es debilmente semicontinua inferiormente.

Demostración. El teorema de Banach-Steinhaus permite concluir que siempre que tengamos una sucesión verificando que converge débilmente, entonces la sucesión está acotada. Además

$$|\langle u,f\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle u_k,f\rangle| \leq \lim_{k\to\infty}\inf \|u_k\|_X \, \|f\|_{X^*}$$

también
$$\|u\|_X = \sup_{f\in X^*, \|f\|\leq 1} |\langle u,f\rangle|$$

entonces:
$$\|u\|_X = \sup_{f\in X^*, \|f\|\leq 1} |\langle u,f\rangle| \leq \lim_{k\to\infty}\inf \|u_k\|$$

Lema II.6 (Lema de Gronwall) Sean $\varphi \in L^\infty(0,T)$ y $\beta \in L^1(0,T)$ tal que $\beta > 0$, $\phi \geq 0$ y una constante $K \geq 0$. Si:

$$\phi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\phi(s)ds \ , \ \forall t \in [0,T],$$

entonces se tiene que:

$$\phi(t) \le K e^{\int_0^t \beta(s)ds} \quad , \forall t \in (0,T) \ ,$$

Lema II.7 (Nakao) Sea $E:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función acotada y no negativa satisfaciend0

$$\sup_{t\le s\le t+1}[E(s)]^{1+\alpha} \le C_0[E(t)-E(t+1)]$$

Para $\forall t \ge 0$ siendo $C_0 > 0$ y $\alpha \ge 0$ entonces se tiene:

(i) Si $\alpha = 0$ existen $C_1, \delta > 0$ tal que $E(t) \le C_1 e^{-\delta t}$ $\forall t \ge 1$

(ii) Si $\alpha > 0$, $\exists C > 0$ tal que $E(t) \le C(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}$ $\forall t \ge 0$

Donde C depende de $E(0)$

Demostración: Ver M. NAKAO A [12]

2.1.19 Resultados de la teoría Espectral

A continuación seguimos con la demostración de la teoría espectral, que es esencial para la obtención del problema aproximado. Que consiste en proyectar el problema (1) en dimensión finita.

Sean V y H dos espacios de Hilbert completos, cuyos productos internos y normas serán denotados por $(\ .\ )_V, \|\cdot\|_V$ y $(\ .\ )_H, \|\cdot\|_H$ respectivamente, supongamos que:

1) V es denso en H;
2) $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta;
3) Está definida una forma sesquilineal y continua $a(u,v)$ en $V \times V$;
4) Existen α_0 y α en $\mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, tal que:
5) $a(u,v)$ es hermitiana; $\mathrm{Re}[a(v,v)+\alpha_0(v,v)] \ge \alpha\|v\|_V^2$, $\forall v \in V$;
6) A es denotado como el operador definido por la terna $(V,H,a(u,v))$.

Teorema II.10 (Teorema Espectral) Con las hipótesis anteriores obtenemos que:

(i) A es auto-adjunto y existe un sistema ortonormal y completo $(w_i)_{i\in IN}$ los w_i forman una colección numerable de H constituido por los vectores propios de A.

(ii) Si $(\lambda_i)_{i\in N}$ son los valores propios o autovalores de A correspondientes

a la sucesión $(w_i)_{i\in IN}$ entonces:

$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le..........\le\lambda_m\le......$ y $\lambda_m\to\infty$ cuando $m\to\infty$

(iii) El dominio de A esta dado por:

$$D(A)=\left\{u\in H;\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\,|(u,w_i)|^2<\infty\right\}.$$

(iv)
$$Au=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(u,w_i)w_i\,.$$

Para obtener la solución del problema aproximado, el cual será utilizado en el capítulo siguiente para resolver el problema en cuestión, necesitaremos dos resultados a seguir.

Teorema II.11 Prolongamiento de Soluciones para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados por (t,x), $t\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y sea $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ una función.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad ....(i)$$

Se dice que $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre Ω si:

(i) $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo;

(ii) $f(t,x)$ es continua en x para casi todo t fijo

(*iii*) Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, existe una función real $m_K(t)$ integrable tal que

$$|f(t,x)|_{IR^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t,x) \in K$$

Teorema II.12 (Teorema de Caratheodory)

Sea $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Entonces existe una solución de (i) en $x(t)$ sobre algún intervalo $|t-t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$

Lema II.8 Sea $\Omega = [0,T) \times B$ con $T > 0$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$. Sea $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ que cumple con las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Supongamos que $x(t)$ es una solución de (i) tal que $|x_0| \leq b$ en cualquier intervalo I, donde $x(t)$ está definida, se tendrá $|x(t)| \leq M, \forall t \in I, M$ independiente de I y $M < b$ entonces x posee un prolongamiento en $[0,T]$.

2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

2.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto acotado y con frontera bien regular Γ *y* $T > 0$. En $Q = \Omega \times (0,T)$ consideramos el siguiente sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(u') = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Donde las funciones M, ρ, u_0 *y* u_1 verifican las siguientes hipótesis

[H1] $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\Delta u_0\| + \|\nabla u_1\| < \varepsilon; \quad \varepsilon > 0$

siendo ε suficientemente pequeño

[H2] la función: $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 no decreciente tal que:

(i) $\alpha_0 |s|^{\gamma+1} \le |\rho(s)| \le \alpha_1 |s|^{\gamma+1}$; $\forall s \in \mathbb{R}$; $\alpha_0, \alpha_1 > 0$; $\gamma \ge 0$

(ii) $0 < \dfrac{d\rho}{ds}(s) \le \tilde{c} |s|^\gamma$ y $\rho(0) = 0$; $\forall s \in \mathbb{R}$; $\tilde{c} > 0$

$$\gamma \ge 0 \ si \ n \le 2 \ y \ 0 \le \gamma \le \frac{2}{n-2} \ si \ n \ge 3$$

(iii) ρ y $\dfrac{d\rho}{ds}$ son continuas en $\mathbb{R}$

[H3] La función $M : [0, \infty[\to [0, \infty[$; M de clase C^1 tal que:

(i)

$M(s) \ge m_0 > 0$; $\hat{M}(s) \le sM(s)$; $|M'(s)| \le a_2 |s|^p$ donde $a_2 > 0$, $p \ge 0$, $\gamma < 2p+1$

Y $\hat{M}(s) = \int_0^s M(r)dr$

(ii) $E(t) = \|u'(t)\|^2 + \hat{M}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)$

Es importante observar que el término $\rho(u'(t))$ representa una disipación de la Energía asociado a (1). El método de Faedo-Galerkin se utilizó para demostrar la existencia de la solución global del problema de Cauchy, asociado a la ecuación (1). La unicidad de la solución se demostró utilizándose la técnica de contradicción con auxilio de la desigualdad de Gronwall.

Para alcanzar estos objetivos definidos anteriormente, se dividió este trabajo en cuatro etapas:

i) Estudiar la existencia de soluciones locales a través del método de Faedo-Galerkin

ii) Obtener estimativas a priori y prolongamiento de la solución (solución global)

iii) Mostrar la unicidad de la solución.

iv) Determinar el comportamiento asintótico y el decaimiento exponencial o polinomial de la energía asociada a (1)

Definición II.12

Sean u_0, u_1, ρ y M cumpliendo con las hipótesis dadas en $[H_1],[H_2]$ y $[H_3]$ definimos la solución fuerte del problema (1) y sea la función u tal que:

$u \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$

$u' \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$

$u'' \in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))$

que satisface:

$$(u'',v)+M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla v)+(\rho(u'),v)=0, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

Teorema II.13 (Existencia Global)

Asumiendo las hipótesis $[H_1],[H_2]$ y $[H_3]$ existe una constante positiva $\varepsilon_0>0$; donde

$0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1$; tal que si: $\|\Delta u_0\|+\|\nabla u_1\|<\varepsilon_0$

Y

$$H(0)+\alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{\gamma}{(2p+1)-\gamma}\varepsilon_0^3\le\frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon_0^2 \tag{2.1}$$

donde $H(t)=\|\nabla u_m'(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2$

entonces el problema (1) admite una única solución tal que:

$$\begin{aligned}
&1)\ u\in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\\
&2)\ u'\in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\\
&3)\ u''\in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\\
&4)\ \frac{d}{dt}(u',v)+M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u.\nabla v)+\rho(u',v)=0,\ \forall v\in H_0^1(\Omega) \text{ en el sentido de } D'(\Omega)\\
&5)\ u(0)=u_0 \text{ y } u'(0)=u_1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 Formulación Variacional

Para estudiar la existencia de la solución del problema (1), se consideró el siguiente problema variacional asociado al problema (1), definido sobre $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Se determina que para $u = u(x,t)$ tal que para todo $v \in V$ se tiene:

$$\begin{cases} (u'',v) + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla v) + (\rho(u'),v) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u'(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

donde para una clase de funciones u, u' y u'' se cumple que:

$u \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

$u' \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega))$

$u'' \in L^\infty(0,T_0; L^2(\Omega))$

entonces u es llamada solución fuerte del sistema (1).

Demostración:

2.2.3 Soluciones Aproximadas (Solución Local)

En el presente capítulo se utilizó el Teorema Espectral para proyectar el problema en estudio a espacios de dimensión finita, obteniendo un problema más simple que tendrá solución garantizada por el teorema de Caratheodory.

El teorema espectral para operadores auto-adjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal $(w_j)_{j\in IN}$ de $L^2(\Omega)$ constituidas por las auto-funciones del operador $-\Delta$, que son soluciones del problema de Dirichlet:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j \\ \quad w_j|\Gamma = 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

donde $(\lambda_j)_{j\in IN}$ son los correspondientes autovalores de $-\Delta$, siendo,

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots\ldots\ldots \le \lambda_j \le \ldots\ldots\ldots \;\; y \;\; \lambda_j \to \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

también se sigue que:

$\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)$

$\left(\dfrac{w_j}{\lambda_j}\right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

para cada m denotamos por $V_m=[w_1,w_2,.......,w_m]$ al espacio generado por las m primeras autofunciones del sistema $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, queremos encontrar una función u_m tal que:

$$u_m:(0,t_m)\longrightarrow V_m\subset V=H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$$

$$t\longrightarrow u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i$$

donde las funciones g_{im} son funciones reales definidas en algún intervalo $[0,t_m)$

y

que satisface las condiciones iníciales del siguiente problema aproximado:

$$\left|\begin{array}{l}(u_m''(t),w_j)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla w_j)+(\rho(u_m'(t)),w_j)=0,\ \ \forall w_j\in V_m\\ u_m(0)=u_{om}\to u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\quad \text{cuando } m\to\infty\\ u_m'(t)=u_{1m}\to u_1\in H_0^1(\Omega)\ \text{ cuando }\ m\to\infty\end{array}\right. \qquad (2.5)$$

para $1\le j\le m$.

este sistema tiene solución sobre $[0,T_m]$ por medio del teorema de Caratheodory.

En efecto para cada término tenemos:

- $(u_m''(t),w_j)=(\sum_{i=1}^{m}g_{im}''(t)w_i,w_j)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}''(t)(w_i,w_j)=g_{jm}''(t)$ (2.6)

- $M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),w_j)=M\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{im}^2(t)\right)(-\Delta(\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i),w_i)$

$$=M\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)(-\Delta w_i,w_j)]=M\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)(\lambda_i w_i,w_j)]$$

$$=M\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_{im}^2(t)\right)\lambda_j g_{jm}(t) \qquad (2.7)$$

- $(\rho(u_m'(t)),w_j)=(\rho(\sum_{i=1}^{m}g_{im}'(t)w_i),w_j)$; $1\le j\le m$ (2.8) de (2.6), (2.7) y (2.8) se tiene:

$$g''_{jm}(t) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) + (\rho(u'_m(t)), w_i) = 0 \tag{2.9}$$

como u_{0m} y $u_{1m} \in V_m$, tal que $u_{om} \to u_0$ converge en V, y $u_{1m} \to u_1$ converge fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Como $(w_j)_{j\in IN}$ es una base de V y de $H_0^1(\Omega)$, entonces se puede escribir:

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(x), \qquad u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i w_i(x)$$

y por lo tanto es fácil deducir que

$$u_{0m}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i(x), \qquad u_{1m}(x) = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i(x)$$

también concluimos que:

$$g_{jm}(t) = c_j \quad y \quad g'_{jm}(t) = d_j \tag{2.10}$$

de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} g''_{jm}(t) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) + (\rho(u'_m(t)), w_j) = 0 \\ g_{jm}(t) = c_j \\ g'_{jm}(t) = d_j \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$j = 1,2,\ldots\ldots,m$

ahora en forma matricial se tiene:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{mm}(t) \\ g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

luego:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ g''_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ -M(\|\nabla u(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t)-(\rho(u'_m(t)),w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}-(\rho(u'_m(t)),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -(\rho(u'_m(t)),w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(\rho(u'_m(t)),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 \\ , \\ , \\ . \\ 0 \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -(\rho(u'_m(t)),w_1) \\ . \\ . \\ \vdots \\ -(\rho(u'_m(t)),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

tal que:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} \cdot Y + A + B = F(t,Y)$$

$$Y'(t) = CY + A + B = F(t,Y)$$

donde:

0 = matriz nula $m\times m$, I = matriz identidad $m\times m$ y $C=\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$

también se tiene:

$$Y(0)=\begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = Y_0$$

así tenemos el siguiente sistema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F(t,Y) \\ \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{2.12}$$

ahora (2.12) satisface las condiciones del teorema de Caratheodory entonces si

$F : D \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m+1}$

Donde $D = [0,T] \times B$, T finito > 0, $G = \{ Y \in \mathbb{R}^{2m}, \|Y\| \leq b \}$, $b > 0$, $Y_0 \in G$

Probemos que:

a) $F(t,Y)$ es medible en t para cada Y fijo.

Si fijamos Y tenemos que A, B y C no dependen de t.En general $F(t,Y)$ no depende

de t entonces F es medible en $t \in]0,T[$

b) $F(t,Y)$ es continua en Y para cada t fijo.

I) Si t es fijado, entonces el vector A es continua en Y

en efecto: como $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$ depende solo de los $g_{im}(t)$ para todo i=1,2…,m

entonces existe $(\vec{g}_m^k)_{k \in IN}$ una sucesión de $(\vec{g}_m)$ tal que $(\vec{g}_m^k)_{k \in \mathbb{N}} \to (\vec{g}_m^0)$ cuando $k \to \infty$

siendo $\vec{g}_m = (g_{1m}, \ldots\ldots, g_{mm})$; $\vec{g}_m^k = (g_{1m}^k, \ldots\ldots, g_{mm}^k)$ y $\vec{g}_m^0 = (g_{1m}^0, \ldots\ldots, g_{mm}^0)$

se sigue también: $g_{im}^k \to g_{im}^0$ cuando $k \to \infty$ $\forall i = 1, 2 \ldots, m$

luego: $u_m^k(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^k(t) \to u_m^0(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^0$ cuando $k \to \infty$

por otro lado se tiene:

$$\|\nabla u_m^k(t)\|^2 = (\nabla u_m^k(t), \nabla u_m^k(t)) = (\sum_{i=1}^{m} \nabla g_m^k(t) w_i, \sum_{i=1}^{m} \nabla g_m^k(t) w_i) =$$

$$(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \nabla w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \nabla w_i)$$

$$(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \sqrt{\lambda_i} w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \sqrt{\lambda_i} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (g_m^k)^2(t) \lambda_i w_i \quad \to \quad \sum_{i=1}^{m} (g_m^0)^2(t) \lambda_i w_i = \|\nabla u_m^0(t)\|^2;$$

$k \to \infty$

luego $\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2 \rightarrow \left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2$;cuando $k \rightarrow \infty$

Y como M es continua entonces:

$$M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2) \rightarrow M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2) \quad ;\text{cuando } k \rightarrow \infty$$

así:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2)\lambda_1 g_{1m}^k(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2)\lambda_m g_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2)\lambda_1 g_{1m}^0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2)\lambda_m g_{mm}^0(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

cuando $k \rightarrow \infty$

luego A es continua en Y

II) B es continua Y

en efecto $u_m'(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}'(t) w_i$ depende solo de $g_{im}'(t)$

entonces existe una sucesión $(\vec{g}_m'^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\vec{g}_m')$ tal que $(g_m'^k)_{k\in\mathbb{N}} \rightarrow (g_m'^0)$; $k \rightarrow \infty$

siendo $\vec{g}_m' = (g_{1m}', \ldots\ldots g_{mm})$; $\vec{g}_m^k = (g_{1m}'^k, \ldots\ldots, g_{mm}'^k)$ y $\vec{g}_m^0 = (g_{1m}'^0, \ldots\ldots, g_{mm}'^0)$

se sigue también: $g_{im}'^k \rightarrow g_{im}'^0$; $k \rightarrow \infty$ $\forall i = 1,2\ldots,m$

luego: $u_m'^k(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}'^k(t) \rightarrow u_m'^0(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}'^0$; $k \rightarrow \infty$

$$u_m'^k(t) \rightarrow u_m'^0(t) \,;\; k \rightarrow \infty$$

y como ρ es continua entonces:

$$\rho(u_m'^k(t)) \rightarrow \rho(u_m'^0(t)) \,;\; k \rightarrow \infty$$

luego

$$(\rho(u_m'^k(t)), w_i) \rightarrow (\rho(u_m'^0(t)), w_i) \,;\; k \rightarrow \infty \,;\; \forall i = 1,2,\ldots m$$

así:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (\rho(u_m'^k(t)), w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ (\rho(u_m'^k(t)).w_m) \end{bmatrix}_{2mx1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (\rho(u_m'^0(t)), w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ (\rho(u_m'^0(t)).w_m) \end{bmatrix}_{2mx1} \; ; \; k \rightarrow \infty$$

luego B es continua en Y

c) Para cada compacto K en D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que:

$$\|F(t,Y)\| \leq I_K(t) \quad \forall (t,Y) \in K$$

Entonces $\exists C_A \, / \quad \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq C_A$

y como M es continua entonces existe una constante K_1 tal que

$(i) \quad M(\|\nabla u_m(t)\|^2) \leq K_1$

también como ρ es continúa entonces $\exists \, K_2 > 0 \, / \, |\rho(u'(t))| \leq K_2$

por otro lado:

$$(ii) \quad \|Y\|^2 = |g_{1m}(t)|^2 + |g_{2m}(t)|^2 + \ldots\ldots + |g_{mm}(t)|^2 + |g'_{1m}(t)|^2 + |g'_{2m}(t)|^2 + \ldots\ldots + |g'_{mm}(t)|^2$$

$(iii) \quad \tilde{\lambda} = \max\{\lambda_j \, ; \quad 1 \leq j \leq m\}$

como $Y \in G$ deducimos que:

$$\text{(iv)} \quad \begin{aligned} |g_{im}(t)| &\leq b; \quad \forall i = 1, \ldots\ldots, m \\ |g'_{im}(t)| &\leq b; \quad \forall i = 1, \ldots\ldots, m \end{aligned}$$

luego de (i),(ii),(iii) y (iv)

$$\|A\|_{2mx1} \leq \sum_{i=1}^{m} \left| -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_i g_{im}(t) \right| \leq K_1 (\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| |g_{im}(t)|) \leq K_1 \tilde{\lambda} m b \qquad (2.13)$$

$$\|B\|_{2mx1} \leq \sum_{i=1}^{m} |-(\rho(u'_m(t)), w_i)| \leq (\sum_{i=1}^{m} |\rho(u'_m(t))| |w_i|) \leq |\rho(u'_m(t))| \sum_{i=1}^{m} |w_i| \leq K_2 m \qquad (2.14)$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_{2m\times 2m} \leq \|I\| = m \tag{2.15}$$

luego de (2.13), (2.14) y (2.15)

$$\|F(t,Y)\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y + A + B\right\| \leq \left\|\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\| \|Y\| + \|A\| + \|B\|$$

$$\|F(t,Y)\| \leq mb + K_1 \tilde{\lambda} mb + K_2 m = m_k(t) \tag{2.16}$$

Siendo $I_K(t)$ una función real integrable pues K_1, K_2 y b son funciones integrables $\forall t \geq 0$ entonces concluimos que (2.12) satisface las condiciones de Caratheodory. Así tenemos que existe **Y** una solución definida en $[0, T_m[$, $0 < t_m < T$ y por lo tanto u_m es solución del problema aproximado en el intervalo $[0, T_m[$. Para extender esta solución al intervalo $[0, T]$ se tomó las siguientes estimativas.

2.2.4 Estimativas a priori

Primera Estimativa.- Multiplicando a (2.5) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de $j = 1$ hasta $j = m$ se tiene:

$$(u''_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla \sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) + (\rho(u'_m(t)), \sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) = 0$$

$$(u''_m(t), u'_m) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla u'_m) + (\rho(u'_m(t)), u'_m) = 0$$

de (H_3)-(i) con respecto a $\hat{M}$ se deduce:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) + \int_\Omega \rho(u'_m(t)) u'_m(t) dx = 0 \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) de 0 a t se tiene:

$$\|u'_m(t)\|^2 + \hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) + 2\int_0^t \int_\Omega \rho(u'_m(s)) u'_m(s) dx ds = \|u'_m(0)\|^2 + \hat{M}(\|\nabla u_m(0)\|^2)$$

$$= E_m(0)$$

donde $E_m(t)=\|u_m'(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)$

por hipótesis sabemos que

$$M(s)\geq m_0 \text{ entonces } \hat{M}(r)=\int_0^s M(r)dr\geq\int_0^s m_0=sm_0$$

$$\text{entonces } \|\nabla u_m(t)\|m_0\leq\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)$$

$$\|u_m'(t)\|^2+m_0(\|\nabla u_m(t)\|^2)+2\int_0^t\int_\Omega\rho(u_m'(s))u_m'(s)dxds\leq\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(0)\|^2)=$$

$$=\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(0)\|^2)=E_m(0)\qquad(2.18)$$

por otro lado sabemos que:

(i) $u_m'(o)=u_{1m}\to u_1=u'(0)$ en $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$\Rightarrow\|u_{1m}\|\to\|u_1\|\Rightarrow\|u_{1m}\|\leq c_1\qquad(2.19)$$

(ii) $u_m(0)=u_{0m}\to u_0$ en $(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\hookrightarrow L^2(\Omega)$ es decir

$$u_{0m}\to u_0 \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y } \nabla u_{0m}\to\nabla u_o \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\|\nabla u_{0m}\|\to\|\nabla u_0\| \quad \text{en } L^2(\Omega)\Rightarrow\|\nabla u_{0m}\|\leq c_2\qquad(2.20)$$

Además como $\hat{M}$ es continua en $C([0,+\infty])$ entonces por (2.20):

$$\hat{M}(\|\nabla u_{0m}\|^2)\leq c_3\qquad(2.21)$$

ahora de (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21), deducimos que existe una constante c_0 independiente de $m\in\mathbb{N}$, tal que:

$$\|u_m'(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2+2\int_0^t\int_\Omega\rho(u_m'(s))u_m'(s)dxds=E_m(0)\leq E(0)=c_0(u_0,u_1)\qquad(2.22)$$

entonces:

$$\begin{aligned}&\|u_m'(t)\|^2\leq c_0\\&\|\nabla u_m(t)\|^2\leq c_1\ \forall t\geq 0\end{aligned}\qquad(2.23)$$

$$c=\frac{c_0}{m_0}$$

esto implica que:

$$\begin{aligned}&(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\\&(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\end{aligned}\qquad(2.24)$$

Observación II.12:

la estimativa:

$$E_m(t) \leq \frac{CE(0)}{(1+t)^{2/\gamma}} \tag{2.25}$$

es de considerable importancia para la existencia global. Esta estimativa se probo en el teorema II.14. Entonces si damos como valido (2.25) se tiene:

$$\|u'_m(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq E_m(t) = \|u'_m(t)\|^2 + M(\|\nabla u_m(t)\|^2) \leq \frac{CE(0)}{(1+t)^{2/\gamma}}$$

$$\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq \frac{CE(0)}{m_0(1+t)^{2/\gamma}} \tag{2.26}$$

Segunda Estimativa: Multiplicamos a (2.5) por $\lambda_j g'_{jm}(t)$ y sumando de $j = 1$ hasta $j = m$ obtenemos:

$$(u''_m(t), \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g'_{jm}(t) w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g'_{jm}(t) w_j) +$$

$$+(\rho(u'_m(t)), \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g'_{jm}(t) w_j) = 0$$

$$(u''_m(t), -\Delta \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) \lambda_j w_j) +$$

$$+(\rho(u'_m(t)), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) \lambda_j w_j) = 0$$

$$(u''_m(t), -\Delta \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\Delta \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) +$$

$$+(\rho(u'_m(t)), -\Delta \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j) = 0$$

$$(u''_m(t), -\Delta u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\Delta u'_m(t)) + (\rho(u'_m(t)), -\Delta u'_m(t)) = 0$$

$$(\nabla u''_m(t), \nabla u'_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) + (\nabla \rho(u'_m(t)), \nabla u'_m(t)) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2]+\int_\Omega \frac{d\rho}{dv}(u_m'(t))|\nabla u_m'(t)|^2\,dx=$$

$$=M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\|\Delta u_m(t)\|^2 \tag{2.27}$$

y sea

$$I_1=M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\|\Delta u_m(t)\|^2 \tag{2.28}$$

por otro lado usamos $(H_3)(ii)$ en (2.28) obtenemos:

$$I_1\le\left|M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right|\|\nabla u_m(t)\|\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$I_1\le\alpha_2\|\nabla u_m(t)\|^{2p}\|\nabla u_m(t)\|\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$I_1\le\alpha_2\|\nabla u_m(t)\|^{2p+1}\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 \tag{2.29}$$

de (2.26) en (2.29) se tiene.

$$I_1\le\alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2\gamma+1}{2}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}}}\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 \tag{2.30}$$

siguiendo de (2.27) y (2.30) tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}H\,(t)+\int_\Omega\frac{d\rho}{dv}(u_m'(t))|\nabla u_m'(t)|^2\,dx\le$$

$$\alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2\gamma+1}{2}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}}}\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 \tag{2.31}$$

donde $H(t)=\|\nabla u_m'(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|)\|\Delta u_m(t)\|^2$

$$\|\nabla u_1\|+\|\Delta u_0\|<\varepsilon_0$$

Y de la hipótesis del teorema 1 tenemos:

$$H(0)+\alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{\gamma}{(2p+1)-\gamma}\varepsilon_0^3\le\frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon_0^2$$

$$\|\Delta u_0\| + \|\nabla u_1\| < \varepsilon_0$$

Afirmación II.1: afirmamos lo siguiente

$$\|\nabla u_m'(t)\| + \|\Delta u_m(t)\| < \varepsilon_0 \quad \forall t \geq 0, \tag{2.32}$$

Ahora supongamos que (2.32) es falsa y llamemos:

$$f_m(t) = \|\nabla u_m'(t)\| + \|\Delta u_m(t)\|$$

$$\Rightarrow f_m(t) < \varepsilon_0$$

de la hipótesis se tiene

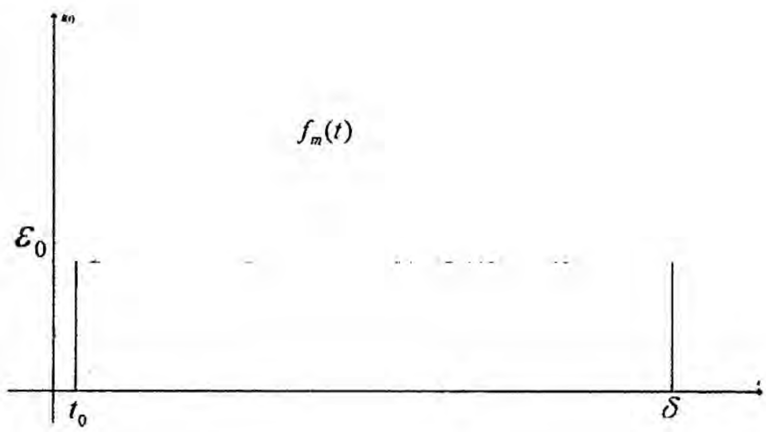
$$f_m(0) < \varepsilon_0 \quad \text{..........................(*)}$$

como (2.32) es falsa tenemos

$$\exists t \geq 0 \quad / \quad f_m(t) \geq \varepsilon \text{ ....(**)}$$

luego debido a la continuidad de $f_m(t)$ su grafico puede ser representado por:

Figura N° 2.1



De (*) existe una vecindad U tal que $U = [0, \delta]$ / $\delta \geq 0$

Tal que:

$$f_m(t) < \varepsilon_0 \quad \forall t \in U$$

Por otro lado sea el conjunto:

$$A = \{t \geq 0 \,/\, f_m(t) = \varepsilon_0\}$$

(i) $A \neq \phi$

En efecto por el teorema del valor intermedio de $(*)$ y $(**)$ tenemos que

$\exists t_0 \in [0,t]$ tal que $f_m(t_0) = \varepsilon$

(ii) A esta acotado inferiormente por 0

(iii) Existe Inf A

En efecto sea $t_1 \geq 0$ tal que $t_1 \leq t$, $\forall t \in A$ tomemos $r = d(t_1;A)$

Si $r = 0$ entonces $\inf_{t\in A} d(t_1;t) = 0 \Rightarrow \inf_{t\in A} d(t-t_1) = 0$ ....$(***)$

sea $\varepsilon > 0$ arbitrario por la definición de ínfimo $(***)$ se tiene:

$\exists t_0 \in A / t_\varepsilon - t_1 \leq \varepsilon \Rightarrow t_\varepsilon \leq \varepsilon + t_1$ entonces $t_1 = \inf A$

Si $r \neq 0$ tomamos $t_2 = t_1 + r \Rightarrow d(t_1, A) = 0$

sea $\varepsilon > 0$ arbitrario por la definición de ínfimo $(***)$ se tiene:

$\exists t_0 \in A / t_\varepsilon - t_2 \leq \varepsilon \Rightarrow t_\varepsilon \leq \varepsilon + r + t_1$ entonces $t_1 = \inf A$ ya que $\varepsilon + r > 0$

entonces $\exists \inf A$

denotemos por $t^* = \inf\{t \geq 0, f_m(t) = \varepsilon_0\} = \inf A$

esto determina lo siguiente y sabiendo que $f_m(t) = \|\nabla u_m'(t)\| + \|\Delta u_m(t)\|$

entonces:

$$\begin{cases} \|\nabla u_m'(t)\| + \|\Delta u_m(t)\| \leq \varepsilon_0 \ ; \ 0 \leq t < t^* \\ \|\nabla u_m'(t^*)\| + \|\Delta u_m(t^*)\| = \varepsilon_0 \ ; t = t^* \end{cases} \tag{2.33}$$

Integrando (2.31) de 0 a t^*, tenemos:

$$H(t^*) + \int_0^{t^*} \frac{d\rho}{dv}(u_m'(s))\|\nabla u_m'(s)\|^2 ds \leq H(0) + \alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2p+1}{2}} \int_0^{t^*} \frac{1}{(1+t)^{\frac{2p+1}{\gamma}}} \|\nabla u_m'(s)\| \|\Delta u_m(s)\|^2 ds \tag{2.34}$$

de (2.33) se tiene:

$$\|\nabla u_m'(t)\| \leq \varepsilon_0 \quad y \quad \|\Delta u_m(t)\| \leq \varepsilon_0 \tag{2.35}$$

luego del segundo miembro

$$\int_0^{t^*}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2p+1}{\gamma}}}\|\nabla u'_m(s)\|\|\Delta u_m(s)\|^2\,ds \le \varepsilon_0^3\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^{\frac{2p+1}{\gamma}}} = \varepsilon_0^3\int_0^{\infty}(1+t)^{-\frac{2p+1}{\gamma}}\,d(1+t)$$

$$\le \varepsilon_0^3 \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{(-\frac{2p+1}{\gamma}+1)}(1+t)^{-\frac{2p+1}{\gamma}+1}\right]_0^t = \varepsilon_0^3 \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\gamma}{-2p-1+\gamma}(1+t)^{\frac{-2p-1+\gamma}{\gamma}}\right]_0^t$$

$$= \varepsilon_0^3 \lim_{t\to\infty}\left[(\frac{\gamma}{-2p-1+\gamma}(1+t)^{\frac{-2p-1+\gamma}{\gamma}}) - (\frac{\gamma}{-2p-1+\gamma})\right]$$

$$= \varepsilon_0^3\left[0-(\frac{\gamma}{-2p-1+\gamma})\right] = \frac{\gamma}{(2p+1)-\gamma}\varepsilon_0^3$$

entonces:

$$\int_0^{t^*}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2p+1}{\gamma}}}\|\nabla u'_m(s)\|\|\Delta u_m(s)\|^2\,ds \le \frac{\gamma}{(2p+1)-\gamma}\varepsilon_0^3 \qquad (2.36)$$

de (2.35) y (2.36) se obtiene:

$$H(t^*) + \int_0^{t^*}\frac{d\rho}{dv}(u'_m(s))\|\nabla u'_m(s)\|^2\,ds \le H(0) + \alpha_2\left(\frac{CE(0)}{m_0}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{\gamma}{(2p+1)-\gamma}\varepsilon_0^3 \quad (2.37)$$

a partir de (2.33) y (2.37) deducimos que:

$$H(t^*) < \frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon_0^2 \qquad (2.38)$$

prueba:

$$\|u'_m(t^*)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t^*)\|^2 \le H(t^*) < \frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon_0^2$$

$$\min\{1,m_0\}(\|u'_m(t^*)\|^2 + \|\Delta u_m(t^*)\|^2) \le \|u'_m(t^*)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t^*)\|^2$$

$$\min\{1,m_0\}\frac{1}{2}(\|u'_m(t^*)\| + \|\Delta u_m(t^*)\|)^2 \le \min\{1,m_0\}(\|u'_m(t^*)\|^2 + \|\Delta u_m(t^*)\|^2)$$

de (2.38) se tiene:

$$\frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon^2 < \min\{1,m_0\}(\|u'_m(t^*)\|^2 + \|\Delta u_m(t^*)\|^2)$$

se sigue que:

$$\frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon^2 < \frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon^2 \tag{2.39}$$

luego (2.39) es una contradicción en conclusión deducimos que:

$$\left\|\nabla u_m'(t^*)\right\|^2 + \left\|\Delta u_m(t^*)\right\|^2 < \varepsilon_0$$

entonces (2.33) es una contradicción y se verifica la **Afirmación II.1** y deducimos que:

$$H(t) = \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2 + M(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2)\left\|\Delta u_m(t)\right\|^2 < \frac{1}{2}\min\{1,m_0\}\varepsilon_0^2$$

$$\left\|\nabla u_m'(t)\right\| + \left\|\Delta u_m(t)\right\| < \varepsilon_0\,; \quad \forall t \geq 0 \tag{2.40}$$

esto implica que:

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Tercera Estimativa: Multiplicando (2.5) por $g_{jm}''(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\|u_m''(t)\right\|^2 &= M\left(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\right)(\Delta u_m(t), u_m''(t)) - (\rho(u_m'(t)), u_m''(t)) \\ &\leq M\left(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\right)\left\|\Delta u_m(t)\right\|\left\|u_m''(t)\right\| + \left\|(\rho(u_m'(t))\right\|\left\|u_m''(t)\right\| \end{aligned}$$

$$\left\|u_m''(t)\right\| \leq M\left(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\right)\left\|\Delta u_m(t)\right\| + \left\|(\rho(u_m'(t))\right\|$$

de (H_2)-(i) se tiene:

$$\left\|u_m''(t)\right\| \leq M\left(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\right)\left\|\Delta u_m(t)\right\| + \alpha_1\left\|u_m'(t)\right\|_{L^{2(\gamma+1)}(\Omega)}^{2(\gamma+1)}$$

también

$$\begin{aligned} &\left\|u_m''(t)\right\| \leq M\left(\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\right)\left\|\Delta u_m(t)\right\| + \alpha_1 C\left\|\nabla u_m'(t)\right\|^{2(\gamma+1)} \\ &\left\|u_m''(t)\right\| \leq c_3 + \alpha_1 C\left\|\nabla u_m'(t)\right\|^{2(\gamma+1)} \\ &\left\|u_m''(t)\right\| \leq c_3 + \alpha_1 C\varepsilon_0^{2(\gamma+1)} = c_4 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left\|u_m''(t)\right\| \leq c_4 \quad \forall t \geq 0 \tag{2.42}$$

esto implica:

$$(u_m'') \quad \text{esta acotado en } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \tag{2.43}$$

Luego se tiene de (2.24), (2.41) y (2.43);

$$
\begin{aligned}
&(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\\
&(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \qquad (2.44)\\
&(u_m'') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T,L^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

De las estimativas encontradas nos permite pasar al límite en el problema aproximado (2.5), obteniendo una solución u de (1)

2.2.5 Convergencia de las soluciones aproximadas

de (2.44) tenemos:

$$
\begin{aligned}
&(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\\
&(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega))\\
&(u_m'') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T,L^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

entonces existe una subsucesión de (u_m) que se denota de la misma forma y una función u tal que:

$$
\begin{aligned}
&u_m' \xrightarrow{\;*\;} u' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\\
&u_m \xrightarrow{\;*\;} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.45)\\
&u_m'' \xrightarrow{\;*\;} u'' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

$(u_m'',v)\to(u_m'',v)$ en $D'(0,T)$ para cada $v\in H_0^1(\Omega)$

Se identifica a $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ como un sub espacio de $(L^1(0,T;H_0^1(\Omega)))'$ de este factor se sabe que $u_m'\to u'$ converge débil * en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces se tiene;

$$(u_m',w)\to(u',w),\quad \forall w\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.46)$$

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt$$

$$\int_0^T (\nabla u_m(t),\nabla w(t))dt \to \int_0^T (\nabla u(t),\nabla w(t))dt \quad \forall w\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\int_0^T (u_m'(t),w(t))dt \to \int_0^T (u(t),w(t))dt \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

en particular: $w(t)=v\theta(t)\quad \theta\in D(0,T);\quad v\in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T (u_m'(t),v\theta(t))dt \to \int_0^T (u'(t),v\theta(t))dt$$

luego se concluye que:

$$(u_m'(t),v)\to(u'(t),v) \quad \text{en} \quad D'(0,T),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

entonces:

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t),v)\to\frac{d}{dt}(u'(t),v) \quad \text{en} \quad D'(0,T)\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

lo que implica:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(u_m'(t),v)\theta(t)dt=-\int_0^t(u_m'(t),v)\theta'(t)dt\to-\int_0^t(u'(t),v)\theta'(t)dt$$

$$=\int_0^t\frac{d}{dt}(u'(t),v)\theta(t)dt \qquad (2.47)$$

$\theta\in D'(0,T),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$

2.2.6 Convergencia de ρ y de M

Convergencia de ρ

$(\rho(u_m'),v)\to(\rho(u'),v)$ en $D'(Q)$

Para verificar es necesario que $\rho(u'(t))$ sea limitada en $L^2(\Omega)$ utilizando la propiedad de la función ρ dada en $(H_1)(iii)$ se tiene que:

Afirmación II.2: $\|\rho(u_m'(t))\|_{L^2(Q)}$ es limitada independiente de m, o sea:

$$\|\rho(u_m'(t))\|_{L^2(Q)}\leq C$$

donde C es una constante positiva

PRUEBA:

Definimos:

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\left\{x\in\Omega_1 / |u_m'(x,t)|<1;\ \forall m\in\mathbb{N}\right\},\\ \Omega_2&=\left\{x\in\Omega_2 / |u_m'(x,t)|\geq 1;\ \forall m\in\mathbb{N}\right\}\end{aligned} \qquad (2.48)$$

luego se tiene

$$\|\rho(u_m'(x,t)\|_{L^2(Q)}^2=\int_0^T\int_{\Omega_1}|\rho(u'(x,.t))|^2dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_2}|\rho(u'(x,.t))|^2dxdt$$

$$\leq \int_0^T \int_{\Omega_1} \alpha_1 |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} \alpha_1 |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt \qquad (2.49)$$

para justificar la afirmación es necesario mostrar que la integral

$\int_0^T \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ y $\int_0^T \int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ están acotadas. En (2.44) se mostró que $(u'_m)_{m\in IN}$ es acotada en $L^\infty(0.T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y $L^2(0,T;L^2(\Omega) = L^2(Q)$.

por otro lado analizamos las acotaciones de las integrales $\int_0^T \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ y $\int_0^T \int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ para esto tendremos que seguir los valores que toma γ.

Caso 1: $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2}{n-2}$ para $n \geq 3$ entonces $2 \leq 2(\gamma+1) \leq \dfrac{2n}{n-2}$

Para $|u'_m(x,t)| < 1, \forall x \in \Omega_1$ se pude realizar la siguiente estimativa según la desigualdad se tiene:

$$\int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dx \leq \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^2 dx \leq \|u'_m(x,t)\|^2$$

ahora integramos de 0 a t se tiene

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dx \leq \int_0^T \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^2 dx \leq CT \qquad (2.50)$$

es limitada independientemente de m

Caso 2: $0 \leq \gamma \leq \dfrac{2}{n-2}$ para $n \geq 3$ entonces $2 \leq 2(\gamma+1) \leq \dfrac{2n}{n-2}$

verificando para $|u'_m(x,t)| \geq 1, \forall x \in \Omega_2$ se pude realizar la siguiente estimativa según la desigualdad se tiene:

$$\int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dx \leq \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \leq C\left[\int_{\Omega} |\nabla u'_m(x,t)|^2 dx\right]^{\frac{n-2}{n}}$$

Donde $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ luego integramos de 0 a T se tiene:

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt \leq \int_0^T \|\nabla u'_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{n-2}{n}} \leq CT \|\nabla u'_m\|_{L^\infty(0,T:H_0^1(\Omega))}^{\frac{n-2}{n}} \leq C_T \qquad (2.51)$$

donde $C_T > 0$ es una constante proveniente de la acotación de u'_m en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Por lo tanto para $0 < T < \infty$ se tiene que la integral $\int_0^T \int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ está acotada

Caso 3: $0 \le \gamma < \infty$ para n =1 ò n =2

Para $|u'_m(x,t)| < 1, \forall x \in \Omega_1$ se pude realizar la siguiente estimativa

$$\int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dx \le \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^2 dx \le \|u'_m(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.52}$$

son resultados de inmersión en los espacios de Sobolev se tiene que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow$ $L^\infty(\Omega)$ entonces para cada $t \in [0,T]$ fijo se tiene que:

esto se cumple para todo $\gamma \ge 0$, Y luego siguiendo los pasos como en el caso 1 se obtiene la acotación

Caso 4: $0 \le \gamma < \infty$ para n =1 ò n =2. y verificando para $|u'_m(x,t)| \ge 1, \forall x \in \Omega_2$

como $(u'_m)_{m \in IN} \in L^\infty(0.T;H_0^1(\Omega))$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dx \le \int_{\Omega} |u'_m(x)|^{2(\gamma+1)} dx \le |\Omega| \|u'_m\|^{2(\gamma+1)}_{L^\infty(\Omega)} \le |\Omega| C \|u'_m\|^{2(\gamma+1)}_{H_0^1(\Omega)}$$

con $C > 0$ una constante producto de la inmersión de Sobolev donde u'_m está acotada en $L^\infty(0.T;H_0^1(\Omega))$ con esta estimativa podemos limitar la integral:

$$\int_0^T \int_{\Omega_2} |u'_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt \le CT \tag{2.53}$$

es acotada independiente de $m \in \mathbb{N}$.

En conclusión la **afirmación II.2** está justificada.

Por el lema de Lions se tiene que:

$$\rho(u'_m) \to \rho(u') \quad \text{débil en } L^2(Q) \tag{2.54}$$

Luego: $<T,\rho(u'_m)> \to <T,\rho(u')>$ para toda $T \in (L^2(Q))' \cong L^2(Q)$

esto implica

$$\int_Q \rho(u'_m(x,t))w(x,t)dxdt \to \int_Q \rho(u'(x,t))w(x,t)dxdt \quad \forall w \in L^2(Q)$$

haciendo $w = v\theta$, $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\theta \in D(0,T)$ entonces $w \in L^2(Q)$, por lo tanto

$$\int_0^T \left[\int_\Omega \rho(u'_m(x,t)) v(x) \right] \theta(t) dt \to \int_0^T \left[\int_\Omega \rho(u'(x,t) v(x) \right] \theta(t) dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\theta \in D(0,T)$. De esto se concluye

$$(\rho(u'_m), v) \to (\rho(u'), v) \tag{2.55}$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

Convergencia de *M*: Por las inmersiones $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow$ $L^2(\Omega)$ y como la sucesión (u_m) es acotada en el espacio de Banach tal que:

$$W(0,T) = \left\{ u \in L^2([0.T[; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) : \quad u' \in L^2([0,T[: L^2(\Omega)) \right\} \tag{2.56}$$

luego por el teorema de Ausbin-Lions

$$W \hookrightarrow L^2(0,T : H_0^1(\Omega)) \tag{2.57}$$

Es decir existe una subsucesión $(u_{m_k})_{k \in IN}$ de la sucesión $(u_m)_{m \in IN}$ tal que:

$$u_{m_k} \to u \text{ en } L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$$

esto es

$$\int_0^T \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\|^2 dt \to \int_0^T \left\| \nabla u(t) \right\|^2 dt$$

Entonces

$$\left\| \nabla u_{m_k} \right\|^2 \to \left\| \nabla u \right\|^2 \quad \text{en c.t.p de } (0,T) \tag{2.58}$$

ahora como $M \in C^1([0,+\infty[)$ se tiene

$$M(\eta) - M(\psi) = M'(\alpha)(\eta - \psi)$$

donde $\alpha \in [\eta, \psi] : \alpha = (1-\beta)\eta + \beta\psi ; \beta \in [0,1]$

$$\left| M(\eta) - M(\psi) \right| = \left| M'(\alpha) \right| \left| \eta - \psi \right|$$

tomando $\eta = \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\|^2$ y $\psi = \left\| \nabla u \right\|^2 : t \in [0,T]$ entonces

$$\left| M(\left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\|^2) - M(\left\| \nabla u(t) \right\|^2) \right| \leq C \left| \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\|^2 - \left\| \nabla u(t) \right\|^2 \right|$$

$$\leq C \left| \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\| - \left\| \nabla u(t) \right\| \right| \left| \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\| + \left\| \nabla u(t) \right\| \right|$$

$$\leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|$$

Luego se tiene:

$$\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right|\leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right| \tag{2.59}$$

de aquí integrando de 0 a T se tiene:

$$\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right|dt\leq C\int_0^T\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|dt\to 0 \tag{2.60}$$

de (2.60) tenemos

$$M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)\to M(\left\|\nabla u\ (t)\right\|^2)\ \text{ c.t.p en } [0,T] \tag{2.61}$$

también tenemos que $u_{m_k}\to u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ si y solo si

$u_{m_k}\to u\to 0$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, y como $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$;

entonces $u_{m_k}\to u\to 0$ en $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ luego

$$\int_0^T\left\|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right\|^2dt=C\int_0^T\left\|u_{m_k}(t)-u(t)\right\|^2_{H^1(\Omega)}dt\to 0 \tag{2.62}$$

Convergencia de término no lineal

$$\int_0^T\left[M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w)\right]\varphi(t)dt=$$

$$\int_0^T(M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)$$

$$+M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w))\varphi(t)dt$$

$$\leq\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)\right|\left|\varphi(t)\right|dt$$

$$+\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w)\right|\left|\varphi(t)\right|dt$$

$$\leq\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)\right|\left|\nabla u_{m_k}(t)\right|\left|\nabla w\right|\left|\varphi(t)\right|dt$$

$$+\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u(t)\right\|)\right|\left|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right|\left|w\right|\left|\varphi(t)\right|dt$$

$$\leq C\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)\right|dt+C\int_0^T\left|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right|dt\ \to\ 0 \tag{2.63}$$

así de todas las convergencias anteriores y considerando a la subsucesión u_m como solución del problema aproximado (2.5) y tendiendo $m \to \infty$ obtenemos

$$(u'',v) + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla v) + (\rho(u'),v) = 0, \quad v \in V_m$$

en el sentido distribucional

por lo tanto la solución (1) se demuestra lo siguiente

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ u' &\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u'' &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.2.6 Verificación de los datos iniciales

El objetivo de esta sección es mostrar que para una función dada en (2.11) satisface las condiciones iniciales dado en (2.5) esto es;

$$u(0) = u_0 \qquad \text{y} \qquad u'(0) = u_1 \tag{2.65}$$

Luego de (2.64) y de la **Proposición II.9** para $p = \infty$ y $V_1 = V_2 = H_0^1(\Omega)$ y sea

$$W_1(0,T) = \{u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)); \quad u' \in L^\infty(0,T:H_0^1(\Omega))\}$$

entonces:

$$u \in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.66}$$

de forma análoga haciendo $v = u'$ $p = \infty$; $V_1 = H_0^1(\Omega)$ y $V_2 = L^2(\Omega)$ y sea:

$$W_2(0,T) = \{v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \quad v' \in L^\infty(0,T:L^2(\Omega))\}$$

entonces:

$$u' \in C(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.67}$$

de esta forma tiene sentido verificar $u(0)$ y $u'(0)$

Verificación de $u(0)$: de (2.45) se tiene:

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

es decir

$$\left(u'_m, w\right) \to \left(u'_m, w\right) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

tomando $w = v\theta$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $\theta \in L^1(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T \left(u'_m(t), v\right)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u'(t), v\right)\theta(t)dt \quad \forall \theta \in L^1(0,T)$$

en particular el resultado anterior es válido para todo $\theta \in C(0,T)$ pues $C(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$

También se tiene $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

es decir

$$\left(u_m, w\right) \to \left(u_m, w\right) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

Entonces haciendo $w = v\varphi$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\varphi \in C^1(0,T)$ luego se tiene

$$\int_0^T \left(u_m(t), v\right)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u(t), v\right)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in L^1(0,T)$$

En particular el resultado es para todo $\varphi \in C(0,T)$ pues $C(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$ luego haciendo $\varphi = \theta'$ con $\theta \in C^1(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T \left(u'_m(t), v\right)\theta(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u'(t), v\right)\theta(t)dt$$

$$\int_0^T \left(u_m(t), v\right)\theta'(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u(t), v\right)\theta'(t)dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y para todo $\theta \in C^1(0,T)$ tal que $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$: sumando ambas ecuaciones se tiene

$$\int_0^T \left(u'_m(t), v\right)\theta(t)dt + \int_0^T \left(u_m(t), v\right)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u_m(t), v\right)\theta(t)\right] = -\left(u_m(0), v\right) \quad (2.68)$$

por otro lado

$$\int_0^T \left(u'(t), v\right)\theta(t)dt + \int_0^T \left(u(t), v\right)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u(t), v\right)\theta(t)\right] = -\left(u(0), v\right) \quad (2.69)$$

por lo tanto de (2.68) y (2.69) se tiene

$$\left(u_m(0), v\right) \to \left(u(0), v\right) \quad (2.70)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ más aun como $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$

fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$(u_m(0),v)\to(u_0,v) \qquad (2.71)$$

para cada $v\in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ y por la unicidad de límite se concluye que

$$u(0)=u_0 \qquad (2.72)$$

para evaluar u' en $t=0$ se utilla el resultado de $u_m''\to u''$ débil $*$ $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ es decir

$$(u_m'',w)\to(u''(0),w) \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

entonces con el mismo procedimiento hecho anteriormente tomamos $w=v\varphi$ con $v\in H_0^1(\Omega)$ y $\varphi\in L^1(0,T)$ se tiene que:

$$\int_0^T(u_m''(t),v)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T(u''(t),v)\varphi(t)dt \quad \forall\varphi\in L^1(0,T)$$

en particular para $\varphi\in C^1(0,T)\hookrightarrow L^1(0,T)$ se concluye que:

$$\int_0^T(u_m''(t),v)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T(u''(t),v)\varphi(t)dt$$

$$\int_0^T(u_m'(t),v)\varphi'(t)dt \;\to\; \int_0^T(u'(t),v)\varphi'(t)dt$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\varphi\in C^1(0,T)$ tal que $\varphi(0)=1$ y $\varphi(T)=0$ sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$\int_0^T(u_m''(t),v)\varphi(t)dt+\int_0^T(u_m'(t),v)\varphi'(t)dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[(u_m'(t),v)\varphi(t)\right]=-(u_m'(0),v) \qquad (2.73)$$

por otro lado se tiene que:

$$\int_0^T(u''(t),v)\varphi(t)dt+\int_0^T(u'(t),v)\varphi'(t)dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[(u'(t),v)\varphi(t)\right]=-(u'(0),v) \qquad (2.74)$$

de (2.73) y (2.74) y de la convergencia dada anteriormente se tiene

$$(u_m'(0),v)\to(u'(0),v) \qquad (2.75)$$

para cada $v\in H_0^1(\Omega)$, más aun como $u_m'(0)=u_{1m}'\to u_1'$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$(u_m'(0),v)\to(u_1(0),v)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y por la unicidad de límite se concluye que:

$$u'(0) = u_1 \tag{2.76}$$

ahora de (2.45), (2.72) y (2.76) concluimos que la función u es solución del problema (1) y con las condiciones de frontera, esta satisface la solución de la ecuación

2.2.7 Unicidad de la Solución

Supongamos que existen u y v dos soluciones que satisfacen las condiciones del Teorema (II.13). Sea $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ la solución de:

$$\left| \begin{array}{l} w'' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \rho(t,u') - \rho(t,v') = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{2.77}$$

Usando el teorema del valor intermedio, podemos deducir que existe θ entre u' y v' tal que:

$$\rho(u') - \rho(v') = \frac{d\rho}{dv}(\theta)(u' - v') \tag{2.78}$$

por otra parte tenemos

$$M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v = M(\|\nabla u\|^2)\Delta w + [M(\|\nabla u\|^2) - M(\|\nabla v\|^2)]\Delta v \tag{2.79}$$

de (2.77), (2.78) y (2.79) deducimos:

$$w'' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta w + \frac{d\rho}{dv}(\theta)w' = [M(\|\nabla u\|^2) - M(\|\nabla v\|^2)]\Delta v \tag{2.80}$$

También

$$(w'',z) - M(\|\nabla u\|^2)(\Delta w, z) + \frac{d\rho}{dv}(\theta)(w',z) = [M(\|\nabla u\|^2) - M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v, z)$$

Ahora de (2.80) haciendo $z = w'$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}[\|w'\|^2 + M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2] + 2\int_\Omega \frac{d\rho}{dv}(\theta)|w'|^2\, dx = 2[M(\|\nabla u\|^2) - M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v, w')$$

$$+2M'(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla u')\|\nabla w\|^2 \leq 2\left|M(\|\nabla u\|^2) - M(\|\nabla v)\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\| +$$

$$2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2 \tag{2.81}$$

también sabemos que $M(s)$ es continua entonces existe σ entre s_1 y s_2 tal que

$$M(s_2)-M(s_1)=M'(\sigma)(s_2-s_1)$$

de (2.80) en (2.81) del segundo miembro se tiene:

$$2\left|M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v)\|^2)\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2\le$$

$$2|M'(\sigma)|\left|\|\nabla u\|^2-\|\nabla v\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2$$

$$=2|M'(\sigma)|(\|\nabla u\|+\|\nabla v\|)(\|\nabla u\|-\|\nabla v\|)\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2$$

$$\le 2|M'|\|\nabla u\|+\|\nabla v\|\|\nabla w\|\|\Delta v\|\|w'\|+2|M'|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2=c_a\|\nabla w\|\|w'\|+2c_b\|\nabla w\|^2$$

$$\le\frac{c_a}{2}(\|\nabla w\|^2+\|w'\|^2)+2c_b\|\nabla w\|^2=\frac{c_a}{2}\|w'\|^2+(\frac{c_a}{2}+2c_b)\|\nabla w\|^2\le c_4(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2)$$

para $c_4=\max\{\frac{c_a}{2};\frac{c_a}{2}+2c_b\}$

ahora integrando (2.81) de 0 a t se tiene:

$$\int_0^t\frac{d}{dt}[\|w'(s)\|^2+M(\|\nabla u(s)\|^2)\|\nabla w(s)\|^2]ds\le c_4\int_0^t(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2)dt$$

$$\|w'(t)\|^2+m_0\|\nabla w(t)\|^2\le c_4(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2)$$

$$\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2\le c_5\int_0^t(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2)dt \qquad (2.82)$$

aplicando el lema de Gronwall tenemos:

$$\phi(t)=\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2,\quad K=0 \quad y \quad \beta(s)=1$$

$$\phi(t)=\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2\le 0\times e^{\int_0^t\beta(s)ds}=0.$$

esto implica: $\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2=0$

$$\|w'(t)\|^2=0 \quad y \quad \|\nabla w(t)\|^2=\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}=0 \quad\Rightarrow w(t)=0;\ \forall t\in[0,T]$$

$$\therefore u(t)=v(t)\quad \forall t\in[0,T] \qquad (2.83)$$

lo que prueba la unicidad de la solución.

2.3 Comportamiento Asintótico

Teorema II.14- Bajo las hipótesis $[H_1];[H_2]\ y\ [H_3]$, existen constantes $C>0, C_1>0\ y\ C_2>0$ tal que:

$$E(t)\le\begin{cases}\dfrac{CE(0)}{(1+t)^{2/\gamma}}, & \gamma>0\\ C_1e^{-C_2t}, & \gamma=0\end{cases}$$

Prueba del Teorema II.14- Multiplicando (2.5) por $g'_{jm}(t)$ y sumando desde j=1 hasta j=m se tiene:

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))+(\rho(u'_m(t)),u'_m(t))=0 \qquad (2.84)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right]+\int_\Omega \rho(u'_m(t))u'_m(t)dx=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_m(t)+\int_\Omega \rho(u'_m(t))u'_m(t)dx=0$$

por otro lado de $\alpha_0|s|^{\gamma+1}\le|\rho(s)|\le\alpha_1|s|^{\gamma+1}$ se tiene:

$$\rho(s)=\begin{cases}\alpha_0|s|^{\gamma+1}\le\rho(s)\le\alpha_1|s|^{\gamma+1} & ;\ \forall\, s\in[0,+\infty[\\ -\alpha_1|s|^{\gamma+1}\le\rho(s)\le-\alpha_0|s|^{\gamma+1} & ;\ \forall\, s\in]-\infty,0[\end{cases} \qquad (2.85)$$

El sector sombreado representa la gráfica donde ρ está limitada y como ρ es creciente las gráficas aproximadas pueden ser representadas por las líneas no punteadas o bien definidas como se muestran en las siguientes figuras

Figura N° 2.2

Para $\gamma=0$

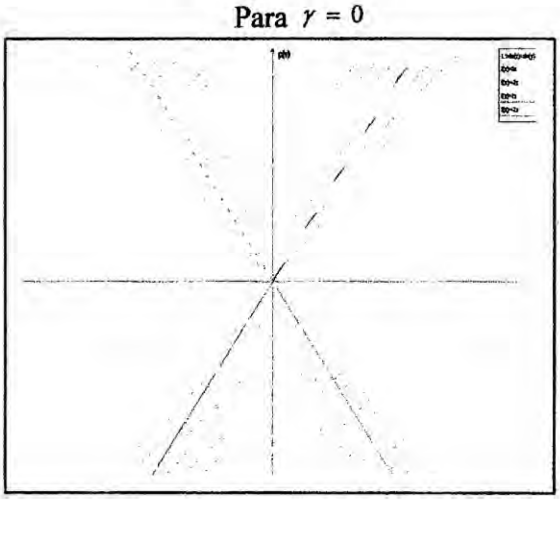


Fig.N°2.3

PARA $\gamma > 0, \gamma$ = IMPAR

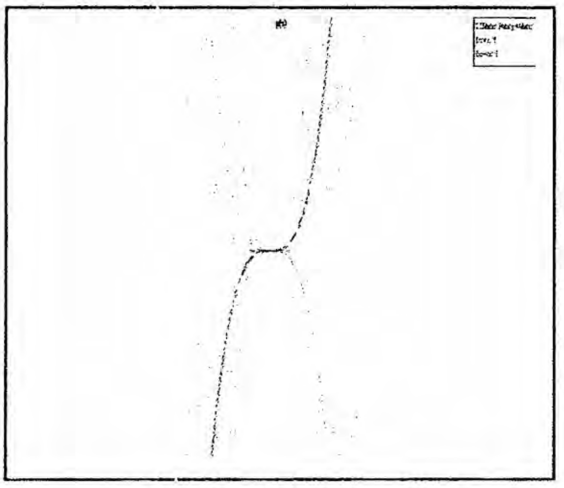
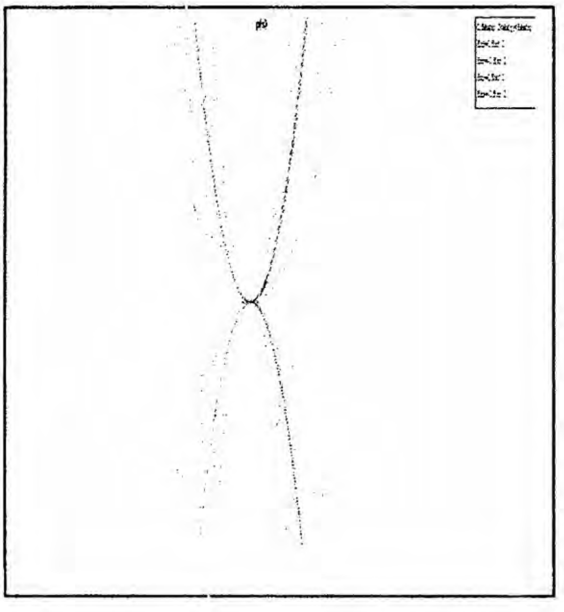


Fig.N°2.4

PARA $\gamma > 0, \gamma$ =PAR



$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_m(t) = -\int_\Omega \rho(u_m'(t))u_m'(t)dx \tag{2.86}$$

de la hipótesis $[H_2]-(i)$, $[H_2]-(ii)$ y de (2.86) tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_m(t) \le -\alpha_0\int_\Omega |u_m'(t)|^{\gamma+2}dx \le 0 \tag{2.87}$$

de (2.87) se tiene que $E_m(t)$ es decreciente $\forall t \ge 0$ integrando (2.86) de t a $t+1$, y usando $(H_2)(i)$ tenemos:

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+1}\frac{d}{dt}E_m(s)ds + \int_t^{t+1}\int_\Omega \rho(u_m'(t))u_m'(t)dxdt = 0 \tag{2.88}$$

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+1}\frac{d}{dt}E_m(s)ds + \int_t^{t+1}\int_\Omega a_0|u_m'(t)|^{\gamma+2}dxdt \le 0$$

$$\frac{1}{2}[E_m(t+1)-E_m(t)] + a_0\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}}^{\gamma+2}dt \le 0$$

$$2a_0\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}ds \le E_m(t)-E_m(t+1) = [F_m(t)]^2$$

$$\int_{t_1}^{t+1}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}ds \le \frac{1}{2a_0}[F_m(t)]^2 \tag{2.89}$$

Por el teorema de valor intermedio para integrales, se deduce que existe:

$t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$, $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ y $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que:

1) $$2a_0\int_t^{t+\frac{1}{4}}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}dt = 2a_0(t+\frac{1}{4}-t)\|u_m'(t_1)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2} = \frac{a_0}{2}\|u_m'(t_1)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2} \le [F_m(t)]^2 \tag{2.90}$$

2) $$\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}ds = \frac{1}{4}\|u_m'(t_2)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2} \le \frac{1}{2a_0}[F_m(t)]^2 \tag{2.91}$$

3) $$\int_{t_1}^{t_2}E_m(s)ds = (t_2-t_1)E_m(t^*) \ge [\frac{(t+1)-t}{2}]E_m(t^*) = \frac{1}{2}E_m(t^*) \tag{2.92}$$

donde deducimos:

$$\frac{1}{2}\left[E_m(s)-E_m(t^{*})\right]\leq E_m(t)-E_m(t+1)=\left[F_m(t)\right]^2\ ; \qquad t\leq s\leq t+1. \tag{2.93}$$

de (2.92) y (2.93) :

$$4)\frac{1}{2}E_m(s)\leq\frac{1}{2}E_m(t^{*})+\left[F_m(t)\right]^2\leq\int_{t_1}^{t_2}E_m(s)ds+\left[F_m(t)\right]^2, \quad t\leq s\leq t+1. \tag{2.94}$$

Sea la siguiente estimativa $w_j=u_m(t)$ en (2.5) se obtiene:

$$(u_m''(t),u_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m(t))+(\rho(u_m'(t)),u_m(t))=0 \tag{2.95}$$

por otro lado se tiene:

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t),u_m(t))=(u_m''(t),u_m(t))+\|u_m'(t)\|^2$$

reemplazando se tiene:

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t),u_m(t))-\|u_m'(t)\|+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2+(\rho(u_m'(t)),u_m(t))=0$$

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2=\|u_m'(t)\|^2-\frac{d}{dt}(u_m'(t),u_m(t))-(\rho(u_m'(t)),u_m(t)) \tag{2.96}$$

Integrando (2.96) de t_1 a t_2 se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2}M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2ds=\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2ds-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{ds}(u_m'(s),u_m(s))ds$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\rho(u_m'(s))u_m(s)ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2}M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2ds=\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2ds-(u_m'(t_2),u_m(t_2))+(u_m'(t_1),u_m(t_1))$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\rho(u_m'(s))u_m(s)ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2}M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2ds\leq\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2ds+|(u_m'(t_2),u_m(t_2))|$$

$$+|(u_m'(t_1),u_m(t_1))|+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\rho(u_m'(s))u_m(s)ds$$

de (H_2) para ρ y usando la desigualdad de Cauchy Schwarz se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2}M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2ds\leq\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2ds+\|u_m'(t_2)\|\|u_m(t_2)\|+\|u_m'(t_1)\|\|u_m(t_1)\|$$

$$+a_1\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+1}|u_m(s)|\,dxds$$

por inmersión se tiene que: $L^{\gamma+2}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ entonces existe c_γ :

$$\int_{t_1}^{t_2} M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2\,ds \le c_\gamma\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^2 ds + c_\gamma c_2\|u_m'(t_2)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}\|\nabla u_m(t_2)\|$$

$$+\|u_m'(t_1)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}\|\nabla u_m(t_1)\| + a_1\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+1}|u_m(s)|\,dxds \qquad (2.97)$$

entonces por otro lado de (2.89) sabemos que:

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2} ds \le \frac{1}{2a_0}[F_m(t)]^2$$

de (2.97) del primer factor del segundo miembro y aplicando la desigualdad de Holder se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^2 dt \le \left(\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}1dt\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$$

$$\le\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}(t_2-t_1)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \qquad (2.98)$$

Y como $t_2-t_1\le 1$ entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^2 dt \le \left(\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+2}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}} \le \left(\frac{1}{2a_0}[F_m(t)]^2\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}$$

entonces tenemos que:

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^2 dt \le \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}} \qquad (2.99)$$

del segundo, tercer factor y de (2.97) se tiene

$$\|u_m'(t_1)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)} \le \left[\frac{2}{a_0}[F_m(t)]^2\right]^{\frac{1}{\gamma+2}} = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}} \qquad (2.100)$$

$$\|u_m'(t_2)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)} \le \left[\frac{2}{a_0}[F_m(t)]^2\right]^{\frac{1}{\gamma+2}} = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}} \qquad (2.101)$$

por otro lado de $\|u_m'(t)\|^2 + m_0 \|\nabla u_m(t)\|^2 \le E_m(t)$ tenemos:

$$\|\nabla u_m(t_1)\| \le \sqrt{\frac{E_m(t_2)}{m_0}} \le \sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}} \qquad (2.102)$$

$$\|\nabla u_m(t_2)\| \le \sqrt{\frac{E_m(t_2)}{m_0}} \le \sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}} \qquad (2.103)$$

del último factor y aplicando la desigualdad de Holder

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+1}|u_m(s)|dxds \le \left[\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+2}dxds\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m(s)|^{\gamma+2}dxds\right]^{\frac{1}{\gamma+2}}$$

$$\le \left[\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^{\gamma+2}_{L^{\gamma+2}(\Omega)}ds\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left[\int_{t_1}^{t_2}\|u_m(s)\|^{\gamma+2}_{L^{\gamma+2}(\Omega)}ds\right]^{\frac{1}{\gamma+2}} \qquad (2.104)$$

por la inmersión de Sobolev se tiene que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma+2}(\Omega)$ entonces existe una constante n_γ tal que $\|w\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)} \le n_\gamma \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = n_\gamma \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$ entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+1}|u_m(s)|dxds \le b_\gamma\left[\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^{\gamma+2}_{L^{\gamma+2}(\Omega)}ds\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left[\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m'(s)|^{\gamma+1}|u_m(s)|dxds \le b_\gamma\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}}\left[\frac{E_m(t_1)}{m_0}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.105)$$

de (2.99), (2.100), (2.101),(2,102),(2.103) y (2.105) reemplazando en (2.96) se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} M(\|\nabla u_{1m}(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2 ds \le c_\gamma\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

$$+2c_\gamma c_2\left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}} + b_\gamma\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} \qquad (2.106)$$

donde $L^{\gamma+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con inmersión continua y c_γ inmersión de Sobolev

de (2.97) y (2.106) y la hipótesis sobre $\hat{M}(s) \le sM(s)$ se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2}\hat{M}(\|\nabla u_m(s)\|^2)ds + \int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2 ds \le \int_{t_1}^{t_2} M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2 ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\hat{M}(\|\nabla u_m(s)\|^2)+\|u_m'(s)\|^2\right)ds \le \int_{t_1}^{t_2} M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2\,ds+\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|^2 ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)ds \le \int_{t_1}^{t_2}(M(\|\nabla u_m(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2+\|u_m'(s)\|^2)ds$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M(\|\nabla u_{1m}(s)\|^2)\|\nabla u_m(s)\|^2\,ds \le c_\gamma\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+$$

$$+2c_\gamma c_2\left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}}$$

$$+b_\gamma\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}} \qquad (2.107)$$

trabajando por separado y utilizando la desigualdad de Young

$$C_1\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{4m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2}{\gamma+2}} \le C_1^2\frac{E_m(t_1)}{4m_0}+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}} \qquad (2.108)$$

$$C_2\sqrt{\frac{E_m(t_1)}{4m_0}}[F_m(t)]^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} = C_2^2\frac{E_m(t_1)}{4m_0}+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma+4}{\gamma+2}} \qquad (2.109)$$

por otro se tiene:

$$[F_m(t)]^2=[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} \qquad (2.110)$$

entonces:

$$\frac{1}{2}E_m(t)\le\int_{t_1}^{t_2}E_m(s)ds+[F_m(t)]^2\le\left(C_2^2+C_3^2\right)\frac{E_m(t)}{4m_0}+C_1[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

$$+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

$$+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} \qquad (2.111)$$

$$\frac{1}{2}E_m(t)\le\int_{t_1}^{t_2}E_m(s)ds+[F_m(t)]^2\le C_4\frac{E_m(t)}{4m_0}+C_1[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

$$+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}$$

$$\frac{1}{2}E_m(t)-C_4\frac{E_m(t)}{4m_0}\le\int_{t_1}^{t_2}E_m(s)ds+[F_m(t)]^2\le C[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

$$+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}$$

$$\frac{1}{2}E_m(t)\left(1-\frac{C_4}{2m_0}\right)\le\left(1+C_0+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}\right)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

ahora haciendo

$$1-\frac{C_4}{2m_0}>0\Rightarrow\frac{2m_0}{C_4}>1\Rightarrow\frac{2m_0}{2m_0-C_4}>1 \qquad (2.112)$$

entonces:

$$\frac{1}{2}E_m(t)\left(\frac{2m_0-C_4}{2m_0}\right)\le\left(1+C+[F_m(t)]^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}}+[F_m(t)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}\right)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}} \qquad (2.113)$$

$$\frac{1}{2}E_m(t)\le\left(\frac{2m_0}{2m_0-C_4}\right)\left(1+C+[E_m(0)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}+[E_m(0)]^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\right)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

en particular para $C_4=m_0\Rightarrow\dfrac{2m_0}{2m_0-C_4}=2$ (2.114)

$$\frac{1}{2}E_m(t)\le 2\left(1+C+[E_m(0)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}+[E_m(0)]^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\right)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}} \qquad (2.115)$$

$$E_m(t)\le 4\left(1+C+[E_m(0)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}+[E_m(0)]^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\right)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

Sea $C_5E_m(0)=4\left(1+C+[E_m(0)]^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}+[E_m(0)]^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\right)$ (2.116)

entonces:

$$E_m(t)\le C_5E_m(0)[F_m(t)]^{\frac{4}{\gamma+2}} \qquad (2.117)$$

también:

$$(E_m(t))^{\frac{\gamma+2}{2}}\le(C_5E_m(0))^{\frac{\gamma+2}{2}}[E_m(t)-E_m(t+1)]$$

$$(E_m(t))^{1+\frac{\gamma}{2}}\le(C_5E_m(0))^{\frac{\gamma+2}{2}}[E_m(t)-E_m(t+1)] \qquad (2.118)$$

Luego tomando supremo

$$\sup_{t\leq s\leq t+1}\left(E_m(s)\right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \leq \left(C_5E_m(0)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}\left[E_m(t)-E_m(t+1)\right] \qquad (2.119)$$

aplicando el (Lema de Nakao) tenemos

$$E_m(t)\leq \frac{C}{\left(t+1\right)^{\frac{2}{\gamma}}} \qquad \forall t\geq 0$$

$$\text{Donde: } C=\left[\frac{\left(C_5E_m(0)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{\min\left[\frac{\gamma}{2},\frac{\left(C_5E_m(0)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2E_m^{\frac{\gamma}{2}}(0)}\right]}\right]^{\frac{2}{\gamma}}$$

Por otro lado:

cuando $u_0\in H_0^1(\Omega)$ y $u_1\in L^2(\Omega)$ existen sucesiones:

$\left(u_{0m}\right)_{m\in N}\subseteq H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y $\left(u_{1m}\right)_{m\in IN}\subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$u_{0m}\rightarrow u_0 \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_{1m}\rightarrow u_1 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

y sean u_{0m} y u_{1m} los datos iniciales de:

$$E_m(t)\leq \frac{CE(0)}{\left(t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad ;\forall t\geq 0$$

también se puede expresar:

$$\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)\leq C\left[\frac{1}{2}\|u_{1m}'\|^2+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_{0m}\|^2)\right]\frac{1}{\left(t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (2.120)$$

$;\forall t\geq 0$

consideremos $m=\eta$ y $\theta>0$ una función simple en $\left[0,T\right]$

multiplicando a ambos miembros por θ e integrando sobre $\left[0,T\right]$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|u'_m(t)\|^2 \theta dt + \frac{1}{2}\int_0^T \hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)\theta dt \le C\frac{1}{2}\|u'_{1m}\|^2 \int_0^T \frac{\theta(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_{0m}\|^2)\int_0^T \frac{\theta(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2.121}$$

sabemos que

$$u_\eta \xrightarrow{*} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{ y } \ u'_\eta \xrightarrow{*} u' \ \text{en} \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

entonces

$$u_\eta \to u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{ y } \ u'_\eta \to u' \ \text{en} \ L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

observación:

i) $\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta \to \theta^{\frac{1}{2}}u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

ii) $\theta^{\frac{1}{2}}u'_\eta \to \theta^{\frac{1}{2}}u'$ en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Demostración

Dado $g \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to\infty}\left\langle g,\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &= \lim_{\eta\to\infty}\theta^{\frac{1}{2}}\left\langle g,u_\eta\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\ &= \theta^{\frac{1}{2}}\lim_{\eta\to\infty}\left\langle g,u_\eta\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\ &= \theta^{\frac{1}{2}}\left\langle g,u\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{\eta\to\infty}\left\langle g,\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \left\langle g,\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))xL^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

Luego:

$$\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta \to \theta^{\frac{1}{2}}u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

de la observación y la siguiente desigualdad para límite inferior

$$\left(\liminf\left(x_\eta\right)\right)\left(\liminf\left(y_\eta\right)\right) \le \liminf\left(x_\eta y_\eta\right)$$

tenemos;

$$\left\|\theta^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \liminf \left\|\theta^{\frac{1}{2}}u_\eta\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\left\|\theta^{\frac{1}{2}}u'\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \liminf \left\|\theta^{\frac{1}{2}}u'_\eta\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \quad \text{en} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Entonces:

$$\int_0^T \|u\|^2 \theta(t)dt \leq \liminf \int_0^T \|u_\eta\|^2 \theta(t)dt \ \text{ en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.122)$$

$$\int_0^T \|u\|^2 \theta(t)dt \leq \liminf \int_0^T \|u_\eta\|^2 \theta(t)dt \ \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (2.123)$$

Tomando límite inferior a ambos lados de (2.121) tomando en cuenta (2.122), (2.123) y notando que:

$$\liminf(u) + \liminf(v) \leq \liminf(u+v)$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|u'(t)\|^2 \theta dt + \frac{1}{2}\int_0^T \hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2)\theta dt \leq C\frac{1}{2}\|u_1\|^2 \int_0^T \frac{\theta(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_0\|^2)\int_0^T \frac{\theta(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (2.124)$$

Se observan que las funciones en los integrandos pertenecen a $L^1(0,T)$ ahora para $t \in [0,T]$ consideremos la función simple $\theta_h(s) = \theta(s)$en $[t-h, t+h] \subset [0,T]$ y cero en el complemento, luego θ_h es permisible en (2.124) ahora sustituyendo θ por θ_h en (2,124) y dividiendo a ambos lados por $2h$ tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \|u'(t)\|^2 \theta_h dt + \frac{1}{2}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2)\theta_h dt \leq C\frac{1}{2}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \|u_1\|^2 \frac{\theta_h(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \hat{M}(\|\nabla u_0\|^2)\frac{\theta_h(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (2.125)$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ obtenemos para $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2\theta_h+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2)\theta_h\leq C\frac{1}{2}\|u_1\|^2\frac{\theta_h(t)dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_0\|^2)\frac{\theta_h(t)}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2.126}$$

Como $\theta_h>0$

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u(t)\|^2)\leq C\frac{1}{2}\|u_1\|^2\frac{dt}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{1}{2}C\hat{M}(\|\nabla u_0\|^2)\frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$\leq C\left(\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_0\|^2)\right)\frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2.127}$$

Por lo tanto se concluye que:

$$E(t)\leq\frac{CE(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}\qquad\forall t\in[0,\infty[\ ,\ \gamma>0 \tag{2.128}$$

También se prueba de igual procedimiento que

$$E(t)\leq CE(0)e^{-\gamma t}\qquad\forall t\in[0,\infty[\ ,\ \gamma=0 \tag{2.129}$$

2.3.1 Ejemplos de aplicación en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$

Se utilizó el programa (WOLFRAM MATHEMATICA 10), para datos en M,ρ,u_0,u_1 y se obtuvo los siguientes resultados:

$$a)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \quad \text{en } Q=]-5,5[\times]0,t[$$

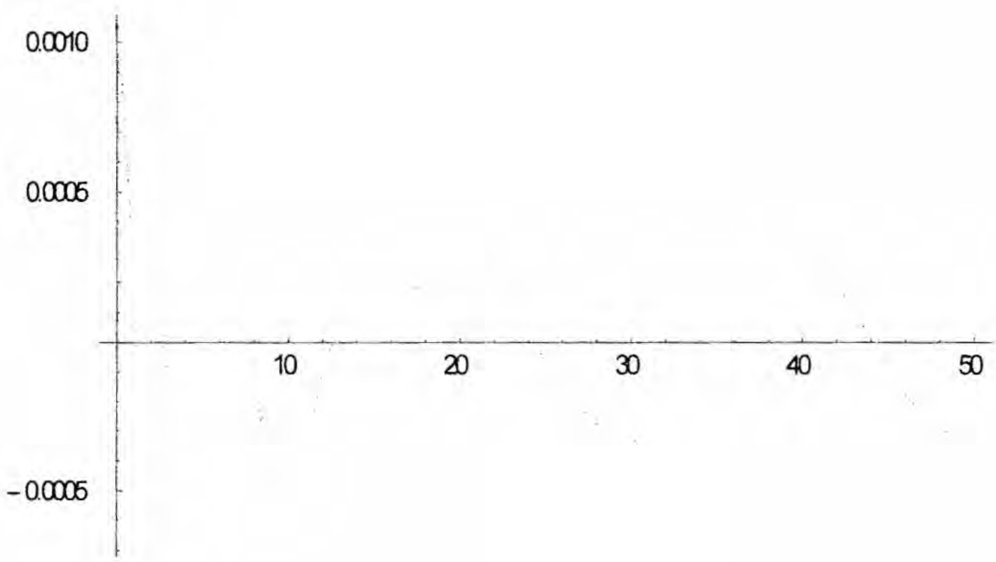
$$u(-5,t)=u(5,t)=0$$

$$u(x,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad \text{en } \Omega=]-5,5[$$

Plot[*First*[*u*[*t*,0] /. %], {*t*, 0, 50}, *PlotRange* → *All*]

{u -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}, {-5., 5.}}, <>]

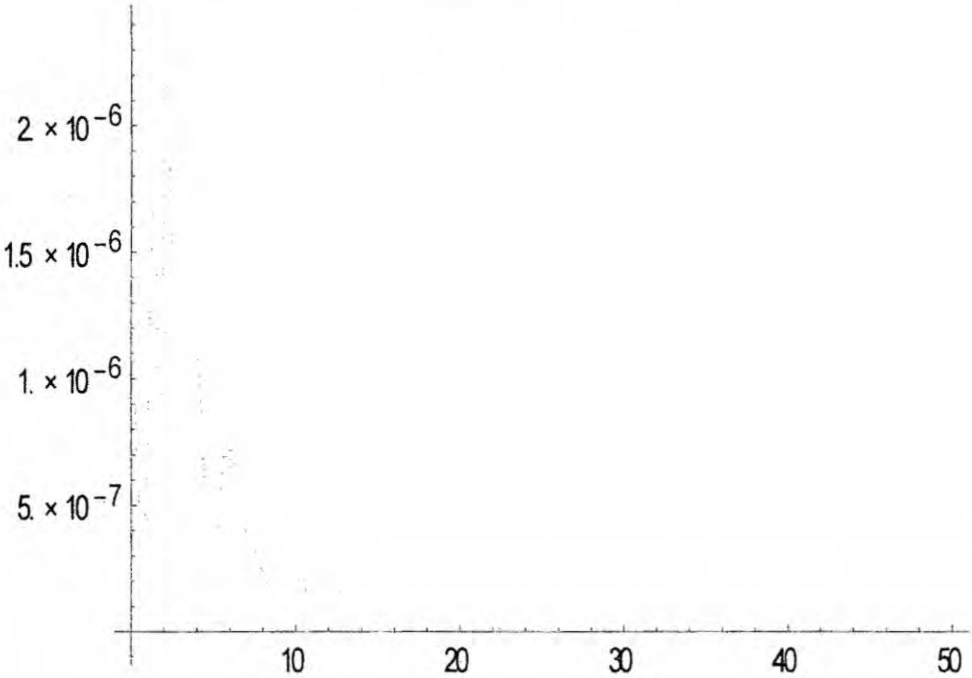
Fig.N°2.5



$$Plot[First[(\int_{-5}^{5} D[u[t,x],x]^\wedge 2dx)/.\%],\{t,0,50\},PlotRange \to All]$$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}, {-5., 5.}}, <>]}}

Fig.N°2.6



$$b)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\left(1+\int_{-5}^{5}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\right)^7\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+0.25\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^{11}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \quad ;\text{en}\quad Q=]-5,5[\times]0,t[$$

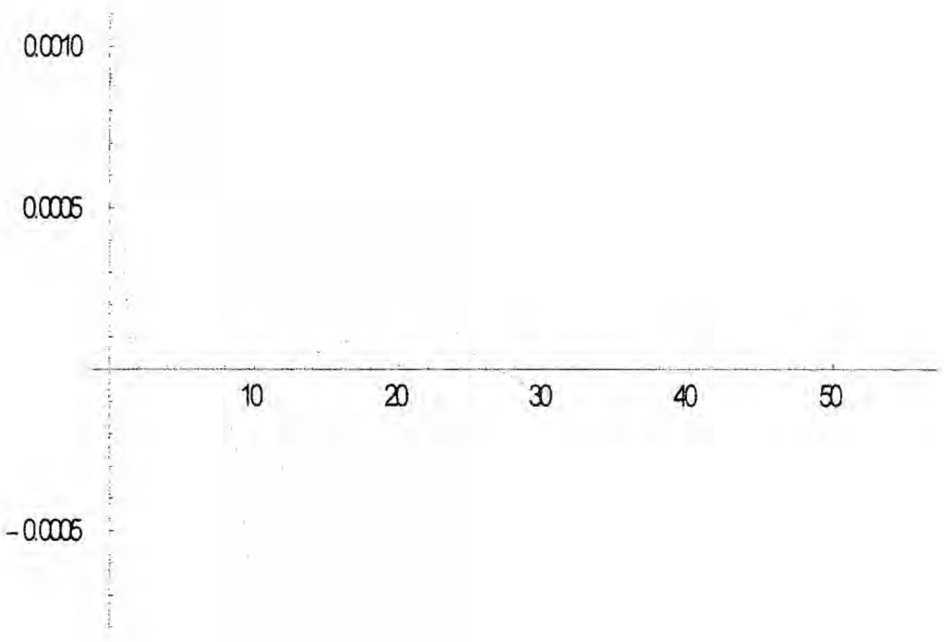
sobre $u(-5,t)=u(5,t)=0$

$$u(x,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \qquad ;\text{en}\quad \Omega=]-5,5[$$

1) $Plot[First[u[t,0]/.\%],\{t,0,56\},PlotRange\to All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 56.}, {-5., 5.}}, <>]

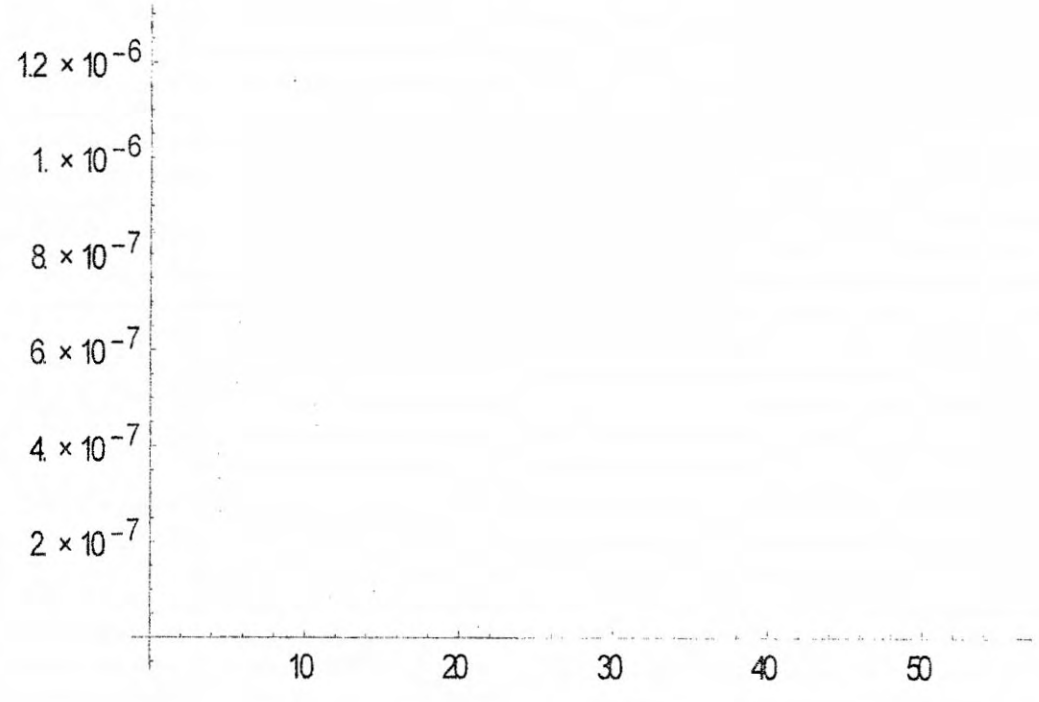
Fig.N°2.7



$$Plot[First[(\int_{-5}^{5} D[u[t,x],x]^\wedge 2dx) /.\%],\{t,0,56\}, PlotRange \to All]$$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 56.}, {-5., 5.}}, <>]

Fig.N°2.8



$$c)\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)-\left(1+\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10}\left(\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|^2\right)dxdy\right)^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+$$

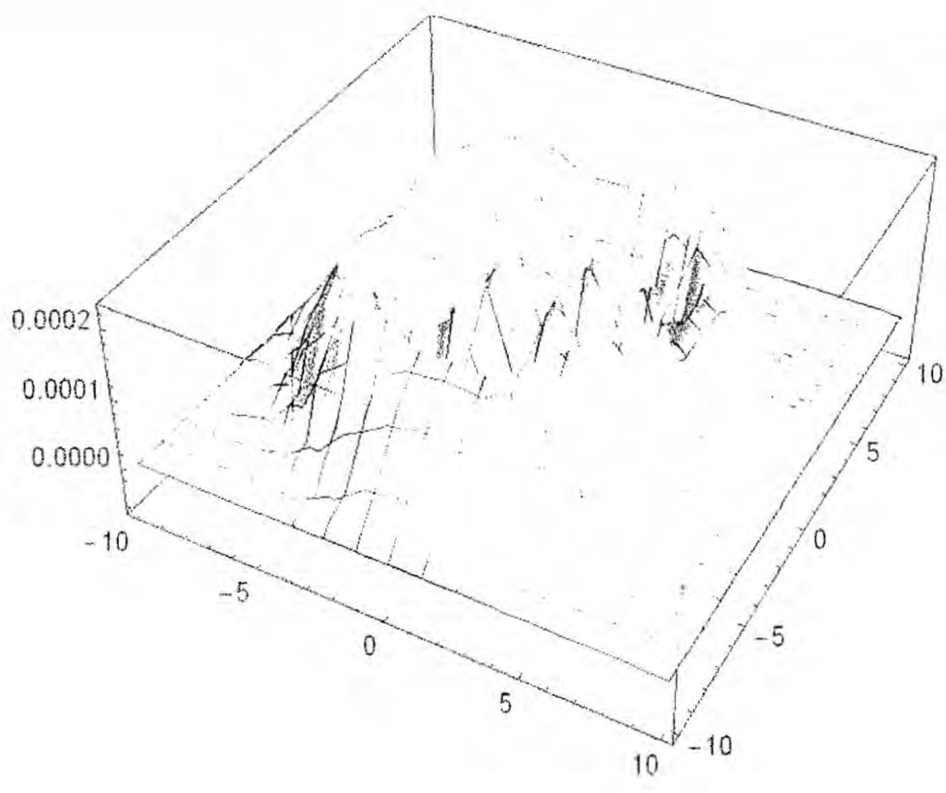
$$+7\left|\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|^3\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=0 \quad \text{en } Q=(]-10,10[\times]-10,10[)\times]0,t[$$

$$u(-10,y,t)=u(10,y,t)=u(x,-10,t)=u(x,10,t)=0$$

$$u(x,y,0)=0.001e^{\frac{-1}{x^2}};\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0.001e^{\frac{-1}{x^2}} \qquad \text{en}\quad \Omega=]-10,10[\times]-10,10[$$

Plot3D[First[u[7, x, y] / .%], {x, −10, 10}, {y, −10, 10}, PlotRange → All]
{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 7.}, {-10., 10.}}, <>]}}

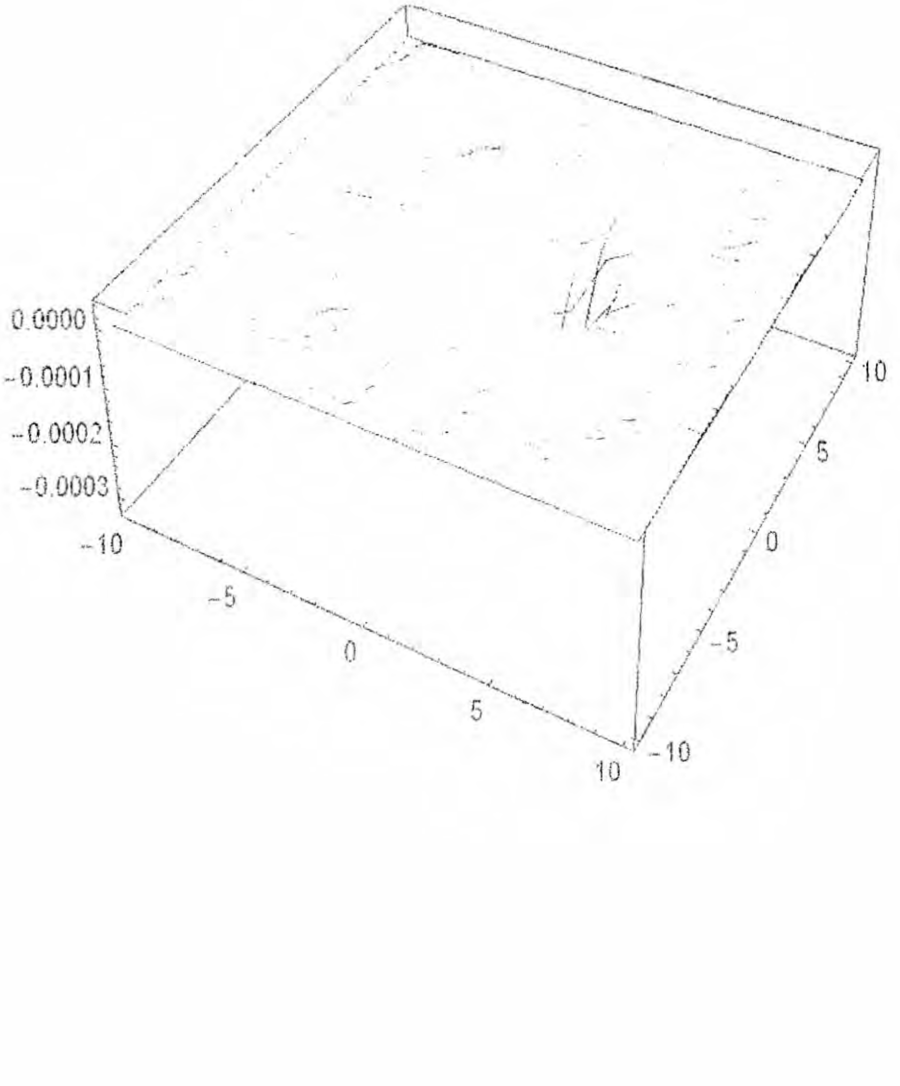
Fig.N°2.9



$Plot3D[First[u[45,x,y]/.\%],\{x,-10,10\},\{y,-10,10\},PlotRange \to All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 45.}, {-10., 10.}}, <>]}}

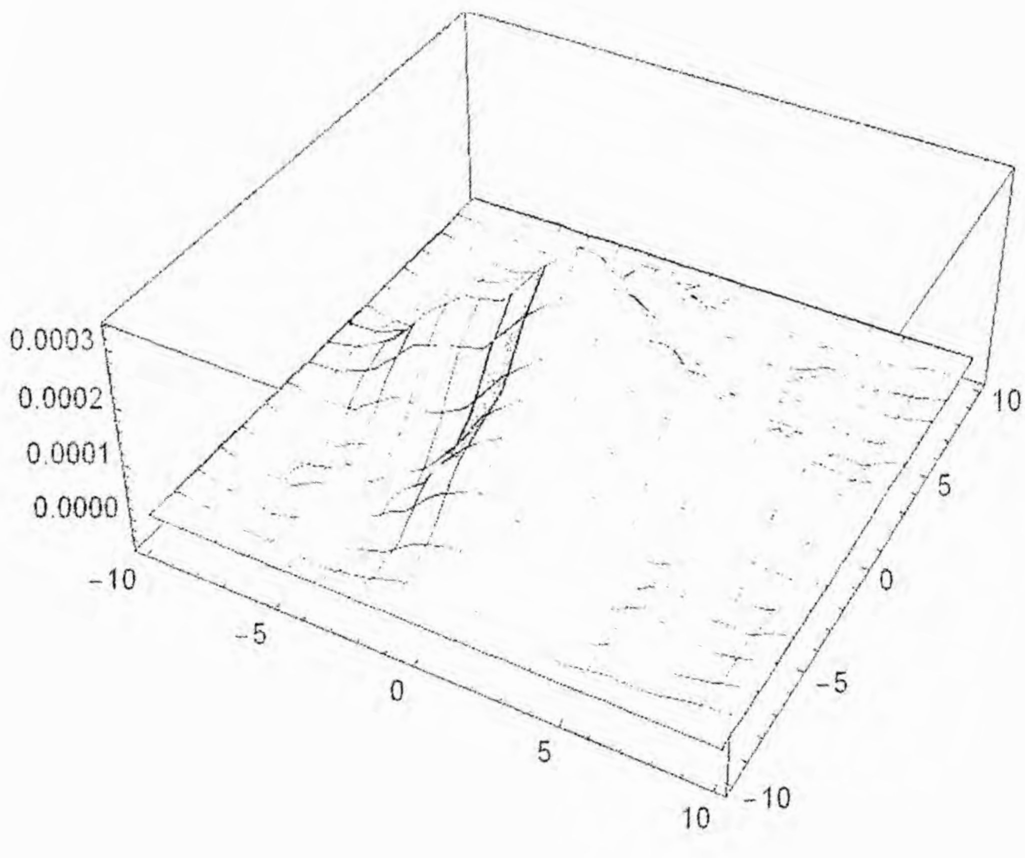
Fig.N°2.10



$Plot3D[First[u[65,x,y]/.\%],\{x,-10,10\},\{y,-10,10\},PlotRange\rightarrow All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 65.}, {-10., 10.}}, <>]}}

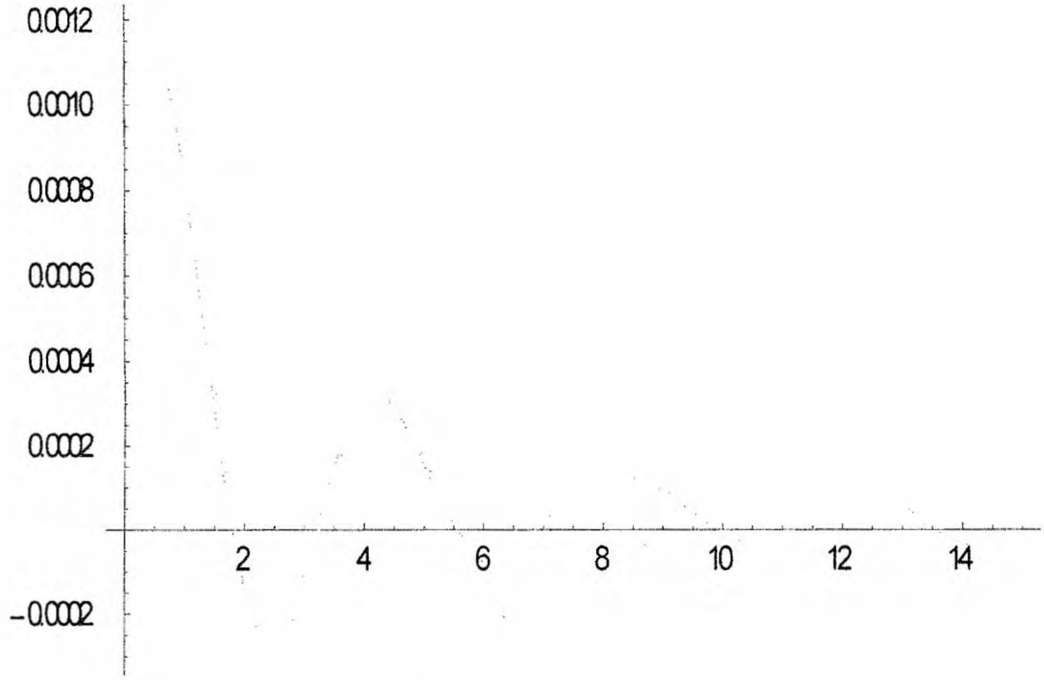
Fig.N°2.11



$Plot[First[u[t,0,0]/.\%],\{t,0,15\},PlotRange \to All]$

{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 15.}, {-10., 10.}, {-10., 10.}}, <>]}}

Fig.N°2.12



CAPÍTULO III

III.VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la Investigación

Para nuestro problema se trabajó con dos variables especificas

* $u(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$ $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ Ω acotado con frontera regular y $T > 0$

* $E(t)$; donde E es la energía asociada al sistema (1) $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3.2. Operacionalización de las variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
$u(x,t)$	Variable en $\mathbb{R}^n$	Solución global Del sistema	Soluciones fuertes	$\|\Delta u_0\| + \|\nabla u_1\| < \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 <$
$E(t)$	Energía del sistema	Energía asociada al sistema	Comportamiento Asintótico de la energía	$si\ \gamma > 0$ $E(t) \leq \frac{CE(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}$ $si\ \gamma = 0$ $E(t) \leq CE(0)e^{-\delta t}$

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

La ecuación en nuestro proyecto tesis es del modelo tipo Kirchhoff con termino disipativo

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0, \infty\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times \left]0, \infty\right[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

Tal que Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$; ρ una función de clase C^1 no decreciente en $\mathbb{R}$ y M una función tal que:

$$M : \left[0, \infty\right[\rightarrow \left[0, \infty\right[\text{ con } M(s) \geq m_0 > 0 .$$

Si $\rho = 0$ en este caso no se ha demostrado aún la existencia de la "solución global" para datos en espacios de Sobolev

Hipótesis específica

Con las hipótesis: [H1], [H2], [H3] y los teoremas dados para la ecuación (1) es decir respecto a $\rho, M, u_0 \, y \, u_1$ se logró demostrar la unicidad , la existencia global de lassoluciones y el decaimiento exponencial o polinomial de la energía asociada al sistema (1)

CAPÍTULO IV

IV.METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

Se trabajó sobre el espacio de las distribuciones, espacios de Sobolev y el comportamiento asintótico en ecuaciones diferenciales parciales. Este proyecto de tesis es uno de los primeros trabajo en nuestra Facultad que abordo la exposición didáctica de un problema casi lineal con disipación no lineal, lo que permitirá el avance de esta línea de investigación en la Facultad.

4.2 Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis inicialmente está dirigido a mostrar la existencia Global de soluciones regulares del sistema (1). Para esto se aplicó el método de Faedo- Galerkin que consiste en aproximarse a la solución del sistema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita; resultando soluciones del tipo $u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$ donde las g_{im} , $i = 1,2,........,m$, pueden ser determinadas (de manera única) por la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (El Teorema de Caratheodory por ejemplo). En una primera estimativa se aplicó directamente el lema de Nakao para luego estudiar el comportamiento asintótico en la energía aproximada de primer orden. Este decaimiento fue fundamental porque se obtuvo la acotación uniforme en la energía aproximada de segundo orden, lo que implicó la solución global. Un resultado complementario y de valor independiente es el lema de Nakao, herramienta importante en el estudio de propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

Finalmente se usó el sistema aproximado y la estimativa de decaimiento de la energía de primer orden, para que mediante un proceso de límite y usando la semi-continuidad inferior de la aplicación norma se concluyó la estimativa de decaimiento para la solución del sistema (1)

4.3 Población y muestra

En términos estadísticos no existe población en estudio, solo se trabajó en $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ donde $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T > 0$

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó material bibliográfico en bibliotecas y por vía internet trabajos relacionados con el tema

4.5 Procedimientos de recolección de datos

No hubo procedimiento alguno solo el acceso a diferentes bibliotecas de universidades y las páginas web que eran accesibles para adquirir dichos materiales

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

No hubo

CAPÍTULO V

V.RESULTADOS

En este trabajo se estudió el problema de Cauchy asociado al sistema:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\right)\Delta u + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,\infty\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times \left]0,\infty\right[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Y con las hipótesis $[H_1],[H_2]y[H_3]$ respecto a ρ M u_0 y u_1 se llegó a los resultados siguientes:

Se utilizó 3 estimativas para el problema aproximado de las cuales en la segunda va de la mano con el resultado del decaimiento polinomial de la energía es decir utilizamos:

$$E_m(t) \le \frac{CE(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}$$

del cual llegamos a una solución fuerte:

$$u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$u' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$u'' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$$

Luego para analizar el decaimiento de la energía se llegó al siguiente resultado

$$\left(E_m(t)\right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \le \left(C_5 E_m(0)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}\left[E_m(t) - E_m(t+1)\right]$$

$$\sup_{t \le s \le t+1}\left[E(s)\right]^{1+\frac{\gamma}{2}} \le \left(C_5 E_m(0)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}\left[E(t) - E(t+1)\right]$$

Y por último se aplicó el lema de Nakao, que llego a ser una herramienta muy importante para poder estudiar el decaimiento de la energía asociada a (1) y así obtener los siguientes resultados:

Para $\gamma > 0$ se tiene que $\quad E_m(t) \le \dfrac{CE_m(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}$

Para $\gamma = 0$ se obtuvo que $E_m(t) \leq CE_m(0)e^{-\delta t}$

Luego por último aplicando el lema de Banach Steinhaus referido a la semicontinuidad inferior de la norma se concluyó:

$$\text{Para } \gamma > 0 \Rightarrow E(t) \leq \frac{CE(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}$$

$$\text{Para } \gamma = 0 \Rightarrow E_m(t) \leq CE_m(0)e^{-\delta t}$$

CAPÍTULO VI

VI.DISCUSIONES

El método empleado en este trabajo puede ser dirigido y aplicado en diversas aplicaciones. Podemos aplicar nuestro estudio, a la existencia y comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación amortiguado de la viga

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u + \rho\left(t, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0, \infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0, \infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

donde M y ρ son funciones reales.

También es posible aplicar nuestro estudio al siguiente problema de Cauchy asociado al siguiente sistema

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^2 u - M\left(\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_H^2\right) A u + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 & \text{en} \quad H \\ u(0) = u_0; \quad u'(0) = u_1 \end{cases}
$$

donde A es un operador lineal en un espacio de Hilbert H, M y ρ son funciones reales.

CAPÍTULO VII

VII.CONCLUSIONES

Las conclusiones importantes de este trabajo son los siguientes:

1) demostramos la existencia global y la unicidad de soluciones de la ecuación de onda.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u + \rho(\dfrac{\partial u}{\partial t}) = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,\infty\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times \left]0,\infty\right[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

2) Se demostró que la energía asociada al sistema decae exponencial o polinomialmente dependiendo estrictamente de la no linealidad de ρ es decir:

Decae exponencialmente si $\gamma = 0 \Rightarrow E(t) \leq CE(0)e^{-\delta t}$

Y decae polinomialmente si $\gamma > 0 \Rightarrow E(t) \leq \dfrac{CE(0)}{(t+1)^{\frac{2}{\gamma}}}$

este reultado nos indica que en un tiempo determinado la energía se disipa y tiende a cero

cuando t tiende al infinito

3) este resultado concuerda con situaciones experimentales en lo que respecta a nuestra investigación analítica y demuestra su valor, explicando los resultados obtenidos en nuestro trabajo

CAPÍTULO VIII

VIII.RECOMENDACIONES

1) Dentro de la rama del análisis funcional y específicamente sobre este proyecto de investigación se deja un material importante sobre las ecuaciones de ondas disipativas, que en un término físico es más realista en la vida cotidiana, por el cual esta aplicación es muy potente para diversas ramas de la Ingeniera y la Física sino también para lograr un modelo matemático computacional que modele los resultados con respecto al decaimiento de la Energía.

2) Los libros, revistas , papers, tesis referidas hacia este trabajo no solo son una ayuda muy importante sino también despierta motivación e interés para el futuro desarrollo de la investigación sobre el tema

3) El Lema de Nakao llega a ser una herramienta fundamental para el decaimiento de la energía, y es muy importante analizar su demostración par el caso con respecto al decaimiento polinomial de la Energía.

CAPÍTULO IX

IX.BIBLIOGRAFÍA

[1] ADAMS, R. A. ; Sobolev Spaces, Academic Press, New Cork, 1975.Aos Problemas Elípticos não Homogêneos), Río de Janeiro, 1999.

[2] BRITO, E.H., Damped Elastic Stretchet String Equation Generalized: Existence Uniqueses ,Regularity and Stability , Appl, Anal 13 (1982) 219-233

[3] EBERHARD ZEIDLER Nonlinear Functional Analysis and its Applications Vol.
II/A. Vol II/ B. 1989.

[4] H.BRESIS., Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones Editorial Masson Paris (1968)

[5] S, KESAVAN, Topics in functional analysis and Applications. Wiley Eastern Limited Bangolore, 1989.

[6] L. A. MEDEIROS y E. A DE MELLO. A. Integral de Lebesgue Textos de Métodos Matemáticos N° 18 , IM-UFRJ (1975)

[7] MEDEIROS, L.A. & Milla MIRANDA, M. ; Introdução aos Espaços de Sobolev y as Equaçoes Diferenciáis Parciais, Río de Janeiro, 1989.

[8] LIMACO J and BECERRA S., Vibration of Elastic String. Atas do 48° Seminario Brasileiro de analice (1998), 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear)

[9] P.H. RIVERA, Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales, textos avanzados, LNCC, Rio de Janeiro 1999.

[10] LIONS, J. L. ; Quelques Methods de Resolution des aux Limits non Linéaires; Dunod Gauthier, París, 1969.

[11] MARTINEZ, P. , Precise Decay Rate Estimate For Time-Depended Dissipations System, Israel Journal of Mathematics to appear.

[12] M. NAKAO A. Difference Inequallity and its Application to nonlinear Evolution Equations J. Math. Soc, Japan 30. (1978). 747-762

[13] PATCHEAU, S,I., On a class of quasilineaire, C.R Acad. Sci. Paris, T.322, Serie I 631-632

[14] YAMADA, Y. and HOSOYA . M., On Nonlinear Wave Equations II: Global Existence and Energy Decay of Solutions, J. of Fac. Of Sci., Univ. of Tokyo, 38(2) (1991) 239-25

[15] YOSIDA, K. ; Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

[16] V. KOMORNIK, Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method. John Wiley & Sons - Masson, Paris, 1994.

[17] POHOZEV, S.I., On a Class of Quasilinear Hiperbolic Ecuations , Mat Ussr Shornick **25** (1975) 145-148

[18] R. TEMAN,. Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North Holand, Amsterdam 1979

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	METODOLOGIA	POBLACION
En la ecuación: $(1)\ \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2\right)\Delta u + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 & en\ Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & sobre\ \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x);\ u'(x,0)=u_1(x) & en\ \Omega \end{cases}$ Ω acotado en IR^n y con las hipótesis respecto a ρ M u_0 y u_1 tal que: $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $\lVert\Delta u_0\rVert + \lVert\nabla u_1\rVert < \varepsilon;\quad 0<\varepsilon<1$ $\alpha_0 \lvert s\rvert^{\gamma+1} \le \lvert\rho(s)\rvert \le \alpha_1 \lvert s\rvert^{\gamma+1}$, $\forall s \in IR$ α_0, α_1 *ctes positivas* $\gamma \ge 0$ $0 < \frac{d\rho}{ds}(s) \le \bar{c}\lvert s\rvert^{\gamma}$ y $\rho(0)=0$, $\bar{c}$ *cte positiva* $\gamma \ge 0$ *si* $n \le 2$ y $0 \le \gamma \le \frac{2}{n-2}$ *si* $n \ge 3$ ρ y $\frac{d\rho}{ds}$ *son continuas en I* $\hat{M}(s) \le sM(s);\ \lvert M'(s)\rvert \le a_2 \lvert s\rvert^{p}$ *donde* $a_2>0,\ p\ge 0,\ \gamma<2p+1$ Y $\hat{M}(s)=\int_0^s M(r)dr$ siendo la energía del sistema: $E(t)=\lVert u'(t)\rVert^2+\hat{M}(\lVert\nabla u(t)\rVert^2)$ **Planteamiento del problema** Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes; 1)¿con estos datos será posible encontrar la existencia y unicidad de (1)? 2)¿con los mismos datos será posible encontrar el decaimiento exponencial o polinomial de la energía del sistema?	**Objetivo General** En objetivo general es mostrar la ¡unicidad, la existencia global y el comportamiento asintótico del problema (2.1) **Objetivo Especifico** El trabajo consta en dos partes. En la primera parte demostramos la Existencia y Unicidad de las soluciones regulares. En la segunda parte, implementando el método de Nakao, estudiamos el comportamiento de la solución. En la segunda parte usando el Lema de Nakao, probamos que la energía del modelo (I) decae exponencial o polinomialmente dependiendo de la no linealidad de ρ	**Hipotesis General** La ecuación en nuestro proyecto tesis es del tipo Kirchhoff: $(1)\ \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2\right)\Delta u + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 & en\ Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & sobre\ \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x);\ u'(x,0)=u_1(x) & en\ \Omega \end{cases}$ Tal que Ω es un conjunto acotado en IR^n; ρ una función de clase C^1 no decreciente en IR y M una función tal que: $M:[0,\infty[\to[0,\infty[$ con $M(s)\ge m_0>0$. Si $\rho=0$ en este caso no se ha demostrado aún la existencia de la "solución global" Para datos en espacios de Sobolev **Hipótesis Especifica** Con las hipótesis H1 H2 H3 y los teoremas dados para la ecuación (1) es decir respecto a ρ M, u_0 y u_1 encontraremos la existencia global, la unicidad de las solucione y el decaimiento exponencial o polinomial de la energía asociada a (1)	**Tipo de Investigación** La siguiente Investigación es del Tipo científico teórico-practico **Metido** El método realizado Es del tipo inductivo deductivo los cálculos realizados están detallados lo mejor posible **Diseño** para la existencia global aplicamos el método de Faedo- Galerkin En una primera estimativa aplicamos lema de Nakao, El decaimientos será fundamental para obtener acotación uniforme en la Energía aproximada lo que implica la Solución global. Un resultado complementario es el lema de Nakao, Finalmente usando la semi-continuidad inferior de la norma concluir con el decaimiento para la solución del problema (1)	En términos estadísticos no existe población en estudio, solo trabajamos en $Q \subset IR^{n+1}$ donde $Q=\Omega\times(0,T)$ $\Omega \in JR^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T>0$

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo