UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE KIRCHHOFF NO-LINEAL EN MECANISMOS DE ESTRUCTURAS INTERNAS DE LOS MATERIALES"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ADOLFO DANTE PEREZ MENDOZA

Callao-Julio 2016

PERÚ

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

Existencia global de solución para la ecuación de Kirchhoff no-lineal en mecanismos de estructuras internas de los materiales

Adolfo Dante Perez Mendoza

Tesis presentada a consideración del jurado designado por resolución decanal N° 019-2016-D_FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en Matemática.
Aprobado por:

....

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente

....

Lic. Emilio Marcelo Castillo Jiménez

Vocal

....

Lic. Juan Benito Bernui Barros

Secretario

Callao-Perú

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

ADOLFO DANTE PEREZ MENDOZA

Existencia global de solución para la ecuación de Kirchhoff No-Lineal en mecanismos de estructuras internas de los materiales. Callao [2016].

IX, 88 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2016)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

1. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

Agradecimiento

A Dios quien me da sabiduría y bendice las obras de mis manos y hace que cumpla el propósito de mi vida.

A mis padres por su confianza en mí y mi hermana por su motivación.

Mi más sincero agradecimiento a mis profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática muy especialmente a mi asesor de tesis Lic. Cesar Augusto Avila Celis, por su apoyo en la realización de este trabajo.

Finalmente agradecer a mis amigos de la Facultad por su apoyo en la investigación.

Dedicatoria

A mi Madre por su constante Motivación a estudiar y alcanzar mis metas, a mi hermana por su ejemplo que me da con su dedicación en sus estudios y mis amigos que Dios puso en mi camino que son como mis hermanos.

INDICE

LISTA DE FIGURAS **4**
RESUMEN **5**
ABSTRACT **6**
CAPÍTULO I **7**
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN **7**
1.1 Identificación del Problema **7**
1.2 Formulación del Problema **9**
1.3 Objetivos de la Investigación **9**
1.3.1 Objetivos Generales **9**
1.3.2 Objetivos Específicos **9**
1.4 Justificación **10**
1.5 Importancia **10**
CAPÍTULO II **11**
2.1 Preliminares **11**
2.1.1 Notaciones **11**
2.1.2 Algunos resultados de Álgebra Lineal **12**
2.1.3 Espacios $L^p(\Omega)$ **13**
2.1.4 Distribuciones **16**
2.1.5 Noción de Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$ **17**
2.1.6 Noción de convergencia en $D'(\Omega)$ **17**
2.1.7 El Espacio de las Distribuciones **18**
2.1.8 Derivada Distribucional **19**
2.1.9 Distribuciones Vectoriales **19**
2.1.10 Derivación en $D'(0,T,V)$ **20**
2.1.11. Espacios de Sobolev **21**
2.1.12 Norma en $W^{m,p}(\Omega)$ **22**
2.1.13 Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{-m,p}(\Omega)$ **23**
2.1.14 Inmersiones de Sobolev **24**

2.1.15 Espacios $L^p(0,T,V)$ 24
2.1.16 Consecuencias de la Desigualdad de Poincaré 27
2.1.17 Convergencia en $L^p(0,T,V)$ 27
2.1.18 Topologías Débil y Débil estrella 29
2.1.19 Desigualdad de Gronwall 31
2.1.20 Resultados de la teoría Espectral 31
2.1.21 Condiciones de Caratheodory (Prolongamiento de Soluciones) 33
2.2 Existencia y Unicidad de Soluciones 34
2.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad 34
2.2.2 Formulación Variacional 37
2.2.3 Soluciones Aproximadas (Método de Faedo-Galerkin) 38
2.2.4 Estimativas a priori: Acotación de la Sucesión (u_m) 50
2.2.5 Convergencia de las soluciones aproximadas 59
2.2.6 Convergencia de ρ y de M 61
2.2.7 Verificación de los datos iniciales 65
2.2.8 Unicidad de la Solución 68
2.2.9 Ejemplos de aplicación (WOLFRAM MATHEMATIC 10) 71
CAPÍTULO III 76
VARIABLES E HIPÓTESIS 76
3.1. Variables de la Investigación 76
3.2. Operacionalización de las variables 76
3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas 77
CAPÍTULO IV 78
METODOLOGÍA 78
4.1. Tipo de investigación 78
4.2 Diseño de la investigación 78
4.3 Población y muestra 79
4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos 79
4.5 Procedimientos de recolección de datos 79
4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos 79
CAPÍTULO V 80
RESULTADOS 80
CAPÍTULO VI 81

DISCUSIONES 81
CAPÍTULO VII 82
CONCLUSIONES 82
CAPÍTULO VIII 83
RECOMENDACIONES 83
CAPÍTULO IX 84
BIBLIOGRAFÍA 84
ANEXOS 87
ANEXO 1: Matriz de consistencia 87
ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo 88

TABLAS DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

Figura N° 2.1 70
Figura N° 2.2 71
Figura N° 2.3 72
Figura N° 2.4 72
Figura N° 2.5 73
Figura N° 2.6 73
Figura N° 2.7 74
Figura N° 2.8 74
Figura N° 2.9 75

RESUMEN

EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE KIRCHHOFF NO-LINEAL EN MECANISMOS DE ESTRUCTURAS INTERNAS DE LOS MATERIALES

ADOLFO DANTE PEREZ MENDOZA

Mayo-2016

Asesor : Lic. Cesar Augusto Avila Celis

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo se demuestra la existencia global de la ecuación de Kirchhoff no lineal siguiente

$$(1)\qquad \begin{cases} u'' - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)\Delta u - a\Delta u' = b|u|^{\beta-2}u & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado con frontera Γ bien regular en $\mathbb{R}^n; n \geq 1$; $a,b > 0; \beta > 2$ y $M:[0,\infty[\to [0,\infty[$ una función tal que $M(s) \geq m_0 > 0$; denotando a $\frac{\partial u}{\partial t} = u'$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''$.

El trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada de la existencia y unicidad de solución de (1). El sistema (1) modela las oscilaciones no lineales de los materiales viscoelásticos, con viscosidad $a\Delta u'$ del tipo Kelvin-Voight y con un término no lineal $b|u|^{\beta-2}u$.

Palabras Claves:

- Ecuación de onda
- Método de Faedo-Galerking
- Existencia y unicidad de solución
- Aplicación

ABSTRACT

GLOBAL EXISTENCE OF SOLUTION FOR THE EQUATION OF KIRCHHOFF NONLINEAR MECHANISMS INTERNAL STRUCTURAL MATERIALS

ADOLFO DANTE PEREZ MENDOZA

May-2016

Adviser: Lic. Cesar Augusto Avila Celis

Obtained Title: Degree in Mathematic

In this paper we demonstrate the global existence of the following nonlinear equation Kirchhoff

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' - M(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2)\Delta u - a\Delta u' = b|u|^{\beta-2}u & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Where Ω is a bounded set in $\mathbb{R}^n$; $a,b > 0$ and M a function such that $M : [0,\infty[\to [0,\infty[$ with $M(s) \geq m_0 > 0$; denoting a $\frac{\partial u}{\partial t} = u'$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''$.

The thesis has the general objective to give a detailed demonstration of the existence and uniqueness of solution (1). The system (1) modeling the nonlinear oscillations of viscoelastic materials with the Kelvin-Voight viscosity type and a nonlinear term $b|u|^{\beta-2}u$

Key Words:

- Equation of onda
- Method of Faedo-Galerking
- Existence of solutions
- Aplication

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del Problema

La ecuación (1) es una generalización introducida por Kirchhoff [17] en 1883 y es representado por

$$\rho h u'' + \alpha u' = (\rho_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

Esta ecuación es una extensión de la ecuación clásica de la cuerda vibrante propuesta por D Alembert considerando los efectos de los cambios de la longitud durante la vibración.

Donde $0 \le x \le L$ y $t > 0, u(x,t)$ es el desplazamiento lateral en el eje x en el tiempo t, E el módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal, ρ es la densidad de la masa de la cuerda, h es el área de la sección transversal, ρ_0 es la tensión axial, α es el módulo de resistencia y f es la fuerza externa.

Físicamente para dimensión $n=1$ el sistema (1), modela las oscilaciones de una viga o una cuerda elástica, donde en la vida real siempre existen fuerzas externas (por ejemplo $f(u) = b|u|^{\beta-2}u$) propias de la naturaleza que perturban su oscilación. Donde estas perturbaciones son amortiguadas y dejan de oscilar, ello ocurre siempre y cuando dependa la composición interna que tiene el material viscoelástico (por ejemplo $\alpha\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$) y donde es representado por la siguiente ecuación.

$$u'' - m_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = f(u)$$

Donde $m_0 > 0$, $f(u)$ es la fuerza externa y el término $\alpha\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ representa la amortiguación interna de viscosidad tipo Kelvin Voight. De hecho la mayor parte, que es común en una amortiguación de una vibración en la estructura viscoelastica es de tipo pasivo donde absorbe la energía por más pequeña que sea la vibración. Tal mecanismo de amortiguamiento interno está siempre presente en los materiales en estudio.

La dificultad aumenta en el caso de que el término no lineal $f(u)=b|u|^{\beta-2}u$ aparece, ya que si este término $b|u|^{\beta-2}u$ aparece en ecuaciones de onda semilineales, el cual tiende a tener singularidades.

Varios autores han estudiado la existencia y unicidad de la ecuación (1) usando varios métodos, Donde $a,b>0$, y $M(s)=s^k$, $k\geq 1$.

$$(1)\qquad \begin{cases} u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u - a\Delta(u') = b|u|^{\beta-2}u & \text{en} \quad Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x); \quad u'(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

K. Nishihara and Y. Yamada [24] Ellos prueban la existencia global y el decaimiento polinomial de la energía de (1) para datos iniciales u_0 y u_1 suficientemente pequeños y $u_0\neq 0$ sin embargo el método en [2] no puede ser aplicado directamente ya que el término $|u|^{\beta-2}u$ con lleva a singularidades.

M. Aassila and A. Benaissa [25] extienden la existencia global de [2] para el caso donde $M(s)>0$ *y* $M(\|\nabla u_0\|^2)\neq 0$ y el término disipativo no lineal $|u_t|^{\alpha-2}u_t$

K. Ono and K. Nishihara [26] también prueban la existencia global y decaimiento de la energía sin usar datos iniciales pequeños utilizando el método de Faedo-Galerking.

K. Ono [27] obtiene la existencia global de las soluciones del problema (1) con término disipativo u_t en reemplazo del término Δu_t

P. D. Ancona and S. Spagnolo [28] obtienen para $a=0$ con β suficientemente grande y $M(s)\geq r>0$ se prueba que si $u_0,u_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ datos iniciales suficientemente pequeños el problema (1) tiene solución global.

M. Ghisi and M. Gobbino [29] obtienen para $M(s)\geq 0$. La existencia y unicidad global de (1) para datos iniciales pequeños tal que $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. En nuestro caso tomamos $M(s)\geq r>0$ bajo las siguientes condiciones

$$0\leq\beta\leq\frac{2}{n-4}\ ,\ si\ n\geq 5;\ y\ \ 0\leq\beta<\infty,\ si\ n\leq 4$$

probaremos que para datos iniciales suficientemente pequeños se prueba la existencia global de (1)

1.2 Formulación del Problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

(i) ¿Para el problema (1) como modelo matemático se podrá demostrar la existencia global?

(ii) ¿Qué aplicaciones tendrá el problema (1)?

1.3 Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivos Generales

Este trabajo de tesis damos una demostración detallada de la existencia y unicidad de solución de (1), así como también analizar las soluciones del sistema (1) de algunas aplicaciones con ayuda del programa Wolfram Mathematic 10

1.3.2 Objetivos Específicos

Hallar la solución para la ecuación de Kirchhoff no lineal, vía la descomposición espectral del operador Laplaciano Δ. El método de Faedo-Galerkin será utilizado para demostrar la existencia de la solución global del problema de Cauchy, asociado a la ecuación (1).

La unicidad de la solución será demostrada utilizándose la técnica de contradicción con auxilio de la desigualdad de Gronwall.

Para luego ilustrar mediante el programa computacional (Wolfram Matemathic 10) las aplicaciones de los resultados de la ecuación (1)

1.4 Justificación

Este proyecto es una Investigación que abarca distintas aplicaciones en el campo de las ciencias del cual será de mucha ayuda no solo para nuestra facultad sino también para otras facultades y áreas afines ya que su realización y contenido se ha desarrollado de la forma más minuciosa posible.

El sector que será beneficiado con los resultados de esta investigación son los estudiantes de Física, Matemática, Ingeniería y profesionales afines.

En este trabajo investigaremos la ecuación de la onda no lineal y sus aplicaciones a diferentes áreas, como la Física e Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial e Ingeniera Mecánica, por lo que es de gran importancia nuestro trabajo en lo que corresponde al desarrollo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de evolución de Segundo orden.

1.5 Importancia

El presente proyecto está enmarcado en el área de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y el análisis funcional el cual motivó una particular importancia, ya que abordó el problema de estudiar la existencia y unicidad del sistema (1) el cual se adoptó un método indirecto, a través de sistemas aproximados en espacios de dimensión finita y para mostrar sus aplicaciones se utilizó el programa computacional WOLFRAM MATHEMATIC 10 el cual verifica y gráfica nuestro análisis desarrollado en este proyecto.

CAPÍTULO II

2.1 Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes sus demostraciones serán omitidas por que se tratan de resultados ya conocidos. Solo se citaran las referencias donde serán encontrados con sus respectivas demostraciones.

2.1.1 Notaciones

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n$ para:

  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$

  $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}$

- Si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de u será denotado por ∇u y definido como un vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

- El Laplaciano de una función u está definido como:

$$\Delta u = \nabla . \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- Sean u y $v \in L^2(\Omega)$, entonces el producto interno entre u y v está definido por:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

  Y las normas de u en $L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ están dados respectivamente por:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\| = \left[\int_\Omega | u(x) |^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.1.2 Algunos resultados de Álgebra Lineal

Definición II.1 Sean $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ los vectores de un espacio vectorial V definido con producto interno tal que si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$, entonces $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores.

Teorema II.1 Si $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio V definido con producto interno, entonces $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Definición II.2 Un conjunto ortonormal de vectores, es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es ortonormal si y solo si

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Dado cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es posible formar un conjunto ortonormal definido

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|} \right) v_i \quad ; \ \forall i = 1, 2, 3 \ldots., n$$

Teorema II.2 Sea $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial V definido con un producto interno si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ entonces $a_i = \langle v_i, v \rangle$

Corolario II.1 Sea $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ una base ortonormal para un espacio V con producto interno si $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ entonces:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Corolario II.2 **(Identidad de Perseval)** Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de un espacio vectorial V con producto interno y si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ entonces

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

2.1.3 Espacios $L^p(\Omega)$

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

El espacio euclidiano de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n-uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}, \forall$ i=1,2,......,n

Definición II.3 Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, denotaremos con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue es decir:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $\mathcal{L}^p(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}-$espacio vectorial y la aplicación $\| \; \|_p$ definida por

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad ; u \in \ell^p(\Omega)$$

es una seminorma en $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Observación II.1 Se dice que $u = v$ casi siempre (c.s) en Ω si y solo si $\exists M \subseteq \Omega$ tal que $u(x) = v(x)\ \forall x \in \Omega \setminus M$ y $\mathrm{med}(M) = 0$

Para obtener una norma se define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mediante

$$u \equiv v \text{ si y solo si } u = v \text{ (c.s) en } \Omega$$

Denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio cociente

$$L^p(\Omega)=\frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\equiv}=\{[u]:u\in\mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

El cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}};\quad u\in L^p(\Omega)$$

Cuando $p=2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx\ ;\quad u,v\in L^2(\Omega)$$

Su norma inducido será denotado por

$$\|u\|_2=\left[\int_\Omega |u(x)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}};\quad u\in L^2(\Omega)$$

si $p=\infty$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ medible denotaremos con $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω esencialmente acotadas en Ω es decir

$$L^\infty(\Omega)=\{\,u:\Omega\to\mathbb{R}\,/\,u \text{ es medible y } \exists C>0 \text{ tal que } |u(x)|\le C\ ; \text{c.s en } \Omega\,\}$$

Definición II.4 Definimos el supremo esencial como

$$\sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|=\inf\{C>0\ ;|u(x)|\le C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real para una función $L^\infty(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y

$$\|u\|_\infty=\sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|\ ;\quad u\in L^\infty(\Omega)$$

define una norma.

Demostración. Ver L. A. Medeiros & M. Milla Miranda [7]

Proposición II.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para funciones $L^2(\Omega)$)

Sean $u:\Omega\to\mathbb{R}$ y $v:\Omega\to\mathbb{R}$ dos funciones cuadrado integrables entonces:

$$|(u,v)|\le\|u\|\|v\|$$

Demostración. Ver H. Brezis [4]

Proposición II.2 (Desigualdad de Young)

Sea $a\ge 0$, $b\ge 0$ y $1<p,\,q<\infty$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ entonces $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$

Demostración. Ver L. A. Medeiros & E. A. De Mello [6]

Proposición II.3 (Desigualdad de Hölder)

Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ($q=1$ si $p=\infty$ y $q=\infty$ si $p=1$). Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |uv|\,dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostración. Ver L.A. Medeiros & E.A De Mello [6].

Sean V,W dos espacios de Banach con $V \subset W$ como subespacio vectorial (ambos con norma probablemente diferentes), Diremos que V está inmerso continuamente en W y denotaremos por $V \hookrightarrow W$ si y solo si $\exists C>0$ tal que $\| \; \|_W < C \| \; \|_V$; $\forall u \in V$

Proposición II.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_p \leq \|u\|_q \left(med(\Omega)\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

Demostración. Ver R. A. Adams [1].

Proposición II.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p < \infty$ entonces:

$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$

Teorema II.3 (Teorema de representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1<p<\infty$, $\varphi \in \left(L^p(\Omega)\right)'$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que:

$$<\phi,v>=\int_\Omega u(x)v(x)dx \;\; ; \forall v \in L^p(\Omega) \text{ y } \| u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \| \phi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración. Ver R. A. Adams [1].

Teorema II.4 (Teorema de representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

Sea $T \in \left[L^1(\Omega)\right]'$ entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$

$T(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$ y $\|u\|_\infty = \|T\|_{(L^1(\Omega))'}$ así $\left(L^1(\Omega)\right)' \equiv L^\infty(\Omega)$

Demostración. Ver Adams [1]

Sea $v \in L^1(0,T)$ decimos que $s \in [0,T]$ es un punto de Lebesgue para todo v, si $h > 0$ tal que $[s-h, s+h] \subseteq]0,T[$ entonces:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} v(\varepsilon)d\varepsilon = v(s)$$

Definición II.5 Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de orden α de T denotado por $D^\alpha T$ y su distribución está definido por:

$$< D^\alpha T, \phi > = (-1)^\alpha < T, D^\alpha \phi >, \ \forall\, \phi \in D(\Omega)$$

Así mismo si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con está definición se tiene si $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$; $\forall |\alpha| \leq k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u.

DefiniciónII.6 Decimos que $u_k \to u$ casi siempre en Ω si $u_k(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y $k \to \infty$.

Teorema II.5 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)

Sea $(u_k)_{k \in IN}$ una sucesión de funciones integrables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, que converge casi siempre a la función u. Si existe una función u_0 tal que $|u_k| \leq u_0$ casi siempre para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces u es integrable y se tiene:

$$\int_\Omega u = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k$$

Demostración. Ver H. Brezis [4]

2.1.4 Distribuciones

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$, una función escalar el soporte de u es la clausura de Ω del conjunto y lo denotamos por:

$$\text{sop }(u) = \overline{\{\, x \in \Omega \,/\, u(x) \neq 0 \,\}}^{\Omega} \subset \Omega$$

Observación II.2 El soporte de u es el menor conjunto cerrado de Ω fuera del cual $u = 0$ en el siguiente sentido

(i) sop(u) es cerrado en Ω y $u = 0$ en $\Omega \setminus \text{sop}(u)$

(ii) Si W es un conjunto cerrado de Ω y $u=0$ en $\Omega\backslash W$ entonces el $\operatorname{sop}(u)\subseteq W$

Por $C_0^\infty(\Omega)$ se denotara el espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto de Ω que posean derivadas continuas de todos los órdenes en Ω

Teorema II.6 $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$

Demostración. Ver R.A Adams [1].

2.1.5 Noción de Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición II.7 Sea $(\varphi_k)_{k\in N}$ una sucesión de $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ decimos que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ si:

(i) $\exists\, K\subseteq\Omega$, K compacto, tal que $Sop\,\phi_k\subseteq K$, para todo $K\in\mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $D^\alpha\phi_k(x)\to D^\alpha\phi(x)$ uniformemente en $x\in\Omega$.

Definición II.8 El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida anteriormente es denotado por $D(\Omega)$ y es llamado función de prueba.

Definición II.9 Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continua en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$:

$$D'(\Omega)=\{T:D(\Omega)\to\mathbb{R}\ /\ T \text{ es lineal y continua}\}$$

El conjunto $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre IK.

Si $T\in D'(\Omega)$ y $\phi\in D(\Omega)$ denotaremos por $<T,\varphi>$ al valor T aplicado al elemento φ.

2.1.6 Noción de convergencia en $D'(\Omega)$

Definición II.10 Diremos que $T_k\to T$ en $D'(\Omega)$ sí $<T_k,\varphi>\longrightarrow<T,\varphi>$, para toda $\varphi\in D(\Omega)$.

2.1.7 El Espacio de las Distribuciones

Se denomina distribución sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(\Omega)$ es decir una distribución es una aplicación

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

Tal que:

(i) $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

(ii) T es continua, esto es si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$ entonces $(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $(T(\varphi))$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω en este espacio una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \rightarrow T$ si y solo si la sucesión $(T_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $(T(\varphi))$ en $\mathbb{R}$ para todo φ en $D(\Omega)$

El espacio de las distribuciones sobre Ω. Con esta noción de convergencia será denotado por $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto (T_u, \varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ dualidad entre $D'(\Omega)$ si y solo si es lineal, continua e inyectiva en dicha recurrencia es común identificar una distribución T_u con la función $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. En ese sentido se tiene que $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$; como $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω está y toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Observación II.3 $L^1_{Loc}(\Omega)$ es llamado el espacio de las funciones localmente integrales. Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ consideremos el funcional $T = T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$<T,\varphi>=<T_u,\varphi>=\int u(x)\varphi(x)dx.$$

Observación II.4 El valor de la distribución T en φ se representa también por (T,φ) (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$)

Lema II.1(Du Bois Reymond) Sea $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int u(x)\varphi(x)dx=0$ para todo $\varphi\in D'(\Omega)$ entonces $u(x)=0$ c.s en Ω

Demostración. Ver P.H. Rivera [9].

Observación II.5 las distribuciones T_u definidas por funciones $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas por esta razón se identifica u con las funciones y con la distribución T_u luego $L^1_{Loc}(\Omega)\subset D'(\Omega)$

2.1.8 Derivada Distribucional

Sea $T\in D'(\Omega)$ y $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,.......,\alpha_n)$ un multi-indice se denotara derivada de orden α de T si la distribución $D^\alpha T$ definida por

$$\left(D^\alpha T,\varphi\right)=(-1)^\alpha\left(T,D^\alpha\varphi\right);\qquad \forall\varphi\in D(\Omega)$$

Esto nos indica que cada distribución T sobre Ω tiene derivada de todos los órdenes. Así las funciones de $L^1_{Loc}(\Omega)$ tienen derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.

Observación II.6. La aplicación $D^\alpha:D'(\Omega)\to D'(\Omega)$ es lineal y continua en el sentido de la convergencia definida $D'(\Omega)$ esto significa que

$$\lim_{k\to\infty}T_k=T \text{ en } D'(\Omega) \text{ entonces } \lim_{v\to\infty}D^\alpha T_k=D^\alpha T \text{ en } D'(\Omega)$$

2.1.9 Distribuciones Vectoriales

Sea V un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre $[0,T]$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0,T)$.

Dada una distribución T su valor en φ se representa por $\langle T,\varphi\rangle$ al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$. Denotaremos por $D'(0,T;V)$, y sea $u\in L^p(0,T;V)$; $1\leq p<\infty$ definimos

$$T_u : D(0,T)\to V \,/\, \langle T_u,\varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt$$

Observación II.7

Se verifica que T_u es una distribución y están definidas por funciones $u\in L^p(0,T;V)$, $\varphi\in D(0,T)$. Luego $\varphi u\in L^1(0,T;V)$.

- T_u es lineal y continua en $D(0,T)$
- T_u esta unívocamente determinado por u

Lema II.2 Sea V un espacio de Banach si $u\in L^1(0,T;V)$ y $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt=0$ para todo φ en $D(0,T)$ entonces $u(t)=0$ $c.s$ en $]0,T[$

Demostración. Ver Eberhard Zeidler [3]

2.1.10 Derivación en $D'(0,T;V)$

Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales denotado por u' ó $\dfrac{du}{dt}$ como

$$\left\langle \frac{du}{dt},\varphi\right\rangle = -\left\langle u,\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle \qquad \forall\varphi\in D(0,T)$$

En general la derivada de orden n se define como

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n},\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle u,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle \qquad \forall\varphi\in D(0,T)$$

En particular todo elemento $u\in L^p(0,T;V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$

Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $C([0,T];V)$. El espacio de las funciones que son continuas $[0,T]$ en V.

Sean V y H dos espacios de Hilbert real con sus respectivas estructuras de Hilbert $\left(V,(\,.,.\,)_V,\|\ \|_V\right)$ y $\left(H,(\,.,.\,)_H,\|\ \|_H\right)$ se supone que $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta y continua denso en $H(\overline{V}^{\|\ \|_H}=H)$. Denotemos ($\hookrightarrow$) con símbolo de inmersión.

Lema II.3 **(Temam)** Sea X un espacio de Banach con X' sean u y g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T;X)$. Entonces son equivalentes

1. u es c.s igual a la primitiva de g es decir $\exists\xi\in X$ tal que

   $$u(t)=\xi+\int_0^T g(s)ds, \qquad \text{c.s en } \ t\in[0,T]$$

2. Para todo $\varphi\in D(0,T)$ se tiene

   $$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds=\int_0^T g(s)\varphi(s)ds$$

3. para todo $\eta\in X'$

   $$\frac{d}{dt}(\eta,u(t))_{X'\times X}=(\eta,g(t))_{X'\times X}$$

En el sentido distribucional sobre $]0,T[$

Demostración: Ver R. Temam Navier [18].

Lema II.4 Sean V,H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso $(V\hookrightarrow H\hookrightarrow V')$; V' dual de V . Si $u\in L^2(0,T;V)$ y $u'\in L^2(0,T;V')$ entonces $u\in C([0,T];H)$ y tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2=2\left(u'(t),u(t)\right)_{V'\times V}$$

En el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$

Demostración. Ver R.Temam Navier [18].

2.1.11. Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistas en las referencias Adams [1], Brezis [4], Kesavan [5], Medeiros [6],[7] y Rivera [9].

Definición II.11 Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u.

El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p ; D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

2.1.12 Norma en $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y sea la expresión

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \left| (D^\alpha u)(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty.$$

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observación II.8

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p} \right)$ es un espacio de Banach.

2. Cuando $p = 2$, el espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno denotado por:

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(D^\alpha u , D^\alpha v \right)_{L^2(\Omega)} \qquad u,v \in W^{m,2}(\Omega)$$

Se denota a $W^{m,2}(\Omega)$ también como $H^m(\Omega)$ donde:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq m \right\}$$

Luego:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / Du \in L^2(\Omega) \right\} = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega);\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq 2 \right\}$$

La forma bilineal

$$((u,v))=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}\nabla u\nabla v=(\nabla u,\nabla v)_{L^2(\Omega)}=(\nabla u,\nabla v)$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ e induce una norma y la denotamos por

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}=((u,u))=(\nabla u,\nabla u)_{L^2(\Omega)}=(\nabla u,\nabla u)=\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\nabla u\|^2.$$

En el espacio $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ definamos la forma bilineal

$$(\,.\,)_{\Delta}=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\to\mathbb{R}$$

mediante

$$(u,v)_{\Delta}=\int_{\Omega}\Delta u\Delta v=(\Delta u,\Delta v)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta v)$$

que resulta ser un producto interno y la norma inducida es:

$$\|u\|^2_{\Delta}=(\Delta u,\Delta u)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta u)=\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\Delta u\|^2$$

2.1.13 Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{-m,p}(\Omega)$

Definición II.12 La clausura del espacio vectorial $D(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$ se designa por $W_0^{m,p}(\Omega)$ es decir $W_0^{m,p}(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$

1. Cuando $p=2$ se tiene $H_0^m(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_m}$

   Si $m=1$ se tiene

   $H_0^1(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$ para Ω abierto y acotado con frontera bien regular se prueba que:

   $H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega)\,/\,u|_{\Gamma=\partial\Omega}=0\}$

   $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)=\{u\in H^2(\Omega)\,/\,u|_{\Gamma}=0\}$

   si $\Omega=\mathbb{R}^n\Rightarrow H_0^1(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}=H^1(\Omega)$

2. Si $W_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ es nula.
3. También se tiene que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)=W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Definición II.13 Sea $1 \le p < \infty$ y $q > 1$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Representamos a $W^{-m,p}(\Omega)$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se representa como $H^{-m}(\Omega)$.

2.1.14 Inmersiones de Sobolev

Teorema II.7 (Teorema de Sobolev) Sean $m \ge 1$ y $1 \le p < \infty$. Entonces:

(*i*) *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\,; \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

(*ii*) *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; $q \in [p, \infty)$

(*iii*) *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Siendo todas las inmersiones continuas.

2.1.15 Espacios $L^p(0,T;V)$

Sea $0 < T < \infty$ y V un espacio de Banach, una función $u:[0,T] \to V$ es llamada medible en $[0,T]$ si la función real $t \to \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V}$ es medible Lebesgue en $[0,T]$ para todo $f \in V'$ donde V' es el dual topológico de V y $\langle\ .\ \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V' y V en este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u:[0,T] \to V$ es llamada integrable en el sentido de Bochner en $[0,T]$, si u es medible en $[0,T]$ y la función real $t \to \|u(t)\|_V$ es integrable a Lebesgue en $[0,T]$ en este caso la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt \in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V' \times V} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V} dt \qquad \forall f \in V$$

Si $1 \leq p < \infty$ denotaremos por $L^p(0,T;V)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u:[0,T] \to V$ y tales que $t \to \|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $[0,T]$, Este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p=2$ y V es un espacio de Banach, entonces $L^2(0,T;V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)} = \int_0^T (u(t), v(t)) \, dt$$

Si $p = \infty$ representaremos por $L^\infty(0,T;V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:[0,T] \to V$ que son medibles y tal que el supremo esencial $(\|u(t)\|_V \,; t \in [0,T])$ es finito $L^\infty(0 T, V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{u \in [0,T]} ess \|u(t)\|_V$$

Proposición II.6 Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$ entonces $L^p(0,T;V)$ es separable en el caso que V sea separable y $1 \leq p < \infty$

Demostración: Ver E. Zeidler [3].

Un resultado muy importante es respecto a dos espacios $L^p(0,T;H)$, que permiten identificar $(L^p(0,T;H))' \approx L^{p'}(0,T;H')$. Para el caso en que $p=1$ se identifica $\left(L^1(0,T;H)\right)' \approx L^\infty(0,T;H')$. Analicemos ahora el caso en que $p=1$ y $H = L^2(\Omega)$

Para esto se define:

$$F : L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \to (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'$$
$$u \to F(u)$$

donde

$$F(u): L^1(0,T;(L^2(\Omega))') \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi \rightarrow \langle F(u),\xi\rangle = \int_0^t \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

F es lineal continua y biyectiva de este modo habremos identificado:

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \approx (L^1(0,T;(L^2(\Omega))'))',$$

donde sus elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ pueden ser vistos como elementos del dual de $L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$. Entonces cuando decimos que:

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

Tenemos

$$\langle u_m,\xi\rangle \rightarrow \langle u,\xi\rangle_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'\times L^1(0,T;(L^2(\Omega))')}, \quad \forall \xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$$

lo que significa también que:

$$\int_0^T \langle \xi(t), u_m(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt \rightarrow \int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

$\forall \xi \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))')$

La siguiente proposición relaciona la convergencia débil estrella antes mencionada con la convergencia débil.

Proposición II.7 sea V un espacio de Banach. Si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es continua. Entonces $\forall\ 1 \le p \le q \le \infty$ la inmersión $L^p(0,T,X) \hookrightarrow L^q(0,T,Y)$ es también continua.

Demostración: Ver E. Zeidler [3].

Teorema II.8 (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante C que depende de Ω tal que:

$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

La constante C es llamada la constante de Poincaré para Ω

Observación II.9

1.- La desigualdad de Poincaré también es válida si $u \in H^1(\Omega)$ y el trazo de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anulan sobre alguna parte de Γ. (Ver. H. Brezis [4]).

2.- La desigualdad de Poincaré continua válida en $W_0^{1,p}(\Omega)$

2.1.16 Consecuencias de la Desigualdad de Poincaré

1.-La norma de Sobolev $\|.\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma del gradiente en $L^2(\Omega)$. Donde existe $C>0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.- La norma de Sobolev $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ es equivalente a la norma del Laplaciano en $L^2(\Omega)$.

Para funciones en $H_0^2(\Omega)$, esto es existe $C>0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^2(\Omega)$. De esto se sigue que si $u \in H_0^2(\Omega)$ entonces se tiene que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ donde se da la desigualdad de Poincaré.

2.1.17 Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Sea V un espacio de un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si $\exists u \in V$ tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando $k \to \infty$ en tal caso denotaremos por $u_k \to u$

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V, si existe $u \in V$ tal que $\langle f, u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f, u\rangle_{V'\times V}$; $\forall f \in V'$ con inmersión compacta y continua en este caso denotaremos por $u_k \to u$

Proposición II.8 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V que converge débil hacía u en V entonces

$$\|u\|_V \leq \liminf \|u_k\|_V$$

Demostración. Ver H. Brezis [4].

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u\in L^p(0,T;V)$ se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u\in L^p(0,T;V)$ si :

$\langle f,u_k\rangle_{L^p(0,T;V)\times L^p(0,T;V')} \to \langle f,u\rangle_{L^p(0,T;V)\times L^p(0,T;V')}$

$\forall f\in L^q(0,T;V')$, donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

esto significa que

$$\int_0^T \langle f,u_k\rangle_{V\times V'}\,dt \to \int_0^T \langle f,u\rangle_{V\times V'}dt; \qquad \forall f\in L^q(0,T;V')$$

Observación II.10

En el caso $V=H_0^1(\Omega)$ entonces $V'=H^{-1}(\Omega)$

$$\langle G,v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}=(G,v);\quad \forall G\in L^2(\Omega),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\equiv\left(L^2(\Omega)\right)'=L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Luego

$$\int_0^T (w(t),u_k(t))\,dt \to \int_0^T (w(t),u(t))dt$$

donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $w\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual de la norma

$$\|f\|_{V'}=\sup_{\|u\|_V}|\langle f,u\rangle|$$

Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k \xrightarrow{*} u$ si y solo si $\langle u_k,w\rangle \to \langle u,w\rangle$ para todo $w\in V$

así $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;V)$ si y solo si

$$\langle u_k,w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle u,w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$$

$\forall w\in L^1(0,T;V)$ es decir

$$\int_0^T (w(t),u_k(t))_{V'\times V}\,dt \to \int_0^T (w(t),u(t))_{V'\times V}dt\ ;\ \forall w\in L^1(0,T;V)$$

Observación II.11

Si $V = L^2(\Omega)$ y $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')$ significa que

$$(u_k, w)_{L^\infty(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to (u,w)_{L^\infty(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \;;\forall w\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

es decir

$$\int_0^T (u_k,w)_{\left(L^2(\Omega)\right)'\times L^2(\Omega)} dt \to \int_0^T (u,w)_{\left(L^2(\Omega)\right)'\times L^2(\Omega)} dt\,;\ \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

por tanto $u_k \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ si y solo si $\int_0^T (u_k,w)dt \to \int_0^T (u,w)dt$

$\forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

2.1.18 Topologías Débil y Débil estrella

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado *V* se denomina un espacio de Hilbert de *V*, si *V* es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno.

Un espacio *E* es separable si existe un sub-conjunto $D \subseteq E$, tal que *D* es denso numerable en *E*.

Sea *E* un espacio de Banach y sea $f \in E'$, siendo E' el dual topológico de *E* y designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(x) = \langle f, x \rangle$.

La topología débil $\sigma(E,E')$ sobre *E* es una topología menos fina en *E* que hace continua a todas las aplicaciones $(T_f)_{f\in E'}$. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ en *E*, la notación de convergencia débil en general está indicada como:

$x_n \to x$ débil $\sigma(E,E')$ o simplemente $x_n \to x$ débil en *E*

Proposición II.9 Sea $(x_n)_{n\in N}$ una sucesión de *E* entonces:

(*i*) $x_n \to x$ débil en $\sigma(E,E')$ sí y solo si

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall f\in E'$$

(*ii*) $x_n \to x$ fuerte en E entonces $x_n \to x$ débil en E

Demostración: Ver H. Brezis [4].

Proposición II.10 Sea E un espacio de Banach y sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de E' entonces se tiene:

(*i*) $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$ si y solo si $< f_n, x > \to < f, x >, \forall x \in E$;

(*ii*) $f_n \longrightarrow f$ fuerte en E' entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E',E'')$.

$f_n \longrightarrow f$ débil en $\sigma(E',E'')$ entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$;

(iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y

$\|f\| \leq Lim \inf \|f_n\|$

(iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, y si $x_n \to x$ fuerte en E entonces

$< f_n, x_n > \to < f, x >$

Demostración: Ver H. Brezis [4].

Proposición II.11 Sea $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, entonces $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Teorema II.9 (Aloglu-Bourbarki)

Sea E un espacio normado separable y sea $\{x_k\}$ una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{x_k\}$ de $\{x_m\}$ y $x \in E'$ tal que:

$$x_k \xrightarrow{*} x \text{ en } E'$$

Demostración: Ver H. Brezis [4]

Teorema II.10 (Aubin-Lions)

Sean B_0, B_1 *y* B tres espacios de Banach tales que B_0 y B_1 son espacios reflexivos además $B_0 \hookrightarrow B$ con inmersión compacta y $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas.

Sea $W(0,T) = \{u \in L^p(0,T;B_0);\, u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, donde $0 < T < \infty$; $1 < p,q < \infty$ con la norma definida por: $\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T;B)$

Demostración. Ver J. L. Lions [10]

Lema II.5 (Lema de Lions) Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; g_n y g funciones de $L^q(\Omega)$; $1 < q < \infty$ tal que:

$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ y $g_n \to g$ c.s en Ω

Demostración. Ver Lions [10]

Lema II.6 Sea X un espacio de Banach, si $u \in L^p(0,T;X)$ y $u' \in L^p(0,T;X)$ entonces $u \in C([0,T];X)$ excepto en un conjunto de medida nula sobre $[0,T]$

Demostración. Ver J. L. Lions [10]

Teorema II.11 (Teorema de Banach-Steinhaus)

Sean X e Y dos espacios de Banach y $(T_i)_{i\in I}$ una familia de operadores lineales y continuos de X en Y. Si se cumple:

para todo $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $||T_i x|| \leq M_x$, $\forall i \in I$, entonces existe $M > 0$ tal que $||T_i|| \leq M$, $\forall i \in I$.

2.1.19 Desigualdad de Gronwall

Lema II.7(Lema de Gronwall) Sean $\varphi \in L^\infty(0,T)$ y $\beta \in L^1(0,T)$ tal que $\beta > 0$, $\phi \geq 0$ y una constante $K \geq 0$. Si:

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds , \qquad \forall t \in [0,T],$$

entonces se tiene que:

$$\varphi(t) \leq Ke^{\int_0^t \beta(s)ds} , \qquad \forall t \in (0,T)$$

2.1.20 Resultados de la teoría Espectral

A continuación seguimos con la demostración de la teoría espectral, que es esencial para la obtención del problema aproximado. Que consiste en proyectar el problema (1) en dimensión finita.

Sean V y H dos espacios de Hilbert completos, cuyos productos internos y normas serán denotados por $(\ .\ )_V, \|\cdot\|_V$ y $(\ .)_H, \|\cdot\|_H$ respectivamente, supongamos que:

1) V es denso en H;
2) $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta;
3) Está definida una forma sesquilineal y continua $a(u,v)$ *en* $V\times V$;
4) Existen α_0 *y* α en $\mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, tal que:

   $a(u,v)$ es hermitiana; $\operatorname{Re}[a(v,v) + \alpha_0(v,v)] \geq \alpha \| v \|_V^2$, $\forall v \in V$;

5) A es denotado como el operador definido por la terna $(V, H, a(u,v))$.

Teorema II.12 (Teorema Espectral) Con las hipótesis anteriores obtenemos que:

(i) A es auto-adjunto y existe un sistema ortonormal y completo $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ los w_i forman una colección numerable de H constituido por los vectores propios de A.

(ii) Si $(\lambda_i)_{i\in N}$ son los valores propios o autovalores de A correspondientes a la sucesión $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces:

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots\ldots\ldots \leq \lambda_m \leq \ldots\ldots$ *y* $\lambda_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$

(iii) El dominio de A esta dado por:

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \, |(u, w_i)|^2 < \infty \right\}.$$

(iv) $Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u, w_i) w_i$.

Para obtener la solución del problema aproximado, el cual será utilizado en el capítulo siguiente para resolver el problema en cuestión, necesitaremos dos resultados a seguir.

2.1.21 Condiciones de Caratheodory (Prolongamiento de Soluciones)

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados por $(t,x)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y sea $f:\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ una función.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad ....(i)$$

Se dice que $f:\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre Ω si:

(i) $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo;

(ii) $f(t,x)$ es continua en x para casi todo t fijo

(iii) Para cada compacto $K\subseteq\Omega$, existe una función real $m_K(t)$ integrable tal que

$$|f(t,x)|_{IR^n}\le m_K(t),\quad \forall(t,x)\in K$$

Teorema II.13 (Teorema de Caratheodory)

Sea $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Entonces existe una solución de *(i)* en $x(t)$ sobre algún intervalo $|t-t_0|\le\beta$, $(\beta>0)$

Lema II.8 Sea $\Omega=[0,T)\times B$ con $T>0$ *y* $B=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\le b\},b>0.$ Sea $f:\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ que cumple con las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Supongamos que *x*(t) es una solución de *(i)* tal que $|x_0|\le b$ en cualquier intervalo I, donde $x(t)$ está definida, se tendrá $|x(t)|\le M, \forall t\in I, M$ independiente de I y $M<b$ entonces x posee un prolongamiento en $[0,T]$.

2.2 Existencia y Unicidad de Soluciones

2.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $u = u(x,t)$ una función tal que $u : Q = \Omega \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado con frontera Γ bien regular y sea $T \in]0,\infty[$ .Tal que consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u - a\Delta u' = b|u|^{\beta-2}u & \text{en } Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

Donde a y b son números reales positivos, donde β, M y E (energía asociada al sistema) verifican las siguientes hipótesis

[H_1] β satisface

si $2 < \beta \le \dfrac{2n-2}{n-2}$ para $n > 2$ ó $2 < \beta < \infty$ para $n = 1,2$

[H_2] La función $M : [0,\infty[\to [0,\infty[$; M de clase C^1 tal que:

$$M(s) \ge m_0 > 0 \ ; \ \int_0^s M(\alpha)d\alpha \le sM(s) \ \text{ y } \ \hat{M}(s) = \int_0^s M(r)dr$$

[H_3] $E(0)$ satisface

$$\frac{b}{m_0^\beta} C_*^\beta \left(\frac{\beta}{\beta-2} E(0) \right)^{\frac{\beta-2}{2}} < 1 \quad \text{y} \quad E(0) < d$$

donde $E(t) = \|u'(t)\|^2 + \hat{M}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right) - \dfrac{2b}{\beta}\|u(t)\|_\beta^\beta$

E representa la energía asociada al sistema (1)

Construcción de los funcionales I y J

Multiplicando a la ecuación (1) por u' e integrando sobre Ω y aplicando Green se tiene

$$\int_\Omega u''u'dx-\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)\Delta uu'dx-a\int_\Omega \Delta u'u'dx-b\int_\Omega |u|^{\beta-2}\,uu'dx=$$

$$\int_\Omega u''u'dx+\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)(-\Delta u)u'dx+a\int_\Omega (-\Delta u')u'dx-b\int_\Omega |u|^{\beta-2}\,uu'dx=$$

Trabajando por separado para cada término tenemos

$$*\int_\Omega u''u'dx=\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u')^2dx=\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u'|^2dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u'|^2dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2$$

$$*\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)(-\Delta u)u'dx=M(\|\nabla u\|^2)\int_\Omega (-\Delta u)u'dx=$$

$$M(\|\nabla u\|^2)\left[\int_\Omega \nabla u\nabla u'dx-\underbrace{\int_\Gamma u'\frac{\partial u}{\partial v}d\Gamma}_{=0;}\right]$$

$$=M(\|\nabla u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla u'dx=M(\|\nabla u\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'\|^2$$

$$*\ a\int_\Omega (-\Delta u')u'dx=a\left[\int_\Omega \nabla u'\nabla u'dx-\underbrace{\int_\Gamma u'\frac{\partial u'}{\partial v}d\Gamma}_{=0;}\right]=a\int_\Omega \nabla u'\nabla u'dx=a\int_\Omega |\nabla u'|^2dx$$

$$=a\|\nabla u'\|^2$$

$$*\ b\int_\Omega |u|^{\beta-2}\,uu'dx=b\int_\Omega |u|^{\beta-1}\frac{u}{|u|}u'dx=b\int_\Omega |u|^{\beta-1}\frac{d}{dt}|u|\,dx$$

$$=b\int_\Omega \frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}|u|^\beta dx=\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^\beta dx=\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u\|_\beta^\beta$$

Entonces reemplazando en la ecuación se tiene

$$\int_\Omega u''u'dx+\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)(-\Delta u)u'dx+a\int_\Omega (-\Delta u')u'dx-b\int_\Omega |u|^{\beta-2}\,uu'dx=$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'\|^2-\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u\|^{\beta-1}+a\|\nabla u'\|^2=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)dx+a\|u'\|^2-\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u\|_\beta^\beta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u\|^2)+a\|u'\|^2-\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u\|_\beta^\beta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'\|^2+\hat{M}(\|\nabla u\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u\|_\beta^\beta\right]+a\|\nabla u'\|^2=0$$

Definición II.14 Sean los siguientes funcionales I y J tales que:

$$J(u)=\hat{M}(\|\nabla u\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u\|_\beta^\beta$$

$$I(u)=\hat{M}(\|\nabla u\|^2)-b\|u\|_\beta^\beta$$

Definición II.15 Sea el conjunto W el cual cumple la siguiente condición

$$W=\left\{u\in H_0^1(\Omega)\,/\,I(u)=\hat{M}(\|\nabla u\|^2)-b\|u\|_\beta^\beta>0;\ J(u)<d\right\}\cup\{0\}$$

donde

$$d=\inf\left\{\sup_{\lambda>0}J(\lambda u),u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}$$

Observación II.12 Se debe mencionar que el valor d se demuestra que es el nivel de paso de montaña asociada al problema de Dirichlet $-\Delta u=|u|^{\beta-2}u$ en Ω $u=0$ en $\partial(\Omega)$ y que está asociado a nuestro sistema (1)

Lema II.9 Si $2\le q\le\frac{2n}{n-2}$ si $n>2$ ó $2\le q<\infty$ si $(n=1,2)$ entonces existe una constante positiva C_* que depende de Ω y q tal que:

$$\|u\|_q\le\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le C_*\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\ ;\ \forall u\in V$$

El método de Faedo-Galerkin será utilizado para demostrar la existencia de la solución global del problema de Cauchy, asociado a la ecuación (1). La unicidad de la solución será demostrada utilizándose la técnica de contradicción con auxilio de la desigualdad de Gronwall.

Para alcanzar los objetivos definidos anteriormente, dividimos este trabajo en las siguientes etapas:

i) Estudiar la existencia de soluciones locales a través del método de Faedo-Galerkin

ii) Obtener estimativas a priori y prolongamiento de la solución (solución global)

iii) Mostrar la unicidad de la solución

iv) Con el programa computacional WOLFRAM MATHEMATIC 10 mostrar su aplicación respecto a la oscilación de una viga que esta asociado a las soluciones del problema (1)

2.2.2 Formulación Variacional

Multiplicando por una función suficientemente regular v a la ecuación (1) e integrado sobre Q se tiene

$$\int_Q u''vdx - \int_Q M(\|\nabla u\|^2)\Delta uvdx - a\int_Q \Delta u'vdx - b\int_Q |u|^{\beta-2} uvdx = 0$$

Luego sea $v(x,t) = \theta(t)w(x)$ donde $\theta \in D(0,T)$; $w \in H_0^1(\Omega)$; $\forall t \in \langle 0,T \rangle$ luego

$$\int_0^T \int_\Omega u''\theta wdxdt - \int_0^T \int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)\Delta u\theta wdxdt - a\int_0^T \int_\Omega \Delta u'\theta wdxdt$$

$$-b\int_0^T \int_Q |u|^{\beta-2} u\theta wdxdt = 0$$

Luego utilizando el teorema de Fubbini y la integración por partes y la formula de Green se tiene

$$-\int_0^T (\int_\Omega u'wdx)\theta' dt + \int_0^T M(\|\nabla u\|^2)(\int_\Omega \nabla u \nabla wdx)\theta dt + a\int_0^T (\int_\Omega \nabla u' \nabla wdx)\theta dt$$

$$-b\int_0^T (\int_Q |u|^{\beta-2} uwdx)\theta dt = 0$$

en términos de la notación distribucional tenemos

$$-\int_0^T (u',w)\theta' dt + \int_0^T M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla w)\theta dt + a\int_0^T (\nabla u', \nabla w)\theta dt - b\int_0^T (|u|^{\beta-2} u, w)\theta dt = 0$$

también

$$-\langle (u',w), \theta' \rangle + \left\langle M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla w), \theta \right\rangle + a\langle (\nabla u', \nabla w).\theta \rangle - b\left\langle (|u|^{\beta-2} u, w), \theta \right\rangle = 0$$

luego por la propiedad de la derivada distribucional

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u',w), \theta \right\rangle + \left\langle M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla w), \theta \right\rangle + a\langle (\nabla u', \nabla w).\theta \rangle - b\left\langle (|u|^{\beta-2} u, w), \theta \right\rangle = 0$$

Es decir

$$\frac{d}{dt}(u',w) + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla w) + a(\nabla u', \nabla w) = b(|u|^{\beta-2} u, w) \ ; \ \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

en el sentido distribucional.

Por lo tanto el anterior análisis motiva la siguiente definición,

Definición II.16 Dado $u_0 \in W(\Omega) \cap H^2(\Omega)$; $u_1 \in H^1(\Omega)$ decimos que $u : Q \to \mathbb{R}$ es solución fuerte de (1) si satisface

1. $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$
2. $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$
3. $u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$
4. $\dfrac{d}{dt}(u',v) + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u.\nabla v) + a(\nabla u', \nabla v) = (b|u|^{\beta-2}u, v);\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

   en $D'(\Omega)$. En el sentido distribucional
5. $u(0) = u_0$ y $u'(0) = u_1$

Teorema II.14 (Existencia Global)

Sean $u_0 \in W(\Omega) \cap H^2(\Omega)$; $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ y asumiendo las hipótesis $[H_1]$, $[H_2]$, $[H_3]$. Entonces el problema (1) admite una única solución fuerte tal que:

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u' &\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u'' &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2.3 Soluciones Aproximadas (Método de Faedo-Galerkin)

En la presente demostración utilizaremos el Teorema Espectral para proyectar el problema en estudio a espacios de dimensión finita, obteniendo así un problema más simple, del cual tendrá solución garantizada, por medio del teorema de Caratheodory.

Demostración:(Solución Local)

Sea $(w_j)_{j\geq 1}$, una base de Hilbert de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, base que siempre podemos encontrar, desde que $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, separable (en el sentido que contiene un subconjunto denso y numerable). Entonces el conjunto $(w_j)_{j\geq 1}$ satisface lo siguiente:

(a) Todo subconjunto finito de $(w_j)_{j\geq 1}$ es un conjunto linealmente independiente

(b) El conjunto de las combinaciones finitas de $(w_j)_{j\geq 1}$ es denso en $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$

El teorema espectral para operadores auto-adjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituidas por las auto-funciones del operador $-\Delta$, que son soluciones del problema de Dirichlet:

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j \\ w_j|\Gamma = 0 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

donde $(\lambda_j)_{j\in IN}$ son los correspondientes autovalores de $-\Delta$, siendo,

$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3\leq........\leq\lambda_j\leq........$ y $\lambda_j\to\infty$ cuando $j\to\infty$

también se sigue que:

$\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)$

$\left(\dfrac{w_j}{\lambda_j}\right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Para cada m denotamos por $V_m=[w_1,w_2,.......,w_m]$ al espacio generado por las m primeras auto-funciones $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ del sistema (1).Donde por (a) la $\dim(V_m)=m$. Luego el problema finito dimensional es hallar una solución aproximada $u_m(t)\in V_m\subset H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ de la forma tal que

$$\begin{array}{l} u_m:(0,t_m)\longrightarrow V_m\subset V=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \\ t\quad\longrightarrow\quad u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i \end{array} \qquad ..... (\Sigma)$$

donde las funciones g_{im} son funciones reales definidas en algún intervalo $[0,t_m)$ tal que $u_m(t)$, satisface el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del siguiente problema aproximado:

$$\left|\begin{array}{ll}(u_m''(t),w_j)-M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t),w_j)-a(\Delta u_m'(t),w_j)=(b|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t),w_j) & \forall w_j\in V_m \\ u_m(0)=u_{om}\to u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) & \text{cuando } m\to\infty \\ u_m'(0)=u_{1m}\to u_1\in H_0^1(\Omega) & \text{cuando } m\to\infty\end{array}\right. \tag{2.4}$$

para $1\le j\le m$.

este sistema tiene solución sobre $[0,T_m]$ por medio del teorema de Caratheodory.

En efecto: de (Σ), (2.3) y de (2.4) trabajando por separado tenemos:

- $$(u_m''(t),w_j)=(\sum_{i=1}^m g_{im}''(t)w_i,w_j)=\sum_{i=1}^m g_{im}''(t)(w_i,w_j)=g_{jm}''(t) \tag{2.5}$$

- $$M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),w_j)=M\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_{im}^2(t)\right)(-\Delta(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i),w_i)$$

$$=M\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^m g_{im}(t)(-\Delta w_i,w_j)]=M\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^m g_{im}(t)(\lambda_i w_i,w_j)]$$

$$=M\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_{im}^2(t)\right)\lambda_j g_{jm}(t) \tag{2.6}$$

- $$(-\Delta u_m'(t),w_j)=[\sum_{i=1}^m g_{im}'(t)(-\Delta w_i,w_j)]=[\sum_{i=1}^m g_{im}'(t)(\lambda_i w_i,w_j)]=\lambda_j g_{jm}'(t) \tag{2.7}$$

$1\le j\le m$

Por otro lado denotemos a

$\rho(u)=|u|^{p-2}u$

luego:

- $$(\rho(u_m),w_j)=(\rho(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i),w_j)=(\rho(\vec{g}_{im}(t)),w_j) \tag{2.8}$$

de (2.5), (2.6), (2.7) y (2.8) se tiene:

$$g_{jm}''(t)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t)+a\lambda_j g_{jm}'(t)-b(\rho(\vec{g}_{im}(t)),w_j)=0 \tag{2.9}$$

Para dotar de adecuados datos iniciales al problema (1) , tenemos en cuenta que el conjunto $\{w_j\}_{j\ge1}$, es una base de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Luego que $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Entonces dado $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, existe

una sucesión $(u_{0m}) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, tal que

$u_{0m} \to u_0$ en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

Luego: $u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{im}(0) w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{im} w_j = u_{0m}$

Entonces podemos hacer $g_m(0) = (\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{mm}) = g_{0m} \in \mathbb{R}^m$.

Análogamente existe una sucesión $(u_{1m}) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, tal que

$u_{1m} \to u_1$ en $H_0^1(\Omega)$

luego $u_m'(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{im}'(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} d_{jm} w_j = u_{1m}$

y finalmente podemos hacer

$$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j w_j(x), \qquad u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j w_j(x)$$

también concluimos que:

$$g_{jm}(t) = c_j \quad \text{y} \quad g_{jm}'(t) = d_j \tag{2.10}$$

de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} g_{jm}''(t) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) + a\lambda_j g_{jm}'(t) = b(\rho(\vec{g}_{im}(t)), w_j) \\ g_{jm}(0) = c_j \\ g_{jm}'(0) = d_j \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$j = 1, 2, \ldots\ldots, m$

ahora en forma matricial podemos construir lo siguiente:

$$Y(t)=\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{mm}(t) \\ g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \quad \text{luego}\; Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ g''_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \tag{2.12}$$

Luego de (2.11) y (2,12) se puede escribir de la siguiente forma

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ g''_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ -M(\|\nabla u(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t) - a\lambda_1 g'_{jm}(t) + b(\rho(\vec{g}_{1m}(t)), w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm} - a\lambda_m g'_{jm}(t) + b(\rho(\vec{g}_{mm}(t)), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \tag{2.13}$$

también de (2.13) separando en suma de matrices se tiene

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a\lambda_1 g'_{jm}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a\lambda_m g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(\rho(\vec{g}_{1m}(t)), w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(\rho(\vec{g}_{mm}(t)), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

donde

$$A=\begin{bmatrix} 0 \\ , \\ , \\ . \\ 0 \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -a\lambda_1 g'_{jm}(t) \\ . \\ . \\ . \\ -a\lambda_m g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \quad C=\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ b(\rho(\vec{g}_{1m}(t)),w_1) \\ . \\ . \\ : \\ b(\rho(\vec{g}_{mm}(t)),w_m) \end{bmatrix}_{2mx1}$$

tal que podemos reducir de forma matricial de la siguiente manera:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & \bar{\lambda}_a \end{bmatrix}_{2m\times 2m} \cdot Y+A+C=F(t,Y)$$

$$Y'(t)=EY+A+C=F(t,Y) \tag{2.14}$$

donde:

$\bar{0}$ = matriz nula $m\times m$, I = matriz identidad $m\times m$, $\bar{\lambda}_a=\begin{bmatrix} -a\lambda_1 & .. & 0 \\ . & & . \\ 0 & .. & -a\lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m}$

y $E=\begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & \bar{\lambda}_a \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$ donde E es una matriz constante

también se tiene:

$$Y(0)=\begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1}=Y_0 \qquad (2.15)$$

así de (2,14) y (2,15) tenemos el siguiente sistema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Y'=F(t,Y) \\ \\ Y(0)=Y_0 \end{array} \right. \qquad (2.16)$$

ahora mostraremos que (2.16) satisface las condiciones del teorema II.15 (Teorema de Caratheodory)

En efecto: Si F es una función tal que

$F:D\to\mathbb{R}^{2m}$ y sea $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2m+1}$

donde

$D=[0,T]\times B$, T finito >0, $G=\{Y\in\mathbb{R}^{2m},\|Y\|\leq r\}$, $r>0$, $Y_0\in G$

Probemos que:

(i) $F(t,Y)$ **es medible en** t **para cada** Y **fijo.**

Si fijamos Y tenemos que A, C y E no dependen de t. En general $F(t,Y)$ no depende de t entonces F es medible en $t\in\,]0,T[$

(ii) $F(t,Y)$ **es continua en** Y **para cada** t **fijo.**

Ya que E es una matriz constante solo nos bastaría analizar las matrices A y C luego:

I) Si t es fijado, entonces el vector A es continua en Y

En efecto: Como $u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_j$ depende solo de los $g_{im}(t)$ para todo $i=1.2....,m$ entonces existe $(\vec{g}_m^k)_{k\in IN}$ una sucesión de $(\vec{g}_m)$ tal que $(\vec{g}_m^k)_{k\in \mathrm{N}} \to (\vec{g}_m^0)$ cuando $k \to \infty$

siendo $\vec{g}_m=(g_{1m},.......g_{mm})$; $\vec{g}_m^k=(g_{1m}^k,........,g_{mm}^k)$ y $\vec{g}_m^0=(g_{1m}^0,........,g_{mm}^0)$

se sigue también: $g_{im}^k \to g_{im}^0$ cuando $k \to \infty$ $\forall i=1,2....,m$

luego: $u_m^k(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}^k(t)w_i \to u_m^0(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}^0 w_i$ cuando $k \to \infty$

por otro lado se tiene:

$$\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2=(\nabla u_m^k(t),\nabla u_m^k(t))=(\sum_{i=1}^{m}\nabla g_m^k(t)w_i,\sum_{i=1}^{m}\nabla g_m^k(t)w_i)=(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\nabla w_i,\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\nabla w_i)$$

$$(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\sqrt{\lambda_i}w_i,\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\sqrt{\lambda_i}w_i)=\sum_{i=1}^{m}(g_m^k)^2(t)\lambda_i w_i \quad\to\quad \sum_{i=1}^{m}(g_m^0)^2(t)\lambda_i w_i=\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2 \;;$$

$k \to \infty$

luego $\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2 \;\to\; \left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2$;cuando $k \to \infty$

Y como M es continua entonces:

$M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2) \;\to\; M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2)$;cuando $k \to \infty$ así:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2)\lambda_1 g_{1m}^k(t) \\ . \\ . \\ M(\left\|\nabla u_m^k(t)\right\|^2)\lambda_m g_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \to \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2)\lambda_1 g_{1m}^0(t) \\ . \\ . \\ M(\left\|\nabla u_m^0(t)\right\|^2)\lambda_m g_{mm}^0(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \quad k \to \infty$$

luego A es continua en Y

II) C es continua Y

En efecto: Como en lo anterior $u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$ depende solo de los $g_{im}(t)$ entonces existe una sucesión $(\vec{g}_m^k)_{k\in \mathrm{N}}$ de $(\vec{g}_m)$ tal que $(g_m^k)_{k\in \mathrm{N}} \to (g_m^0)$; $k \to \infty$

siendo $\vec{g}_m = (g_{1m},.......g_{mm})$; $\vec{g}_m^k = (g_{1m}^k,........,g_{mm}^k)$ y $\vec{g}_m^0 = (g_{1m}^0,........,g_{mm}^0)$

se sigue también: $g_{im}^k \to g_{im}^0$; $k \to \infty$ $\forall i = 1,2....,m$ luego:

$$u_m^k(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^k(t)w_i \to u_m^0(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^0 w_i \quad ; \quad k \to \infty$$

$$u_m^k(t) \to u_m^0(t) \; ; \; k \to \infty$$

y como ρ es continua y creciente entonces:

$$\rho(u_m^k(t)) \to \rho(u_m^0(t)) \; ; \; k \to \infty$$

entonces se tiene

$$(\rho(u_m^k(t)), w_i) \to (\rho(u_m^0(t)), w_i) \; ; \; k \to \infty \; ; \; \forall i = 1,2,....m$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ b(\rho(u_m^k(t)), w_1) \\ . \\ . \\ b(\rho(u_m^k(t)), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \to \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ b(\rho(u_m^0(t)), w_1) \\ . \\ . \\ b(\rho(u_m^0(t)), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \; ; \; k \to \infty$$

Luego C es continua en Y

(iii) Para cada compacto K en D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que:

$$\|F(t,Y)\| \leq I_K(t) \quad \forall (t,Y) \in K$$

Entonces $\exists C_A \, / \; \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq C_A$

En efecto: Como M es continua entonces existe una constante K_1 tal que

(*i*) $M(\|\nabla u_m(t)\|^2) \leq K_1$

También como ρ es continua entonces $\exists\, K_2 > 0 \, / \, |\rho(u(t))| \leq K_2$.

Por otro lado se tiene también:

$(ii)\quad \|Y\|^2 = |g_{1m}(t)|^2 + |g_{2m}(t)|^2 + \ldots\ldots + |g_{mm}(t)|^2 + |g'_{1m}(t)|^2 + |g'_{2m}(t)|^2 + \ldots + |g'_{mm}(t)|^2$

$(iii)\quad \lambda_{\max} = \max\{\lambda_j\ ;\ 1 \le j \le m\}$

Y como $Y \in G$ deducimos que:

$$(\text{iv})\ \begin{array}{l} |g_{im}(t)| \le r; \quad \forall i = 1,\ldots\ldots, m \\ |g'_{im}(t)| \le r; \quad \forall i = 1,\ldots\ldots, m \end{array}$$

luego de (i),(ii),(iii) y (iv)

$$\|A\|_{2mx1} \le \sum_{i=1}^{m} \left| -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_i g_{im}(t) \right| \le K_1 (\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| |g_{im}(t)|) \le K_1 \lambda_{\max} mr \tag{2.17}$$

$$\|C\|_{2mx1} \le \sum_{i=1}^{m} |(b\rho(u_m(t)), w_i)| \le (\sum_{i=1}^{m} |b\rho(u_m(t))| |w_i|) \le |b\rho(u_m(t))| \sum_{i=1}^{m} |w_i| \le bK_2 m \tag{2.18}$$

donde

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & \tilde{\lambda}_a \end{bmatrix} \right\|_{2m\times 2m} \le \|\tilde{\lambda}_a\| \|I\| = a\lambda_{\max} m \tag{2.19}$$

de (2.17), (2.18) y (2.19)

$$\|F(t,Y)\| = \left\| \begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & \tilde{\lambda}_a \end{bmatrix} Y + A + C \right\| \le \left\| \begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & \tilde{\lambda}_a \end{bmatrix} \right\| \|Y\| + \|A\| + \|C\|$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\|F(t,Y)\| \le am\lambda_{\max} r + K_1 \lambda_{\max} mr + K_{2a} mb = m_k(t) \tag{2.20}$$

Siendo $I_K(t)$ una función real integrable pues K_1, K_2 y r son funciones integrables $\forall t \ge 0$ entonces concluimos que (2.16) satisface las condiciones de Caratheodory. Así tenemos que existe Y una solución definida en $[0, T_m[$, $0 < t_m < T$ y por lo tanto u_m es solución del problema aproximado en el intervalo $[0, T_m[$. Para extender esta solución al intervalo $[0, T]$ tomaremos las estimativas a priori que se mostrara a continuación.

Lema II.10 si $u \in H_0^1(\Omega)$ y se cumple las hipótesis [H_1], [H_2] y [H_3] entonces $d > 0$

Prueba: tenemos que

$$J(u)=\hat{M}(\|\nabla u\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u\|^\beta \geq m_0\|\nabla u\|^2-\frac{2b}{\beta}\|u\|_\beta^\beta=\tilde{J}(u)$$

solo bastaría demostrar que $\sup\limits_{\lambda>0}\tilde{J}(\lambda u)>0$; $\forall u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$

por otro lado tenemos:

$$\tilde{J}(\lambda u)=m_0\lambda^2\|\nabla u\|^2-\frac{2b}{\beta}\lambda^\beta\|u\|_\beta^\beta \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{J}(\lambda u)=\frac{d}{d\lambda}(m_0\lambda^2\|\nabla u\|^2-\frac{2b}{\beta}\lambda^\beta\|u\|_\beta^\beta)=2m_0\lambda\|\nabla u\|^2-2b\lambda^{\beta-1}\|u\|_\beta^\beta$$

si $\frac{d}{d\lambda}\tilde{J}(\lambda u)=0\Rightarrow 2m_0\lambda\|\nabla u\|^2-2b\lambda^{\beta-1}\|u\|_\beta^\beta=0$

Despejando λ se tiene

$$2b\lambda^{\beta-1}\|u\|_\beta^\beta=2m_0\lambda\|\nabla u\|^2\Rightarrow\lambda^{\beta-2}=\frac{m_0\|\nabla u\|^2}{b\|u\|_\beta^\beta}$$

$$\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\left(\frac{m_0\|\nabla u\|^2}{b\|u\|_\beta^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-2}}$$

también

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\tilde{J}(\lambda u)=2m_0\|\nabla u\|^2-2(\beta-1)b\lambda^{\beta-2}\|u\|_\beta^\beta$$

luego como $\beta>2$ se cumple que:

$$2m_0\|\nabla u\|^2-2(\beta-1)b\lambda^{\beta-2}\|u\|_\beta^\beta\leq 2m_0\|\nabla u\|^2$$

$$-2(\beta-1)b\left(\left(\frac{m_0}{b}\right)^{\frac{1}{\beta-2}}\left(\frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|_\beta^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-2}}\right)^{\beta-2}\|u\|_\beta^\beta$$

$$\leq 2m_0\|\nabla u\|^2-2(\beta-1)m_0\|\nabla u\|^2<0$$

entonces

$$\left.\frac{d^2}{d\lambda^2}\tilde{J}(\lambda u)\right|_{\lambda=\lambda_1}<0$$

luego

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = m_0\left(\frac{m_0\|\nabla u\|^2}{b\|u\|_\beta^\beta}\right)^{\frac{2}{\beta-2}}\|\nabla u\|^2 - \frac{2b}{\beta}\left(\frac{m_0\|\nabla u\|^2}{b\|u\|_\beta^\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2}}\|u\|_\beta^\beta$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = m_0\left(\frac{m_0\|\nabla u\|^\beta}{b\|u\|_\beta^\beta}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} - \frac{2b}{\beta}\left(\frac{m_0\|\nabla u\|^2}{b\|u\|_\beta^2}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2}}$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = m_0\frac{\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}\left(\frac{m_0}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} - \frac{2b}{\beta}\frac{\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}\left(\frac{m_0}{b}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2}}$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}(m_0)^{\frac{\beta}{\beta-2}}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} - \frac{2\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\beta\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}(m_0)^{\frac{\beta}{\beta-2}}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}}$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} - \frac{2\|\nabla u\|^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}{\beta\|u\|_\beta^{\frac{2\beta}{\beta-2}}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}}$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = \left(1-\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\|\nabla u\|}{\|u\|_\beta}\right)^{\frac{2\beta}{\beta-2}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} \geq \left(1-\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\|\nabla u\|}{C_*\|\nabla u\|}\right)^{\frac{2\beta}{\beta-2}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}}$$

$$\tilde{J}(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_1} \geq \left(1-\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\|\nabla u\|}{C_*\|\nabla u\|}\right)^{\frac{2\beta}{\beta-2}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} = \left(1-\frac{2}{\beta}\right)(C_*)^{-\frac{2\beta}{\beta-2}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}} > 0$$

tomando el supremo

$$\sup_{\lambda>0}\tilde{J}(\lambda u) > 0 \;;\; \forall u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$$

luego $d = \inf\left\{\sup_{\lambda>0} J(\lambda u), u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}$

donde $d = \left(1-\frac{2}{\beta}\right)(C_*)^{-\frac{2\beta}{\beta-2}}\left(\frac{m_0{}^\beta}{b}\right)^{\frac{2}{\beta-2}}$

por lo tanto $d > 0$ y queda demostrado el lema II.10.

2.2.4 Estimativas a priori: Acotación de la Sucesión (u_m)

Primera Estimativa.-

Multiplicando a (2.4) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene:

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)$$

$$-a(\Delta u'_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w)=b(|u_m|^{\beta-2}u_m,\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j) \qquad (2.21)$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t),u'_m(t))-a(\Delta u'_m(t),u'_m(t))$$
$$=b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t),u'_m(t))$$
$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))-a(\Delta u'_m(t),u'_m(t))$$
$$=b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t),u'_m(t))$$
$$(u''_m(t),u'_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))+a(\nabla u'_m(t),\nabla u'_m(t))$$
$$=b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t),u'_m(t))$$

El último término se puede expresar de la siguiente manera

$$*\,b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t),u'_m(t))=b\int_\Omega |u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t)u'_m(t)dx=b\int_\Omega |u_m(t)|^{\beta-1}\frac{u_m(t)}{|u_m(t)|}u'_m(t)dx$$
$$=b\int_\Omega |u_m(t)|^{\beta-1}\frac{d}{dt}|u_m(t)|\,dx$$
$$=\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^{\beta}\,dx$$
$$=\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\beta}$$

de (H_3)-(i) con respecto a $\widehat{M}$ se deduce:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)+a\|\nabla u'_m(t)\|^2-\frac{b}{\beta}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\beta}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u'_m(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u_m(t)\|^{\beta}\right)=-a\|\nabla u'_m(t)\|^2 \qquad (2.22)$$

Como $a>0$ y $\frac{d}{dt}E_m(t)\leq 0$ entonces se deduce que $E_m(t)$ es una función decreciente respecto de t luego integrando (2.22) de 0 a t se tiene:

$$\|u'_m(t)\|^2+\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u_m(t)\|^\beta+a\int_0^t\|\nabla u'_m(t)\|^2\,dt=\|u'_m(0)\|^2+$$

$$\hat{M}(\|\nabla u_m(0)\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u_m(0)\|^\beta=E_m(u(0)) \qquad (2.23)$$

Lema II.11 Sean $u_0\in W(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$ y asumiendo las hipótesis [H1] ,[H2] ,[H3] entonces $u_m(x,t)\in W$ tal que

$J(u_m)<d,\ \ I(u_m)=\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)-b\|u_m\|_\beta^\beta>0$; $\forall t\in[0,\infty)$

Primero probaremos que $J(u_m)<d$

Prueba (notar que $E(0)$ depende de las condiciones iniciales u_0, u_1)

Por hipótesis $E(0)<d$ y como d es un ínfimo entonces existe un $\varepsilon_0>0$; suficientemente pequeño tal que $E(0)+\varepsilon_0<d$. Por otro lado por definición de convergencia si $E_m(0)\longrightarrow c=E(0)$ entonces $\forall\varepsilon_0>0$; $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall m\geq n_0$ entonces

$|E_m(0)|-|E(0)|\leq|E_m(0)-E(0)|\leq\varepsilon_0\Rightarrow E_m(0)\leq E(0)+\varepsilon_0<d$

como $J(u_m)\leq E(u_m)$ son decrecientes $\forall t\in[0,\infty)$ entonces se sigue

$J(u_m)=\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u_m\|_\beta^\beta\leq E_m(t)\leq E_m(0)<d$

Ahora probaremos que $I(u_m)>0$. Para un T fijo arbitrario, de las condiciones iniciales de (2.4) y $I(u_0)>0$ entonces $I(u_m(0))>0$ para m suficientemente grande. Luego consideremos u_m una función continua respecto a t entonces

$$I(u_m(\mathrm{t}))>0$$

Donde existe t_m $(t_m<T)$ tal que $t_m\in[0,\mathrm{T}]$

Prueba: notemos que

$$J(u_m)=\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)-\frac{2b}{\beta}\|u_m\|_\beta^\beta=\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)-\frac{2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)+\frac{2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)$$

$$-\frac{2b}{\beta}\|u_m\|_\beta^\beta=\frac{\beta-2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)+\frac{2}{\beta}I(u_m)$$

entonces

$$J(u_m)=\frac{2}{\beta}I(u_m)+\frac{\beta-2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)\geq\frac{\beta-2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)\,;\quad \forall t\in[0,t_m]$$

luego por hipótesis y como $E_m(t)$ es decreciente $\forall t\in[0,t_m]$ se tiene

$$m_0\|\nabla u_m\|^2\leq\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)\leq\frac{\beta}{\beta-2}J(u_m)\leq\frac{\beta}{\beta-2}E_m(\mathrm{t})\leq\frac{\beta}{\beta-2}E_m(0)$$

Por otro lado

$$b\|u_m\|_\beta^\beta\leq bC_*^\beta\|\nabla u_m(t)\|^\beta=\frac{b}{m_0^{\beta/2}}C_*^\beta\left(m_0\|\nabla u_m(t)\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\leq\frac{b}{m_0^{\beta/2}}C_*^\beta\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(0)\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\leq\frac{b}{m_0^{\beta/2}}C_*^\beta\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(0)\right)^{\frac{\beta-2}{2}}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)$$

$$<\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2)\,;\ \forall t\in[0.t_m]$$

De estos resultados se tiene

$$\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)-b\|u_m\|_\beta^\beta=I(u_m)>0\,\mathrm{en}\,[0.t_m]$$

Procediendo como en lo anterior con $I(u_m)>0$ y $\forall t^*\in(t_m,t)\,;\forall t<\infty$

$$J(u_m)=\frac{2}{\beta}I(u_m)+\frac{\beta-2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)\geq\frac{\beta-2}{\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2)\,;\quad\forall t^*\in(t_m,t)\,;\forall t<\infty$$

$$b\|u_m\|_\beta^\beta\leq\frac{b}{m_0^{\beta/2}}C_*^\beta\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(t^*)\right)^{\frac{\beta-2}{2}}\hat{M}(\|\nabla u_m(t^*)\|^2)\ \forall t^*\in(t_m,t)\,;\forall t<\infty$$

Como $\frac{d}{dt}E_m(t) \leq 0$ entonces podemos integrar de t_m a t siendo $t_m \leq t^* \leq t$ luego se

tiene $\int_{t_m}^{t} \frac{d}{dt}E_m(t^*) \leq 0 \Rightarrow E_m(t_m) \leq E_m(t)$ y $E_m(t_m) \leq E_m(t) \leq E(0)$

de aquí como $\beta > 2$; m_0, b, $C_* > 0$ deducimos lo siguiente

$$\frac{b}{m_0^{\beta/2}} C_*^{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(t_m)\right)^{\frac{\beta-2}{\beta}} \leq \frac{b}{m_0^{\beta/2}} C_*^{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(t)\right)^{\frac{\beta-2}{\beta}}$$

$$\leq \frac{b}{m_0^{\beta/2}} C_*^{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta-2}E_m(0)\right)^{\frac{\beta-2}{\beta}} < 1$$

$$b\|u_m\|_{\beta}^{\beta} \leq \hat{M}(\|\nabla u_m(t^*)\|^2) \ \forall t^* \in (t_m, t) \ ;\forall t < \infty$$

de estos resultados se tiene

$$\hat{M}(\|\nabla u_m\|^2) - b\|u_m\|_{\beta}^{\beta} = I(u_m) > 0 \text{ en}[0,t) \ \forall t < \infty$$

concluimos con la demostración del Lema II.11. Luego de este lema se obtiene:

$$\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) - \frac{b}{\beta}\|u_m(t)\|^{\beta} = \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\beta}(I_m(t))$$

$$+\frac{\beta-2}{2\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) \geq \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{\beta-2}{2\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) \qquad (2.24)$$

por otro lado de las condiciones iniciales de (2.4) sabemos que:

(i) $u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 = u'(0)$ en $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con inmersión compacta

$\Rightarrow \|u_{1m}\| \to \|u_1\| \Rightarrow \|u_{1m}\| \leq c_1$ (ii) $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ en $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es decir:

$u_{0m} \to u_0$ en $L^2(\Omega)$ y $\nabla u_{0m} \to \nabla u_o$ en $L^2(\Omega)$

$\|\nabla u_{0m}\| \to \|\nabla u_0\|$ en $L^2(\Omega) \Rightarrow \|\nabla u_{0m}\| \leq c_2$

Además como $\hat{M}$ es continua en $C([0,+\infty])$ entonces por (2.24):

$$\hat{M}(\|\nabla u_{0m}\|^2) \leq c_3 \qquad (2.25)$$

entonces:

$$\begin{aligned} &\|u_m'(t)\|^2 \le c_0 \\ &\|\nabla u_m(t)\|^2 \le c_1 \ \forall t \ge 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$c = \dfrac{c_0}{m_0}$

Por lo tanto de (2.24), (2.25) y (2.26) en (2.23) se tiene

$$\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{\beta-2}{2\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) + a\int_0^t \|\nabla u_m'(t)\|^2 dt \le \frac{1}{2}\|u_m'(0)\|^2 + \frac{\beta-2}{2\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m(0)\|^2)$$

$$-\frac{b}{\beta}\|u_m(0)\|_\beta^\beta \le K_1$$

$$\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{\beta-2}{2\beta}\hat{M}(\|\nabla u_m(t)\|^2) + a\int_0^t \|\nabla u_m'(t)\|^2 dt \le K_1$$

entonces

$$\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{\beta-2}{2\beta}m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 + a\int_0^t \|\nabla u_m'(t)\|^2 dt \le K_1 \tag{2.27}$$

Donde K_1 no depende de m luego esto implica

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Segunda Estimativa: Multiplicamos a (2.4) por $-\lambda_j g_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ obtenemos

$$(u_m''(t), -\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}(t)w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\sum_{j=1}^m \lambda g_{jm}(t)w_j)$$

$$-a(\Delta u_m'(t), -\sum_{i=1}^m \lambda g_{jm}(t)w_j) = b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t), -\sum_{i=1}^m \lambda g_{jm}(t)w_j) \tag{2.29}$$

$$(u_m''(t), \Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j)$$

$$-a(\Delta u_m'(t), \Delta\sum_{i=1}^m g_{jm}(t)w_j) = b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(t), \Delta\sum_{i=1}^m g_{jm}(t)w_j)$$

$$(u_m''(t), \Delta u_m(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) - a(\Delta u_m'(t), \Delta u_m(t))$$
$$= b((|u_m|^{\beta-2}u_m), \Delta u_m(t))$$

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t),\Delta u_m(t))-(u'_m(t),\Delta u'_m(t))-M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2$$
$$-a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2=b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t})),\Delta u_m(t))$$

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t),\Delta u_m(t))+\|\nabla u_m(t)\|^2-M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2$$
$$-a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2=b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t})),\Delta u_m(t)) \qquad (2.30)$$

ordenando (2.30) se tiene

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2+a\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2=\frac{d}{dt}(u'_m(t),\Delta u_m(t))+\|\nabla u_m(t)\|^2$$
$$-b(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t})),\Delta u_m(t)) \qquad (2.31)$$

luego Integrando (2.31) de 0 a t se tiene

$$\int_0^t M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\left(\|\Delta u_m(t)\|^2-\|\Delta u_m(0)\|^2\right)=\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+$$
$$\left[(u'_m(t),\Delta u_m(t))-(u'_m(0),\Delta u_m(0))\right]-b\int_0^t(|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t})),\Delta u_m(t))dt \qquad (2.32)$$

$$\int_0^t M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\left(\|\Delta u_m(t)\|^2-\|\Delta u_m(0)\|^2\right)=\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+$$
$$\left[(u'_m(t),\Delta u_m(t))-(u'_m(0),\Delta u_m(0))\right]-b\int_0^t\int_\Omega|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t})\Delta u_m(t)dxdt$$

$$\int_0^t M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\left(\|\Delta u_m(t)\|^2-\|\Delta u_m(0)\|^2\right)\le\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+$$
$$\|u'_m(t)\|\|\Delta u_m(t)\|+\|u'_m(0)\|\|\Delta u_m(0)\|+b\int_0^t\int_\Omega|u_m(t)|^{\beta-1}|\Delta u_m(t)|dxdt$$

$$\int_0^t M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2\le\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(0)\|^2$$
$$\|u'_m(t)\|\|\Delta u_m(t)\|+\|u'_m(0)\|\|\Delta u_m(0)\|+b\int_0^t\int_\Omega|u_m(t)|^{\beta-1}|\Delta u_m(t)|dxdt$$

$$\int_0^t M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2\le\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(0)\|^2$$
$$+\|u'_m(t)\|\|\Delta u_m(t)\|+\|u'_m(0)\|\|\Delta u_m(0)\|+b\int_0^t\int_\Omega|u_m(t)|^{\beta-1}|\Delta u_m(t)|dxdt \qquad (2.33)$$

Usando la desigualdad de Young convenientemente en (2.33)

$$\|u'_m(t)\|\|\Delta u_m(t)\|\le\frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2+\frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

luego se tiene

$$a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + a\frac{1}{2}\|u_0\| + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+\|u_1\|\|\Delta u_0\| + b\int_0^t\int_\Omega |u_m(t)|^{\beta-1}|\Delta u_m(t)|dxdt \qquad (2.34)$$

Luego por Hölder

$$a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + a\frac{1}{2}\|u_0\| + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+\|u_1\|\|\Delta u_0\| + b\int_0^t\left[\int_\Omega |u_m(t)|^{2(\beta-1)}dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |\Delta u_m(t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.35)$$

$$a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le c_1\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + a\frac{1}{2}\|u_0\| + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+\|u_1\|\|\Delta u_0\| + b\int_0^t\int_\Omega |u_m(t)|^{2(\beta-1)}dxdt + \int_0^t\int_\Omega |\Delta u_m(t)|^2 dxdt$$

$$a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le c_1\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + a\frac{1}{2}\|u_0\| + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+\|u_1\|\|\Delta u_0\| + b\int_0^t \|u_m(t)\|^{2(\beta-1)}dt + \int_0^t \|\Delta u_m(t)\|^2 dt$$

$$a\frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le c_1\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + a\frac{1}{2}\|u_0\| + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+\|u_1\|\|\Delta u_0\| + bC_*\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^{2(\beta-1)}dt + \int_0^t \|\Delta u_m(t)\|^2 dt$$

$$\frac{a}{2}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le C_2 + c_1\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^2\,dt + \frac{1}{a}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+bC_*\int_0^t \|\nabla u_m(t)\|^{2(\beta-1)}dt + \int_0^t \|\Delta u_m(t)\|^2 dt \qquad (2.36)$$

De las acotaciones obtenidas en la **estimativa 1** se tiene:

$$\frac{a}{4}\|\Delta u_m(t)\|^2 \le C_2 + c_1^2 + \frac{c_0}{a} + bC_* c_1^{(\beta-1)} + \int_0^t \|\Delta u_m(t)\|^2 dt$$

$$\|\Delta u_m(t)\|^2 \le K_1 + K_2\int_0^t \|\Delta u_m(t)\|^2 dt \qquad (2.37)$$

Por el Lema de Gronwall

$$\|\Delta u_m(t)\|^2 \le K_3 \qquad (2.38)$$

$$(u_m) \quad \text{esta acotado en } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \qquad (2.39)$$

Tercera Estimativa: Multiplicamos a (2.4) por $g''_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ obtenemos:

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)-a(\Delta u'_m(t),\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w)$$

$$=b(|u_m|^{\beta-2}u_m,\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j) \quad (2.40)$$

$$(u''_m(t),u''_m(t))+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u''_m(t))+a(\nabla u'_m(t),\nabla u''_m(t))$$

$$=b(|u_m|^{\beta-2}u_m,u''_m(t))\ \|u''_m(t)\|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u''_m(t))+\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2$$

$$=b(|u_m|^{\beta-2}u_m,u''_m(t)) \quad (2.41)$$

Por otro lado el siguiente término se puede escribir como sigue:

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u''_m(t))=\frac{d}{dt}\Big[M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))\Big]$$

$$-2M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)|(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))|^2-M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\nabla u'_m(t)\|^2 \quad (2.42)$$

$$\|u''_m(t)\|^2+\frac{d}{dt}\Big[M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))\Big]+\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2=$$

$$2M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)|(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))|^2+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\nabla u'_m(t)\|^2$$

$$+b(|u_m|^{\beta-2}u_m,u''_m(t)) \quad (2.43)$$

De (2.43) y la hipótesis (H_2) se tiene

$$2M'(\|\nabla u_m(t)\|^2)|(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))|^2\le C_1\|\nabla u'_m(t)\|^2 \quad (2.44)$$

$$M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\nabla u'_m(t)\|^2\le C_2\|\nabla u'_m(t)\|^2 \quad (2.45)$$

También $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\beta-1)}(\Omega)$ y por la desigualdad de Hölder, Sobolev-Poincare, Cauchy y del segundo miembro de (2.43)

$$(b|u_m(t)|^{\beta-2}u_m(\mathrm{t}),u''_m(t))\le b\|u_m(t)\|^{\beta-2}_{2(\beta-1)}\|u_m(t)\|_{2(\beta-1)}\|u''_m(t)\|$$

$$\le C_0\|\nabla u_m(t)\|\|u''_m(t)\|$$

$$\le \theta(\varepsilon_1)\|\nabla u_m(t)\|^2+\varepsilon_2\|u''_m(t)\|^2 \quad (2.46)$$

De (2:43), (2.44), (2,45) y (2.46) implica

$$\|u_m''(t)\|^2+\frac{d}{dt}\Big[M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\Big]+\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m'(t)\|^2\le 2\big(C_1+C_2\big)\|\nabla u_m'(t)\|^2$$

$$+\theta(\varepsilon_1)\|\nabla u_m(t)\|^2+\varepsilon_2\|u_m''(t)\|^2 \tag{2.47}$$

Integrando (2.47) sobre 0 a t y usando (2.43) se tiene

$$\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(t)\|^2$$

$$\le 2\big(C_1+C_2\big)\int_0^t\|\nabla u_m'(t)\|^2dt+\theta(\varepsilon_1)\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+\varepsilon_2\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt$$

$$+M(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0),\nabla u_m'(0))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(0)\|^2 \tag{2.48}$$

$$\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(t)\|^2$$

$$\le 2\big(C_1+C_2\big)\int_0^t\|\nabla u_m'(t)\|^2dt+C_T+\varepsilon_1\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt+$$

$$M(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0),\nabla u_m'(0))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(0)\|^2$$

$$\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(t)\|^2\le -M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))$$

$$+2\big(C_1+C_2\big)\int_0^t\|\nabla u_m'(t)\|^2dt+M(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0),\nabla u_m'(0))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(0)\|^2$$

$$+C_T+\varepsilon_1\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt \tag{2.49}$$

De (2.49) utlizando Cauchy Schwartz adecuadamente y la Hipotesis (H_2) se tiene

$$\left|M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\right|\le\theta(\varepsilon_2)\|\nabla u_m(t)\|^2+\varepsilon_2\|\nabla u_m'(t)\|^2 \tag{2.50}$$

De (2.48),(2.49) y (2.50) para ε_1 , ε_2 suficientemente pequeños se tiene que

$$\int_0^t\|u_m''(t)\|^2\,dt+\frac{a}{3}\|\nabla u_m'(t)\|^2\le C_7+2\big(C_1+C_2\big)\int_0^t\|\nabla u_m'(s)\|^2ds$$

$$+C_T+M(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0),\nabla u_m'(0))+\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(0)\|^2 \tag{2.51}$$

De (2.4) y (2.51)

$$M(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0),\nabla u_m'(0))\le C_8 \tag{2.52}$$

$$\frac{a}{2}\|\nabla u_m'(0)\|^2 \le C_9 \int_0^t \|\nabla u_m'(s)\|^2 ds \le C_{10} \tag{2.53}$$

De (2.52) y (2.53) se tiene

$$\int_0^t \|u_m''(t)\|^2\, dt + \frac{a}{3}\|\nabla u_m'(t)\|^2 \le K_2 \tag{2.54}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m'') \text{ esta acotado en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.55}$$

Luego se tiene de (2.39) y (2.55) se tiene

$$\begin{aligned} &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \\ &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m'') \text{ esta acotado en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.56}$$

De las estimativas encontradas nos permite pasar al límite en el problema aproximado (2.4), obteniendo una solución u_m de (1)

2.2.5 Convergencia de las soluciones aproximadas

Luego de (2.56) y usando el teorema II.9 (Aloglu-Bourbarki) tenemos:

$$\begin{aligned} &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \\ &(u_m'') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.57}$$

entonces existe una subsucesión (u_m) que se denota de la misma forma y una función u tal que:

$$\begin{aligned} &u_m' \xrightarrow{*} u' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ &u_m \xrightarrow{*} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &u_m'' \xrightarrow{*} u'' \quad \text{en} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Verificando para cada término tenemos:

$*\ (u_m'',v) \to (u'',v)$ en $D'(0,T)$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$

Se identifica a $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ como un sub espacio de $(L^1(0,T;H_0^1(\Omega)))'$ de este factor se sabe que $u_m' \to u'$ converge débil $*$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces se tiene;

$$(u'_m, w) \to (u', w), \quad \forall w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.59}$$

$$\int_0^T (u'_m(x,t), w)dt \to \int_0^T (u'_m(x,t), w)dt \quad \forall w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$$

en particular: $w(t) = v\theta(t) \quad \theta \in D(0,T); \quad v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T (u'_m(t), v\theta(t))dt \to \int_0^T (u'(t), v\theta(t))dt$$

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt$$

luego se concluye que:

$(u'_m(t), v) \to (u'(t), v)$ en $D'(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Por lo tanto:

$$(u''_m(t), v) = \frac{d}{dt}(u'_m(t), v) \to \frac{d}{dt}(u'(t), v) = (u''(t), v) \quad \text{en } D'(0,T)\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.60}$$

$*$ $(\nabla u_m, v) \to (\nabla u, v)$ en $D'(0,T)$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$

factor se sabe que $u_m \to u$ converge débil $*$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces se tiene:

$\nabla u_m \xrightarrow{*} \nabla u$ en $L^1(0,T;L^2(\Omega)) \cong (L^1(0,T;L^2(\Omega)))'$

lo que implica:

$$\int_0^t (\nabla u_m(t), w)dt \to \int_0^t (\nabla u(t), w)dt \tag{2.61}$$

$\forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ en particular tomando $w = \theta\nabla v$ con $\theta \in L^1(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^t (\nabla u_m(t), \nabla v)\theta(t)dt \to \int_0^t (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)dt$$

$\forall \theta \in D(0,T)$ y $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

Por lo tanto

$(\nabla u_m, \nabla v) \to (\nabla u, \nabla v)$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

$$(\nabla u_m, \nabla v) \to (\nabla u, \nabla v) \text{ en } D'(0,T) \text{ para cada } v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.62}$$

$*$ $(\nabla u'_m, v) \to (\nabla u', v)$ en $D'(0,T)$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$

factor se sabe que $u_m \to u$ converge débil $*$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces se tiene:

$\nabla u'_m \xrightarrow{*} \nabla u'$ en $L^1(0,T;L^2(\Omega)) \cong (L^1(0,T;L^2(\Omega)))'$

lo que implica:

$$\int_0^t (\nabla u'_m(t), w)dt \to \int_0^t (\nabla u'(t), w)dt \tag{2.63}$$

$\forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ en particular tomando $w = \theta\nabla v$ con $\theta \in L^1(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^t (\nabla u'_m(t), \nabla v)\theta(t)dt \to \int_0^t (\nabla u'(t), \nabla v)\theta(t)dt$$

$\forall \theta \in D(0,T)$ y $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

Por lo tanto
$(\nabla u'_m, \nabla v) \rightarrow (\nabla u', \nabla v)$
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

$$(\nabla u'_m, \nabla v) \rightarrow (\nabla u', \nabla v) \text{ en } D'(0,T) \text{ para cada } v \in H_0^1(\Omega) \qquad (2.64)$$

2.2.6 Convergencia de ρ y de M

Convergencia de $\rho(u_m) = |u_m|^{\beta-2} u_m$
$(\rho(u_m), v) \rightarrow (\rho(u), v)$ en $D'(Q)$
Para verificar es necesario que $\rho(u_m(t))$ sea limitada en $L^2(\Omega)$ y como la función ρ es una función monótona creciente se tiene que:

Afirmación 1: $\|\rho(u_m(t))\|_{L^2(Q)}$ es limitada independiente de m, o sea:

$$\|\rho(u_m(t))\|_{L^2(Q)} \leq C$$

donde C es una constante positiva
PRUEBA:
Definimos,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\, x \in \Omega_1 \,/\, |u_m(x,t)| < 1;\ \forall m \in \mathbb{N} \,\}, \\ \Omega_2 &= \{\, x \in \Omega_2 \,/\, |u_m(x,t)| \geq 1;\ \forall m \in \mathbb{N} \,\} \end{aligned} \qquad (2.65)$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} \|\rho(u_m(x,t)\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_{\Omega_1} |\rho(u_n(x,t))|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} |\rho(u_m(x,t))|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega_1} b|u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} b|u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt \end{aligned} \qquad (2.66)$$

para justificar la afirmación es necesario mostrar que la integral $\int_0^T \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt$ y $\int_0^T \int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt$ están acotadas. En (2.56) se mostró
que $(u_m)_{m\in IN}$ es acotada en $L^\infty(0.T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(\Omega))$ y
$L^2(0,T; L^2(\Omega) = L^2(Q)$.

por otro lado analizamos las acotaciones de las integrales $\int_0^T \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt$ y $\int_0^T \int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt$ para esto tendremos que seguir los valores que toma γ.

Caso 1: para $n > 2$ y $2 < \beta \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$ entonces $2 < 2(\beta-1) \leq \dfrac{n}{n-2}$
Para $|u_m(x,t)| < 1, \forall x \in \Omega_1$ se puede realizar la siguiente estimativa

según la desigualdad se tiene:

$$\int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^2 dx \leq \|u_m(x,t)\|^2$$

ahora integramos de 0 a t se tiene

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq \int_0^T \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^2 dx \leq CT \tag{2.67}$$

es limitada independientemente de m

Caso 2: para $n>2$ y $2<\beta\leq\dfrac{2n-2}{n-2}$ entonces $2<2(\beta-1)\leq\dfrac{n}{n-2}$

verificando para $|u'_m(x,t)|\geq 1, \forall x\in\Omega_2$ se puede realizar la siguiente estimativa según la desigualdad se tiene:

$$\int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{\frac{n}{n-2}} dx \leq C\left[\int_{\Omega} |\nabla u_m(x,t)|^2 dx\right]^{\frac{n-2}{2n}}$$

Donde $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ luego integramos de 0 a T se tiene:

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt \leq \int_0^T \|\nabla u_m(x)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{n-2}{2n}} \leq CT\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^{\frac{n-2}{2n}} \leq C_T \tag{2.68}$$

donde $C_T>0$ es una constante proveniente de la acotación de u_m en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Por lo tanto para $0<T<\infty$ se tiene que la integral $\int_0^T\int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\gamma+1)} dxdt$ está acotada

Caso 3: $2<\gamma<\infty$ para n =1 ò n =2

Para $|u_m(x,t)|<1, \forall x\in\Omega_1$ se puede realizar la siguiente estimativa

$$\int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq \int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^2 dx \leq \|u_m(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{2.69}$$

son resultados de inmersión en los espacios de Sobolev se tiene que

$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ entonces para cada $t\in[0,T]$ fijo se tiene que:

esto se cumple para todo $\gamma\geq 0$, luego siguiendo los pasos como en el caso 1 se obtiene la acotación

Caso 4: $2<\beta<\infty$ para *n =1* ò *n =2* y verificando para $|u_m(x,t)|\geq 1, \forall x\in\Omega_2$

como $(u_m)_{m\in IN}\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

$$\int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq \int_{\Omega} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dx \leq |\Omega| \|u_m\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(\beta-1)} \leq |\Omega| C \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\beta-1)}$$

con $C>0$ una constante producto de la inmersión de Sobolev donde u_m está acotada en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ con esta estimativa podemos limitar la integral:

$$\int_0^T \int_{\Omega_2} |u_m(x,t)|^{2(\beta-1)} dxdt \leq CT \tag{2.70}$$

es acotada independiente de $m \in \mathbb{N}$.

En conclusión la **Afirmación 1** está justificada luego por el lema de Lions se tiene que:

$$\rho(u_m) \rightarrow \rho(u\ ) \text{ débil en } L^2(Q) \tag{2.71}$$

Luego: $< T, \rho(u_m) > \rightarrow < T, \rho(u) >$ para toda $T \in (L^2(Q))' \cong L^2(Q)$

esto implica que:

$$\int_Q \rho(u_m(x,t))w(x,t)dxdt \rightarrow \int_Q \rho(u(x,t))w(x,t)dxdt \quad \forall w \in L^2(Q)$$

haciendo $w = v\theta,\ v \in H_0^1(\Omega)\ y\ \theta \in D(0,T)$ entonces $w \in L^2(Q)$, por lo tanto:

$$\int_0^T \left[\int_\Omega \rho(u_m(x,t))v(x) \right] \theta(t)dt \rightarrow \int_0^T \left[\int_\Omega \rho(u(x,t)v(x) \right] \theta(t)dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\theta \in D(0,T)$. De esto se concluye que:

$$(\rho(u_m), v) \rightarrow (\rho(u\ ), v) \tag{2.72}$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0,T)$

Convergencia de *M:*

Por las inmersiones continuas $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y como la sucesión (u_m) es acotada en el espacio de Banach tal que:

$$W(0,T) = \left\{ u \in L^2([0,T[\,; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) : \quad u' \in L^2([0,T[\,; L^2(\Omega)) \right\} \tag{2.73}$$

luego por el teorema de Aubin-Lions

$W \subset L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

Es decir existe una subsucesión $(u_{m_k})_{k \in IN}$ de la sucesión $(u_m)_{m \in IN}$ tal que:

$u_{m_k} \rightarrow u$ en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ lo que implica

$$\left\| u_{m_k}(t) - u(t) \right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \int_0^T \left\| \nabla u_{m_k}(t) - \nabla u(t) \right\|^2 dt \xrightarrow{m_k \to \infty} 0 \tag{2.74}$$

Por otro lado se tiene

$$\int_0^T \left| \left\| \nabla u_{m_k}(t) \right\|^2 - \left\| \nabla u(t) \right\|^2 \right| dt \leq \int_0^T \left\| \nabla u_{m_k}(t) - \nabla u(t) \right\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \xrightarrow{m_k \to \infty} 0 \tag{2.75}$$

Luego de (2.74), (2.75) y el Lema II.6

$\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2 \to \left\|\nabla u(t)\right\|^2$ casi siempre en $[0,T]$

ahora como $M \in C^1([0,+\infty[)$ se tiene

$$M(\eta)-M(\psi)=M'(\alpha)(\eta-\psi) \tag{2.76}$$

donde $\alpha \in [\eta,\psi]: \alpha=(1-\beta)\eta+\beta\psi ; \beta \in [0,1]$

$$|M(\eta)-M(\psi)|=|M'(\alpha)||\eta-\psi| \tag{2.77}$$

tomando $\eta=\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2$ y $\psi=\left\|\nabla u(t)\right\|^2 : t \in [0,T]$ entonces

$$\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right|=|M'(\alpha)|\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2-\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right| \tag{2.78}$$

obteniendo

$$\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right| \le C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2-\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right| \tag{2.79}$$

de aquí integrando de 0 a T y de (2.75) se tiene

$$\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right|dt \le C\int_0^T\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|dt \to 0 \tag{2.80}$$

de (2.80) tenemos que:

$$M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2) \to M(\left\|\nabla u\ (t)\right\|^2) \text{ casi siempre en } [0,T] \tag{2.81}$$

también tenemos que $u_{m_k} \to u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ si y solo si

$(u_{m_k}-u) \to 0$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, y como $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$;

entonces: $(u_{m_k}-u) \to 0$ en $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ luego

$$\int_0^T\left\|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right\|^2 dt = C\int_0^T\left\|u_{m_k}(t)-u(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \to 0 \tag{2.82}$$

Convergencia del término no lineal

$$\int_0^T\left[M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w)\right]\varphi(t)dt=$$

$$\int_0^T(M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)$$

$$+M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u(t),\nabla w))\varphi(t)dt$$

$$\le\int_0^T\left|M(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\left\|\nabla u(t)\right\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)\right||\varphi(t)|dt$$

$$+\int_0^T \left|M(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u_{m_k}(t),\nabla w)-M(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u(t),\nabla w)\right||\varphi(t)|\,dt$$

$$\le \int_0^T \left|M(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2)-M(\|\nabla u(t)\|)\right||\nabla u_{m_k}(t)||\nabla w||\varphi(t)|\,dt$$

$$+\int_0^T \left|M(\|\nabla u(t)\|)\right|\left|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right||w||\varphi(t)|\,dt$$

$$\le C\int_0^T \left|M(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2)-M(\|\nabla u(t)\|)\right|dt+C\int_0^T \left|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right|dt \;\rightarrow\; 0 \qquad (2.83)$$

así de todas las convergencias anteriores y considerando a la subsucesión u_m como solución del problema aproximado (2.4) y tendiendo $m\rightarrow\infty$ obtenemos

$$(u'',v)+M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla v)+(\nabla u',\nabla v)=(\rho(u),v),\quad v\in H_0^1(\Omega) \qquad (2.84)$$

en el sentido distribucional

luego la solución (1) será:

$$u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$
$$u'\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.85)$$
$$u''\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

2.2.7 Verificación de los datos iniciales

El objetivo de esta sección es mostrar que para una función dada esta satisface las condiciones iniciales dado en (2.4) esto es;

$$u(0)=u_0 \;\text{ y }\; u'(0)=u_1 \qquad (2.86)$$

Luego de (2.85) y de la **Proposición II.9** para $p=\infty$ y $V_1 = V_2 = H_0^1(\Omega)$ y sea

$$W_1(0,T)=\{u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega));\quad u'\in L^\infty(0,T:H_0^1(\Omega))\}$$

entonces:

$$u\in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.87)$$

de forma análoga haciendo $v = u'$ $p=\infty$; $V_1=H_0^1(\Omega)$ y $V_2=L^2(\Omega)$ y sea:

$$W_2(0,T)=\{v\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega));\quad v'\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}$$

entonces:

$$u'\in C(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (2.88)$$

de esta forma tiene sentido verificar $u(0)$ y $u'(0)$

Verificación de $u(0)$ de (2.58) se tiene:

$u'_m \xrightarrow{\;*\;} u'$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

es decir

$(u'_m, w) \to (u', w) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

tomando $w = v\theta$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $\theta \in L^1(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \quad \forall \theta \in L^1(0,T)$$

en particular el resultado anterior es válido para todo $\theta \in C(0,T)$ pues

$C(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$

También se tiene $u_m \xrightarrow{\;*\;} u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Es decir

$(u_m, w) \to (u_m, w) \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

Entonces haciendo $w = v\varphi$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\varphi \in C^1(0,T)$ luego se tiene que:

$$\int_0^T (u_m(t),v)\varphi(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (u(t),v)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in L^1(0,T)$$

En particular el resultado. es para todo

$\varphi \in C(0,T)$ pues $C(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$

luego haciendo $\varphi = \theta'$ con $\theta \in C^1(0,T)$ se concluye que

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt$$

$$\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y para todo $\theta \in C^1(0,T)$ tal que $\theta(0)=1$ y $\theta(T)=0$: sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(t),v)\,\theta(t)\right] = -(u_m(0),v) \quad (2.89)$$

por otro lado:

$$\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t),v)\,\theta(t)\right] = -(u(0),v) \quad (2.90)$$

por lo tanto de (2.89) y (2.90) se tiene

$$(u_m(0),v) \to (u(0),v) \quad (2.91)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ más aun como $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$

fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$\left(u_m(0),v\right)\rightarrow\left(u_0,v\right) \tag{2.92}$$

para cada $v\in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ y por la unicidad de límite se concluye que:

$$u(0)=u_0 \tag{2 .93}$$

para evaluar u' en $t=0$ se utiliza el resultado de $u_m''\rightarrow u''$ débil $*$ $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ es decir

$$\left(u_m'',w\right)\rightarrow\left(u''(0),w\right)\quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

entonces con el mismo procedimiento hecho anteriormente tomamos $w=v\varphi$ con $v\in H_0^1(\Omega)$ y $\varphi\in L^1(0,T)$ se tiene que:

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\varphi(t)dt \quad\rightarrow\quad \int_0^T (u''(t),v)\varphi(t)dt \quad \forall\varphi\in L^1(0,T)$$

en particular para $\varphi\in C^1(0,T)\subset L^1(0,T)$ se concluye que:

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\varphi(t)dt \quad\rightarrow\quad \int_0^T (u''(t),v)\varphi(t)dt$$

$$\int_0^T (u_m'(t),v)\varphi'(t)dt \quad\rightarrow\quad \int_0^T (u'(t),v)\varphi'(t)dt$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\varphi\in C^1(0,T)$ tal que $\varphi(0)=1$ y $\varphi(T)=0$ sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\varphi(t)dt+\int_0^T (u_m'(t),v)\varphi'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u_m'(t),v\right)\varphi(t)\right]=-\left(u_m'(0),v\right) \tag{2.94}$$

por otro lado se tiene que:

$$\int_0^T (u''(t),v)\varphi(t)dt+\int_0^T (u'(t),v)\varphi'(t)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u'(t),v\right)\varphi(t)\right]=-\left(u'(0),v\right) \tag{2.95}$$

de (2.94) y (2.95) y de la convergencia dada se tiene:

$$\left(u_m'(0),v\right)\rightarrow\left(u'(0),v\right) \tag{2.96}$$

para cada $v\in H_0^1(\Omega)$, más aun como $u_m'(0)=u_{1m}'\rightarrow u_1'$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$\left(u_m'(0),v\right)\rightarrow\left(u_1(0),v\right) \tag{2.97}$$

para cada $v\in H_0^1(\Omega)$, (2.96) y (2,97) por la unicidad de límite se concluye que:

$$u'(0)=u_1 \tag{2.98}$$

ahora de (2.84), (2.93) y (2.98) concluimos que la función u es solución del problema (1) y con las condiciones de frontera del problema (1) está satisface la solución de la ecuación

2.2.8 Unicidad de la Solución

Supongamos que existen u y v dos soluciones que satisfacen las condiciones del Teorema (II.14). Sea $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ la solución de:

$$\left|\begin{array}{l} w''-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u+M(\|\nabla v\|^2)\Delta v-\Delta w'=b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v) \\ w(0)=0 \\ w'(0)=0 \end{array}\right. \qquad (2.99)$$

Donde $b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v)$

por otra parte tenemos:

$$M(\|\nabla u\|^2)\Delta u-M(\|\nabla v\|^2)\Delta v=M(\|\nabla u\|^2)\Delta w+[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)]\Delta v \qquad (2.100)$$

de (2.81), (2.82) y (2.83) deducimos:

$$w''-M(\|\nabla u\|^2)\Delta w-\Delta w'=[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)]\Delta v+b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v) \qquad (2.101)$$

También

$$(w'',z)-M(\|\nabla u\|^2)(\Delta w,z)-a(\Delta w',z)=[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,z)$$
$$+(b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v),z) \qquad (2.102)$$

Haciendo $z=w'$

$$(w'',w')-M(\|\nabla u\|^2)(\Delta w,w')-a(\Delta w',w')=[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w')$$
$$+(b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v),z),w') \qquad (2.103)$$

$$(w'',w')+M(\|\nabla u\|^2)(\nabla w,\nabla w')+a(\nabla w',\nabla w')=[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w')$$
$$+(b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v).w')$$

$$\frac{d}{dt}[\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2]+a\|\nabla w'\|^2=[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w')$$
$$+b\frac{d\rho}{dv}(\theta)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$

$$\frac{d}{dt}[\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2]+a\|\nabla w'\|^2=2[M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w')$$
$$+(b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v).w')+2M'(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla u')\|\nabla w\|^2$$
$$\leq(b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v).w')+2\left|M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v)\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|$$
$$+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2 \qquad (2.104)$$

también sabemos que $M(s)$ es continua entonces existe σ entre s_1 y s_2 tal que:

$$M(s_2)-M(s_1)=M'(\sigma)(s_2-s_1) \qquad (2.105)$$

de (2.105) en (2.104) del segundo miembro y resolviendo para cada caso:

$$* 2\left|M(\|\nabla u\|^2)-M(\|\nabla v)\|^2)\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2 \le$$

$$2\left|M'(\sigma)\right|\left|\|\nabla u\|^2-\|\nabla v\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2$$

$$=2\left|M'(\sigma)\right|(\|\nabla u\|+\|\nabla v\|)(\|\nabla u\|-\|\nabla v\|)\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2$$

$$\le 2\left|M'\right|\|\nabla u\|+\|\nabla v\|\|\nabla w\|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M'\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2 = c_a\|\nabla w\|\|w'\|+2c_b\|\nabla w\|^2$$

$$\le \frac{c_a}{2}(\|\nabla w\|^2+\|w'\|^2)+2c_b\|\nabla w\|^2=\frac{c_a}{2}\|w'\|^2+(\frac{c_a}{2}+2c_b)\|\nabla w\|^2$$

$$\le c_4(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2) \tag{2.106}$$

para $c_4=\max\{\frac{c_a}{2};\frac{c_a}{2}+2c_b\}$ se tiene:

$$* \ (b(|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v).w')\le b\left|((|u|^{\beta-2}u-|v|^{\beta-2}v).w')\right|\le b\left|((|u|^{\beta-2}+|v|^{\beta-2})w.w')\right|$$

$$\le b\left|((\|u\|^{\beta-2}_{2(\beta-1)}+\|v\|^{\beta-2}_{2(\beta-1)})\|w\|_{2(\beta-1)}\|w'\|\right|$$

$$\le C_{12}\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\le\theta(\eta_2)\|\nabla u\|^2+\eta_2\|\nabla u'\|^2 \tag{2.107}$$

Considerando (2.106) y (2.107) para η_1 y η_2 suficientemente pequeños se tiene

$$\frac{d}{dt}[\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2]+a\|\nabla w'\|^2\le C_{13}\|\nabla w\|^2 \tag{2.108}$$

$$\frac{d}{dt}[\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2]+a\|\nabla w'\|^2\le C_{14}(\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2) \tag{2.109}$$

Luego sea:

$$Z(t)=\|w'\|^2+M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2$$

De (2.109) se concluye

$$\frac{d}{dt}Z(t)\le C_T\,Z(t)\Rightarrow Z(0)=0 \tag{2.110}$$

ahora integrando (2.110) de $0\ a\ t$ se tiene:

$$\int_0^t\frac{d}{dt}Z(t)]ds\le c_4\int_0^t Z(t)dt$$

$$\|w'(t)\|^2+m_0\|\nabla w(t)\|^2\le c_4(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2)$$

$$\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2\le c_5\int_0^t(\|w'\|^2+\|\Delta w\|^2)dt \tag{2.111}$$

aplicando el lema de Gronwall tenemos: $\varphi(t)\le K+\int_0^t\beta(s)\varphi(s)ds$ donde:

$$\phi(t)=\|w'(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2,\quad K=0\quad y\quad \beta(s)=1$$

entonces:

$$\phi(t) = \|w'(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2 \leq 0 \times e^{\int_0^t \beta(s)ds} = 0$$

esto implica:

$$\|w'(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2 = 0$$

$$\|w'(t)\|^2 = 0 \text{ y } \|\nabla w(t)\|^2 = \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

$$\Rightarrow w(t) = 0; \forall t \in [0,T]$$

$$\therefore u(t) = v(t) \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.112}$$

lo que prueba la unicidad de la solución.

Luego concluimos para fijar y sintetizar la idea general de la demostración de la solución global de nuestro sistema, fue lo siguiente:

1) Para $J(u_0) \leq E(0) < d$; $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ se tiene lo siguiente

   $J(u_0) < d$, $I(u_0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\|\nabla u_0\|, J(u_0)) \in A$

   $J(u_0) < d$, $I(u_0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\|\nabla u_0\|, J(u_0)) \in B$

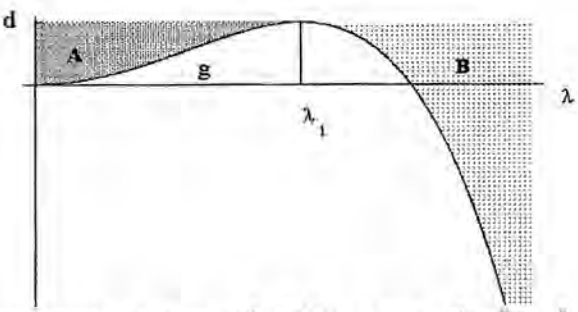
   Donde A y B se definen en la figura 2.1 tal que

   $A = \{(\lambda, J) \in [0,\infty) \times \mathbb{R} : g(\lambda) \leq J < d,\ \lambda < \lambda_1\}$

   $B = \{(\lambda, J) \in [0,\infty) \times \mathbb{R} : g(\lambda) \leq J < d,\ \lambda > \lambda_1\}$

   Donde $g(\lambda) = m_0\lambda^2 + \dfrac{C_*^\beta b}{\beta}\lambda^\beta$; $\lambda > 0$

Figura N° 2.1



El sector A y B representa el plano $(\lambda, E(0))$ donde $\lambda = \|\nabla u_0\|$

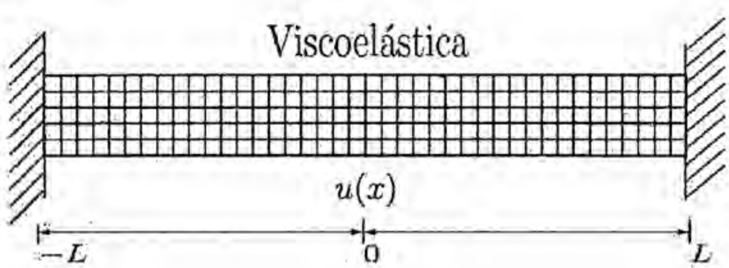
Se concluye que A es el conjunto solución para nuestro sistema y el conjunto B Es el conjunto donde las soluciones explotan o Blow Up

2.2.9 Ejemplos de aplicación (WOLFRAM MATHEMATIC 10)

MODELO DE LAS OSCILACIONES DE UNA BARRA

En esta aplicación presentó los resultados de las oscilaciones de un material viscoelastico, es decir la componente del material es completamente viscosa.

Figura N° 2.2



El modelo que describe las oscilaciones de una viga viscoelastica no lineal es el siguiente sistema

$$\left|\begin{array}{ll} \rho_0 u'' - k_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_2 \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = k_3 |u|^{\beta-2} u & \text{en } Q =]-L, L[\times]0,t[\\ u(-L,t) = u(L,t) = 0 \ ; \forall t \geq 0 & \qquad (V_1) \\ u(x,0) = u_0(x); \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega =]-L, L[\end{array}\right.$$

Donde ρ_0 es la densidad de la viga, k_1 es el coeficiente de elasticidad, y k_2 es el coeficiente de Viscosidad siendo las constantes $k_3 > 0 \ y \ \beta > 2$. Luego si $\rho_0 > 0$ y dividimos (V_1) entre ρ_0 tenemos

$$\left|\begin{array}{ll} u'' - m_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = b |u|^{\beta-2} u & \text{en } Q =]-L, L[\times]0,t[\\ u(-L,t) = u(L,t) = 0 \ ; \forall t \geq 0 & \qquad (V_2) \\ u(x,0) = u_0(x); \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega =]-L, L[\end{array}\right.$$

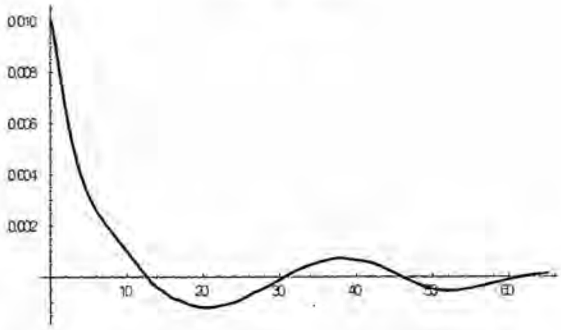
Donde $m_0 = \dfrac{k_1}{\rho_0}$; $a = \dfrac{k_2}{\rho_0}$ y $b = \dfrac{k_3}{\rho_0}$; luego para $t > 0$ y para datos iniciales $u_0(x)$; $u_1(x)$ específicos (según las hipótesis) en (V_2) tenemos los siguientes resultados

Para $\rho_0 = 1$, $\Omega =]-5,5[$ entonces $m_0 = k_1$; $a = k_2$ y $b = k_3$. Luego para datos específicos sobre m_0, a, b y β tenemos los siguientes resultados para (V_2).

Sean $m_0 = 0,5$; $a = 1$; $b = 7$; $\beta = 3$ y para $t = 65$

$u_0(x) = 0.01e^{\frac{-1}{x^2}}$; $u_1(x) = 0$

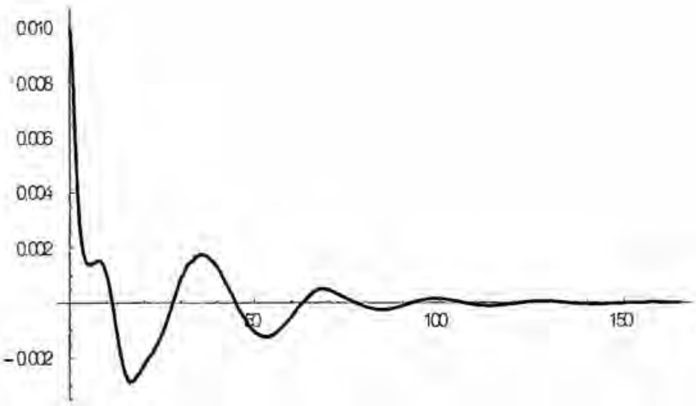
Fig. N° 2.3



Sean $m_0 = 0.5$; $a = 0.5$; $b = 7$; $\beta = 3$ y para $t = 165$

$$u_0(x) = 0.01e^{\frac{-1}{x^2}}; \quad u_1(x) = 0$$

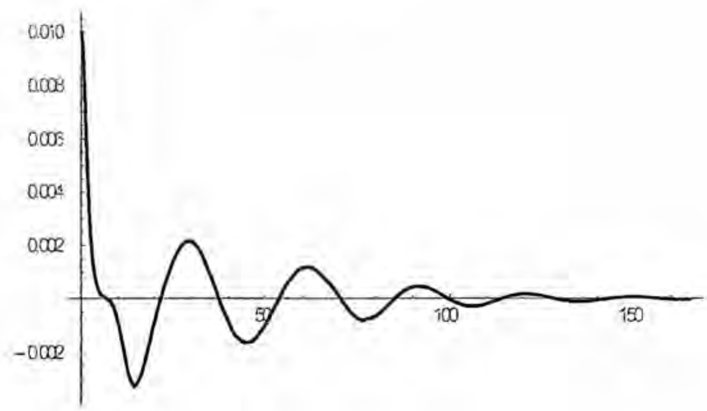
Fig. N° 2.4



Sean $m_0 = 0.5$; $a = 0.3$; $b = 7$; $\beta = 4$ y para $t = 165$

$u_0(x) = 0.01e^{\frac{-1}{x^2}}$; $u_1(x) = 0$

Figura N° 2.5



Sean $m_0 = 0.5$; $a = 0.01$; $b = 7$; $\beta = 4$ y para $t = 1465$

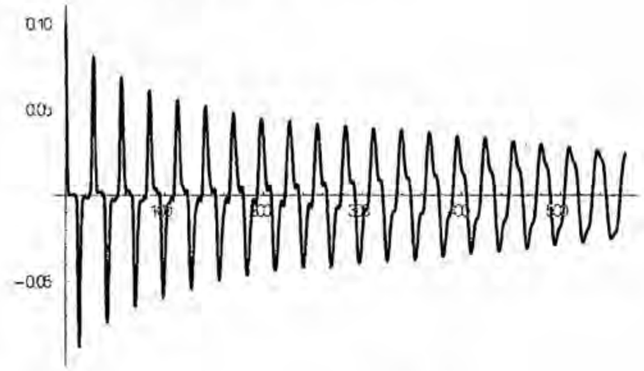
$u_0(x) = 0.01e^{\frac{-1}{x^2}}$; $u_1(x) = 0$

Figura N° 2.6

Sean $m_0 = 0.5$; $a = 0.01$; $b = 7$; $\beta = 4$ y para $t = 565$

$$u_0(x) = 0.1e^{\frac{-1}{x^2}};\quad u_1(x) = 0$$

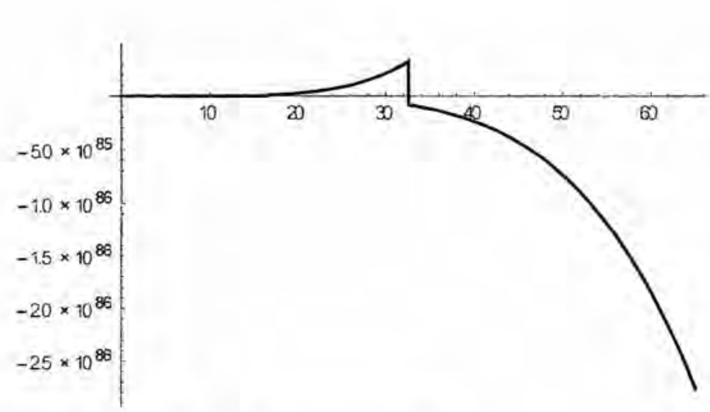
Figura N° 2.7



Sean $m_0 = 0.5$; $a = 0.01$; $b = 7$; $\beta = 4$ y para $t = 65$

$$u_0(x) = e^{\frac{-1}{x^2}};\quad u_1(x) = 0$$

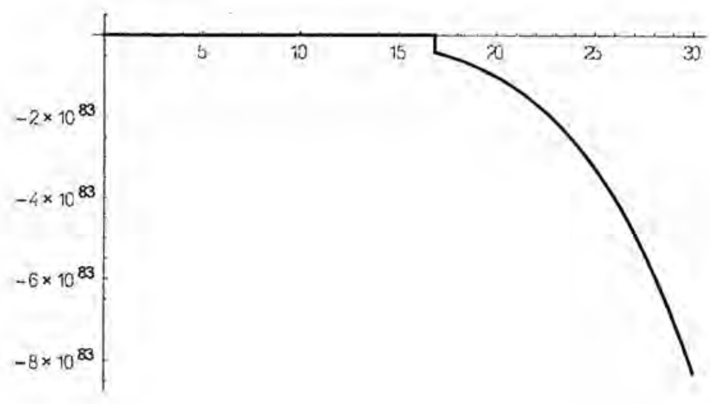
Figura N° 2.8



Sean $m_0 = 0.5$; $a = 4$; $b = 7$; $\beta = 4$ y para $t = 30$

$$u_0(x) = e^{\frac{-1}{x^2}};\quad u_1(x) = 0$$

Figura N° 2.9


5
10
15
20
25
30
-2×10^{83}
-4×10^{83}
-6×10^{83}
-8×10^{83}

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la Investigación

Para nuestro problema tenemos las siguientes variables

$u: Q \to \mathbb{R}$ donde $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $t \in (0,T) \subseteq \mathbb{R}$ / $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$

u es la función incógnita, x es la variable espacial t es la variable temporal .

3.2. Operacionalización de las variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
x	Variable espacial	$x \in \Omega$ / $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$; $\forall i = 1,2,\ldots n$	$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	
t	Variable temporal	$t \in (0,T)$ / $0 < T < \infty$	$(0,\mathrm{T}) \subseteq \mathbb{R}$	
u	Variable espacio-temporal	$u \in Q = \Omega \times (0,T)$	$Q \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ u_0 y u_1 datos iniciales en espacios de Sobolev	Solución global Para datos iniciales en espacios de Sobolev

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

La ecuación en nuestro proyecto de tesis es una ecuación de onda de Kirchhoff no lineal.

$$
(1)\quad \begin{cases} u'' - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2)\Delta u - a\Delta(u') = b|u|^{p-2} u & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

Tal que Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ y M es una función tal que:

* $M : [0,\infty[\to [0,\infty[$ con $M(s) \geq m_0 > 0$.

* $a\Delta(u')$ representa el término disipativo interno de un material tipo Kelvin-Voight

* $|u|^{p-2} u$ representa la fuerza externa

Hipótesis específica

Con las hipótesis: [H1], [H2], [H3] y el teorema dado para la ecuación (1) es decir respecto a $E(0), M$, u_0 ,u_1 y β encontraremos la existencia de soluciones y La unicidad de la solución asociada al sistema (1)

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

Trabajaremos sobre el análisis funcional, el espacio de las Distribuciones los espacios de Sobolev y para el respectivo análisis numérico utilizamos el programa computacional Wolfram Mathematic 10. Este proyecto de tesis es en parte un aporte importante para trabajos de investigación en nuestra Facultad en el cual sintetizamos con una exposición didáctica e ilustrativa para un problema de Kirchhoff no lineal del cual permitirá el avance de esta línea de investigación en nuestra facultad.

4.2 Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis inicialmente está dirigido a mostrar la existencia global de soluciones regulares del problema (1).Para esto aplicamos el método de Faedo- Galerkin que consiste en aproximarse a la solución del problema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita; resultando soluciones del tipo $u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$, donde las g_{im} , $i = 1,2,........,m$, pueden ser determinadas (de manera única) por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (El Teorema de Caratheodory por ejemplo). Finalmente usamos tres estimativas en las cuales en la primera estimativa se define un conjunto W que nos permite utilizar la teoría del potencial el cual es fundamental para optimizar la solución del sistema (1) y por último demostramos la unicidad utilizando el Lema de Gronwall y así concluir con la demostración de nuestro análisis.

4.3 Población y muestra

En términos estadísticos no existe población en estudio, solo trabajamos en $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ donde $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T > 0$

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó material bibliográfico en bibliotecas y por vía internet trabajos publicaciones de investigación relacionados con el tema así como el asesoramiento de diversos especialistas en el tema

4.5 Procedimientos de recolección de datos

No hubo procedimiento alguno solo el acceso a diferentes bibliotecas de universidades y las páginas web que eran accesibles para adquirir dichos materiales

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

No se realizó procesamiento ni análisis de datos solo se utilizó el programa computacional WOLFRAM MATHEMATIC 10 para simular algunas aplicaciones

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este trabajo se ha estudiado la solución global del siguiente sistema:

$$(1)\quad \begin{cases} u'' - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2)\Delta u - a\Delta(u') = b|u|^{\beta-2}\, u & \text{en } \; Q = \Omega\times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre } \; \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en } \; \Omega \end{cases}$$

Y con las hipótesis $[H_1], [H_2]$ y $[H_3]$ respecto a M , u_0 y u_1 se llegan a los resultados siguientes:

- Definí los funcionales $J(u)$, $I(u)$, $E(t)$ y lo relacione con un conjunto W del cual se prueba el lema II.10 y el lema II.11. Así plantee el Teorema de existencia y unicidad
- Luego utilice 3 estimativas para abordar el problema aproximado y así acotar las soluciones para luego con el pasaje al límite, acotar las soluciones probando así la existencia de soluciones de (1). La unicidad se obtuvo gracias a la desigualdad de Gronwall
- Parte importante de la demostración se basa en la energía E del sistema asociado a (1) definiendo así un conjunto W conjuntamente con los funcionales I y J que fueron fundamentales para optimizar la solución del sistema, llegando así obtener la solución global.
- Por último se da un ejemplo de aplicación para una ecuación de la viga viscoelastica donde con un programa (Wolfram Mathematic 10) se analiza el comportamiento de las oscilaciones de la estructura para datos iniciales muy pequeños y la viscosidad del material se demuestra que las oscilaciones tienden a estabilizarse cuando t se hace más grande y para datos iniciales que no se ajustan a las hipótesis dadas encontramos rupturas o blow up.

CAPÍTULO VI

DISCUSIONES

El método empleado en este trabajo puede ser dirigido a diversas aplicaciones. Podemos aplicar nuestro estudio, a la existencia y comportamiento asintótico de las soluciones para una ecuación de Kircchhof-Carrier del tipo

$$(2)\quad \begin{cases} u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2, \int_\Omega |u|^2)u - a\Delta(u') = b|u|^{\beta-2}u & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x); \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Trabajando con los mismos argumentos dados en el sistema (1) con la diferencia que M es una función real de dos variables el cual nos indica que la tensión es variable en el sistema (2)

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1) Dentro de la rama del análisis funcional y específicamente sobre este proyecto de investigación se deja como aporte un material importante sobre las ecuaciones de onda no lineales, que en un término físico se asemeja más a la realidad de la vida cotidiana, por el cual sus aplicaciones son importantes en diversas ramas de la Ingenierías y la Física los cuales se puedan ahondar más hacia una futura investigación

2) Los libros, revistas , papers, publicaciones y tesis referidas hacia este trabajo son de gran ayuda y es importante remarcar la motivación e interés para el futuro desarrollo de la investigación sobre el tema

CAPÍTULO IX

BIBLIOGRAFÍA

[1] **R. A. Adams.**, Sobolev Space, Academic press, New York-London and San Francisco, 1975.

[2] **E.H. Brito.,** Damped Elastic Stretchet String Equation Generalized: Existence Uniqueses, Regularity and Stability, Appl, Anal 13 (1982) 219-233

[3] **Eberhard Zeidler.,** Nonlinear Functional Analysis and its Applications Vol.II/A. VOL II/ B. 1989.

[4] **H. Brezis.**, Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.Editorial Masson Paris (1968)

[5] **S. Kesavan.**, Topics in functional analysis and Applications. Wiley Eastern Limited Bangolore, 1989.

[6] **L. A. Medeiros & E. A De Melo. A.,** Integral de Lebesgue Textos de Métodos Matemáticos N° 18, IM-UFRJ (1975)

[7] **L. A. Medeiros & M. Milla Miranda.**, Introdução aos Espaços de Sobolev y as Equaçoes Diferenciáis Parciais, Río de Janeiro, 1989.

[8] J. **Limaco and S. Becerra.**, Vibration of Elastic String. Atas do 48° Seminario Brasileiro de analice (1998), 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear)

[9] **P.H. Rivera.**, Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales, textos avanzados, LNCC, Rio de Janeiro 1999.

[10] **J. L.Lions.**, Quelques Methods de Resolution des aux Limits nonlinéaires; Dunod Gauthier, París, 1969.

[11] **P.Martinez.,** Precise Decay Rate Estimate For Time-Depended Dissipations System, Israel Journal of Mathematics to appear.

[12]**M. Nakao.,** ADifference Inequallity and its Application to nonlinear Evolution Equations J. Math. Soc, Japan 30. (1978). 747-762

[13] **S. I. Patcheau.**, On a class of quasilineaire, C.R Acad. Sci. Paris, T.322, Serie I 631-632

[14]**Y.Yamada and M. Hosoya.**, On Nonlinear Wave Equations II: Global Existence and Energy Decay of Solutions, J. of Fac. Of Sci., Univ. of Tokyo, 38(2) (1991) 239-25

[15] **Yosida K.**, Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

[16] **V. Komornik.**, Exact Controllability and Stabilization, the Multiplier Method. John Wiley & Sons - Masson, Paris, 1994.

[17] **G. Kirchhoff.**, "Vorlesungen uber mechanik". Teubner, Leipzig (1883).

[18] **R. Temam Navier.**, Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North Holland, Amsterdam 1979

[19]**C. A. Vélez López.**, El teorema del paso de la montaña y aplicaciones a problemas Elípticos Semilineales. Univ. Nac.de Medellín, Colombia. Tesis Febrero 1999.

[20] **Xiuli Lin and Fushan Li.**, Global Existence and decay estimates for Nonlinear Kirchhoff–type equation with boundarydissipation.Volume 5, Number 2 (2013), 297–317

[21] **J.A. Alarcón Solís.**, Estabilidad de Materiales Parcialmente Viscoelasticos. Tesis UNMSM (2013)

[22] **Laboratoire de Mathematiques, UMR CNRS 5127.**, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac, France. Etude de quelques problèmes d'évolution non linéaires de type hyperbolique: existence, unicité et comportement asymptotique.10 Décembre 2009

[23] **Yang Zhijian.**, Cauchy problem for quasi-linear wave equations with viscous damping, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 859–881

[24] **K. Nishihara and Y. Yamada.**, "On Global Solutions of Some Degenerate Quasilinear Hyperbolic Equations with Dissipative Terms," Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 33, No. 1, 1990, pp. 151-159.

[25] **M. Aassila and A. Benaissa.**, "Existence Globale et Comportement Asymptotique des Solutions des Equations de Kirchhoff Moyennement Degenerees avce un Terme Nonlinear Dissipatif," Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 43, No. 2, 2000, pp. 309-333.

[26] **K. Ono and K. Nishihara**., "On a Nonlinear Degenerate Integro-Differential Equation of Hyperbolic Type with a Strong Dissipation," Advances inMathematics Seciencesand Applications, Vol. 5, No. 2, 1995, pp. 457 -476.

[27] **K. Ono**., "Global Existence, Decay and Blowup of Solutions,for Some Mildly Degenerate Nonlinear Kirchhoff Strings," Journal of Differential Equations, Vol. 137, No. 1, 1997, pp. 273-301

[28] **P. D. Ancona and S. Spagnolo**., "Nonlinear Perturbations of the Kirchhoff Equation," Commnicathins on Pure andApplied Mathematics, Vol. 47, No. 7, 1994, pp. 1005-1029.

[29] **M. Ghisi and M. Gobbino**., "Global Existence for a Mildly Degenerate Dissipativehyperbolic Equation of Kirchhoff Type," Preprint, Dipartimento di Matematica Universita di Pisa, Pisa, 1997.

[30] **SIMON J.**, Compact Sets in the Space $L^p(0,T; B)$. Universite Pierre etMarie Curie. Laboratoire de Analyse Numerique (1985).

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGIA	POBLACIÓN
En la ecuación: $(1)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-M\left(\int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2 dx\right)\Delta u+\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=b\lvert u\rvert^{\beta-2}u & \text{en } Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & \text{sobre } \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x),\ u'(x,0)=u_1(x) & \text{en } \Omega\end{cases}$ Ω acotado en IR^n y con las hipótesis respecto a $\beta,\ E(0), M, u_0$ y u_1 tal que: [H₁] β satisface si $2<\beta\leq\frac{2n-2}{n-2}$ para $n>2$ ó $2<\beta<\infty$ para $n=1,2$ $[H_2]$ la funcion $M:[0,\infty[\rightarrow[0,\infty[$; M de clase C^1 tal que $M(s)\geq m_0>0$; $\int_0^s M(\alpha)d\alpha\leq sM(s)$ y $\hat{M}(s)=\int_0^s M(r)dr$ H₃] $E(0)$ satisfice $\frac{b}{m_0^\beta}C_*^\beta\left(\frac{\beta}{\beta-2}E(0)\right)^{\frac{\beta-2}{2}}<1$ y $E(0)<d$ donde $E(t)=\lVert u'(t)\rVert^2+$ $\hat{M}\left(\lVert\nabla u(t)\rVert^2\right)-\frac{2b}{\beta}\lVert u(t)\rVert_\beta^\beta$ siendo E la energía del sistema: **Planteamiento del problema** Lo que se pretendio analizar y responder son las siguientes interrogantes; 1)¿con estos datos será posible encontrar la existencia de soluciones del sistema (1)? 2)¿con los mismos datos será posible encontrar la unicidad de la solución del sistema?	**Objetivo General** Este trabajo damos una demostración detallada de la existencia y unicidad de la solución de (1) **Objetivo Especifico** El trabajo consta en dos partes. En la primera parte demostramos la Existencia y Unicidad de las soluciones regulares. En la segunda parte mostramos con un programa computacional Wolfram Mathematic 10 algunas aplicaciones del sistema (1)	**Hipótesis General** La ecuación en nuestro proyecto tesis es de Kirchhoff no lineal $(1)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-M\left(\int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2 dx\right)\Delta u+\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=b\lvert u\rvert^{\beta-2}u & \text{en } Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & \text{sobre } \Gamma\times]0,\infty[\\ u(x,0)=u_0(x),\ u'(x,0)=u_1(x) & \text{en } \Omega\end{cases}$ Tal que Ω es un conjunto acotado en IR^n M una función tal que: $M:[0,\infty[\rightarrow[0,\infty[$ con $M(s)\geq m_0>0$. **Hipótesis Especifica** Con las hipótesis H₁, H₂ H3 y los teoremas dados para la ecuación (1) es decir respecto a , $\beta, E(0), M, u_0$ y u_1 encontraremos la solución global, del sistema (1)	**Tipo de Investigación** La siguiente Investigación es del Tipo científico teórico-practico **Método** El método realizado Es del tipo inductivo deductivo los cálculos realizados están detallados lo mejor posible **Diseño** para la existencia global aplicamos el método de Faedo- Galerkin para así usar tres estimativas de las cuales en una primera estimativa aplicamos para luego con el auxilio del lema de Gronwall demostramos la unicidad de la solución lo que implica el final de la demostración y así obtener solución global	En términos estadísticos no existe población en estudio, solo trabajamos en $Q\subset IR^{n+1}$ donde $Q=\Omega\times(0,T)$ $\Omega\in JR^n$ acotado con frontera bien regular tal que $T>0$

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo