

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
NATURALES Y MATEMÁTICA



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN ENE 2018

“CAOS EN LA DINÁMICA DE UN OSCILADOR NO LINEAL
AMORTIGUADO Y FORZADO”

AUTOR: Lic. CARLOS ALBERTO LÉVANO HUAMACCTO

(Periodo de Ejecución: De 01 de enero del 2017 al 12 de Diciembre del 2017)

(Resolución de aprobación N°110-2017R)

Callao, 2017

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| I.ÍNDICE | 1 |
| 1.1.Índice de tablas | 3 |
| 1.2.Índice de figuras | 4 |
| 1.3.Índice de graficas | 5 |
| II.RESUMEN Y ABSTRACT | |
| 2.1. Resumen | 6 |
| 2.2. Abstract | 7 |
| III. INTRODUCCIÓN | |
| 3.1. Exposición del problema de investigación | 8 |
| 3.2. Importancia y justificación de la investigación | 10 |
| IV. MARCO TEÓRICO | |
| 4.1. Antecedentes o estudios previos | 12 |
| 4.2. Bases teóricas | |
| 4.2.1.La Teoría del Caos | 12 |
| 4.2.2. Indicadores del Caos | 14 |
| a) Sección de Poincaré | 15 |
| b) Espectros de Potencia | 15 |
| c) Exponentes de Lyapunov | 16 |
| 4.3. Ecuación de Duffing | 19 |
| 4.4. Marco conceptual | 28 |
| a) Caos | 28 |
| b) Mecánica no lineal y Caos | 28 |
| c)Linealidad y no linealidad | 29 |
| V. MATERIALES Y MÉTODOS | |
| 5.1. Materiales | 30 |
| 5.1.1. De ejecución | 30 |
| 5.1.2. De impresión | 30 |
| 5.2. La población de la investigación y la muestra | 31 |

| | |
|--|-----------|
| 5.3. Las Técnicas de análisis o los medios estadísticos | 31 |
| 5.4. Las técnicas de análisis o los métodos estadísticos aplicados | 31 |
| 5.5. Metodología | 31 |
| VI. RESULTADOS | 34 |
| VII. DISCUSIÓN | 41 |
| VIII. REFERENCIALES | 42 |
| IX. APÉNDICES | 43 |
| X. ANEXOS | 51 |
| Matriz de Consistencia | |

TABLA DE CONTENIDO

| | | |
|-------------|--|--------|
| Tabla N°6.1 | Valores para los diferentes parámetros del Sistema no Lineal Amortiguado y Forzado | Pag.34 |
|-------------|--|--------|

f

TABLA DE FIGURAS

| | | |
|------------|--|--------|
| Figura 4.1 | Superficie de la Sección de Poincare | Pag.15 |
| Figura 4.2 | Espectro de potencia | Pag.16 |
| Figura 4.3 | Oscilador Forzado lineal y espacio fase | Pag.20 |
| Figura 4.4 | Oscilador Forzado No lineal y espacio fase | Pag.20 |
| Figura 4.5 | Sistema No Lineal Físico | Pag.22 |
| Figura 4.6 | Sistema No Lineal Físico moviendo | Pag.22 |
| Figura 4.7 | Sistema No Lineal Físico desplazado | Pag.31 |

TABLA DE GRÁFICAS

| | | |
|-------------|--|--------|
| Grafica 6.1 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.01 | Pag.35 |
| Grafica 6.2 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.05 | Pag.36 |
| Grafica 6.3 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.08 | Pag.37 |
| Grafica 6.4 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.1 | Pag.38 |
| Grafica 6.5 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.3 | Pag.39 |
| Grafica 6.6 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.6 | Pag.40 |

RESUMEN

En este trabajo de investigación determinamos el estado de Caos de un sistema físico Oscilador no lineal amortiguado y forzado con una fuerza externa de tipo senoidal a través del indicador llamado exponentes de Lyapunov; para caracterizar la dinámica del Oscilador no lineal determinamos primero el espacio de fase donde se observa si presenta comportamiento desordenado para una frecuencia relativa determinada, luego calculamos su correspondiente exponente de Lyapunov a través de un programa desarrollado por Wolf et al. Se obtuvieron valores del exponentes de Lyapunov positivos para dinámicas desordenadas del Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado y, valores del exponente de Lyapunov negativos para dinámicas ordenadas del Oscilador corroborando la hipótesis de este trabajo de investigación.



ABSTRACT

We determine the state of Chaos of a non-linear oscillator damped and forced physical system with an external force of type sinusoidal through the indicator called exponents of Lyapunov; characterize the dynamics of the non-linear oscillator, first determine the phase space where it is observed if it presents disordered behavior for a given relative frequency, then we calculate its corresponding exponent of Lyapunov through a program developed by Wolf et al. Positive values of the Lyapunov exponents were obtained for disordered dynamics of the Negligible and Forced Non-linear Oscillator and, negative Lyapunov exponent values for ordered dynamics of the Oscillator corroborating the hypothesis of this research work.



III. INTRODUCCIÓN

3.1. La exposición del problema de investigación

Con el avance de la Ciencia se sabe que son más sistemas no lineales que los sistemas lineales que se puede encontrar en la naturaleza ,y cuando se estudian los primeros, se analiza su dinámica en aproximación lineal, o sea las variables contenidas en la ecuación diferencial o de movimiento son de primer orden, en esa aproximación la ecuación de movimiento del sistema mencionado logra cumplir con el principio de superposición, importante principio de las ecuaciones lineales; sin embargo, la aproximación lineal lleva a una descripción de la dinámica de los sistemas mencionados restringida, como en el caso del sistema oscilatorio periódico llamado Péndulo Físico, que se le estudia generalmente para ángulos pequeños, menos de cinco grados a pesar que este muestra movimiento en la práctica para ángulos mayores(Taylor, 2013).

En las últimas décadas se ha asociado el comportamiento desordenado que presenta la dinámica de los sistemas no lineales con el problema llamado Caos, caracterizado por una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales de las ecuaciones no lineales; se sabe de los sistemas no lineales que su dinámica puede mostrar comportamiento ordenado como comportamiento desordenado y, las condiciones para que se dé el segundo caso es materia de estudio en este trabajo de investigación.

Los Sistemas Oscilatorios lineales periódicos han sido ampliamente estudiados experimental y teóricamente en la física y sirven de modelos para estudiar las interacciones entre sistemas, en las últimas décadas los Sistemas amortiguados y forzados son usados como modelos con frecuencia ; sin embargo, el interés por conocer más sobre los Sistemas no Lineales Amortiguado y Forzado , y en especial saber las condiciones cuando muestran comportamiento desordenado o Caos es lo que se busca(Douglas G., 2006).

Es importante determinar cuándo un sistema presenta comportamiento de Caos porque permite conocer esos comportamientos indeseables de los sistemas y, de los sistemas físicos que sirven de modelo.

El problema identificado es la determinación del estado de Caos en los Sistemas no Lineales que muestran comportamiento desordenado. Se plantea la determinación del estado del Caos usando los Exponentes de Lyapunov, propuesto por el ruso matemático del mismo nombre que propone que el cambio en la dinámica se puede medir a través de la divergencia de las variables dinámicas, que es cuantificada por unos parámetros llamados Exponentes de Lyapunov (Wolf A., 1984).

La formulación y planteamiento del Problema son:

a) Problema General

Problema general que se propuso en este trabajo de investigación es el siguiente,

¿Es posible determinar el Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov?

b) Problemas Específicos:

- ¿Cuál es la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov en la determinación del estado dinámico del Caos de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado?
- ¿Es posible determinar un modelo físico para estudiar el Caos en la dinámica de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado?

c) Objetivo General y Alcances de la investigación

-Objetivo General

Los objetivos planteados en el presente trabajo fueron:

- Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado.
- Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia.

-Objetivos Específicos

- Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado.
- Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia.

3.2. Importancia y la Justificación de la Investigación

Sabemos que el estudio de los Sistemas Físicos no Lineales se ha incrementado y el problema de Caos se observa en varios sistemas, no solamente encontramos Sistemas no lineales en Física sino también en otras áreas como Química, Biología, Economía, Medicina, Ingeniería y por ello se dice que el Caos es ubicuo. Los trabajos de modelamiento que realizamos, los físicos, son interdisciplinarios y por ello surge la necesidad de estudiar y comprender las herramientas para afrontar el fenómeno del Caos. En ese sentido es importante que los modelos no lineales, en especial los mecánicos, que proponemos para estudiar otros fenómenos de la naturaleza debe ser bien estudiado, saber cuándo pueden funcionar en estado de Caos

controlando los parámetros propios del sistema para saber las condiciones que llevan al Caos.

- La investigación que deseamos realizar corresponde a un valor teórico-práctico, desde el punto de vista de una Investigación Básica, y constituirá un aporte importante dentro de la física computacional, la cual, es una de las líneas de especialización de Física.

IV. MARCO TEÓRICO

4.1. Antecedentes o Estudios Previos

Zhang e Harne (2016) propone el estudio del Oscilador con efecto débilmente no lineal, llamado Oscilador de Duffin, muestra que este Oscilador presenta comportamiento de Caos para determinados parámetros.

Cabana e Laroze (2015) muestra el análisis de las ecuaciones de Landau-Lifshitz o Landau-Lifshitz-Gilbert, que describe la dinámica de una partícula en un campo magnético oscilante, se analiza la dinámica haciendo variar parámetros del Sistema y se estudia el Caos en su espacio de fase.

Mouronte M (2004), muestra él estudia el Caos del sistema, a través del espacio de fase donde las bifurcaciones que son desdoblamiento de la dinámica de, es una forma cualitativa de describir el Caos en la dinámica de un sistema.

Kapitaniak T. (1994), muestra que estudio del comportamiento de los sistemas cuasi periódicos forzados a través de los Atractores, que son regiones en el espacio de fase o configuración hacia donde tiende la dinámica, es una forma de estudio de los sistemas cuasi periódicos.

La revisión bibliográfica realizada muestra que en los trabajos no usan los exponentes de Lyapunov específicamente para el estudio del estado el Caos de un sistema de un Oscilador Amortiguado y Forzado. El antecedente descrito ha motivado a desarrollar la presente investigación como una contribución dirigida a dotar de los instrumentos necesarios de consulta, actualización y orientación básica para aquellos que tienen interés de esta especialización dentro de la Física no Lineal.

4.2. Bases Teóricas

4.2.1. La Teoría del Caos

Usualmente en física aprendimos que las leyes son descritas por ecuaciones de movimiento (ecuaciones diferenciales), como por ejemplo la ley de Newton entre otros, y la solución analítica o numérica de estas ecuaciones se hacen teniendo las condiciones iniciales y de contorno; podemos conocer como es su dinámica en el tiempo, esto es el punto de vista determinista, entonces, sistemas físicos conservativos o disipativos son deterministas porque ellos obedecen ecuaciones diferenciales deterministas (Taylor J., 2013).

La teoría de Caos, es una teoría que estudia el comportamiento desordenado de los sistemas no lineales, como los físicos, a los que se conoce su ecuación dinámica resultado de la aplicación de una ley o principio, en el caso de la Mecánica por ejemplo las Leyes de Newton; por ello se dice también Caos determinista, los sistemas no lineales en régimen perturbativos usualmente exhiben comportamiento complicado llamado Caos (José J. e Saletan E., 1998).

Si los estados iniciales de sistemas deterministas son exactamente conocidos, futuros estados dinámicos son predichos teóricamente; esta visión determinista sobrevivió para ser cuestionada después de las famosas obras visionarias de Henri Poincaré sobre la mecánica celeste realizadas a finales del siglo XIX que eran contrario al determinismo (Rañada A., 1990).

Poincaré proponía que supiéramos exactamente la ley de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, se podría predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento sucesivo, pero incluso si fuera el caso de que las leyes naturales ya no tuvieran ningún secreto para nosotros, pero no es así en los resultados numéricos que nos describen que

sólo podríamos conocer la situación inicial aproximadamente. Si nos permitiera predecir la situación siguiente con la misma aproximación, eso es todo lo que necesitamos, de esta manera, las mediciones efectuadas sobre el estado de un sistema en un momento dado pueden no permitirnos predecir la situación futura incluso moderadamente lejos, a pesar de que las ecuaciones de gobierno son exactamente conocidas (Douglas R., 2006).

No ocurrió hasta los años 70, después de casi un siglo de investigaciones, aprendieron que los sistemas caóticos sólo pueden resolverse numéricamente, y no hay formas sencillas y generales de predecir cuándo un sistema exhibirá caos. También hemos aprendido que el caos determinista está siempre asociado con sistemas no lineales, la no linealidad es una condición necesaria para el caos, pero no una suficiente (José J. e Saletan E., 1998).

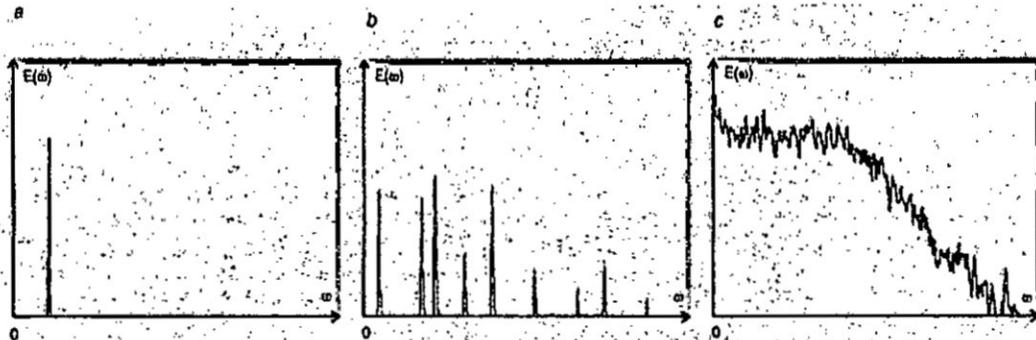
Sólo en los últimos años, con el advenimiento de las computadoras que se permitió estudiar el caos ya que ahora es posible realizar cálculos numéricos de la evolución temporal de las propiedades de los sistemas sensibles a las condiciones iniciales, comenzamos a comprender la existencia del caos cuando las computadoras estaban fácilmente disponibles para calcular las historias de largo tiempo necesarias para explicar el comportamiento discutido, el modelo determinístico siempre producirá la misma salida de una condición inicial o estado inicial determinado (Douglas R., 2006).

4.2.2. Indicadores del Caos

La teoría del caos, es una teoría que trata sobre el fenómeno del comportamiento desordenado que los sistemas físicos no lineales presentan, en especial, muestran una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales; la no linealidad de las ecuaciones (deterministas) hacen que no se puedan resolver analíticamente porque no cumplen con el principio de superposición, es por ello que en esta teoría se han desarrollado indicadores del Caos para

periódico dos o más pico, pero siempre discretos la transformada de Fourier; sin embargo, cuando un sistema físico está en estado de caos debe mostrar una transformada de Fourier continua, para ello se tiene que hacer variar todos los parámetros y variables del sistema y no siempre se puede determinar el límite a partir del cual el sistema presenta caos (Rañada A.,1990)

FIGURA N° 4.2
 ESPECTRO DE POTENCIA DE UN SISTEMA PERIÓDICO, CUASI
 PERIÓDICO Y EN CAOS



Fuente: Rañada, Dinámica Clásica, 1989

c) Exponentes de Lyapunov

Los términos no lineales de las ecuaciones diferenciales amplifican exponencialmente pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, de esta manera, las leyes de evolución deterministas crean comportamientos caóticos, incluso en ausencia de nuevas fluctuaciones internas, en el régimen caótico no es posible predecir exactamente la evolución del estado del sistema durante un tiempo arbitrariamente, esta es la característica impredecible del caos.

La evolución temporal se rige por un espectro continuo de frecuencias responsables de un comportamiento aperiódico, para este movimiento se presentan patrones estacionarios, es decir, patrones que se repiten de forma no periódica. Lyapunov creó un método conocido como exponente característico de Lyapunov para cuantificar la sensible dependencia de las condiciones iniciales del comportamiento caótico, la estabilidad de los sistemas dinámicos; con este método es posible determinar los requisitos mínimos de las ecuaciones diferenciales que son necesarias para crear el caos. Estudiemos el caso de sistemas con una sola variable que asumen dos estados iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$, difiriendo por una pequeña cantidad ε (Rañada A., 1990)

Queremos investigar los posibles valores de x_n después de n iteraciones de los dos valores iniciales, la diferencia d_n entre los dos valores x_n después de n iteraciones (omitiendo por simplicidad el subíndice) se da aproximadamente.

$$d_n = f(x_n + \varepsilon) - f(x_n) = \varepsilon e^{n\lambda} \quad (1)$$

Donde, λ , es el exponente de Lyapunov que representa el coeficiente del crecimiento exponencial promedio por unidad de tiempo entre los dos estados. De lo que vemos, si λ es negativo, las dos orbitas eventualmente convergerán, pero si es positivo las trayectorias próximas divergen. La diferencia entre los dos estados iniciales se escribe como

$$d_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \approx \varepsilon \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} \quad (2)$$

Ahora, para evitar la confusión que a veces se encuentra en la literatura caótica, recordamos que,

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = f(f(f(x_{n-2}))) = \dots = f(f(\dots(f(x_0)))) \quad (3)$$

Donde el superíndice n indica la n -ésima iteración del mapa. Después de un gran número de iteraciones, la diferencia entre los estados cercanos es,

$$d_n = f(x_n + \varepsilon) - f(x_n) = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon e^{n\lambda} \quad (4)$$

Dividiendo la ecuación por ε y tomando el logaritmo a ambos lados, obtenemos

$$\ln \left\{ \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right\} = \ln[e^{n\lambda}] = n\lambda \quad (5)$$

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| df^n \frac{x_0}{dx_0} \right| \quad (6)$$

Donde,

$$df^n \frac{x_0}{dx_0} = \left\{ \frac{df^n(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \right\} \left\{ \frac{df^{n-1}(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \right\} \dots \left\{ \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right\} \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 6 para calcular el exponente de Lyapunov, que puede tener valores positivo o negativo, el valor positivo significa que el sistema presenta comportamiento caótico.

$$\lambda(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \ln \left| \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{dx_0} \right| \quad (8)$$

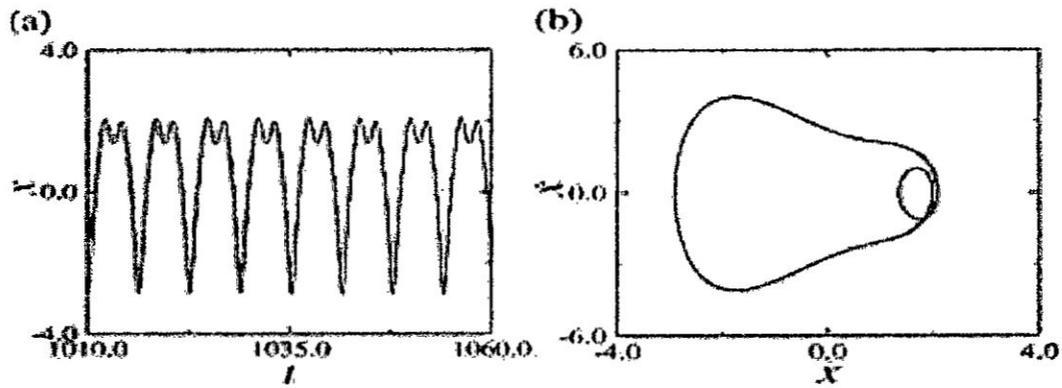
4.3. Ecuación de Duffing

Un caso ilustrativo disipativo es el movimiento de una partícula con masa m sometida a un potencial y a una fuerza disipativa es proporcional a, $\beta \frac{dx}{dt}$ respectivamente; se considera débilmente no lineal cuando, $\delta \ll 1$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} - x + \delta x^3 = F \cos(\omega t) \quad (9)$$

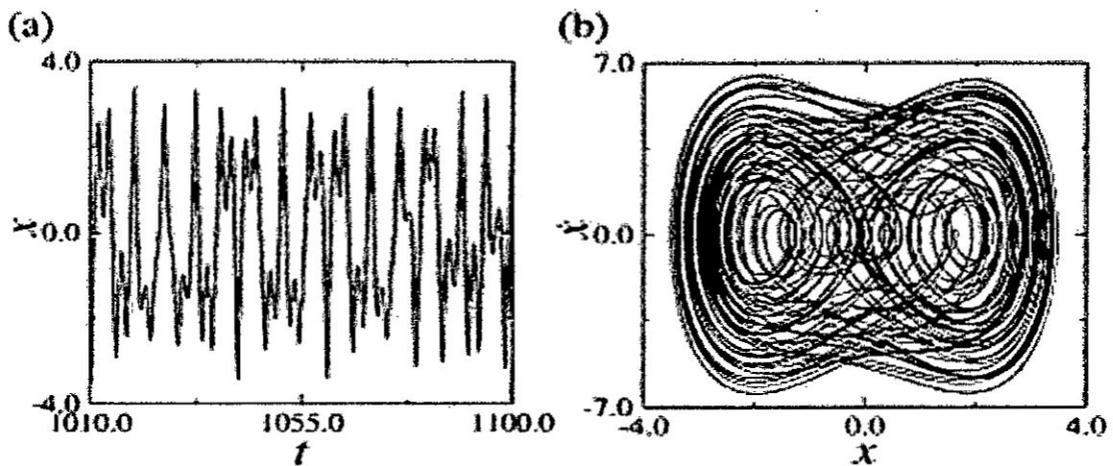
Donde β , δ , ω son parámetros.

FÍGURA N° 4.3
OSCILADOR AMORTIGUADO FORZADO LINEAL Y SU ESPACIO DE FASE



Fuente: Mouronte M., Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales Mediante el Estudio del Mapa de frecuencias y Espacio de fases, 2004

FIGURA N° 4.4
OSCILADOR AMORTIGUADO FORZADO NO LINEAL EN CAOS Y SU
ESPACIO DE FASE



Fuente: Mouronte M., Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales Mediante el Estudio del Mapa de frecuencias y Espacio de fases, 2004

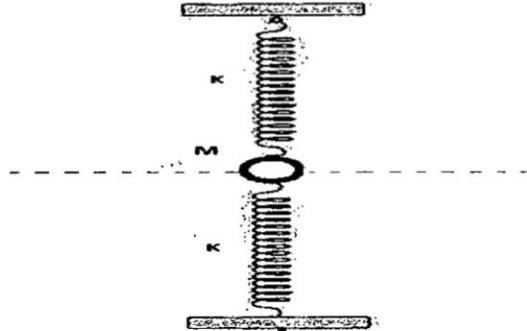
La Dinámica está compuesta por dos campos de estudio, la Dinámica Lineal y la Dinámica no Lineal, esta última trata del comportamiento desordenado dinámico de los Sistemas no Lineales, es aquí donde los sistemas presentan el Caos, a mejor dicho el Caos determinista, porque cuentan con ecuaciones dinámicas con fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que una pequeña variación en las condiciones iniciales puede alterar significativamente el comportamiento dinámico del sistema convirtiendo los valores que va a tomar en el tiempo (Saletan & José, 1998).

Otros sistemas también se puede llegar a la forma del Oscilador de Duffing, si consideramos un cuerpo de masa M , al cual le llamaremos la partícula (sin rotar), suspendido entre dos muelles iguales, tal como se muestra en la figura 5. Si ambos muelles están sin de deformar (o sea, sin tensión y, por tanto; sin energía potencial los dos lados) cuando la partícula se encuentre en su posición de equilibrio y, si despreciamos las fuerzas gravitatorias, cada uno de los muelles ejercerá una fuerza,

$$-k(s - l)$$

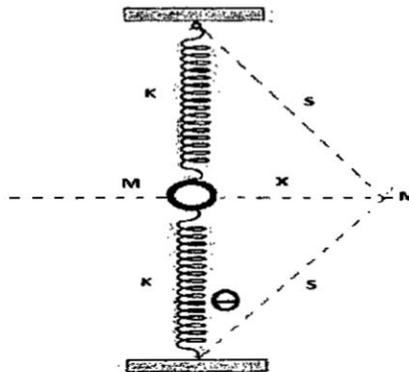
sobre la partícula (k es la constante de recuperación de cada muelle), l , es la longitud sin deformar del resorte. (Saletan & José, 1998).

FIGURA 4.5
SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTICULA DE MASA M



Fuente: Marión J. Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

FIGURA 4.6
SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTICULA DE
MASA M MOVIENDOSE LONIGITUDINALMENTE



Fuente: Marión J., Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

La fuerza que actúa sobre la partícula de masa ,M, es ,F, igual a,

$$F = -2\kappa(s - l)\text{sen}(\theta),$$

como

$$s = \sqrt{x^2 + l^2}$$

de forma que,

$$\text{sen}\theta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

Resulta la fuerza en función de la posición,

$$F = \frac{2\kappa x}{\sqrt{x^2 + l^2}} (\sqrt{x^2 + l^2} - l) = 2\kappa x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2}} \right) \quad (10)$$

Si suponemos que, $\frac{x}{l}$, es pequeño y desarrollamos en serie el radical,

tendremos(Marion J.,1981),

$$F = -\kappa l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \dots \right] \quad (11)$$



Y cuando despreciamos todos los términos, salvo el primero, será

$$F \simeq \left(\frac{k}{l^2}\right)x^3$$

Si alargamos inicialmente ambos muelles una distancia, d , para sujetar a ellos la masa, m , en posición de equilibrio, la fuerza será (Marion J., 1981),

$$F(x) \simeq -2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)x - [\kappa(l-d)/l^3]x^3$$

De donde podemos determinar la energía potencial considerando la expresión,

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$-2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)x - \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^3}\right]x^3 = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (12)$$

Obtenemos la energía potencial siguiente,

$$U(x) = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)\right)x^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa(l-d)}{l^3}\right]x^4. \quad (13)$$

Luego considerando que el sistema se mueve solamente en forma horizontal la energía cinética viene dado por , $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ y conjuntamente con la energía potencial , $U(x)$, podemos expresar el Lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)\right)x^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2}\right]x^4 \quad (14)$$

Cuando además están presente otras fuerzas, disipativas y no disipativas en Mecánica Clásica se usa la siguiente ecuación,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial a_j}\right) = Q_j^1 + Q_j^2 \quad (15)$$

Donde:

Q_j^1 , representa a las fuerzas disipativas,

Q_j^2 , representa las fuerzas que no son disipativas ni conservativas.

En nuestro caso usaremos consideraremos que nuestra partícula está sometida a una fuerza disipativa de la forma, $Q_j^1 = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)$ y una fuerza externa dependiente del tiempo, $Q_j^2 = F_0 \cos(\omega t)$ ambas en dirección horizontal.

Reemplazando el Lagrangiano en la ecuación dinámica y las fuerzas respectivas se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{\kappa d}{l} \right) x^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2} \right] x^4 \right) \right) = -b \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_0 \cos(\omega t)$$

(16)

desarrollando la expresión de la manera que se muestra para obtener una ecuación dinámica de un Sistema no Lineal Amortiguado y Forzado,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \left(\frac{\kappa d}{l} \right) x + \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2} \right] x^3 = -b \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_0 \cos(\omega t)$$

(17)

A la ecuación,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{M} \left(\frac{dx}{dt} \right) + 2 \left(\frac{\kappa d}{lM} \right) x + \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2 M} \right] x^3 = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t)$$

(18)

Se hacen las siguientes representaciones,

$$\frac{b}{M} = 2\beta, \quad 2\left(\frac{\kappa d}{iM}\right) = \omega_0^2, \quad \left[\frac{\kappa(i-d)}{i^2 M}\right] = \varepsilon,$$

nos permite expresar de la siguiente forma la ecuación dinámica,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \quad (19)$$

De donde observamos que $\varepsilon \ll 1$ es bien pequeño por lo tanto podemos afirmar que la ecuación dinámica corresponde a un Sistema débilmente no lineal Amortiguado y Forzado.

4.4. Marco conceptual

a) Caos

Es un fenómeno, que provoca la imposibilidad de realizar cualquier predicción fiable de su comportamiento a pesar de tener un carácter determinista, aun en ausencia de las perturbaciones externas al sistema, los temas de esta clase desarrollan un comportamiento caótico (Alemán R., 2010).

b) Mecánica no lineal y Caos

La mayoría de los sistemas cuyas ecuaciones de movimiento son no lineales pueden exhibir Caos. Este fenómeno que se manifiesta en muchos campos diferentes como los sistemas mecánicos oscilantes, reacciones químicas, flujo de fluidos, rayos láser, crecimiento de poblaciones, transmisión de enfermedades, y muchos otros, supone que aunque un sistema obedezca a ecuaciones deterministas de movimiento (leyes de Newton) su comportamiento detallado futuro puede, en la práctica, ser impredecible (Taylor, J., 2013).

El comportamiento de un sistema mecánico caótico puede ser muy complicado, y la necesidad de describir este comportamiento ha generado una enorme variedad de maneras nuevas de visualizar el movimiento de los sistemas como órbitas del espacio de estados, secciones de Poincaré, diagramas de bifurcación.

La teoría del Caos está dividida en dos amplias áreas de estudios, sistemas disipativos, tales como el péndulo amortiguado, y no disipativos, o sistemas Hamiltonianos (Taylor, J., 2013).

c) Linealidad y no linealidad

La ecuación diferencial es lineal si relaciona la variable o variables dependientes y sus derivadas sólo linealmente. El francés Poincare observo que la tierra, la luna y el sol, sus ecuaciones exhiben sensibilidad a las condiciones iniciales. Característica del movimiento caótico.

La no linealidad es esencial para el caos, pero la no linealidad no garantiza el caos además el sistema tiene que ser "complicado" como los sistemas disipativos, sus ecuaciones de movimiento cuando se ponen en su forma estándar autónoma deben ser no lineales y tener N variables con $N \geq 3$ (Taylor, J., 2013).



V. MATERIALES Y MÉTODOS

5.1. Materiales

5.1.1. De ejecución

- El trabajo de investigación pertenece a la investigación teórica, específicamente a la Física Computacional, por ello se usó ordenadores Core I-3 para hacer las simulaciones y cálculos, programas en fortran 90 para Runge Kutta de 4to orden (Press W., Teukolsky S., Vettering W., Flannery B., 1992) para estudiar el comportamiento de la dinámica del espacio de fase.
- Internet , para la búsqueda de información relacionado al trabajo de investigación.
- Fotocopias, de documentos que ayudan en el desarrollo del trabajo de investigación.
- Dispositivos de almacenamiento (CD, USB) , para guardar las corridas con el programa.

5.1.2. De la impresión

Para la parte final del trabajo de investigación se usó los siguientes materiales:

- Papel Bond en formato A-4
- Elementos de escritorio
- Tintas para impresión



5.2. La población y muestra

Como es un trabajo de investigación de Física Teórica no requiere de población y muestra.

5.3. Las técnicas, procedimientos e instrumentos de recolección de datos

No se usan técnicas estadísticas por tratarse de un trabajo de la Física Teórica.

5.4. Las Técnicas de análisis o métodos estadísticos aplicados

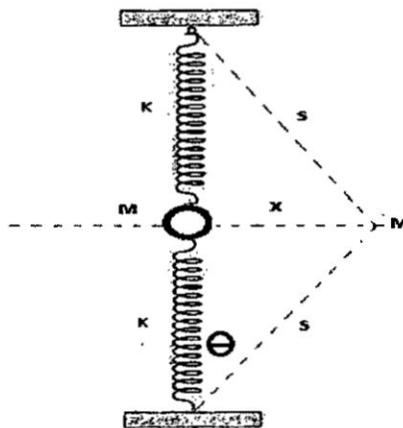
No aplica para este trabajo.

5.5. La Metodología

-En este trabajo se consideró el siguiente sistema, figura 4.7,

FIGURA 4.7

SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTÍCULA DE MASA M y RESORTES ESTIRADO X



Fuente: Marión J., Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

-La recopilación de datos se hace a través de un programa mencionado líneas arriba de la ecuación de la dinámica del sistema,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \left(\frac{dx}{dt}\right) + w^2x + \delta x^3 = FCos(\omega t) \quad , \quad (20)$$

y el programa para obtener los exponentes de Lyapunov fue adaptado de (Wolf A., Swift J., Swinney H. and Vastano J., 1985).

Para ello a la ecuación última se convierte en un sistema dinámico de dos variables, donde la segunda ecuación contiene el término que contiene al tiempo, $FCos(\omega t)$,

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\beta \left(\frac{dx}{dt}\right) - w^2x - \delta x^3 + FCos(\omega t)$$

(21)

El Sistema, se hizo discreto y se lleva al programa de Runge Kutta de 4to orden con intervalo de tiempo 0,01s, para analizar si se observa comportamiento desordenado o Caos en el espacio de fase para con los parámetros de la tabla N° 6.1. Para esos valores se calculan los exponentes de Lyapunov máximo positivo, que mostró Caos.

Luego haciendo un cambio de variable:

Del tiempo, $\tau = \omega_0 t$,

de la sustitución de la frecuencia, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$. La ecuación adimensional

resulta,

$$\frac{\omega_0^2 d^2 x}{d\tau^2} + 2\beta\omega_0 \left(\frac{dx}{d\tau}\right) + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = \frac{F_0}{M} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) \quad (22)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{2\beta}{\omega_0} \left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} x^3 = \frac{F_0}{\omega_0^2 M} \cos(\Omega\tau) \quad (23)$$

-En el análisis se mantuvo constante las cantidades $\frac{2\beta}{\omega_0}$, $\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}$,

$\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$ y solamente se hace variar la frecuencia relativa Ω .

Se determinó los espacios de fases para las diferentes frecuencias desde, $\omega = 0,01\omega_0$ hasta $\omega = 3,4\omega_0$ con los datos que se muestra en el cuadro

siguiente, manteniendo constante las cantidades $\frac{2\beta}{\omega_0}$, $\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}$, $\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$.

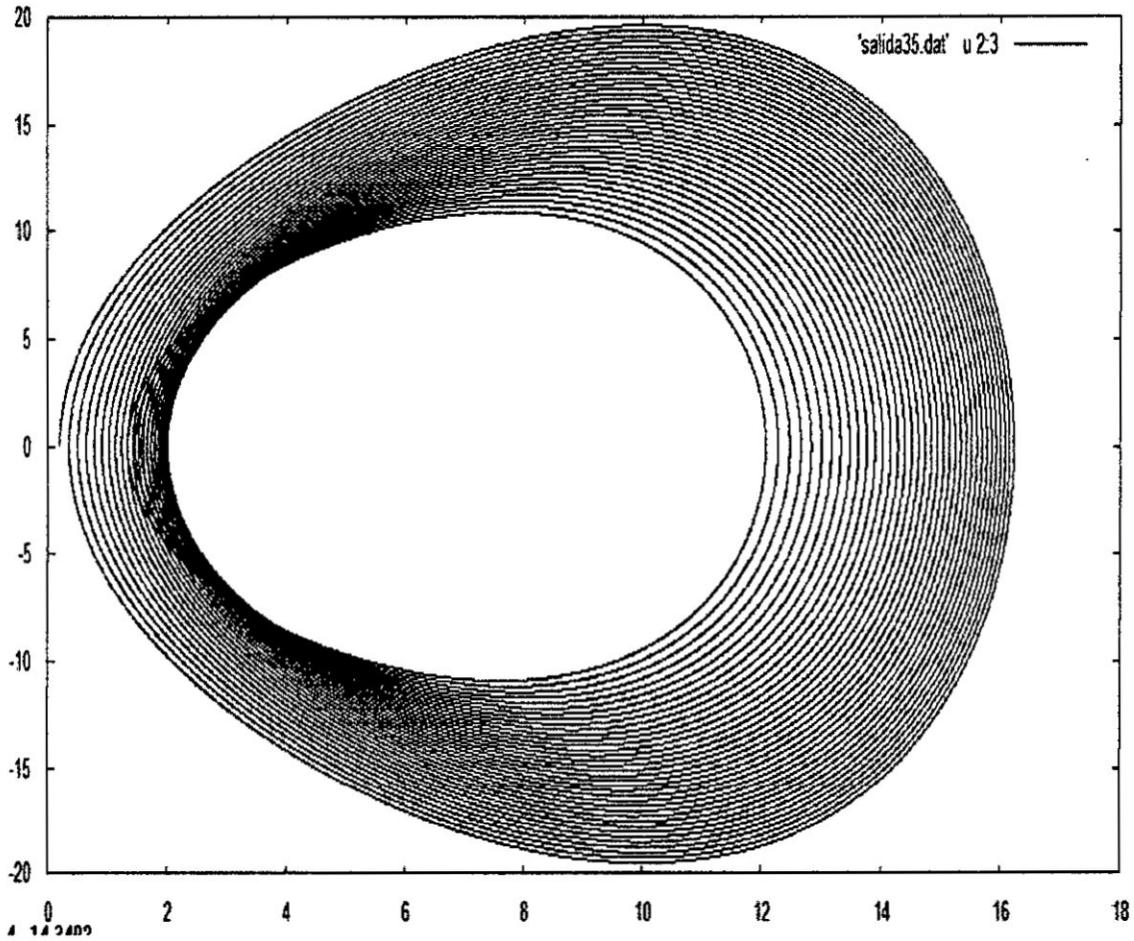
VI. RESULTADOS

TABLA N° 6.1
 VALORES PARA LOS DIFERENTES PARÁMETROS DEL SISTEMA NO
 LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO

| N | $\frac{2\beta}{\omega_0}$ Fricción | $\frac{F}{\omega_0^2}$ No linealidad | $\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$ Fuerza externa | $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ Frecuencia |
|----|---------------------------------------|---|--|--|
| 1 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,01 |
| 2 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,05 |
| 3 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,08 |
| 4 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,1 |
| 5 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,3 |
| 6 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,6 |
| 7 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,8 |
| 8 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,0 |
| 9 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,2 |
| 10 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,4 |
| 11 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,6 |
| 12 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,8 |
| 13 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,0 |
| 14 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,2 |
| 15 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,4 |
| 16 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,6 |
| 17 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,8 |
| 18 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,0 |
| 19 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,2 |
| 20 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,4 |

Fuente: Autoría propia

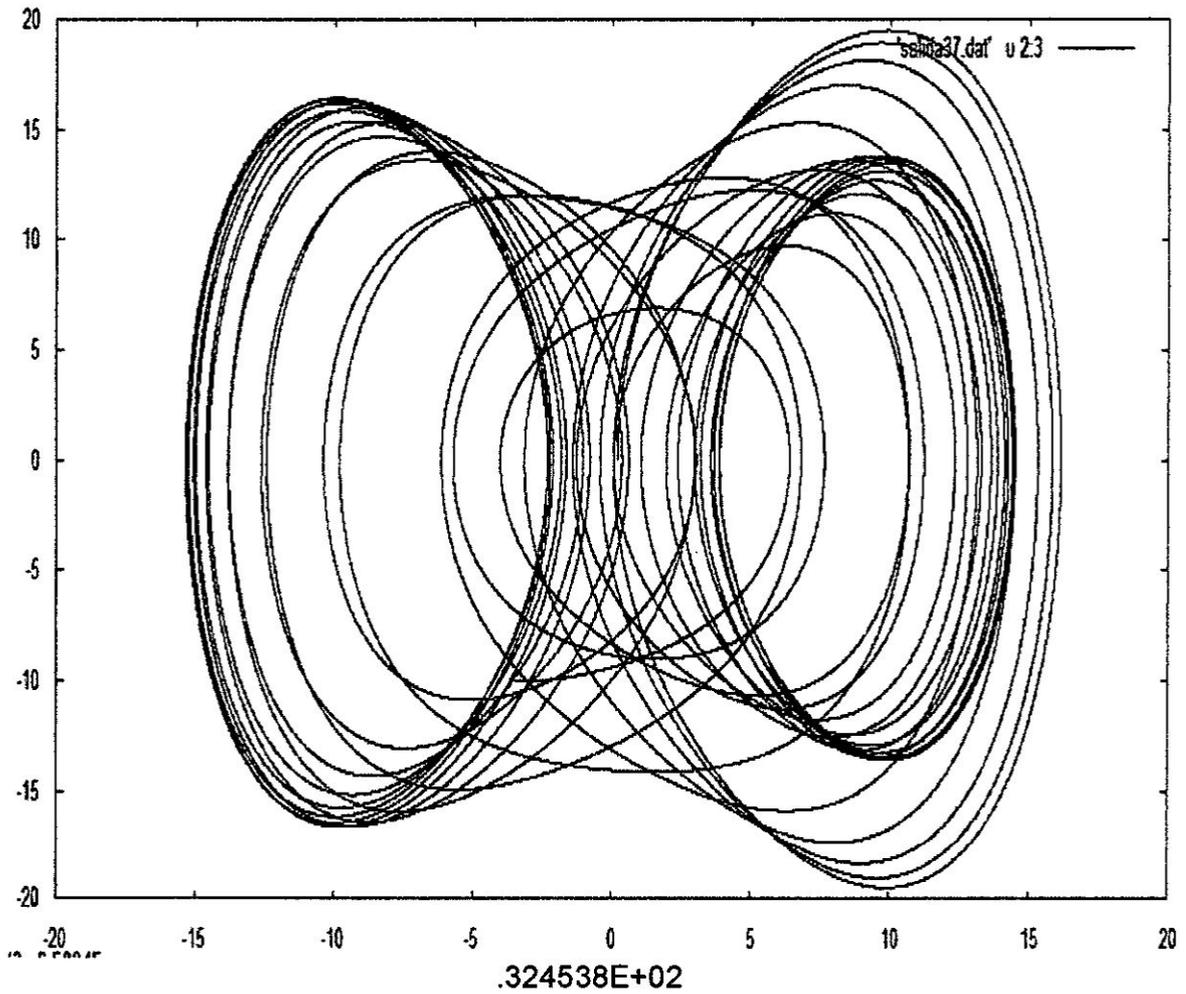
GRAFICA N° 6.1
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,01 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO -
0.215798E+01



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.2

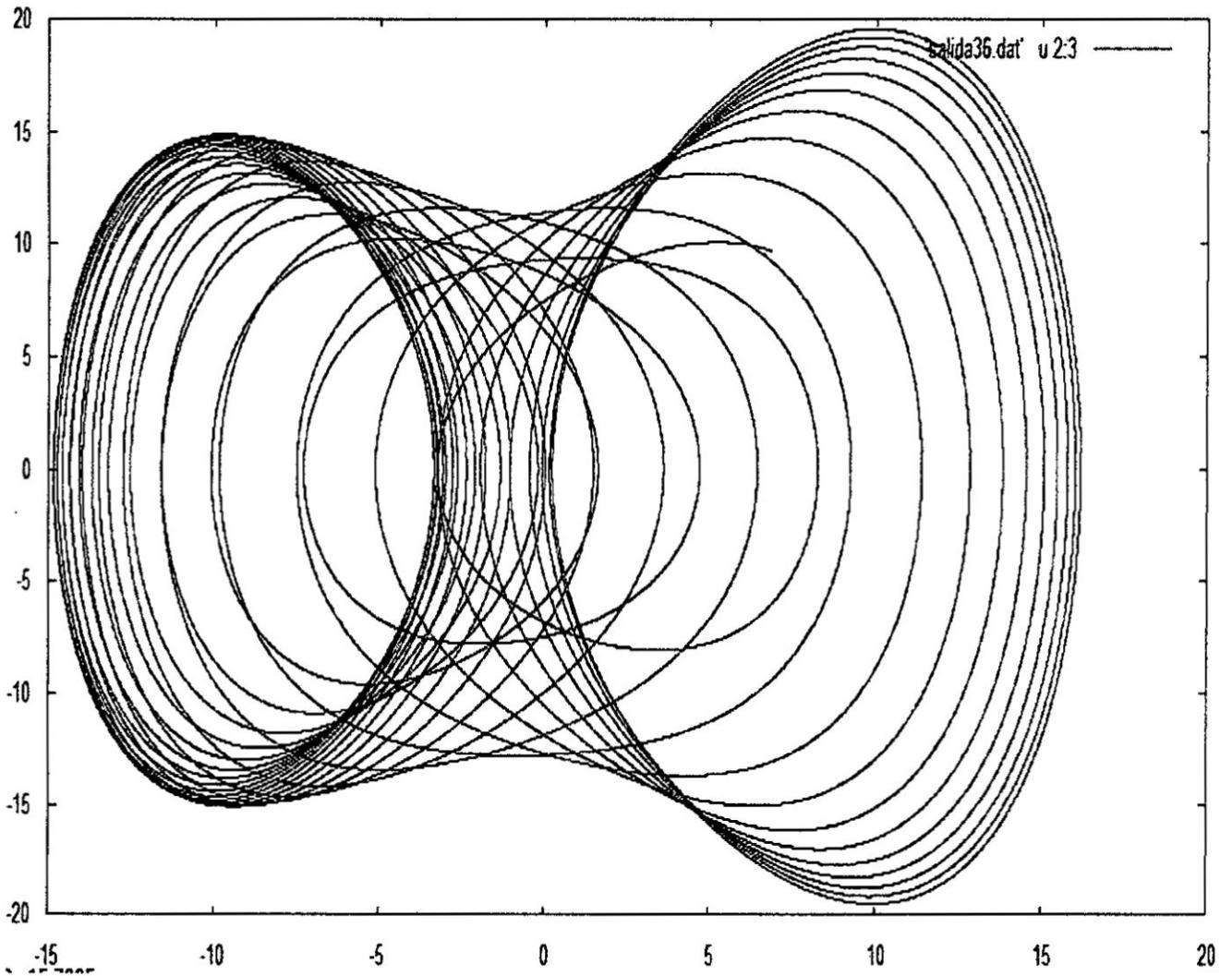
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO, FRECUENCIA 0,05 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO -



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.3

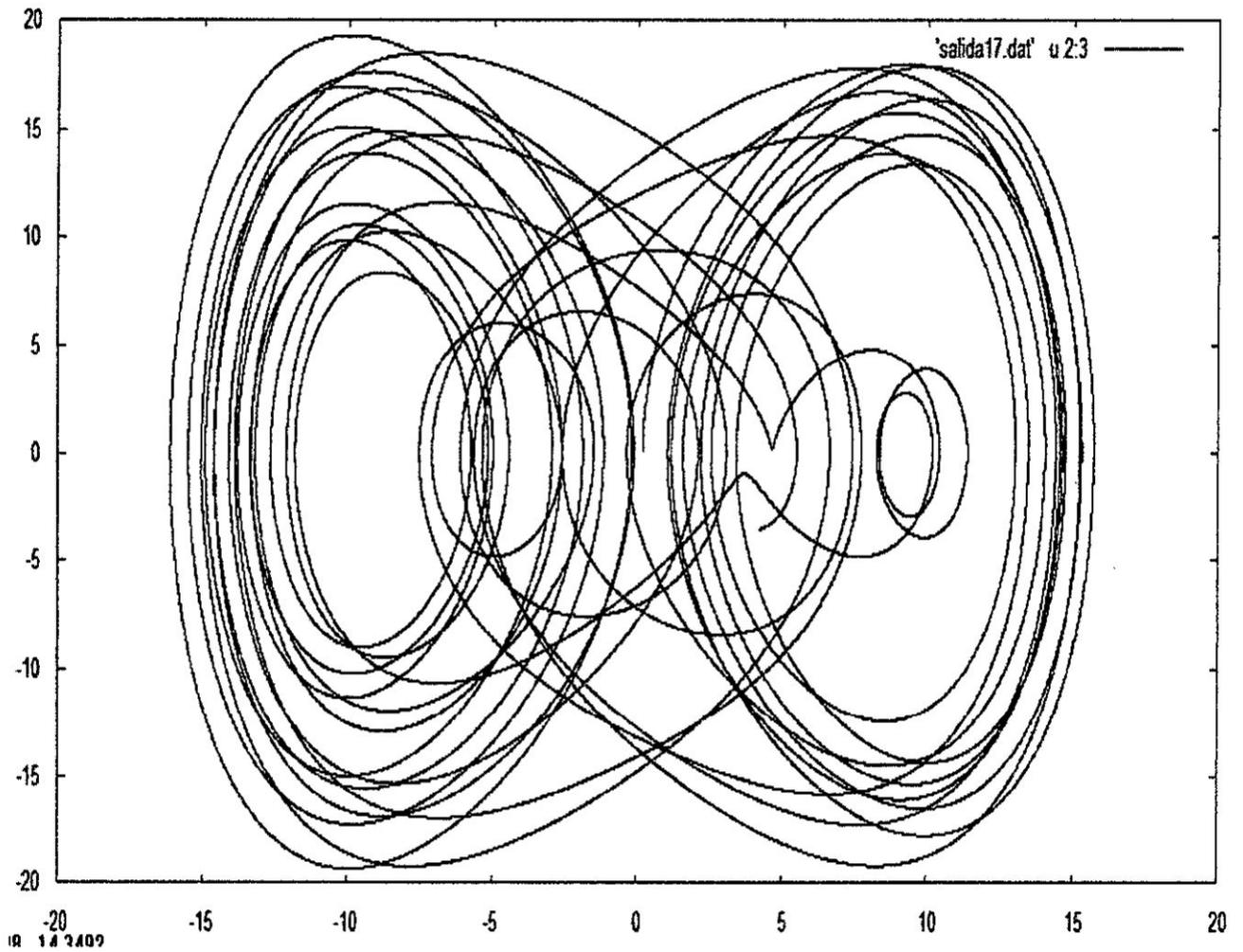
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO, FRECUENCIA 0,08 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.4

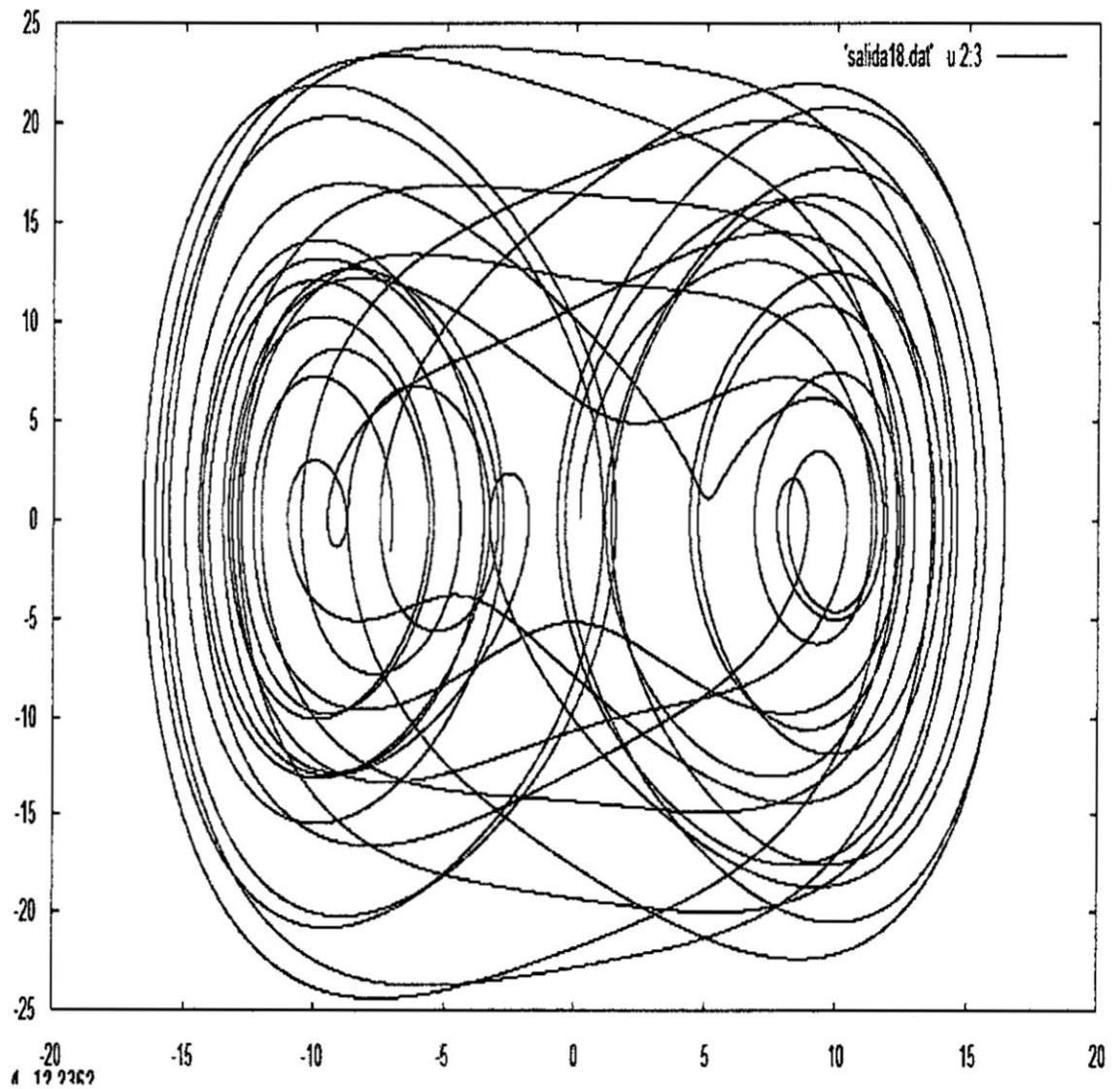
ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,1 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
.520101E-03



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.5

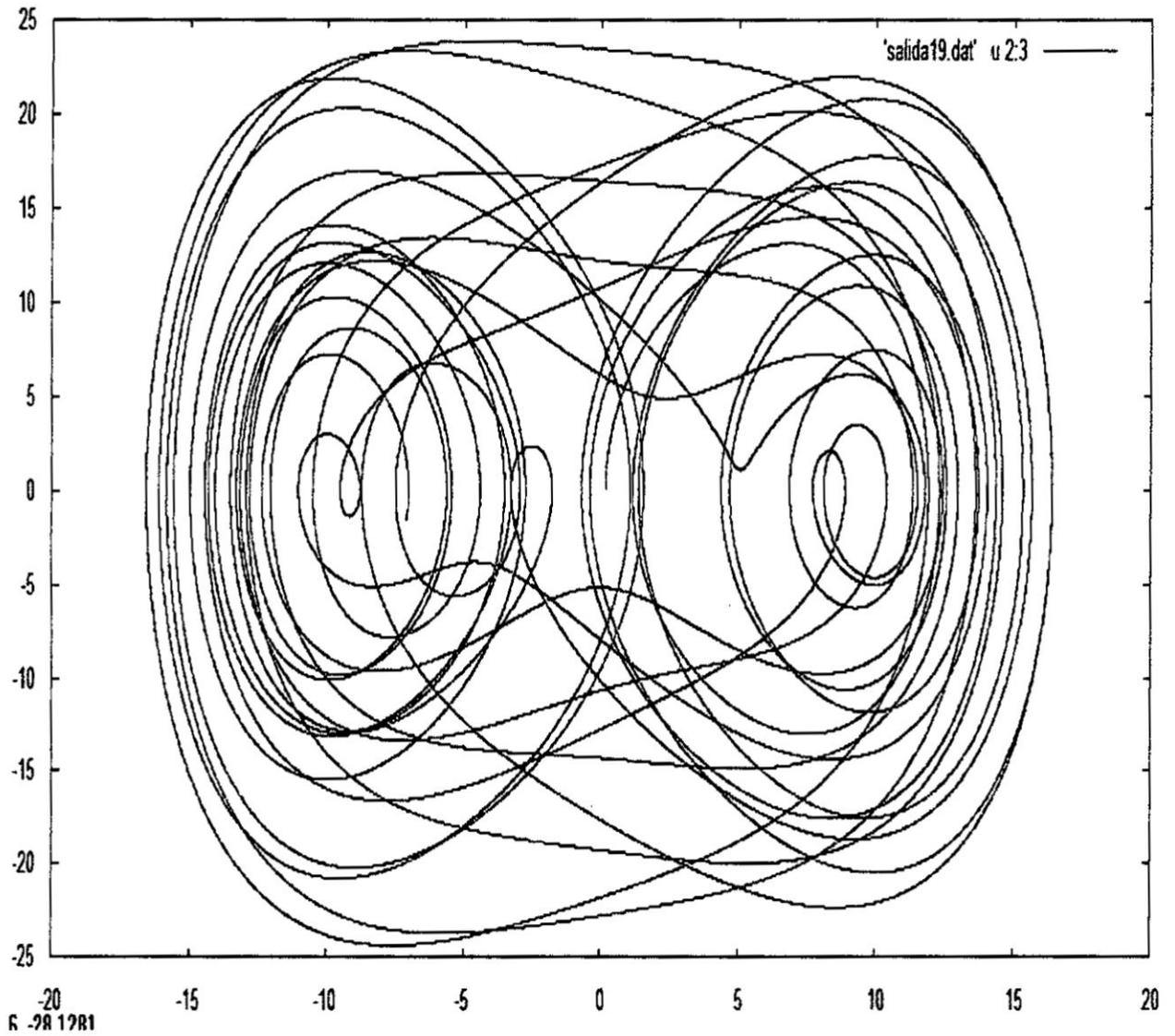
ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,3 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
0.315798E+01



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.6

ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,6 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
0.215798E+01 .



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

VII. DISCUSIÓN

El espacio de fase del Sistema no Lineal Oscilatorio Amortiguado y Forzado que observa de las figuras 6.1,6.2,6.3 muestran una dinámica desordenada, las líneas se cruzan varias veces , la dinámica se realiza alrededor de dos centros de oscilación, que se les llama atractores, las frecuencias relativas corresponde a $\Omega=0.1, 0.3, 0.6$ respectivamente.

El comportamiento observado aquí del oscilador no lineal, también lo podemos observar en el Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado de un péndulo donde la forma de la ecuación dinámica se aproxima al sistema usado en nuestro trabajo de investigación.

Los exponentes de Lyapunov determinados para esos tres casos resultaron teniendo con valores positivos, resultado que está en la dirección de demostrar de la hipótesis de este trabajo de investigación, que los exponentes de Lyapunov son también indicadores del estado de Caos del Sistema no Lineal Oscilatorio Amortiguado y Forzado.

Los resultados obtenidos en este trabajo va en la misma dirección con otros trabajos de investigación, donde usan también al exponente de Lyapunov como indicador, pero para otros sistemas no lineales (Cabanas A.,Laroze D.,2014).

```

SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
REAL x,y(*),dydx(*),A,C,E,D

      A=0.01
      C=0.02
      D=30.0
      E=0.08
      dydx(1)=y(2)
!   dydx(2)=-((w1**2)*y(1))
          dydx(2)=-A*y(2)-y(1)-C*((y(1))**3)+D*cos(E*x)

!   dydx(3)=y(4)
!   dydx(4)=-((w2**2)*y(3))
      return
      END

!   rk4dumb.for
SUBROUTINE rk4dumb(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=100000)
REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
EXTERNAL derivs
COMMON /path/ xx,y
!CU  USES rk4
      INTEGER i,k
      REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
      do 11 i=1,nvar
          v(i)=vstart(i)
          y(i,1)=v(i)
11  continue
      xx(1)=x1

```

```

x=x1
h=(x2-x1)/nstep
do 13 k=1,nstep
  call derivs(x,v,dv)
  call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
  if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rk4dumb'
  x=x+h
  xx(k+1)=x
  do 12 i=1,nvar
    y(i,k+1)=v(i)
12  continue
13  continue
  return
  END
! rk4.for
  SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
  INTEGER n,NMAX
  REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
  EXTERNAL derivs
  PARAMETER (NMAX=50)
  INTEGER i
  REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dym(NMAX),yt(NMAX)
  hh=h*0.5
  h6=h/6.
  xh=x+hh
  do 11 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11  continue
  call derivs(xh,yt,dym)
  do 12 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dym(i)

```

```

12  continue
    call derivs(xh,yt,dym)
    do 13 i=1,n
        yt(i)=y(i)+h*dym(i)
        dym(i)=dym(i)+dym(i)
13  continue
    call derivs(x+h,yt,dyt)
    do 14 i=1,n
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dym(i)+2.*dym(i))
14  continue
    return
    END

```

9.2.PROGRAMA DE EXPONENTES DE LYAPUNOV ADAPTADO DE (WOLF A. 1985)

```

program ode
nn=n*(n+1)=
nn1=nn+1
parameter (n=3, nn=12, nn1=13)
implicit double precision(a-h,o-z)
external fcn
dimension y(nn1),yprime(nn1),v(nn1),A(nn1),B(nn1),C(nn1)
dimension D(nn1),cum(n),znorm(n),gsc(n)
open(1,file="Lout.txt")
111 format(1x,'nstep, stpsze, irate, io : ')
read(*,*) nstep,stpsze,irate,io
write(1,*) nstep,stpsze,irate,io
write(1,*)
v(1)=10.0
v(2)=1.0
v(3)=1.0

```

```

tme=0.0
do 10 i=n+1,nn
v(i)=0.0
10 continue
do 20 i=1,n
v((n+1)*i)=1.0
cum(i)=0.0
20 continue
do 100 m=1,nstep
if ((m/100)*100.EQ.m) write(*,*)m
do 25 j=1,irate
do 26 i=1,nn
y(i)=v(i)
26 continue
t=tme
call fcn(t, y, yprime)
do 27 i=1,nn
A(i)=yprime(i)
27 continue
do 28 i=1,nn
y(i)=v(i)+(stpsze*A(i))/2.0
28 continue
t=tme+stpsze/2.0
call fcn(t, y, yprime)
do 29 i=1,nn
B(i)=yprime(i)
29 continue
do 30 i=1,nn
y(i)=v(i)+(stpsze*B(i))/2.0
30 continue
t=tme+stpsze/2.0

```

```

    call fcn(t, y, yprime)
    do 31 i=1,nn
    C(i)=yprime(i)
31  continue
    do 32 i=1,nn
    y(i)=v(i)+(stpsze*C(i))
32  continue
    t=tme+stpsze
    call fcn(t, y, yprime)
    do 33 i=1,nn
    D(i)=yprime(i)
33  continue
    do 34 i=1,nn
    v(i)=v(i)+stpsze*(A(i)+D(i)+2.0*(B(i)+C(i)))/6.0
34  continue
    tme=tme+stpsze
25  continue
    znorm(1)=0.0
    do 38 j=1,n
    znorm(1)=znorm(1)+v(n*j+1)**2
38  continue
    znorm(1)=sqrt(znorm(1))
    do 40 j=1,n
    v(n*j+1)=v(n*j+1)/znorm(1)
40  continue
    do 80 j=2,n
    do 50 k=1,j-1
    gsc(k)=0.0
    do 50 l=1,n
    gsc(k)=gsc(k)+v(n*l+j)*v(n*l+k)
50  continue

```

```

do 60 k=1,n
do 60 l=1,j-1
v(n*k+j)=v(n*k+j)-gsc(l)*v(n*k+l)
60 continue
znorm(j)=0.0
do 70 k=1,n
znorm(j)=znorm(j)+v(n*k+j)**2
70 continue
znorm(j)=sqrt(znorm(j))
do 80 k=1,n
v(n*k+j)=v(n*k+j)/znorm(j)
80 continue
do 90 k=1,n
cum(k)=cum(k)+dlog(znorm(k))/alog(2.0)
90 continue
if(mod(m,io).ne.0) goto 100
write(1,334) tme,(cum(k)/tme,k=1,n)
334 format(1x,f12.6,2x,e12.6,2x,e12.6,2x,e12.6)
100 continue
end

```

```

subroutine fcn(t,y,yprime)
b=4.0
sg=16.0
r=45.92
yprime(1)=sg*(y(2)-y(1))
yprime(2)=-y(1)*y(3)+r*y(1)-y(2)
yprime(3)=y(1)*y(2)-b*y(3)
do 10 i=0,2
yprime(4+i)=sg*(y(7+i)-y(4+i))
yprime(7+i)=(r-y(3))*y(4+i)-y(7+i)-y(1)*y(10+i)

```

```
yprime(10+i)=y(2)*y(4+i)+y(1)*y(7+i)-b*y(10+i)
```

```
10 continue
```

```
return
```

```
end
```

X. ANEXOS

Matriz de Consistencia

| FORMULACIÓN DEL PROBLEMA | | OBJETIVOS | HIPOTESIS | VARIABLES | INDICADORES | METODOLOGIA |
|--------------------------|---|--|---|--|---|---|
| General | ¿Es posible determinar el Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov? | Determinación del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov. | Los Exponentes de Lyapunov determinan el estado dinámico del Caos en un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | | | |
| Específica | ¿Cuál es la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov en la determinación del estado dinámico del Caos de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado? | Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | La técnica numérica basada en la ortonormalización de Gram-Schmidt local permite determinar los Exponentes de Lyapunov en un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | Independiente: Exponentes de Lyapunov | Cálculos numéricos iguales o mayores a cero de los exponentes de Lyapunov | Esta investigación es de tipo: aplicada. Con un diseño de ejecución transversal. El Sistema de análisis es el Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado; a este Oscilador no Lineal se formulará el Lagrangiano del sistema y luego la ecuación dinámica de Lagrange, con ello implementaremos un programa basado La técnica numérica basada en la ortonormalización de Gram-Schmidt local. |
| | ¿Es posible determinar un modelo físico para estudiar el Caos en la dinámica de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado? | Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov en un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia. | El modelo físico Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado permite estudiar la teoría del Caos con los Exponentes de Lyapunov. | Dependiente: Estado dinámico del Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | Comportamiento Caótico de la variable dinámica. | |

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
NATURALES Y MATEMÁTICA



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ENE 2018

“CAOS EN LA DINÁMICA DE UN OSCILADOR NO LINEAL
AMORTIGUADO Y FORZADO”

AUTOR: Lic. CARLOS ALBERTO LÉVANO HUAMACCTO

(Periodo de Ejecución: De 01 de enero del 2017 al 12 de Diciembre del 2017)

(Resolución de aprobación N°110-2017R)

Callao, 2017

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| I.ÍNDICE | 1 |
| 1.1.Índice de tablas | 3 |
| 1.2.Índice de figuras | 4 |
| 1.3.Índice de graficas | 5 |
| II.RESUMEN Y ABSTRACT | |
| 2.1. Resumen | 6 |
| 2.2. Abstract | 7 |
| III. INTRODUCCIÓN | |
| 3.1. Exposición del problema de investigación | 8 |
| 3.2. Importancia y justificación de la investigación | 10 |
| IV. MARCO TEÓRICO | |
| 4.1. Antecedentes o estudios previos | 12 |
| 4.2. Bases teóricas | |
| 4.2.1.La Teoría del Caos | 12 |
| 4.2.2. Indicadores del Caos | 14 |
| a) Sección de Poincaré | 15 |
| b) Espectros de Potencia | 15 |
| c) Exponentes de Lyapunov | 16 |
| 4.3. Ecuación de Duffing | 19 |
| 4.4. Marco conceptual | 28 |
| a) Caos | 28 |
| b) Mecánica no lineal y Caos | 28 |
| c)Linealidad y no linealidad | 29 |
| V. MATERIALES Y MÉTODOS | |
| 5.1. Materiales | 30 |
| 5.1.1. De ejecución | 30 |
| 5.1.2. De impresión | 30 |
| 5.2. La población de la investigación y la muestra | 31 |

| | |
|--|-----------|
| 5.3. Las Técnicas de análisis o los medios estadísticos | 31 |
| 5.4. Las técnicas de análisis o los métodos estadísticos aplicados | 31 |
| 5.5. Metodología | 31 |
| VI. RESULTADOS | 34 |
| VII. DISCUSIÓN | 41 |
| VIII. REFERENCIALES | 42 |
| IX. APÉNDICES | 43 |
| X. ANEXOS | 51 |
| Matriz de Consistencia | |

TABLA DE CONTENIDO

| | | |
|-------------|--|--------|
| Tabla N°6.1 | Valores para los diferentes parámetros del Sistema no Lineal Amortiguado y Forzado | Pag.34 |
|-------------|--|--------|

f

TABLA DE FIGURAS

| | | |
|------------|--|--------|
| Figura 4.1 | Superficie de la Sección de Poincare | Pag.15 |
| Figura 4.2 | Espectro de potencia | Pag.16 |
| Figura 4.3 | Oscilador Forzado lineal y espacio fase | Pag.20 |
| Figura 4.4 | Oscilador Forzado No lineal y espacio fase | Pag.20 |
| Figura 4.5 | Sistema No Lineal Físico | Pag.22 |
| Figura 4.6 | Sistema No Lineal Físico moviendo | Pag.22 |
| Figura 4.7 | Sistema No Lineal Físico desplazado | Pag.31 |

TABLA DE GRÁFICAS

| | | |
|-------------|--|--------|
| Grafica 6.1 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.01 | Pag.35 |
| Grafica 6.2 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.05 | Pag.36 |
| Grafica 6.3 | Espacio de fase sin Caos frecuencia 0.08 | Pag.37 |
| Grafica 6.4 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.1 | Pag.38 |
| Grafica 6.5 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.3 | Pag.39 |
| Grafica 6.6 | Espacio de fase con Caos frecuencia 0.6 | Pag.40 |

RESUMEN

En este trabajo de investigación determinamos el estado de Caos de un sistema físico Oscilador no lineal amortiguado y forzado con una fuerza externa de tipo senoidal a través del indicador llamado exponentes de Lyapunov; para caracterizar la dinámica del Oscilador no lineal determinamos primero el espacio de fase donde se observa si presenta comportamiento desordenado para una frecuencia relativa determinada, luego calculamos su correspondiente exponente de Lyapunov a través de un programa desarrollado por Wolf et al. Se obtuvieron valores del exponentes de Lyapunov positivos para dinámicas desordenadas del Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado y, valores del exponente de Lyapunov negativos para dinámicas ordenadas del Oscilador corroborando la hipótesis de este trabajo de investigación.



ABSTRACT

We determine the state of Chaos of a non-linear oscillator damped and forced physical system with an external force of type sinusoidal through the indicator called exponents of Lyapunov; characterize the dynamics of the non-linear oscillator, first determine the phase space where it is observed if it presents disordered behavior for a given relative frequency, then we calculate its corresponding exponent of Lyapunov through a program developed by Wolf et al. Positive values of the Lyapunov exponents were obtained for disordered dynamics of the Negligible and Forced Non-linear Oscillator and, negative Lyapunov exponent values for ordered dynamics of the Oscillator corroborating the hypothesis of this research work.



III. INTRODUCCIÓN

3.1. La exposición del problema de investigación

Con el avance de la Ciencia se sabe que son más sistemas no lineales que los sistemas lineales que se puede encontrar en la naturaleza ,y cuando se estudian los primeros, se analiza su dinámica en aproximación lineal, o sea las variables contenidas en la ecuación diferencial o de movimiento son de primer orden, en esa aproximación la ecuación de movimiento del sistema mencionado logra cumplir con el principio de superposición, importante principio de las ecuaciones lineales; sin embargo, la aproximación lineal lleva a una descripción de la dinámica de los sistemas mencionados restringida, como en el caso del sistema oscilatorio periódico llamado Péndulo Físico, que se le estudia generalmente para ángulos pequeños, menos de cinco grados a pesar que este muestra movimiento en la práctica para ángulos mayores(Taylor, 2013).

En las últimas décadas se ha asociado el comportamiento desordenado que presenta la dinámica de los sistemas no lineales con el problema llamado Caos, caracterizado por una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales de las ecuaciones no lineales; se sabe de los sistemas no lineales que su dinámica puede mostrar comportamiento ordenado como comportamiento desordenado y, las condiciones para que se dé el segundo caso es materia de estudio en este trabajo de investigación.

Los Sistemas Oscilatorios lineales periódicos han sido ampliamente estudiados experimental y teóricamente en la física y sirven de modelos para estudiar las interacciones entre sistemas, en las últimas décadas los Sistemas amortiguados y forzados son usados como modelos con frecuencia ; sin embargo, el interés por conocer más sobre los Sistemas no Lineales Amortiguado y Forzado , y en especial saber las condiciones cuando muestran comportamiento desordenado o Caos es lo que se busca(Douglas G., 2006).

Es importante determinar cuándo un sistema presenta comportamiento de Caos porque permite conocer esos comportamientos indeseables de los sistemas y, de los sistemas físicos que sirven de modelo.

El problema identificado es la determinación del estado de Caos en los Sistemas no Lineales que muestran comportamiento desordenado. Se plantea la determinación del estado del Caos usando los Exponentes de Lyapunov, propuesto por el ruso matemático del mismo nombre que propone que el cambio en la dinámica se puede medir a través de la divergencia de las variables dinámicas, que es cuantificada por unos parámetros llamados Exponentes de Lyapunov (Wolf A., 1984).

La formulación y planteamiento del Problema son:

a) Problema General

Problema general que se propuso en este trabajo de investigación es el siguiente,

¿Es posible determinar el Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov?

b) Problemas Específicos:

- ¿Cuál es la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov en la determinación del estado dinámico del Caos de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado?
- ¿Es posible determinar un modelo físico para estudiar el Caos en la dinámica de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado?

c) Objetivo General y Alcances de la investigación

-Objetivo General

Los objetivos planteados en el presente trabajo fueron:

- Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado.
- Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia.

-Objetivos Específicos

- Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado.
- Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia.

3.2. Importancia y la Justificación de la Investigación

Sabemos que el estudio de los Sistemas Físicos no Lineales se ha incrementado y el problema de Caos se observa en varios sistemas, no solamente encontramos Sistemas no lineales en Física sino también en otras áreas como Química, Biología, Economía, Medicina, Ingeniería y por ello se dice que el Caos es ubicuo. Los trabajos de modelamiento que realizamos, los físicos, son interdisciplinarios y por ello surge la necesidad de estudiar y comprender las herramientas para afrontar el fenómeno del Caos. En ese sentido es importante que los modelos no lineales, en especial los mecánicos, que proponemos para estudiar otros fenómenos de la naturaleza debe ser bien estudiado, saber cuándo pueden funcionar en estado de Caos

controlando los parámetros propios del sistema para saber las condiciones que llevan al Caos.

- La investigación que deseamos realizar corresponde a un valor teórico-práctico, desde el punto de vista de una Investigación Básica, y constituirá un aporte importante dentro de la física computacional, la cual, es una de las líneas de especialización de Física.

IV. MARCO TEÓRICO

4.1. Antecedentes o Estudios Previos

Zhang e Harne (2016) propone el estudio del Oscilador con efecto débilmente no lineal, llamado Oscilador de Duffin, muestra que este Oscilador presenta comportamiento de Caos para determinados parámetros.

Cabana e Laroze (2015) muestra el análisis de las ecuaciones de Landau-Lifshitz o Landau-Lifshitz-Gilbert, que describe la dinámica de una partícula en un campo magnético oscilante, se analiza la dinámica haciendo variar parámetros del Sistema y se estudia el Caos en su espacio de fase.

Mouronte M (2004), muestra él estudia el Caos del sistema, a través del espacio de fase donde las bifurcaciones que son desdoblamiento de la dinámica de, es una forma cualitativa de describir el Caos en la dinámica de un sistema.

Kapitaniak T. (1994), muestra que estudio del comportamiento de los sistemas cuasi periódicos forzados a través de los Atractores, que son regiones en el espacio de fase o configuración hacia donde tiende la dinámica, es una forma de estudio de los sistemas cuasi periódicos.

La revisión bibliográfica realizada muestra que en los trabajos no usan los exponentes de Lyapunov específicamente para el estudio del estado el Caos de un sistema de un Oscilador Amortiguado y Forzado. El antecedente descrito ha motivado a desarrollar la presente investigación como una contribución dirigida a dotar de los instrumentos necesarios de consulta, actualización y orientación básica para aquellos que tienen interés de esta especialización dentro de la Física no Lineal.

4.2. Bases Teóricas

4.2.1. La Teoría del Caos

Usualmente en física aprendimos que las leyes son descritas por ecuaciones de movimiento (ecuaciones diferenciales), como por ejemplo la ley de Newton entre otros, y la solución analítica o numérica de estas ecuaciones se hacen teniendo las condiciones iniciales y de contorno; podemos conocer como es su dinámica en el tiempo, esto es el punto de vista determinista, entonces, sistemas físicos conservativos o disipativos son deterministas porque ellos obedecen ecuaciones diferenciales deterministas (Taylor J., 2013).

La teoría de Caos, es una teoría que estudia el comportamiento desordenado de los sistemas no lineales, como los físicos, a los que se conoce su ecuación dinámica resultado de la aplicación de una ley o principio, en el caso de la Mecánica por ejemplo las Leyes de Newton; por ello se dice también Caos determinista, los sistemas no lineales en régimen perturbativos usualmente exhiben comportamiento complicado llamado Caos (José J. e Saletan E., 1998).

Si los estados iniciales de sistemas deterministas son exactamente conocidos, futuros estados dinámicos son predichos teóricamente; esta visión determinista sobrevivió para ser cuestionada después de las famosas obras visionarias de Henri Poincaré sobre la mecánica celeste realizadas a finales del siglo XIX que eran contrario al determinismo (Rañada A., 1990).

Poincaré proponía que supiéramos exactamente la ley de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, se podría predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento sucesivo, pero incluso si fuera el caso de que las leyes naturales ya no tuvieran ningún secreto para nosotros, pero no es así en los resultados numéricos que nos describen que

sólo podríamos conocer la situación inicial aproximadamente. Si nos permitiera predecir la situación siguiente con la misma aproximación, eso es todo lo que necesitamos, de esta manera, las mediciones efectuadas sobre el estado de un sistema en un momento dado pueden no permitirnos predecir la situación futura incluso moderadamente lejos, a pesar de que las ecuaciones de gobierno son exactamente conocidas (Douglas R., 2006).

No ocurrió hasta los años 70, después de casi un siglo de investigaciones, aprendieron que los sistemas caóticos sólo pueden resolverse numéricamente, y no hay formas sencillas y generales de predecir cuándo un sistema exhibirá caos. También hemos aprendido que el caos determinista está siempre asociado con sistemas no lineales, la no linealidad es una condición necesaria para el caos, pero no una suficiente (José J. e Saletan E., 1998).

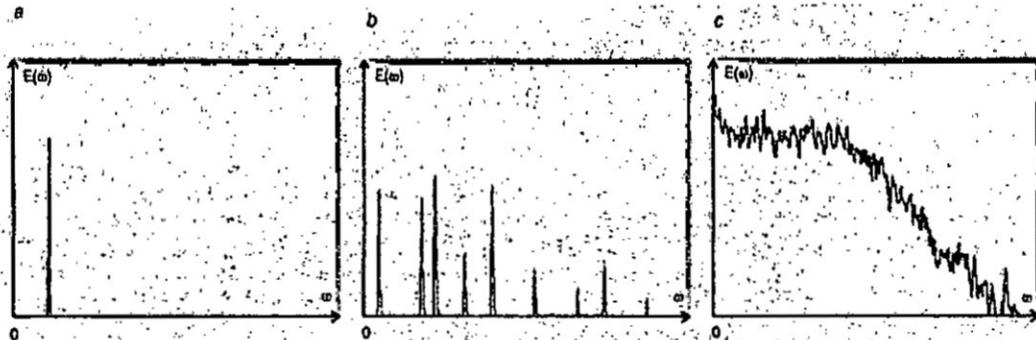
Sólo en los últimos años, con el advenimiento de las computadoras que se permitió estudiar el caos ya que ahora es posible realizar cálculos numéricos de la evolución temporal de las propiedades de los sistemas sensibles a las condiciones iniciales, comenzamos a comprender la existencia del caos cuando las computadoras estaban fácilmente disponibles para calcular las historias de largo tiempo necesarias para explicar el comportamiento discutido, el modelo determinístico siempre producirá la misma salida de una condición inicial o estado inicial determinado (Douglas R., 2006).

4.2.2. Indicadores del Caos

La teoría del caos, es una teoría que trata sobre el fenómeno del comportamiento desordenado que los sistemas físicos no lineales presentan, en especial, muestran una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales; la no linealidad de las ecuaciones (deterministas) hacen que no se puedan resolver analíticamente porque no cumplen con el principio de superposición, es por ello que en esta teoría se han desarrollado indicadores del Caos para

periódico dos o más pico, pero siempre discretos la transformada de Fourier; sin embargo, cuando un sistema físico está en estado de caos debe mostrar una transformada de Fourier continua, para ello se tiene que hacer variar todos los parámetros y variables del sistema y no siempre se puede determinar el límite a partir del cual el sistema presenta caos (Rañada A.,1990)

FIGURA N° 4.2
ESPECTRO DE POTENCIA DE UN SISTEMA PERIÓDICO, CUASI
PERIÓDICO Y EN CAOS



Fuente: Rañada, Dinámica Clásica, 1989

c) Exponentes de Lyapunov

Los términos no lineales de las ecuaciones diferenciales amplifican exponencialmente pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, de esta manera, las leyes de evolución deterministas crean comportamientos caóticos, incluso en ausencia de nuevas fluctuaciones internas, en el régimen caótico no es posible predecir exactamente la evolución del estado del sistema durante un tiempo arbitrariamente, esta es la característica impredecible del caos.

La evolución temporal se rige por un espectro continuo de frecuencias responsables de un comportamiento aperiódico, para este movimiento se presentan patrones estacionarios, es decir, patrones que se repiten de forma no periódica. Lyapunov creó un método conocido como exponente característico de Lyapunov para cuantificar la sensible dependencia de las condiciones iniciales del comportamiento caótico, la estabilidad de los sistemas dinámicos; con este método es posible determinar los requisitos mínimos de las ecuaciones diferenciales que son necesarias para crear el caos. Estudiemos el caso de sistemas con una sola variable que asumen dos estados iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$, difiriendo por una pequeña cantidad ε (Rañada A., 1990)

Queremos investigar los posibles valores de x_n después de n iteraciones de los dos valores iniciales, la diferencia d_n entre los dos valores x_n después de n iteraciones (omitiendo por simplicidad el subíndice) se da aproximadamente.

$$d_n = f(x_n + \varepsilon) - f(x_n) = \varepsilon e^{n\lambda} \quad (1)$$

Donde, λ , es el exponente de Lyapunov que representa el coeficiente del crecimiento exponencial promedio por unidad de tiempo entre los dos estados. De lo que vemos, si λ es negativo, las dos orbitas eventualmente convergerán, pero si es positivo las trayectorias próximas divergen. La diferencia entre los dos estados iniciales se escribe como

$$d_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \approx \varepsilon \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} \quad (2)$$

Ahora, para evitar la confusión que a veces se encuentra en la literatura caótica, recordamos que,

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = f(f(f(x_{n-2}))) = \dots = f(f(\dots(f(x_0)))) \quad (3)$$

Donde el superíndice n indica la n -ésima iteración del mapa. Después de un gran número de iteraciones, la diferencia entre los estados cercanos es,

$$d_n = f(x_n + \varepsilon) - f(x_n) = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon e^{n\lambda} \quad (4)$$

Dividiendo la ecuación por ε y tomando el logaritmo a ambos lados, obtenemos

$$\ln \left\{ \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right\} = \ln[e^{n\lambda}] = n\lambda \quad (5)$$

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| df^n \frac{x_0}{dx_0} \right| \quad (6)$$

Donde,

$$df^n \frac{x_0}{dx_0} = \left\{ \frac{df^n(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \right\} \left\{ \frac{df^{n-1}(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \right\} \dots \left\{ \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right\} \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 6 para calcular el exponente de Lyapunov, que puede tener valores positivo o negativo, el valor positivo significa que el sistema presenta comportamiento caótico.

$$\lambda(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \ln \left| \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{dx_0} \right| \quad (8)$$

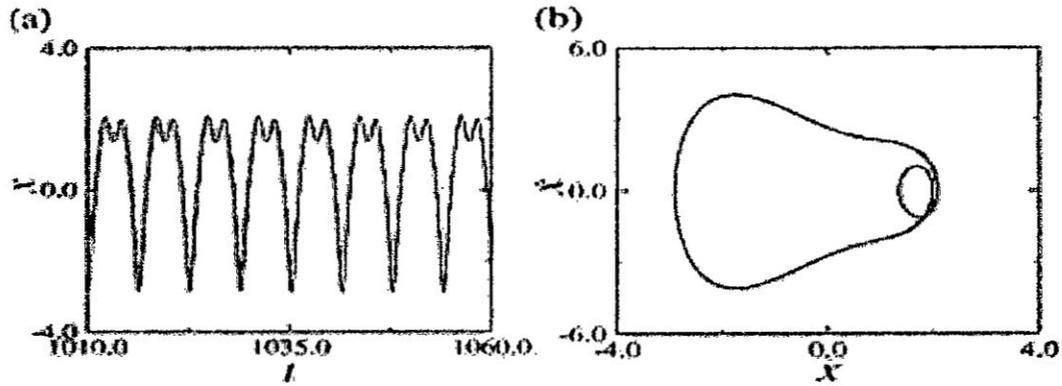
4.3. Ecuación de Duffing

Un caso ilustrativo disipativo es el movimiento de una partícula con masa m sometida a un potencial y a una fuerza disipativa es proporcional a, $\beta \frac{dx}{dt}$ respectivamente; se considera débilmente no lineal cuando, $\delta \ll 1$.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} - x + \delta x^3 = F \cos(\omega t) \quad (9)$$

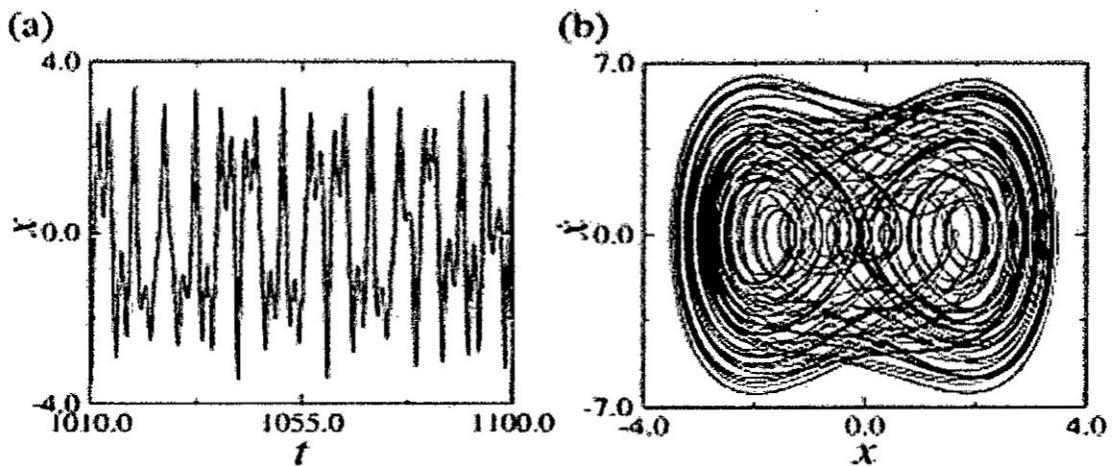
Donde β , δ , ω son parámetros.

FÍGURA N° 4.3
 OSCILADOR AMORTIGUADO FORZADO LINEAL Y SU ESPACIO DE FASE



Fuente: Mouronte M., Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales Mediante el Estudio del Mapa de frecuencias y Espacio de fases, 2004

FIGURA N° 4.4
 OSCILADOR AMORTIGUADO FORZADO NO LINEAL EN CAOS Y SU
 ESPACIO DE FASE



Fuente: Mouronte M., Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales Mediante el Estudio del Mapa de frecuencias y Espacio de fases, 2004

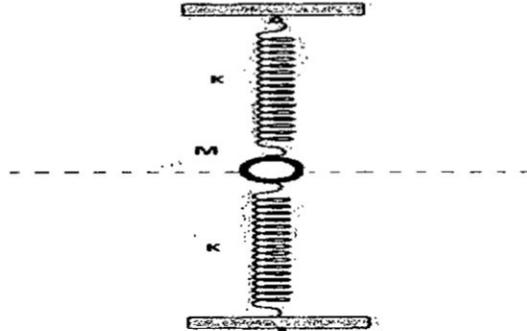
La Dinámica está compuesta por dos campos de estudio, la Dinámica Lineal y la Dinámica no Lineal, esta última trata del comportamiento desordenado dinámico de los Sistemas no Lineales, es aquí donde los sistemas presentan el Caos, a mejor dicho el Caos determinista, porque cuentan con ecuaciones dinámicas con fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que una pequeña variación en las condiciones iniciales puede alterar significativamente el comportamiento dinámico del sistema convirtiendo los valores que va a tomar en el tiempo (Saletan & José, 1998).

Otros sistemas también se puede llegar a la forma del Oscilador de Duffing, si consideramos un cuerpo de masa M , al cual le llamaremos la partícula (sin rotar), suspendido entre dos muelles iguales, tal como se muestra en la figura 5. Si ambos muelles están sin de deformar (o sea, sin tensión y, por tanto; sin energía potencial los dos lados) cuando la partícula se encuentre en su posición de equilibrio y, si despreciamos las fuerzas gravitatorias, cada uno de los muelles ejercerá una fuerza,

$$-k(s - l)$$

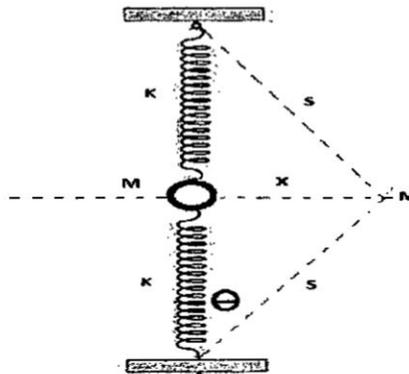
sobre la partícula (k es la constante de recuperación de cada muelle), l , es la longitud sin deformar del resorte. (Saletan & José, 1998).

FIGURA 4.5
SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTICULA DE MASA M



Fuente: Marión J. Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

FIGURA 4.6
SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTICULA DE
MASA M MOVIENDOSE LONIGITUDINALMENTE



Fuente: Marión J., Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

[Handwritten signature]

La fuerza que actúa sobre la partícula de masa ,M, es ,F, igual a,

$$F = -2\kappa(s - l)\text{sen}(\theta),$$

como

$$s = \sqrt{x^2 + l^2}$$

de forma que,

$$\text{sen}\theta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

Resulta la fuerza en función de la posición,

$$F = \frac{2\kappa x}{\sqrt{x^2 + l^2}} (\sqrt{x^2 + l^2} - l) = 2\kappa x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2}} \right) \quad (10)$$

Si suponemos que, $\frac{x}{l}$, es pequeño y desarrollamos en serie el radical,

tendremos(Marion J.,1981),

$$F = -\kappa l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \dots \right] \quad (11)$$



Y cuando despreciamos todos los términos, salvo el primero, será

$$F \simeq \left(\frac{k}{l^2}\right)x^3$$

Si alargamos inicialmente ambos muelles una distancia, d , para sujetar a ellos la masa, m , en posición de equilibrio, la fuerza será (Marion J., 1981),

$$F(x) \simeq -2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)x - [\kappa(l-d)/l^3]x^3$$

De donde podemos determinar la energía potencial considerando la expresión,

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$-2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)x - \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^3}\right]x^3 = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (12)$$

Obtenemos la energía potencial siguiente,

$$U(x) = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)\right)x^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa(l-d)}{l^3}\right]x^4. \quad (13)$$

Luego considerando que el sistema se mueve solamente en forma horizontal la energía cinética viene dado por , $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ y conjuntamente con la energía potencial , $U(x)$, podemos expresar el Lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\kappa d}{l}\right)\right)x^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\kappa(l-d)}{i^2}\right]x^4 \quad (14)$$

Cuando además están presente otras fuerzas, disipativas y no disipativas en Mecánica Clásica se usa la siguiente ecuación,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial a_j}\right) = Q_j^1 + Q_j^2 \quad (15)$$

Donde:

Q_j^1 , representa a las fuerzas disipativas,

Q_j^2 , representa las fuerzas que no son disipativas ni conservativas.

En nuestro caso usaremos consideraremos que nuestra partícula está sometida a una fuerza disipativa de la forma, $Q_j^1 = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)$ y una fuerza externa dependiente del tiempo, $Q_j^2 = F_0 \cos(\omega t)$ ambas en dirección horizontal.

Reemplazando el Lagrangiano en la ecuación dinámica y las fuerzas respectivas se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{\kappa d}{l} \right) x^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2} \right] x^4 \right) \right) = -b \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_0 \cos(\omega t)$$

(16)

desarrollando la expresión de la manera que se muestra para obtener una ecuación dinámica de un Sistema no Lineal Amortiguado y Forzado,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \left(\frac{\kappa d}{l} \right) x + \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2} \right] x^3 = -b \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_0 \cos(\omega t)$$

(17)

A la ecuación,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{M} \left(\frac{dx}{dt} \right) + 2 \left(\frac{\kappa d}{lM} \right) x + \left[\frac{\kappa(l-d)}{l^2 M} \right] x^3 = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t)$$

(18)

Se hacen las siguientes representaciones,

$$\frac{b}{M} = 2\beta, \quad 2\left(\frac{\kappa d}{iM}\right) = \omega_0^2, \quad \left[\frac{\kappa(i-d)}{i^2 M}\right] = \varepsilon,$$

nos permite expresar de la siguiente forma la ecuación dinámica,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \quad (19)$$

De donde observamos que $\varepsilon \ll 1$ es bien pequeño por lo tanto podemos afirmar que la ecuación dinámica corresponde a un Sistema débilmente no lineal Amortiguado y Forzado.

4.4. Marco conceptual

a) Caos

Es un fenómeno, que provoca la imposibilidad de realizar cualquier predicción fiable de su comportamiento a pesar de tener un carácter determinista, aun en ausencia de las perturbaciones externas al sistema, los temas de esta clase desarrollan un comportamiento caótico (Alemán R., 2010).

b) Mecánica no lineal y Caos

La mayoría de los sistemas cuyas ecuaciones de movimiento son no lineales pueden exhibir Caos. Este fenómeno que se manifiesta en muchos campos diferentes como los sistemas mecánicos oscilantes, reacciones químicas, flujo de fluidos, rayos láser, crecimiento de poblaciones, transmisión de enfermedades, y muchos otros, supone que aunque un sistema obedezca a ecuaciones deterministas de movimiento (leyes de Newton) su comportamiento detallado futuro puede, en la práctica, ser impredecible (Taylor, J., 2013).

El comportamiento de un sistema mecánico caótico puede ser muy complicado, y la necesidad de describir este comportamiento ha generado una enorme variedad de maneras nuevas de visualizar el movimiento de los sistemas como órbitas del espacio de estados, secciones de Poincaré, diagramas de bifurcación.

La teoría del Caos está dividida en dos amplias áreas de estudios, sistemas disipativos, tales como el péndulo amortiguado, y no disipativos, o sistemas Hamiltonianos (Taylor, J., 2013).

c) Linealidad y no linealidad

La ecuación diferencial es lineal si relaciona la variable o variables dependientes y sus derivadas sólo linealmente. El francés Poincare observo que la tierra, la luna y el sol, sus ecuaciones exhiben sensibilidad a las condiciones iniciales. Característica del movimiento caótico.

La no linealidad es esencial para el caos, pero la no linealidad no garantiza el caos además el sistema tiene que ser "complicado" como los sistemas disipativos, sus ecuaciones de movimiento cuando se ponen en su forma estándar autónoma deben ser no lineales y tener N variables con $N \geq 3$ (Taylor, J., 2013).



V. MATERIALES Y MÉTODOS

5.1. Materiales

5.1.1. De ejecución

- El trabajo de investigación pertenece a la investigación teórica, específicamente a la Física Computacional, por ello se usó ordenadores Core I-3 para hacer las simulaciones y cálculos, programas en fortran 90 para Runge Kutta de 4to orden (Press W., Teukolsky S., Vettering W., Flannery B., 1992) para estudiar el comportamiento de la dinámica del espacio de fase.
- Internet , para la búsqueda de información relacionado al trabajo de investigación.
- Fotocopias, de documentos que ayudan en el desarrollo del trabajo de investigación.
- Dispositivos de almacenamiento (CD, USB) , para guardar las corridas con el programa.

5.1.2. De la impresión

Para la parte final del trabajo de investigación se usó los siguientes materiales:

- Papel Bond en formato A-4
- Elementos de escritorio
- Tintas para impresión

5.2. La población y muestra

Como es un trabajo de investigación de Física Teórica no requiere de población y muestra.

5.3. Las técnicas, procedimientos e instrumentos de recolección de datos

No se usan técnicas estadísticas por tratarse de un trabajo de la Física Teórica.

5.4. Las Técnicas de análisis o métodos estadísticos aplicados

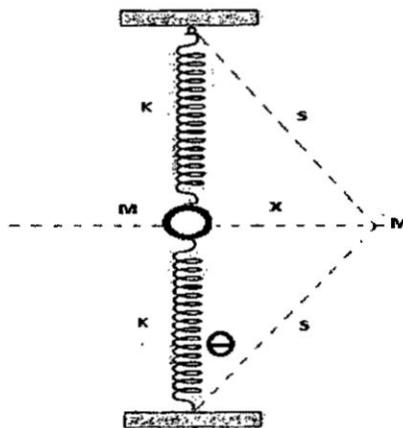
No aplica para este trabajo.

5.5. La Metodología

-En este trabajo se consideró el siguiente sistema, figura 4.7,

FIGURA 4.7

SISTEMA NO LINEAL COMPUESTO DE UNA PARTÍCULA DE MASA M y RESORTES ESTIRADO X



Fuente: Marión J., Dinámica Clásica de las partículas y Sistemas, 1981

-La recopilación de datos se hace a través de un programa mencionado líneas arriba de la ecuación de la dinámica del sistema,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \left(\frac{dx}{dt}\right) + w^2x + \delta x^3 = FCos(\omega t) \quad , \quad (20)$$

y el programa para obtener los exponentes de Lyapunov fue adaptado de (Wolf A., Swift J., Swinney H. and Vastano J., 1985).

Para ello a la ecuación última se convierte en un sistema dinámico de dos variables, donde la segunda ecuación contiene el término que contiene al tiempo, $FCos(\omega t)$,

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\beta \left(\frac{dx}{dt}\right) - w^2x - \delta x^3 + FCos(\omega t)$$

(21)

El Sistema, se hizo discreto y se lleva al programa de Runge Kutta de 4to orden con intervalo de tiempo 0,01s, para analizar si se observa comportamiento desordenado o Caos en el espacio de fase para con los parámetros de la tabla N° 6.1. Para esos valores se calculan los exponentes de Lyapunov máximo positivo, que mostró Caos.

Luego haciendo un cambio de variable:

Del tiempo, $\tau = \omega_0 t$,

de la sustitución de la frecuencia, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$. La ecuación adimensional

resulta,

$$\frac{\omega_0^2 d^2 x}{d\tau^2} + 2\beta\omega_0 \left(\frac{dx}{d\tau}\right) + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = \frac{F_0}{M} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) \quad (22)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{2\beta}{\omega_0} \left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} x^3 = \frac{F_0}{\omega_0^2 M} \cos(\Omega\tau) \quad (23)$$

-En el análisis se mantuvo constante las cantidades $\frac{2\beta}{\omega_0}$, $\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}$,

$\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$ y solamente se hace variar la frecuencia relativa Ω .

Se determinó los espacios de fases para las diferentes frecuencias desde, $\omega = 0,01\omega_0$ hasta $\omega = 3,4\omega_0$ con los datos que se muestra en el cuadro

siguiente, manteniendo constante las cantidades $\frac{2\beta}{\omega_0}$, $\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}$, $\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$.

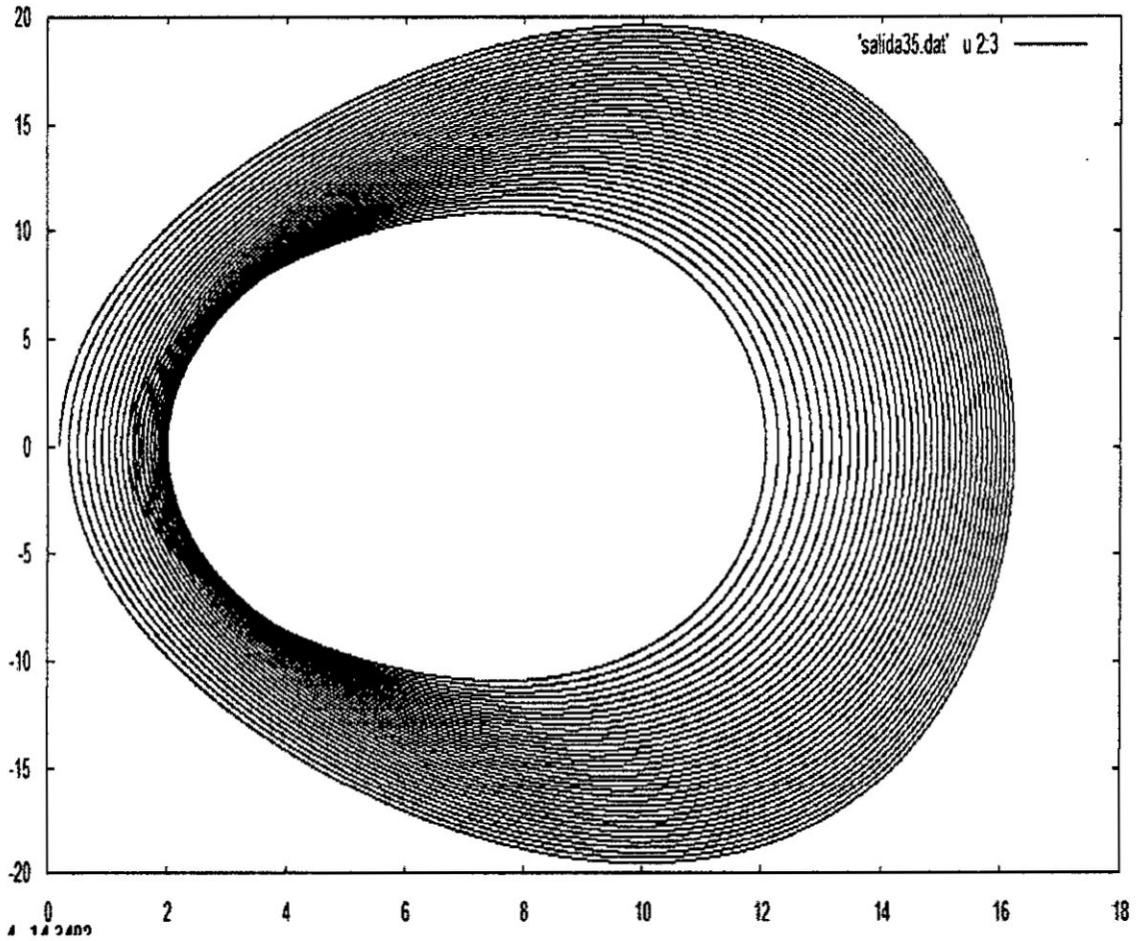
VI. RESULTADOS

TABLA N° 6.1
 VALORES PARA LOS DIFERENTES PARÁMETROS DEL SISTEMA NO
 LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO

| N | $\frac{2\beta}{\omega_0}$ Fricción | $\frac{F}{\omega_0^2}$ No linealidad | $\frac{F_0}{\omega_0^2 M}$ Fuerza externa | $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ Frecuencia |
|----|---------------------------------------|---|--|--|
| 1 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,01 |
| 2 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,05 |
| 3 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,08 |
| 4 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,1 |
| 5 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,3 |
| 6 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,6 |
| 7 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 0,8 |
| 8 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,0 |
| 9 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,2 |
| 10 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,4 |
| 11 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,6 |
| 12 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 1,8 |
| 13 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,0 |
| 14 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,2 |
| 15 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,4 |
| 16 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,6 |
| 17 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 2,8 |
| 18 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,0 |
| 19 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,2 |
| 20 | 0,01 | 0,02 | 30.0 | 3,4 |

Fuente: Autoría propia

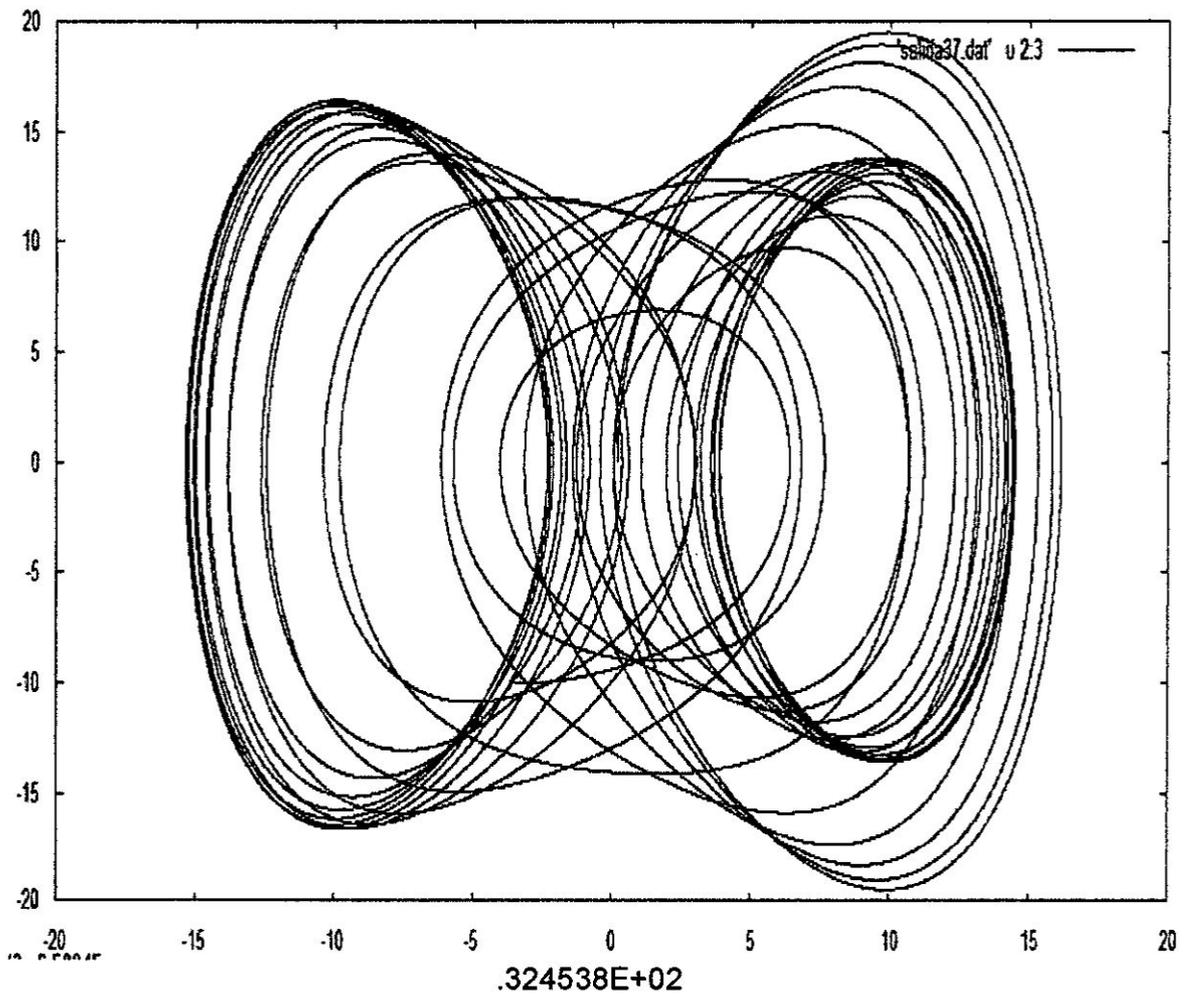
GRAFICA N° 6.1
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,01 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO -
0.215798E+01



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.2

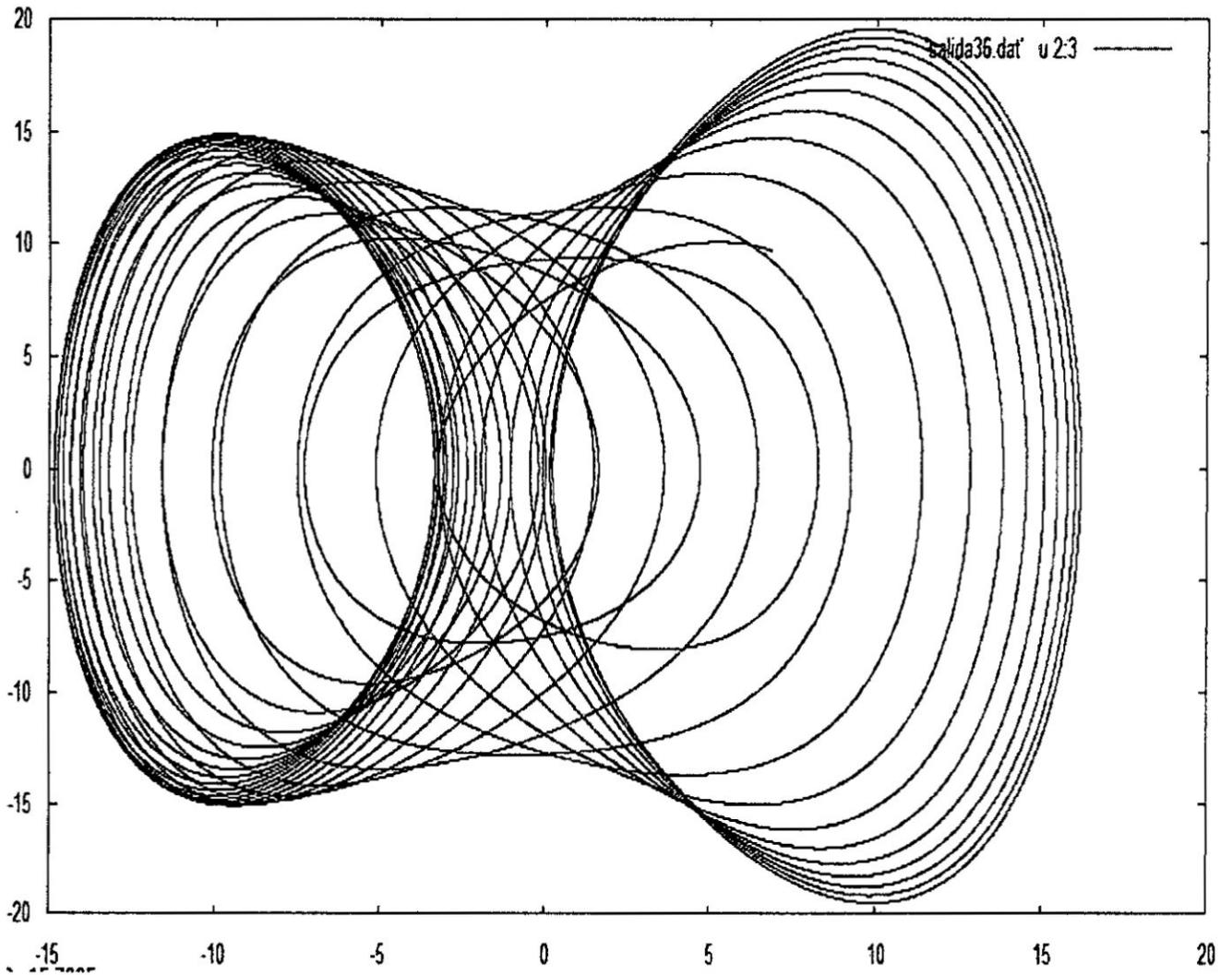
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO, FRECUENCIA 0,05 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO -



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.3

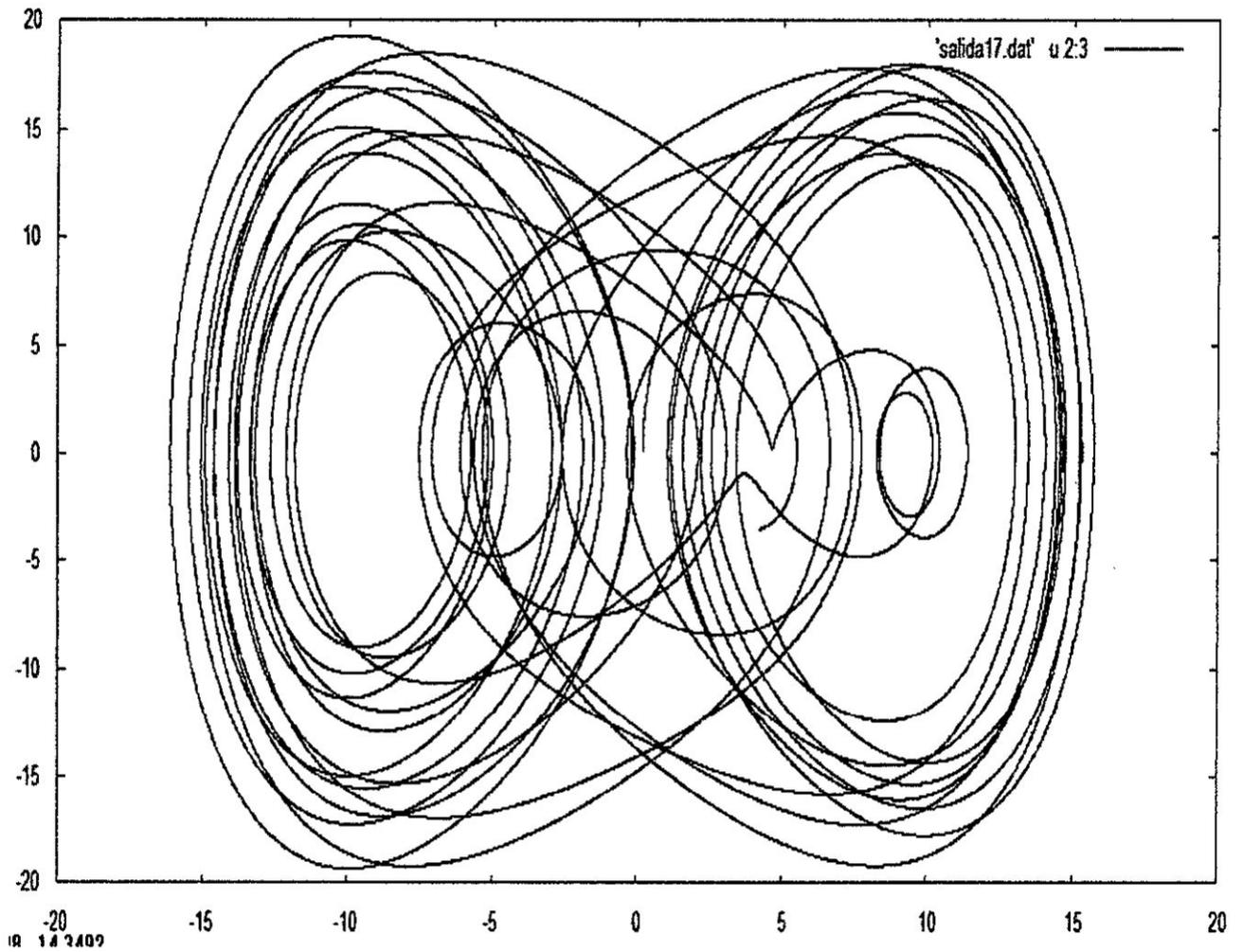
ESPACIO DE FASE SIN CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO Y FORZADO, FRECUENCIA 0,08 Y EXPONENTE LYAPUNOV NEGATIVO



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.4

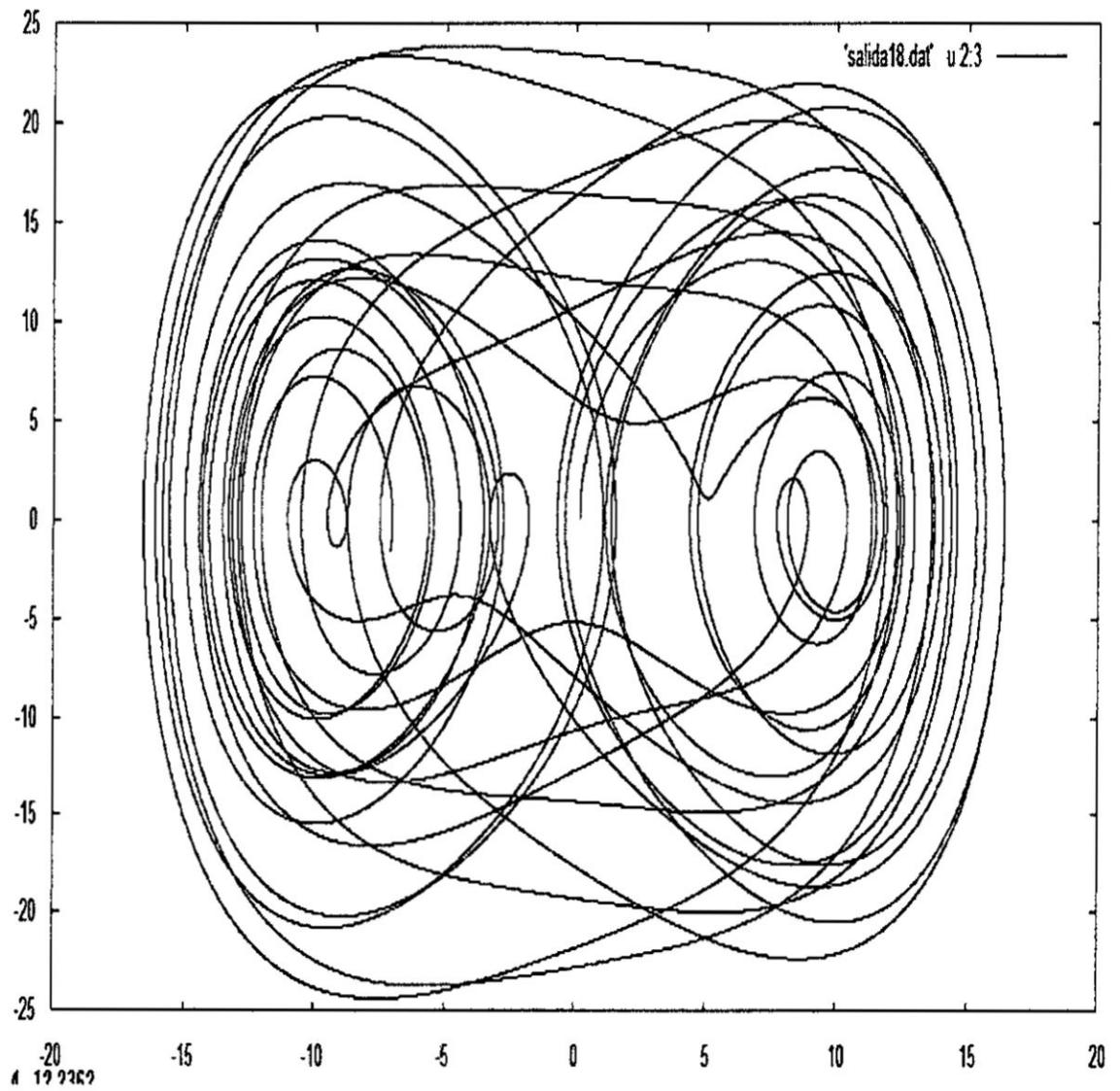
ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,1 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
.520101E-03



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.5

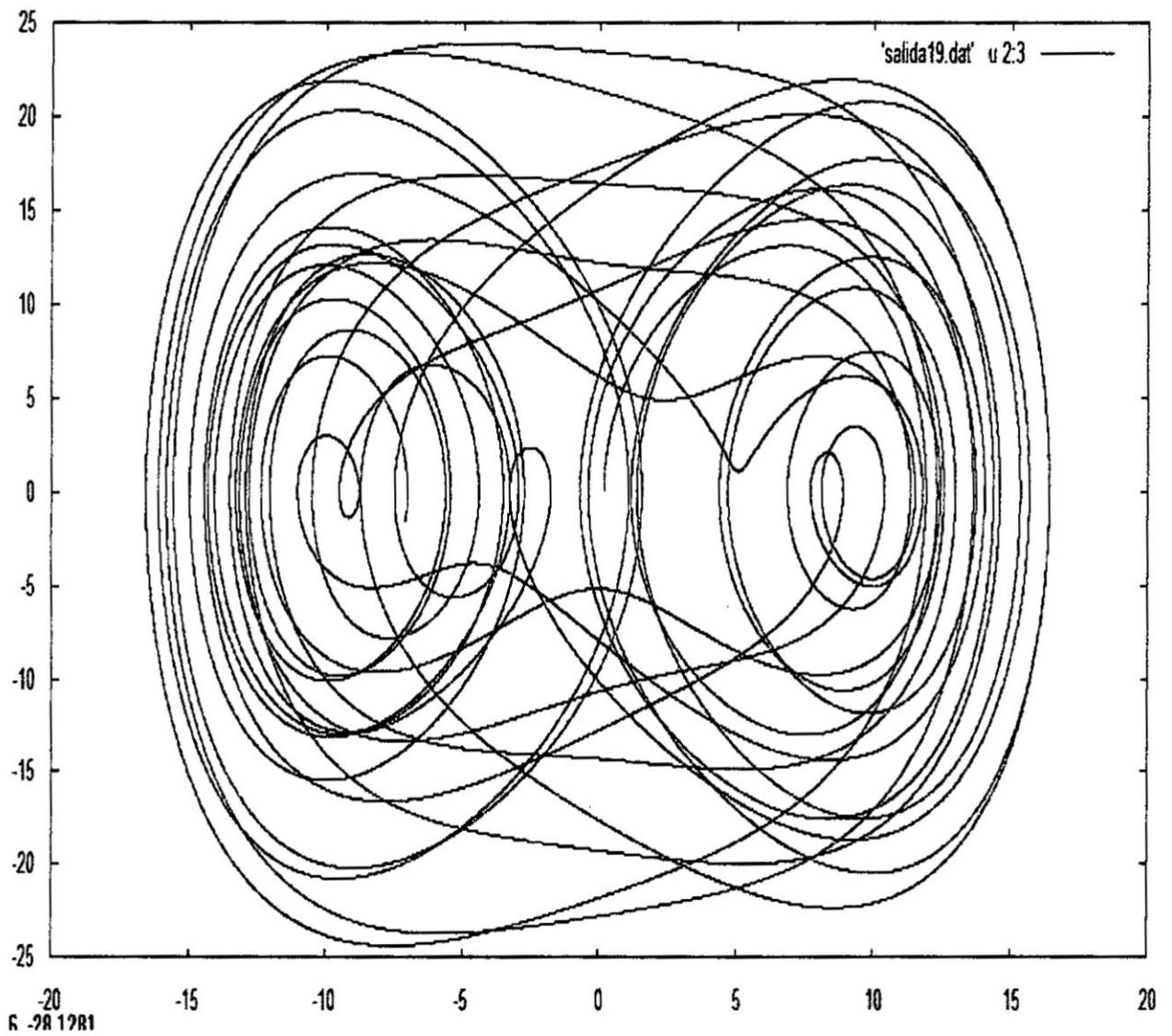
ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,3 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
0.315798E+01



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

GRAFICA N° 6.6

ESPACIO DE FASE CON CAOS DEL OSCILADOR NO LINEAL AMORTIGUADO
Y FORZADO, FRECUENCIA 0,6 Y EXPONENTE LYAPUNOV POSITIVO
0.215798E+01 .



Fuente: Autoría propia obtenido con graficador Gnuplot.

VII. DISCUSIÓN

El espacio de fase del Sistema no Lineal Oscilatorio Amortiguado y Forzado que observa de las figuras 6.1,6.2,6.3 muestran una dinámica desordenada, las líneas se cruzan varias veces , la dinámica se realiza alrededor de dos centros de oscilación, que se les llama atractores, las frecuencias relativas corresponde a $\Omega=0.1, 0.3, 0.6$ respectivamente.

El comportamiento observado aquí del oscilador no lineal, también lo podemos observar en el Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado de un péndulo donde la forma de la ecuación dinámica se aproxima al sistema usado en nuestro trabajo de investigación.

Los exponentes de Lyapunov determinados para esos tres casos resultaron teniendo con valores positivos, resultado que está en la dirección de demostrar de la hipótesis de este trabajo de investigación, que los exponentes de Lyapunov son también indicadores del estado de Caos del Sistema no Lineal Oscilatorio Amortiguado y Forzado.

Los resultados obtenidos en este trabajo va en la misma dirección con otros trabajos de investigación, donde usan también al exponente de Lyapunov como indicador, pero para otros sistemas no lineales (Cabanas A.,Laroze D.,2014).

```

SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
REAL x,y(*),dydx(*),A,C,E,D

      A=0.01
      C=0.02
      D=30.0
      E=0.08
      dydx(1)=y(2)
!   dydx(2)=-((w1**2)*y(1))
          dydx(2)=-A*y(2)-y(1)-C*((y(1))**3)+D*cos(E*x)

!   dydx(3)=y(4)
!   dydx(4)=-((w2**2)*y(3))
      return
      END

!   rkdumb.for
SUBROUTINE rkdumb(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=100000)
REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
EXTERNAL derivs
COMMON /path/ xx,y
!CU  USES rk4
      INTEGER i,k
      REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
      do 11 i=1,nvar
          v(i)=vstart(i)
          y(i,1)=v(i)
11  continue
      xx(1)=x1

```

```

x=x1
h=(x2-x1)/nstep
do 13 k=1,nstep
  call derivs(x,v,dv)
  call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
  if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rk4dumb'
  x=x+h
  xx(k+1)=x
  do 12 i=1,nvar
    y(i,k+1)=v(i)
12  continue
13  continue
  return
  END
! rk4.for
  SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
  INTEGER n,NMAX
  REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
  EXTERNAL derivs
  PARAMETER (NMAX=50)
  INTEGER i
  REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dym(NMAX),yt(NMAX)
  hh=h*0.5
  h6=h/6.
  xh=x+hh
  do 11 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11  continue
  call derivs(xh,yt,dym)
  do 12 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dym(i)

```

```

12  continue
    call derivs(xh,yt,dym)
    do 13 i=1,n
        yt(i)=y(i)+h*dym(i)
        dym(i)=dym(i)+dym(i)
13  continue
    call derivs(x+h,yt,dyt)
    do 14 i=1,n
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dym(i)+2.*dym(i))
14  continue
    return
    END

```

9.2.PROGRAMA DE EXPONENTES DE LYAPUNOV ADAPTADO DE (WOLF A. 1985)

```

program ode
nn=n*(n+1)=
nn1=nn+1
parameter (n=3, nn=12, nn1=13)
implicit double precision(a-h,o-z)
external fcn
dimension y(nn1),yprime(nn1),v(nn1),A(nn1),B(nn1),C(nn1)
dimension D(nn1),cum(n),znorm(n),gsc(n)
open(1,file="Lout.txt")
111 format(1x,'nstep, stpsze, irate, io : ')
read(*,*) nstep,stpsze,irate,io
write(1,*) nstep,stpsze,irate,io
write(1,*)
v(1)=10.0
v(2)=1.0
v(3)=1.0

```

```

tme=0.0
do 10 i=n+1,nn
v(i)=0.0
10 continue
do 20 i=1,n
v((n+1)*i)=1.0
cum(i)=0.0
20 continue
do 100 m=1,nstep
if ((m/100)*100.EQ.m) write(*,*)m
do 25 j=1,irate
do 26 i=1,nn
y(i)=v(i)
26 continue
t=tme
call fcn(t, y, yprime)
do 27 i=1,nn
A(i)=yprime(i)
27 continue
do 28 i=1,nn
y(i)=v(i)+(stpsze*A(i))/2.0
28 continue
t=tme+stpsze/2.0
call fcn(t, y, yprime)
do 29 i=1,nn
B(i)=yprime(i)
29 continue
do 30 i=1,nn
y(i)=v(i)+(stpsze*B(i))/2.0
30 continue
t=tme+stpsze/2.0

```

```

    call fcn(t, y, yprime)
    do 31 i=1,nn
        C(i)=yprime(i)
31    continue
        do 32 i=1,nn
            y(i)=v(i)+(stpsze*C(i))
32    continue
            t=tme+stpsze
            call fcn(t, y, yprime)
            do 33 i=1,nn
                D(i)=yprime(i)
33    continue
                do 34 i=1,nn
                    v(i)=v(i)+stpsze*(A(i)+D(i)+2.0*(B(i)+C(i)))/6.0
34    continue
                    tme=tme+stpsze
25    continue
                    znorm(1)=0.0
                    do 38 j=1,n
                        znorm(1)=znorm(1)+v(n*j+1)**2
38    continue
                        znorm(1)=sqrt(znorm(1))
                        do 40 j=1,n
                            v(n*j+1)=v(n*j+1)/znorm(1)
40    continue
                            do 80 j=2,n
                                do 50 k=1,j-1
                                    gsc(k)=0.0
                                    do 50 l=1,n
                                        gsc(k)=gsc(k)+v(n*l+j)*v(n*l+k)
50    continue

```

```

do 60 k=1,n
do 60 l=1,j-1
v(n*k+j)=v(n*k+j)-gsc(l)*v(n*k+l)
60 continue
znorm(j)=0.0
do 70 k=1,n
znorm(j)=znorm(j)+v(n*k+j)**2
70 continue
znorm(j)=sqrt(znorm(j))
do 80 k=1,n
v(n*k+j)=v(n*k+j)/znorm(j)
80 continue
do 90 k=1,n
cum(k)=cum(k)+dlog(znorm(k))/alog(2.0)
90 continue
if(mod(m,io).ne.0) goto 100
write(1,334) tme,(cum(k)/tme,k=1,n)
334 format(1x,f12.6,2x,e12.6,2x,e12.6,2x,e12.6)
100 continue
end

```

```

subroutine fcn(t,y,yprime)
b=4.0
sg=16.0
r=45.92
yprime(1)=sg*(y(2)-y(1))
yprime(2)=-y(1)*y(3)+r*y(1)-y(2)
yprime(3)=y(1)*y(2)-b*y(3)
do 10 i=0,2
yprime(4+i)=sg*(y(7+i)-y(4+i))
yprime(7+i)=(r-y(3))*y(4+i)-y(7+i)-y(1)*y(10+i)

```

```
yprime(10+i)=y(2)*y(4+i)+y(1)*y(7+i)-b*y(10+i)
```

```
10 continue
```

```
return
```

```
end
```

X. ANEXOS

Matriz de Consistencia

| FORMULACIÓN DEL PROBLEMA | | OBJETIVOS | HIPOTESIS | VARIABLES | INDICADORES | METODOLOGIA |
|--------------------------|---|--|---|--|---|---|
| General | ¿Es posible determinar el Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov? | Determinación del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado con los Exponentes de Lyapunov. | Los Exponentes de Lyapunov determinan el estado dinámico del Caos en un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | | | |
| Específica | ¿Cuál es la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov en la determinación del estado dinámico del Caos de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado? | Desarrollar la técnica numérica apropiada para calcular los Exponentes de Lyapunov y determinar el estado del Caos en la dinámica de un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | La técnica numérica basada en la ortonormalización de Gram-Schmidt local permite determinar los Exponentes de Lyapunov en un Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | Independiente: Exponentes de Lyapunov | Cálculos numéricos iguales o mayores a cero de los exponentes de Lyapunov | Esta investigación es de tipo: aplicada. Con un diseño de ejecución transversal. El Sistema de análisis es el Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado; a este Oscilador no Lineal se formulará el Lagrangiano del sistema y luego la ecuación dinámica de Lagrange, con ello implementaremos un programa basado La técnica numérica basada en la ortonormalización de Gram-Schmidt local. |
| | ¿Es posible determinar un modelo físico para estudiar el Caos en la dinámica de un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado? | Desarrollar y calcular los Exponentes de Lyapunov en un Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado en Resonancia. | El modelo físico Oscilador no lineal Amortiguado y Forzado permite estudiar la teoría del Caos con los Exponentes de Lyapunov. | Dependiente: Estado dinámico del Oscilador no Lineal Amortiguado y Forzado. | Comportamiento Caótico de la variable dinámica. | |