UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA CON UNA FUNCIÓN OBJETIVO CUASI-CONVEXA

TESÍS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

MARÍA AURELIA CAMARENA AMAYA

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA CON UNA FUNCIÓN OBJETIVO

CUASI-CONVEXA

María Aurelia Camarena Amaya

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática con resolución decanal N°147-2018-D-FCNM, fecha de aprobación de la tesis 11 de enero del 2019

Aprobado por:

Presidente: Dr. Walter Flores Vega

Secretario: Lic. Elmer Alberto León Zarate

Vocal: Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Asesor: Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Callao-2019

PERÚ

DEDICATORIA

A Dios que me ha dado la vida y fortaleza, a mis padres por su apoyo incondicional y a todas las personas que de una u otra forma me ayudaron durante toda mi carrera universitaria.

AGRADECIMIENTO

- Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.
- Agradezco también a mi asesor de tesis el Mg. Edinson R. Montoro Alegre por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento, así como también haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis.
- Al Doctor Coloníbol Torres Bardales, por su valiosa guía y asesoramiento a la realización de la misma.
- Al Doctor Erik Alex Papa Quiroz, por su amistad. Por su orientación segura durante la realización del presente trabajo.
- A los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por ser parte de mi formación profesional.
- A mis padres por ser los primeros promotores de mis sueños gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas. Gracias a mi padre por siempre desear y anhelar siempre lo mejor para mi vida, gracias por cada consejo y por cada una de sus palabras que me guiaron durante mi vida.
- A mis hermanos por el apoyo que siempre me brindaron día a día en el transcurso de cada año de mi carrera universitaria.
- En general, a todas las personas que de una u otra manera aportaron para el desarrollo de la tesis

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se resuelven un grupo de problemas de problemas de programación cuasi-convexa. Para ello se derivan condiciones necesarias y suficientes que permitan caracterizar a dichas funciones cuadráticas cuasi-convexas, del tipo $\phi(x) = 1/2\ x^t C\, x + p^t x$, las cuales se podrán resolver usando el algoritmo de Frank y Wolfe.

Asimismo, se logra caracterizar la solución óptima x^* del problema de programación cuasi-convexa

$$\min\{\ \phi(x) : x \in X\ \}$$

Si y solo si satisface $(x - x^*)(C\,x^* + p) \geq 0, \ \forall\, x \in X$

Además, se describe el algoritmo de Frank y Wolfe, que es un método que resuelve problemas de programación pseudoconvexos, y con los resultados obtenidos se mostrará bajo hipótesis adecuadas, que este método puede utilizarse también para resolver problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos.

ABSTRACT

In the present research work, a group of problems of quasi-convex programming problems are solved. For this, necessary and sufficient conditions are derived to characterize said quasi-convex quadratic functions, type $\phi\,(x) \;=\; 1/2\; x^{t}C\,x \;+\; p^{\,t}x$ which can be solved using the Frank and Wolfe algorithm.

Likewise, it is possible to characterize the optimal solution of the quasi-convex programming problem

$$\min\left\{\ \phi\,(x) : x \in X\ \right\}$$

Yes and only if it satisfies $(x \,-\, x^{*})(C\,x^{*} + \,p) \;\geq\; 0,\ \forall\, x \in X$

In addition, the Frank and Wolfe algorithm is described, which is a method that solves pseudo-convex programming problems, and with the results obtained it will be shown under suitable hypotheses, that this method can also be used to solve quadratic quasi-convex programming problems.

INTRODUCCIÓN

Los problemas de optimización en Economía, a menudo no pueden ser modelados como problemas de programación lineal, pero se pueden formular de tal manera que las restricciones sean lineales y la función objetivo sea no lineales.

Uno de los casos más simples es cuando la función objetivo es cuadrática, o bien puede ser aproximado por una función cuadrática.

Estos problemas de programación cuadrática han sido atacados por un tiempo relativamente largo y tienen una amplia literatura (por ejemplo: E.M.L. BEALE (1955), C. VAAN DE PANNE (1964) AND. A WHINSTON y P. WOLFE (1959).

Estos intentos, que se tradujo en muchos algoritmos eficientes, son todos parecidos en donde se supone la convexidad de la función objetivo. Sin embargo, cualquier método de programación pseudoconvexo, por ejemplo, de Frank y Wolfe, es aplicable, incluso si la función objetivo no es convexa, pero es cuasi-convexa en el ortante no negativo.

En el desarrollo del trabajo de investigación, se propondrá las condiciones necesarias y suficientes para obtener funciones cuadráticas cuasi-convexas en el ortante no negativo y se describe el algoritmo de Frank and Wolfe, que es un método que resuelve problemas de programación pseudoconvexas, y con los resultados obtenidos se mostrará bajo hipótesis adecuadas, que este método puede utilizarse también para resolver problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos.

El trabajo de investigación está dividido en seis capítulos.
En el marco teórico, se presenta algunas notaciones, se recuerdan algunas definiciones y resultados del análisis real y convexo.
En el desarrollo del trabajo de investigación, se muestran condiciones necesarias y suficientes para obtener funciones cuadráticas cuasi-convexas en el ortante no negativo y se describe el algoritmo de Frank and Wolfe, que es un método que resuelve problemas de programación pseudoconvexos. Luego, los resultados obtenidos se

mostrará, bajo hipótesis adecuadas, que este método puede utilizarse también para resolver problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos.

A continuación presentaremos la estructura de la investigación compuesta en seis capítulos:

En el primer capítulo presenta el planteamiento del problema, que incluye la descripción del problema, la formulación del problema, los objetivos que orientan la investigación y las limitantes.

En el segundo capítulo se considera el marco teórico, incluye los antecedentes, la teoría que fundamenta la investigación, en el cual se describe algunos aspectos de la teoría de sucesión de números reales, espacio euclidiano, nociones básicas de optimalidad, problemas de optimización y condiciones de optimalidad y definiciones de términos básicos.

En el tercer capítulo se presenta la hipótesis y la operacionalización de variables.

En el cuarto capítulo se explica la metodología de la investigación que incluye tipo y diseño de la investigación, población y muestra y técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo.

En el quinto capítulo se presenta los resultados de la investigación.

Finalmente, se presenta la discusión de resultados que son sugerencias que puedan servir para futuras investigaciones relacionadas con temas afines al presente estudio

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Los problemas de Programación Cuadrática han sido atacados por un tiempo relativamente largo y tienen una amplia literatura (ver: E.M.L. BEALE (1955), C. VAAN DE PANNE (1964)).

Los problemas de optimización para funciones cuadráticas cuasi-convexa que no son convexas del tipo

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^t C x + p^t x$$

Dónde: C es una matriz simétrica de $n \times n$, $x, p \in \mathbb{R}^n$

El problema de programación cuadrática se define como.

$$\min\{\phi(x) : x \in X\}, \qquad (1.1)$$

Donde X representa un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n_+$

Una de las causas por lo que el problema (1.1) no puede ser resuelto de inmediato, es porque no cumplen condiciones necesaria, que ayuden mediante un criterio adecuado a caracterizar la función objetivo y su solución otra de las causas es no encontrar las condiciones suficientes que se relacione con las condiciones necesarias para encontrar el punto óptimo del problema mencionado. Esto implica que si no tengo tales condiciones, no se lograra diseñar o aplicar algún método que ayude a resolver dicho problema (1.1)

De no encontrar el punto óptimo que minimice la función objetivo, el problema (1.1) no será resuelto.

Por tal motivo es necesario encontrar las condiciones y el método que ayuden a optimizar el problema (1.1).

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema general

Se quiere resolver la siguiente interrogante:

¿Es posible establecer un método que optimice y resuelva la función cuadrática cuasi-convexa?

1.2.2 Problema específico

a. ¿Existe condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa?
b. ¿Existe condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Determinar el método para optimizar la función cuadrática cuasi convexa que lo resuelva.

1.3.2 Objetivo específico

a. Determinar las condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa.
b. Determinar las condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa.

1.4 Limitantes

1.4.1 Teórico

Para la elaboración y ejecución de la presente investigación se utilizó libros, revistas especializadas, artículos científicos, sugerencia de docentes especialistas, fuentes documentales y teorías correspondientes al análisis convexo, entre estas teorías esta: optimización continua de Papa Quiroz (2009), análisis convexo de Crouzeix (2013), y introducción a la optimización e investigación de operaciones de Canales García

(2009), etc. Asimismo, se tomará en cuenta a las funciones cuadráticas cuasi-convexas y pseudoconvexas relacionado con el interés del tema.

Estas teorías serán aplicadas para la elaboración del marco teórico y teórico-conceptual de referencia, para la demostración y probación de la hipótesis.

1.4.2 Temporal

El estudio es de tipo longitudinal. Se inició en julio del 2018 y se concluyó en enero del 2019

1.4.3 Espacial

El trabajo se realizó en la biblioteca especializada de Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional de Callao. Las unidades de análisis le corresponden a un grupo de funciones cuasi-convexas que son las funciones cuadráticas.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Internacional

- **Acebedo, I. (2005),** en su tesis" Algoritmo de Espacio Rango para Programación Cuadrática" manifiesta que el objetivo de esta investigación es generar un algoritmo que converja a la solución óptima, el tipo de investigación es científica teórica, cuya metodología es deductiva, se concluye entonces que el algoritmo de espacio rango para programación cuadrática AERPC es un algoritmo eficaz, con mejores tiempos de restricciones que algoritmo de espacio nulo para programación cuadrática NSAQP, calculando la solución óptima para problemas bien condicionados, mal condicionados, con degeneración y sin degeneración, con la función objetivo convexa, restricciones de desigualdad del tipo mayor o igual y con la matriz Hessiana definida positiva.

2.1.2 Nacional

- **Illesca, O. (2016),** en su tesis "Solución de un Problema de Operadores Monótonos Maximales usando el Algoritmo de Punto Proximal" manifiesta que el objetivo de esta investigación es obtener la solución de un problema de Operadores Monótonos Maximales utilizando el Algoritmo de Punto Proximal. La investigación es de tipo científico-teórica, utiliza la metodología inductivo-deductivo y se concluye, que para encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$, se utiliza el algoritmo de punto proximal para operadores Monótonos Maximales, además, al obtener la solución x^* estamos obteniendo la solución de un problema de optimización convexa.
- **Astete, R. (2011),** en su tesis "Metodología para Mejorar el Proceso de Asignación de Tráfico a una Red de Transporte" manifiesta, que el algoritmo de Frank-Wolfe, es una combinación del método del gradiente con un método de optimización lineal, por lo que es adecuado para la asignación de viajes en

redes de transporte debido, a que estos últimos son un problema de optimización no lineal.

Para trabajar una matriz de asignación de viajes, el algoritmo resuelve un origen contra varios destinos lo que quiere decir, que se debe de aplicar el algoritmo para cada origen nuevamente.

El método Simplex revisado, permite resolver el óptimo del dominio local del problema ya que el comportamiento local no lineal y el comportamiento local lineal son similares.

El algoritmo de Frank-Wolfe, es más fácilmente automatizable que otros algoritmos como el de multiplicadores de Lagrange.

Es especialmente ventajoso en los problemas de asignación de tráfico, porque no necesita enumerar todas las rutas factibles entre los orígenes y los destinos, que podría ser un trabajo muy pesado cuando el tamaño de la red aumenta.

Este método de Frank y Wolfe, es utilizada para problemas no lineales de programación y abarca en el campo de trasporte especialmente en el de asignación de tráficos. Este método va optimizar la función objetivo, en cada iteración que se hace se aproximara a la solución. Es necesario contar con herramientas analíticas y tecnológicas que permitan disponer una metodología de alternativas de solución a la complejidad del incremento del tráfico urbano y que afecta a la calidad de vida del ciudadano.

2.2. MARCO

En esta sección se presenta resultados básicos del análisis real, nociones de convexidad y condiciones necesarias de la convergencia de una sucesión.

2.2.1. Teórico

- **Símbolos y Notaciones**

Según (Papa Quiroz, 2009), "A lo largo de esta sección adoptaremos las siguientes terminologías:

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n \right\}$: espacio euclidiano n-dimensional

$\left\langle x, z \right\rangle$: producto interno (euclidiano) entre $x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$.

$\left\| x \right\|$: norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.

$\text{int}(s)$: interior del conjunto S .

$\bar{S}$: cerradura del conjunto S.

$\nabla h(x)$: gradiente de una función en el punto x .

f' : derivada de la función f .

A^t : traspuesta de la matriz A.

$A > 0$: matriz definida positiva.

$A \geq 0$: matriz semidefinida positiva." (p.4)

- **Sucesión de Números Reales**

Definición 2.2.1.1 Según (Lages Lima, 1997), "Una sucesión de números reales es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Escribiremos $\{ x_1, ..., x_n \}$ o $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente $\{ x_n \}$ para indicar a la sucesión para indicar la sucesión cuyo n-esimo termino es x_n" (p.26)

Definición 2.2.1.2 Según (Lages Lima, 1997) “Dada una sucesión $x = \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, una sub-sucesión o una sucesión parcial de x es la restricción de la función x a un subconjunto infinito $\mathbb{N}^* = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Se escribe $\{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ o $\{ x_{n_i} \}_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar la subsucesión $x^* = x|_{\mathbb{N}}$ ” (p.27)

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ es limitada; cuando existe $0 < M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.1.3 El límite de una sucesión según (Lages Lima ,1991), “Diremos que un número real a es límite de una sucesión $\{ x_n \}$ de números reales cuando para cada número real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $| x_n - a | < \varepsilon$, siempre que $n \geq n_0$. Denotamos $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, simbólicamente

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ ” (p.85).

Teorema 2.2.1.1 Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración. Ver [6], p.87. ■

Teorema 2.2.1.2 Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Demostración. Ver [6], p. 88. ■

Corolario 2.2.1.1 Si una sucesión monótona $\{ x_n \}$ posee una sub-sucesión convergente, entonces $\{ x_n \}$ es convergente.

Demostración. Ver [6], p.88. ■

Espacio Euclidiano

Definición 2.2.1.4 Según (Benazic Tomé, 2000), "Sea $n \in \mathbb{N}$. El espacio $n-$ dimensional $\mathbb{R}^n$ es definido como el producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ $n-$ veces, esto es

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} , i = 1, 2, ..., n \}.$$

Introduciendo las operaciones de suma y producto por un escalar, se verifica que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$." (p.3)

Definición 2.2.1.5 Según (Benazic Tomé, 2000), "Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio $n-$ dimensional, definimos el producto interno

$$\langle \, . \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

Se puede verificar fácilmente que el producto interno $\langle \, , \rangle$ satisface las siguientes condiciones:

1) $\forall \, x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0,$ si y sólo si, $x = \theta$; donde θ es el vector nulo.

2) $\forall \, x, w \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, w \rangle = \lambda \langle x, w \rangle.$

3) $\forall \, x, w \in \mathbb{R}^n : \langle x, w \rangle = \langle w, x \rangle.$

4) $\forall \, x, w, z \in \mathbb{R}^n : \langle x + w, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle w, z \rangle$" (p.5)

Definición 2.2.1.6 Según (Benazic Tomé, 2000), "Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio $n-$ dimensional, definimos la norma

$$\| \, . \, \| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Esta norma es llamada norma euclidiana. De las propiedades del producto interno se obtiene los siguientes resultados.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \| x \| \geq 0.$
2. $\|x\| = 0$ si y solo si, $x = \theta$ donde θ es el vector nulo en $\mathbb{R}^n$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|.$
4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ introducimos la norma $\|\,.\,\|$ definida por $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, entonces $\mathbb{R}^n$ se le llama espacio euclidiano." (P.9)

Definición 2.2.1.7 Según (Papa Quiroz ,1997), "$A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, si y solo si, para todo $x \in A$ existe una bola abierta $B(x, \varepsilon)$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$" (p.7)

- **Nociones Básicas de convexidad**

Definición 2.2.1.8 Según (Crouzeix, 2003), "Un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si: $\forall\, x \in C,\ \forall\, y \in C$ y $\forall t \in [0,1]:\ tx + (1-t)y \in C$" (p.1)

Definición 2.2.1.9 según (Nelson Merentes y Sergio Rivas, 2013), "$F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si $f(t\,x + (1-t)y) \leq t\, f(x) + (1-t) f(y),\quad x, y \in D, t \in (0,1)$ " (p.24)

Definición 2.2.2.0 Según (Crouzeix, 2003),"Se dirá una función convexa es propia si $f(x) > -\infty\ \forall x$ y si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) < +\infty$." (p.21)

Teorema 2.2.1.3 Sea un $S \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo abierto y $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable entonces f es convexo si y solo si

$$f(y) \geq f(x) + \langle \Delta f(x), y - x \rangle,\ \forall\, x, y \in S \subset \mathbb{R}^n .$$

Demostración. Ver [8], p.78. ■

Definición 2.2.2.1 (Convexidad y Matriz Hessiana) Según (Canales García, 2018), "Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y definamos la matriz Hessiana de f como la matriz de la segundas derivadas parciales, $f_{i,j}(x) = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, así, denotando por $H(x)$ ala matriz Hessiana, tenemos

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & .. & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & .. & f_{2n}(x) \\ : & : & : & : \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & .. & f_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces examinando la naturaleza de la forma cuadrática de $H(x)$ en $\overline{x}$, es posible determinar la caracterización local de la función f.

1. Si $H(\overline{x})$ es definida positiva, entonces f es localmente convexa en $\overline{x}$.
2. Si $H(\overline{x})$ es definida negativa, entonces f es localmente cóncava en $\overline{x}$.
3. Si $H(\overline{x})$ es semidefinida positiva para todo x, entonces f es una función convexa.
4. Si $H(\overline{x})$ es semidefinida negativa para todo x, entonces f es una función cóncava." (P.91)

Definición 2.2.2.2 Según (Canales García, 2018), "Una forma cuadrática es definida por $q(x) = x^t A x$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz cuadrada simétrica real. La matriz A de a forma cuadrática se dice que es

a. Definida positiva si y solo si $x^t A x > 0,\ \forall x \neq 0.$

b. Definida negativa si y solo si $x^t A x < 0,\ \forall x \neq 0.n$

c. Semidefinida positiva si y solo si $x^t A x \geq 0,\ \forall x$

d. Semidefinida negativa si ysolo si $x^t Ax \leq 0,\ \forall x.$

e. Indefinida si $x^t Ax > 0$ para algún x y $x^t Ax < 0$ para algún x." (p.90-91)

Definición 2.2.2.3 Según (Papa Quiroz, 2009), "Una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es pseudoconvexa si, para todo par de puntos distintos x, y tenemos

$$\left\langle \nabla f(x),\ y - x) \right\rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$ " (p.155)

Definición 2.2.2.4 Según (Papa Quiroz, 2009), "Sea C un conjunto convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ una función real. f es cuasi-convexa en C si para todo $x, y \in C,\ t \in [0,1],$ se cumple que

$$f(t\,x + (1 - t)\,y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$ " (p.155)

- **El problema de Optimización**

Según (Papa Quiroz, 2009), "La Optimización es una de las áreas de la Matemática Aplicada que estudia el problema de minimizar o maximizar una función sujeta generalmente a restricciones sobre su dominio.

$$(p)\ \begin{cases} \min(\max) \quad f(x) \\ \quad s.a: \\ \quad x \in X \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f : X \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria y X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$." (P.9)

Definición 2.2.2.5 (Mínimo Local y Global)

Según (Papa Quiroz, 2009), "Sea $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida sobre X . Un punto $\bar{x} \in X$ es llamado punto mínimo local de f sobre X si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x),\ \forall\, x \in X \cap B\,(\bar{x}, \varepsilon).$$

El punto $\bar{x} \in X$ es llamado punto mínimo global de f sobre X si

$$f(\bar{x}) \leq f(x),\ \forall\, x \in X.$$ " (p.31)

Definición 2.2.2.6 (Máximo Local y Global)

Según (Papa Quiroz, 2009), “Sea $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida sobre X. Un punto $\bar{x} \in X$ es llamado punto máximo local de f sobre X si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \geq f(x),\ \forall x \in X \cap B(\bar{x}, \varepsilon).$$

El punto $\bar{x} \in X$ es llamado punto máximo global de f sobre X si

$$f(\bar{x}) \geq f(x),\ \forall x \in X.\text{”}$$ (p.32)

Observación: Según (Papa Quiroz, 2009), “Todo problema de maximización puede ser expresado como un problema de minimización. En efecto, el problema

$$\begin{cases} \max \quad \mathrm{g}(x) \\ \quad s.a: \\ \ x \in X \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} \min \quad \text{-}\mathrm{g}(x) \\ \quad s.a: \\ \ x \in X \end{cases}$$

”(p.60)

- **Condiciones de Optimalidad**

Teorema 2.2.1.4 Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferior en un conjunto no vacío y compacto X entonces, existe un punto mínimo global.

Demostración. Ver [3], p. 17. ■

Teorema 2.2.1.5 (Teorema de Minimización Convexa). Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa en X. Entonces todo minimizador local del problema (P) es global. Además, el conjunto de minimizadores es convexo. Si f es estrictamente convexa, no puede tener más de un minimizador.

Demostración. Ver [4], p. 69. ■

Teorema 2.2.1.6 Consideremos el problema de optimización no lineal

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ \quad s.a \\ h(x) \ = \ 0 \\ c(x) \ \leq \ 0 \end{cases}$$

donde $h:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $C:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Si f, h, c son funciones convexas y además h es afín, entonces las condiciones de KKT son suficientes para obtener los óptimos globales.

Demostración. Ver [9], p. 153. ■

2.2.2. Conceptual

Debido, a que esta tesis es de ciencias básicas no es necesario considerar el marco conceptual, en efecto, los teoremas utilizados no se pueden refutar, por ser consideradas como verdaderas.

2.2.3. Teórico-Conceptual

Algunos resultados importantes

Proposición 2.2.3.1 (Según Jorge Amaya A, 2003) "sean S_1 y S_2 dos conjuntos convexos. Entonces $S_1 \cap S_2$ es un conjunto convexo.

Demostración: Sean $x, y \in S_1 \cap S_2, \lambda \in [0,1]$

$x, y \in S_1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S_1,$ ya que S_1, es convexo

$x, y \in S_2 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S_2,$ ya que S_2, es convexo

luego $\lambda x + (1-\lambda) y \in S_1 \cap S_2$, es decir, $S_1 \cap S_2$ es convexo" (p.6)

Proposición 2.2.3.2 Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo no vacío $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $f(x) = (f_1 + f_2)(x)$ es convexa sobre Γ.

Demostración: Por definición de $f = f_1 + f_2$ se tiene

$$f(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Sean $x, y \in \Gamma$ y $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) + f_2(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

como f_1 y f_2 son funciones convexas sobre Γ se cumplen de forma simultanea las siguientes desigualdades

$$f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_1(y)$$
$$f_2(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_2(x) + (1-\alpha) f_2(y)$$

sumando estas dos desigualdades

$$f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) + f_2(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha(f_1(x) + f_2(x)) + (1-\alpha)(f_1(y) + f_2(y))$$

Es decir

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Por lo tanto, $f(x)$ es convexa. ■

Proposición 2.2.3.3 Si $f(x)$ es convexa sobre $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, siendo Γ un conjunto convexo no vacío, entonces $\forall \beta \geq 0$, la función $(\beta f)(x)$ definida por

$$(\beta f)(x) = \beta f(x)$$

es convexa sobre Γ .

Demostración: como $f(x)$ es convexa sobre Γ se cumple

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por $\beta > 0$, el sentido de esta no cambia y tendremos

$$\beta(f(\lambda x+(1-\lambda)y)) \leq \beta(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) = \lambda\beta f(x)+(1-\lambda)\beta f(x)$$

Lo que demuestra la convexidad de βf .

■

Teorema 2.2.3.1 (Según Jorge Amaya A, 2003) "Sea $f : S \to \mathbb{R}$, con S convexo no vacío, y sea $\overline{x}$ solución local del problema de $\min_{x\in S} f(x)$. Entonces,

i) Si f es convexa, $\overline{x}$ es mínimo global.

ii) Si f es estrictamente convexa, $\overline{x}$ es el único mínimo global.

Demostración.

i) sea $\varepsilon > 0, f(x) \geq f(\overline{x}) \quad \forall x \in V_{\varepsilon}(\overline{x}).$

Supongamos que $\overline{x}$ no es óptimo global, es decir, $\exists y \in S$ tal que $f(x) < f(\overline{x}).$

luego, $f(\lambda y+(1-\lambda)\overline{x}) \leq \lambda f(y)+(1-\lambda)f(\overline{x}) < f(\overline{x})+(1-\lambda)f(\overline{x}) = f(\overline{x})$

Pero para $\overline{\lambda}$ suficientemente pequeño, $\overline{\lambda}y+(1-\overline{\lambda})\overline{x} \in V_{\varepsilon}(\overline{x}),$ lo cual es una contradicción pues $\overline{x}$ es mínimo local.

ii) f estrictamente convexa $\Rightarrow f$ convexa. Luego, por (i), $\overline{x}$ es mínimo global.

Supongamos que no es único, esto es, que existe $y \in S \ (y \neq \overline{x}),$ tal que $f(y) = f(\overline{x}).$

$$f(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\overline{x}) < \frac{1}{2}f(y)+\frac{1}{2}f(\overline{x}) = f(\overline{x}) \Rightarrow \exists z = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\overline{x} \neq \overline{x} \text{ tal que}$$

$f(z) < f(\overline{x}),$ lo que contradice el hecho de $\overline{x}$ es mínimo global" (p.44-45) ■

2.3 Definición de términos básicos

1. Optimización.

Según (Soto Apolinar, 2011), "Un problema es de optimización cuando se requiere maximizar o minimizar una cantidad."(p.114)

2. Iteración.

Según (Soto Apolinar, 2011), "Método de resolución de una ecuación a través de aproximaciones sucesivas a la solución buscada. Estos métodos se utilizan generalmente a través de la programación de computadoras porque requiere de muchos cálculos sucesivos, tarea que la computadora puede realizar fácilmente." (p.85)

3. Solución factible o punto factible.

Según (Acevedo Bautista, 2005), "Considerando el problema de minimizar $f(x)$ sujeto a $x \in \Omega$ es una solución factible para este problema." (p.75)

4. Vector gradiente.

Según (Acevedo Bautista, 2005), "El vector gradientes el vector que nos indica hacia donde aumenta la función, mientras que la dirección contraria indica hacia donde disminuye, el vector gradiente es un vector cuya i-ésima componente es la derivada parcial de $f(x)$ con respecto a x_i y se denota por:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right],$$

donde cada punto de este vector es ortogonal a las curvas de nivel." (p.74)

5. Matriz Hessiana.

Según (Acevedo Bautista, 2005), "La matriz Hessiana $Q_{n\,x\,n}(x)$, es una matriz que está determinada por:

$$Q(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Evaluando en los i-ésimo y j-ésimo elementos. La matriz Hessiana es definida positiva, si y solo si la función $f(x)$ a la que está asociada es estrictamente convexa.” (p.75)

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

De acuerdo a la naturaleza del problema

3.1. Hipótesis

3.1.1. General

El método de Frank y Wolfe es un método que optimiza la función cuadrática cuasi-convexa.

3.1.2. Especifico

a. Si existen las condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi convexa en base a resultados principales de teoremas, proposiciones y corolarios.
b. Si existen las condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi convexa en base a resultados principales de teoremas, proposiciones y corolarios.

3.2. Operacionalización de variables

Tabla 3.1: Clasificación de la dimensión de la variable

Variable	Dimensión	Indicadores
Programación Cuadrática con una Función Objetivo Cuasi-convexa	Condiciones necesarias	• Matriz Hessiana • Caracterización de las funciones cuasi-convexas • Conjuntos convexos
	Condiciones suficientes	• Funciones pseudoconvexas • El método de Frank y Wolfe

IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo a la naturaleza del problema.

4.1 Tipo y diseño de la investigación

Según Ávila Acosta (1992) de acuerdo al propósito y naturaleza perseguida, la presente investigación es de ciencia formal, pura o fundamental porque está destinada a portar un cuerpo organizado de conocimientos científicos en la línea de análisis numéricos y matemática computacional y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata.

La investigación de la tesis es de tipo no experimental debido a que no se manipulan las variables independientes además su diseño es transversal-descriptivo púes su propósito es indagar las incidencias y valores en que se manifiesta una variable. El método de las ciencias formales, es el método deductivo, a partir de axiomas – verdades simples y evidentes, y deducir de ello todas las demás verdades, usando las leyes y reglas del razonamiento correcto que la lógica proporciona. (Klimovsky, 2001). Según Elí de Gortari, Lógica General (1972) utilizaremos demostraciones de tipo directo e indirecto.

Se da inicio de la siguiente manera.

Método:

a. En la primera parte el problema de optimización es:

$$\text{opt}\left\{ \phi(x) : x \in X \right\}$$

que significa encontrar un punto de mínimo o máximo global de ϕ sobre X.

b. Se probó que la función objetivo $\phi(x)$ no es convexa, pero, si es cuasi-convexa

c. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, mediante un criterio adecuado caracterizaremos la función cuasi-convexa a una función pseudoconvexa

d. Luego se utilizó el corolario 5.2.2, donde $x^* \in X,\ x^* \neq 0$ es una solución óptima del problema o equivalentemente $\phi(x) \geq \phi(x^*),\ x \in X$

e. Finalmente para encontrar el punto óptimo se usó el método de Frank y Wolfe para encontrar la solución del problema estudiado.

4.2 Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente teórico- básico, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso en espacio euclidiano en el ortante no negativo.

4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización de la tesis se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer texto, en forma detallada, para ello se revisó bibliografía especializada de funciones cuasi-convexas, pseudoconvexas, además recopilación de información obtenida vía internet, página del Instituto de Matemática y Ciencias Afines *(IMCA)*, Consejo Nacional de Ciencia, tecnología e Innovación Tecnológica *(CONCYTEC)*, repositorio de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos *(UNMSM)*, Universidad Nacional del Callao (*UNAC*) de la Facultad de Matemática, libros, proyectos y tesis relacionados al tema de interés.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

La presente investigación no requiere análisis y procesamiento de datos estadísticos, la variable es cualitativa.

4.5 Análisis y procesamiento de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.

V. RESULTADOS

Programación Cuadrática con una función objetivo Cuasi-convexa

5.1 Resultados de convexidad, cuasi-convexidad y pseudoconvexidad

Proposición 5.1.1 sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y abierto y $\psi : X \to \mathbb{R}$ una función diferencial en X. Entonces ψ es convexa si y solo si para todo $x, y \in X$.

$$\psi(y) - \psi(x) \geq (y - x)^t \nabla \psi(x)$$

Demostración.

Sea ψ convexa y sean $x, y \in X$ y $\alpha \in (0,1]$

$$\psi(\alpha y + (1-\alpha)x) \leq \alpha \psi(y) + (1-\alpha) \psi(x)$$
$$\psi(\alpha y + (1-\alpha)x) \leq \alpha \psi(y) + \psi(x) - \alpha \psi(x)$$
$$\psi(\alpha y + (1-\alpha)x) - \psi(x) \leq \alpha(\psi(y) - \psi(x))$$

dividiendo entre α

$$\frac{\psi(\alpha y + (1-\alpha)x) - \psi(x)}{\alpha} \leq \psi(y) - \psi(x)$$

luego tomando el limite $\alpha \to 0$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\psi(\alpha y + (1-\alpha)x) - \psi(x)}{\alpha} \leq \psi(y) - \psi(x)$$

Obtenemos

$$\left\langle \nabla \psi(x), y-x \right\rangle \leq \psi(y) - \psi(x)$$

Así

$$\nabla \psi^T(x).(y - x) \leq \psi(y) - \psi(x)$$
$$(y - x)^T . \nabla \psi(x) \leq \psi(y) - \psi(x)$$

Recíprocamente, sean $y, z \in X$ y $z = x + \alpha(y-x) \in X$

$$(y - z)^T \nabla \psi(z) \leq \psi(y) - \psi(z) \tag{5.1}$$

y sean $x, z \in X$

$$(x - z)^T \nabla \psi(z) \leq \psi(x) - \psi(z) \tag{5.2}$$

remplazando $z = x + \alpha(y - x)$ en (5.1) y (5.2) i)

$$(y - (x + \alpha(y - x)))^T \nabla \psi (z) \leq \psi (y) - \psi (z)$$
$$(y - x - \alpha y + \alpha x)^T \nabla \psi (z) \leq \psi (y) - \psi (z)$$
$$(y (1-\alpha) - x (1 - \alpha))^T \nabla \psi (z) \leq \psi (y) - \psi (z)$$
$$((1-\alpha) (y - x))^T \nabla \psi (z) \leq \psi (y) - \psi (z)$$
$$(1-\alpha) (y - x)^T \nabla \psi (z) \leq \psi (y) - \psi (z)$$

multiplicando por α

$$\alpha (1-\alpha) (y-x)^T \nabla \psi (z) \leq \alpha \psi (y) - \alpha \psi (z) \tag{5.3}$$

ii)

$$(x - z)^T \nabla \psi (z) \leq \psi (x) - \psi (z)$$
$$(x - (x + \alpha (y - x)))^T \nabla \psi (z) \leq \psi (x) - \psi (z)$$
$$(- \alpha y + \alpha x)^T \nabla \psi (z) \leq \psi (x) - \psi (z)$$
$$((- \alpha) (y - x))^T \nabla \psi (z) \leq \psi (x) - \psi (z)$$

multiplicando por $(1-\alpha)$

$$(1-\alpha) ((- \alpha) (y - x))^T \nabla \psi (z) \leq (1-\alpha) (\psi (x) - \psi (z))$$
$$(1-\alpha) ((- \alpha) (y - x))^T \nabla \psi (z) \leq (1-\alpha) \psi (x) - \psi (z) + \alpha \psi (z) \tag{5.4}$$

Luego sumando las ecuaciones (5.3) y (5.4)

$$0 \leq \alpha \psi (y) + (1-\alpha) \psi (x) - \psi (z)$$
$$\psi (z) \leq \alpha \psi(y) + (1-\alpha) \psi (x)$$
$$\psi (x + \alpha (y - x)) \leq \alpha \psi (y) + (1-\alpha) \psi (x)$$
$$\psi (\alpha y+(1-\alpha)x) \leq \alpha \psi (y) + (1-\alpha) \psi (x)$$

Por lo tanto, ψ es convexa ■

Teorema 5.1.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Entonces f es cuasi-convexa si solo si

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow (x - y)^T \nabla f(y) \leq 0, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n .$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ **y** $\alpha \in (0,1]$ tal que $f(x) \leq f(y)$, como f es cuasi-convexa, entonces

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \max\left\{ f(x), f(y) \right\} = f(y)$$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) - f(y) \leq 0,$$

dividendo por α

$$\frac{f(\alpha x + (1-\alpha) y) - f(y)}{\alpha} \leq 0$$

tomando límite

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(\alpha x + (1-\alpha) y) - (y)}{\alpha} \leq 0$$

$$\left\langle \nabla f(y) , (x - y) \right\rangle \leq 0$$

$$\nabla f(y)^T . (x - y) \leq 0$$

$$(x - y)^T \nabla f(x) \leq 0$$

Recíprocamente, la prueba se hará por contradicción.

Supongamos que f no es cuasi-convexa, entonces $\exists\, x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \left[0,1\right]$ tal que

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) > \max \left\{ f(x^1) , f(x^2) \right\}.$$

Sea $x^3 = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2)$ y $f(x^1) \leq f(x^2)$

$$f(x^3) > f\left(x^2\right) \tag{5.5}$$

$$f(x^3) > f\left(x^1\right) \tag{5,6}$$

Por hipótesis, se cumple

$$\left(x^2 - x^3\right)^T \nabla f\left(x^3\right) \leq 0 \tag{5,7}$$

$$\left(x^1 - x^3\right)^T \nabla f\left(x^3\right) \leq 0 \tag{5,8}$$

Remplazando x^3 en las ecuaciones (5,7) y (5,8)

$$\left(x^2 - x^1\right)^T \nabla f\left(x^3\right) \leq 0 \wedge \left(x^2 - x^1\right)^T \nabla f\left(x^3\right) \geq 0$$

Entonces

$$(x^2 - x^1)^T \nabla f\left(x^3\right) = 0 \tag{5,9}$$

Definamos

$$\bigcup \; = \; \left\{ x : f(x) \;\leq\; f(x^2),\; x \;=\; u\,x^2 + (1\;-\;u)\,x^3,\; u \in [0,1] \right\},$$

entonces

$$x^3 \notin \bigcup$$

Sea $x^0 \in U$ el más cercano a x^3, por el teorema del valor medio $\exists\,\overline{x} \in \left(x^0, x^3\right)$ tal que

$$(x^3 \;-\; x^0)^T \nabla f(\overline{x}) \;=\; f(x^3) \;-\; f(x^0)$$

$$f(x^3) \;=\; (x^3 \;-\; x^0)^T \nabla f(\overline{x}) \;+\; f(x^0) \tag{5.10}$$

$$x^0 \;=\; u^0 x^2 \;+\; (1\;-\;u^0)x^3$$

Para $u^0 \in [0,1]$, $\mathrm{x}^3 \;=\; \lambda\,x^1 + (1-\lambda)\,x^2$, remplazando en la ecuación (5.10)

$$f(x^3) \;=\; f(x^0) \;+\; u^0\lambda\,(x^1 \;-\; x^2)^T \nabla f(\overline{x}) \tag{5.11}$$

Como $\overline{x} \notin U$, entonces

$$f(\overline{x}) \;>\; f(x^2)$$

luego como $\overline{x}$ es una combinación convexa de x^1 y x^2

$\overline{x} \;\in\; (x^0, x^3)$, $\overline{x} \;=\; t\,x^0 + \;(1-t)\,x^3$, para $t \in (0,1)$ se tiene

$$\overline{x} \;=\; (\lambda \;-\; t\,u'\,\lambda)\,x^1 \;+\; (1\;-\;(\lambda\;-\;t\,u'\,\lambda))\,x^2$$

$$\overline{x} \;=\; B\,x^1 + \;(1\;-\;B)\,x^2$$

Así, $\overline{x}$ es una combinación de x^1 y x^2, además $f(x^2) \;<\; f(\overline{x})$, $f(x^1) \;<\; f(\overline{x})$,

luego de (5.9)

$$(x^2 \;-\; x^1)^T \nabla f(\overline{x}) \;=\; 0$$

remplazando en la ecuación (5.11)

$$f(x^3) \;=\; f(x^0) \;+\; u^0\;\lambda\,(x^1 \;-\; x^2)^T \nabla f(\overline{x})$$

$$f(x^3) \;\leq\; f(x^2) \tag{5.12}$$

lo cual contradice la desigualdad en (5.5). Por lo tanto, f es cuasi-convexa ■

Teorema 5.1.2 sea $f:\Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, sea $\bar{x} \in \Gamma$, y sea f diferenciable en Γ. Si f es convexa en Γ, entonces f es pseudoconvexa en Γ.

Demostración. Sea $x, y \in \Gamma$ y f es convexa en Γ por la proposición 5.1.1 se tiene que

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)^T \nabla f(x)$$

Por hipótesis

$$\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0$$
$$f(y) - f(x) \geq 0$$
$$f(y) \geq f(x)$$

Por lo tanto, f es pseudoconvexa en Γ .

■

Observación 5.1.1 el reciproco del teorema anterior no siempre se cumple, a continuación se mostrara un ejemplo.

Ejemplo 5.1.1 consideremos la función $f(x) = x + x^3, \; x < 0,$ luego como

$$f''(x) = 6x < 0$$

Entonces f no es convexa

Notemos que f es pseudoconvexa en $\mathbb{R}$, como

$$f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$$

Si

$$f'(x)\,(y - x) \geq 0$$

entonces $(1+3x^2)(y-x) \geq 0,$ luego

$$y + y^3 \geq x + x^3,$$

así

$$f(y) \geq f(x)$$

Por lo tanto, f es Pseudoconvexa.

Teorema 5.1.3 Sea Γ un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$, y sea f una función real definida en algún subconjunto abierto de Γ, $f: A \subset \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, si f es pseudoconvexa en Γ, entonces f es estrictamente cuasi-convexa.

Demostración. Sean x^1, x^2 tal que $f(x^1) > f(x^2)$, por hipótesis

$$(x^2 - x^1)^T \nabla f(x^1) < 0$$

luego

$$(x^1 - x^2)^T \nabla f(x^1) > 0$$

asi, por el Teorema 5.1.1, f es estrictamente cuasi-convexa es decir

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \max\{ f(x), f(y) \} \qquad \blacksquare$$

A continuación un ejemplo donde se muestra que el reciproco del teorema no se cumple

Ejemplo 5.1.2 $f(x) = x^3$ es cuasi-convexa pero no pseudoconvexa

i) Mostremos que f es cuasi-convexa en $\mathbb{R}$.

Sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq f(y)$ por demostrar que $(x-y) f'(x) \geq 0.$

En efecto, como $x^3 \geq y^3$ y $x^2 \geq 0$, entonces

$$(x-y)(3x^2) \geq 0$$

Por lo tanto, $f(x)$ es cuasi-convexa

ii) Mostremos que f no es pseudoconvexa.

Supongamos que f es pseudoconvexa en $\mathbb{R}$, luego $(y-x)\, 3x^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ lo cual no cumple para $x = 1$, $y = 0$.

Por lo tanto $f(x)$ no es pseudoconvexa.

Aplicando los resultados anteriores en la función cuadrática

$$\phi\,(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T C\,x \;+\; P^T x \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \;+\; \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

donde C es una matriz de orden $n\times n.$

i) Convexidad para funciones cuadráticas

Teorema 5.1.4 Una función de la forma $\phi\,(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T C\,x \;+\; P^T x$ es convexa si y solo si $(x^1 - x^2)^T C\,(x^1 - x^2) \;\geq\; 0$

Demostración. Por hipótesis y de la Proposición 5.1.1.

$$\phi\,(x^2) \;-\; \phi\,(x^1) \;\geq\; (x^2 \;-\; x^1)^T \nabla\phi\,(x^1),$$

reemplazando $\nabla\phi\,(x^1) \;=\; (C\,x^1 + p),$

$$\phi\,(x^2) \;-\; \phi\,(x^1) \;\geq\; (x^2 - x^1)^T \nabla\phi\,(x^1),$$

luego

$$\phi\,(x^2) \;-\; \phi\,(x^1) \;\geq\; (x^2 - x^1)^T (C\,x^1 + p),$$

Reduciendo términos y agrupando, se tiene

$$(x^1 \;-\; x^2)^T \frac{1}{2}C\,x^1 \;-\; \frac{1}{2}x^{2^T} C\,(x^1 \;-\; x^2) \;\geq\; 0$$
$$(x^1 \;-\; x^2)^T \frac{1}{2}C\,x^1 \;-\; \frac{1}{2}(x^1 \;-\; x^2)^T C\,x^2 \;\geq\; 0$$

luego

$$(x^1 \;-\; x^2)^T C\,(x^1 \;-\; x^2) \;\geq\; 0$$

así, se obtiene el resultado ■

ii) Pseudoconvexidad para funciones cuadráticas

De la definición aplicada a $\phi\,(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T C\,x \;+\; P^T x$, si $\phi\,(x^2) \;<\; \phi\,(x^1),$ se tiene que

$$(x^2 - x^1)^T \nabla\phi(x^1) < 0$$

luego, reemplazando $\nabla\phi(x^1) = (C x^1 + p),$ se tiene

$$(x^2 - x^1)^T (C x^1 + p) < 0$$

iii) Cuasi-convexidad para funciones cuadráticas

De la definición de cuasi-convexidad, se tiene

$$\phi(x^1) \geq \phi(x^2) \text{ implica } (x^1 - x^2)^T \nabla\phi(x^1) \geq 0$$

reemplazando $\nabla\phi(x^1) = (C x^1 + p),$ se tiene

$$\phi(x^1) \geq \phi(x^2) \text{ implica } (x^1 - x^2)^T \nabla\phi(x^1) \geq 0$$

Observación 5.1.2 Notamos de (i) que la convexidad de una función cuadrática depende solo de la matriz C. Pero la pseudoconvexidad y Cuasi-convexidad depende también del vector de coeficientes "p" esto es, su parte lineal ver (ii) y (iii)

Probaremos los siguientes resultados.

a) Si una función cuadrática es convexa en $\mathbb{R}^n_+$ es también convexa en $\mathbb{R}^n$

Demostración.

Sea $\phi(x) = \frac{1}{2} x^T C x + P^T x,$ si ϕ es convexa en $\mathbb{R}^n_+$ entonces

$$\nabla^2\phi(x) = C \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Debemos mostrar que ϕ es convexa en $\mathbb{R}^n$

Si $x \geq 0,$, del análisis previo, se obtiene el resultado.

Si $x < 0,$ entonces

$$x^T C x = (-x)^T C (-x) \geq 0.$$

Por lo tanto, ϕ es convexa en $\mathbb{R}^n$ ■

b) Si una función cuadrática es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n$ entonces es convexa en $\mathbb{R}^n$

Demostración.

Sea $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T C\, x + p^T x,\ \ p \in \mathbb{R}^n$ la función cuadrática y cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n$

Supongamos ϕ que no es convexa. Entonces, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla^2 \phi(\bar{x}) \ngeq 0,$ luego

$$\frac{1}{2}\bar{x}^T C\, \bar{x} < 0 \tag{5.13}$$

Definamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \phi(x) - p^T \bar{x}$ con $p^T \bar{x} > 0$

(5.14)

Demostración. Probemos que f es cuasi-convexa.

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}^n,$ tal que $f(x) \geq f(y),$ luego

$$\phi(x) + p^T \bar{x} \geq \phi(y) + p^T \bar{x}$$
$$\phi(x) \geq \phi(y)$$

Como ϕ es cuasi-convexa

$$(x - y)^T \nabla \phi(x) \geq 0$$

Pero por definición de f, $\nabla \phi(x) = \nabla f(x),$ así

$$(x - y)^T \nabla f(x) \geq 0$$

De esta manera, f es cuasi-convexa.

Haciendo $x^1 = 0$, de (5.13) se tiene que

$$\frac{1}{2}\bar{x}^{\,T} C\, \bar{x}^{\,T} < 0$$

Luego

$$\frac{1}{2}\overline{x}^T C\,\overline{x} \;+\; p^T\overline{x} \;-\; p^T\overline{x} - \; p^T\overline{x} \;<\; \frac{1}{2}(x^1)^T C\,x^1 + p^t x^1 - p^T\overline{x}$$

$$\phi\,(\overline{\mathrm{x}}) \;-\; p^T\overline{x} \;-\; p^T\overline{x} \;<\; \phi\,(\mathrm{x}^1) - p^T\overline{x}$$

$$f\left(\overline{x}\right) \;-\; p^T\overline{x} \;<\; f(x^1)$$

$$f\left(\overline{x}\right) \;<\; f\left(x^1\right) \;+\; p^T\overline{x};\; \forall\, p^T x \;>\; 0$$

$$f\left(\overline{x}\right) \;\leq\; f\left(x^1\right)$$

Además, como f es cuasi-convexa, entonces

$$(x^1 - \overline{x})^T \nabla f\left(x^1\right) \;\;\geq\;\; 0$$

$$(x^1 - \overline{x})^T \nabla \phi\left(x^1\right) \;\geq\; 0$$

$$\left(-\overline{x}\right)^T \left(C\,x^1 + p\right) \;\geq\; 0$$

$$\left(-\overline{x}\right)^T p \;\geq\; 0$$

$$p^T\overline{x} \;\;\leq\;\; 0$$

Lo que contradice (5.14), por lo tanto ϕ es convexa en $\mathbb{R}^n$.

■

Nuestra motivación es trabajar con funciones cuadráticas que son cuasi-convexas en $\mathbb{R}^n_+$ pero no son convexas.

5.2 Caracterización de Funciones Cuadráticas Cuasi- convexas

Teorema 5.2.1 $\phi\,(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T C\,x \;+\; p^T x,\; p \in \mathbb{R}^n$ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ sí y solo si para todo $v \in \mathbb{R}^n$

$$v^T C\,v \;<\; 0 \;\;\text{ implica que } \begin{bmatrix} C\,v \\ p^T v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \overline{>} \end{matrix} 0$$

Donde $\frac{\leq}{>}$ significa que el vector $\begin{bmatrix} Cv \\ p^T v \end{bmatrix}$ es no positivo o no negativo, es decir, sus $(n+1)$ componentes no deben tener signos opuestos.

Demostración. Sean $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n_+$ y $\phi(x^1) \geq \phi(x^2)$ por demostrar que $(x^1 - x^2)^T \left(C x^1 + p\right) \geq 0$ De la hipótesis

$$\frac{1}{2} x^{1^T} C x^1 + p^T x^1 \geq \frac{1}{2} x^{2^T} C x^2 + p^T x^2$$

$$\frac{1}{2} x^{1^T} C x^1 - \frac{1}{2} x^{2^T} C x^2 + p^T x^1 - p^T x^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} x^{1^T} \mathrm{C}\, \mathrm{x}^1 - \frac{1}{2} x^{2^T} C x^1 + \frac{1}{2} x^{2^T} C x^1 - \frac{1}{2} x^{2^T} C x^2 + p^T x^1 - p^T x^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} x^{1^T} C x^1 - \frac{1}{2} x^{2^T} C x^1 + \frac{1}{2} x^{1^T} C x^2 - \frac{1}{2} x^{2^T} C x^2 + x^{1^T} p - x^{2^T} p \geq 0$$

$$(x^1 - x^2)^T \frac{1}{2} C x^1 + (x^1 + x^2)^T \frac{1}{2} C x^2 + (x^1 - x^2)^T p \geq 0$$

$$(x^1 - x^2)^T \frac{1}{2} C (x^1 + x^2)^T + (x^1 - x^2)^T p \geq 0$$

$$(x^1 - x^2)^T \left[\frac{1}{2} C (x^1 + x^2) + p \right] \geq 0 \qquad (5.15)$$

Primero asumiremos que $x^1, x^2 > 0$

Si

$$\frac{1}{2} (x^1 - x^2)^T C (x^1 - x^2) \geq 0 \qquad (5.16)$$

Sumando (5.15) y (5.16) obtenemos

$$(x^1-x^2)^T\frac{1}{2}C\,x^1+\;(x^1-x^2)^T\frac{1}{2}C\,x^2+\;(x^1-x^2)^T\,p+\frac{1}{2}(x^1-x^2)^T C\,x^1-\frac{1}{2}(x^1-x^2)^T C\,x^2\geq 0$$

$$(x^1+x^2)^T(C\,x^1-x^2)\geq 0$$

Si

$$\frac{1}{2}(x^1\;-\;x^2)^T C\;(x^1\;-\;x^2)\;<\;0$$

Por hipótesis se tiene

$$\begin{bmatrix} C\left(x^1-x^2\right) \\ p^T\left(x^1-x^2\right) \end{bmatrix} \frac{\leq}{>}\;0$$

En (5.15) se puede dar de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(x^1-x^2\right)^T & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C\left(x^1-x^2\right) \\ p^T\left(x^1-x^2\right) \end{pmatrix}\geq\;0$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} C\left(x^1-x^2\right) \\ p^T\left(x^1-x^2\right) \end{pmatrix}>0$$

Luego multiplicamos por el vector positivo $\begin{bmatrix} x^{1^T} & 1 \end{bmatrix}>0$

$$\begin{bmatrix} x^{1^T} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C\left(x^1-x^2\right) \\ p^T\left(x^1-x^2\right) \end{pmatrix}\;\geq\;0$$

$$x^{1^T}C\;(x^1-x^2)+p^T(x^1-x^2)\;\geq\;0$$

$$(x^1-x^2)^T C\,x^1+(x^1-x^2)^T\,p\;\geq\;0$$

$$(x^1-x^2)^T(C\,x^1+p)\;\geq\;0$$

Entonces $\phi\;(x)$ es cuasi-convexa en $\operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$

Pero se requiere que ϕ sea cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n_+ \subset \overline{\mathbb{R}^n_+} = \overline{\operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$, entonces

$$\exists\left\{x^k\right\} \subset \operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right) / x^k \to x$$
$$\exists\left\{y^k\right\} \subset \operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right) / y^k \to y$$

Por la cuasi-convexidad de ϕ en $\operatorname{int}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$

$$\phi\left(\lambda x^k + (1-\lambda) y^k\right) \leq \max\left\{\phi(x^k), \phi(y^k)\right\}$$
$$\lim_{k\to\infty} \phi\left(\lambda x^k + (1-\lambda) y^k\right) \leq \lim_{k\to\infty} \max\left\{\phi(x^k), \phi(y^k)\right\}$$
$$\phi(\lambda \lim_{k\to\infty} x^k + (1-\lambda) \lim_{k\to\infty} y^k \leq \lim_{k\to\infty} \max\left\{\phi(\lim_{k\to\infty} x^k), \phi(\lim_{k\to\infty} y^k)\right\}$$
$$\phi\left(\lambda x^k + (1-\lambda) y^k\right) \leq \max\left\{\phi(x), \phi(y)\right\}.$$

Por lo tanto, ϕ es cuasi convexa en $\mathbb{R}^n_+$. Recíprocamente, sea una función cuasi-convexa, entonces

$$v^T C\, v < 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

luego

$$\begin{bmatrix} C\, v \\ p^T v \end{bmatrix} \begin{matrix} < \\ \overline{>} \end{matrix} 0$$

O equivalente

$$\exists\, v^0 \in \mathbb{R}^n / {v^0}^T C\, v^0 < 0 \ \text{ no implica } \begin{bmatrix} C\, v^0 \\ p^T v^0 \end{bmatrix} \begin{matrix} < \\ \overline{>} \end{matrix} 0$$

Entonces

$\exists\, x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n_+ / \phi(x^2) < \phi(x^1)$ por demostrar que $\left(x^2 - x^1\right)^T \nabla\phi\left(x^1\right) > 0$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T \left(\frac{1}{2} C\left(x^1 + x^2\right) + p\right) \geq 0$$

Pero $\begin{bmatrix} C\,v^0 \\ p^T v^0 \end{bmatrix}$ contiene los componentes de diferente signo.

Asi, $\exists$ un vector positivo con $(n + 1)$ componentes que se puede escoger de la forma $\begin{pmatrix} x^0 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ tal que $\begin{bmatrix} x^{0^T} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\,v^0 \\ p^T v^0 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} x^{0^T} C\,v^0 + p^T v^0 &= 0 \\ v^{0^T} C\,x^0 + v^{0^T} p &= 0 \\ v^{0^T}\left(C\,x^0 + p\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Como $x^0 > 0$ escogemos $\alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$x^1 = x^0 + \frac{1}{2} + \alpha\,v^0 \geq 0 \tag{5.18}$$

$$x^2 = x^0 - \frac{1}{2} + \alpha\,v^0 \geq 0 \tag{5.19}$$

Restando (5.18) y (5.19)

$$x^1 - x^2 = \alpha\,v^0$$

Sumando (5.18) y (5.19)

$$\frac{x^1 + x^2}{2} = x^0$$

de

$$v^{0^T} C\,v^0 < 0$$

multiplicando por α^2

$$\alpha\,v^{0^T} C\,\alpha\,v^0 < 0$$

$$\left(\alpha\,v^0\right)^T C\,\alpha\,v^0 < 0$$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T C\left(x^1 - x^2\right) < 0$$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T \frac{1}{2}\,C\left(x^1 - x^2\right) < 0 \tag{5.20}$$

remplazando en (5.17)

$$v^{0\,T}\left(C\,x^0 + p\right) = 0$$

multiplicando por α

$$\left(\alpha\, v^0\right)^T\left(C\,x^0 + p\right) < 0$$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T\left(\frac{1}{2}\,C\,\left(x^1 - x^2\right) + p\right) < 0 \qquad (5.21)$$

sumando (5.20) y (5.21)

$$\left(x^1 - x^2\right)^T\left(\frac{1}{2}\,C\,\left(x^1 + x^2\right) + p\right) + \left(x^1 - x^2\right)^T\frac{1}{2}\,C\,\left(x^1 - x^2\right) < 0$$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T\left(\frac{1}{2}\,C\,x^1 + \frac{1}{2}\,C\,x^2 + p + \frac{1}{2}C\,x^1 - \frac{1}{2}C\,x^2\right) < 0$$

$$\left(x^1 - x^2\right)^T\left(C\,x^1 + p\right) < 0$$

$$\left(x^2 - x^1\right)^T\left(C\,x^1 + p\right) > 0$$

Por lo tanto, el resultado. ■

Teorema 5.2.2 La función cuadrática no convexa $\phi\,(x) = \frac{1}{2}x^TC\,x + p^Tx$ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ sí y solo si se cumple las 4 condiciones siguientes

a) C tiene exactamente un autovalor negativo

b) $C \leq 0$

c) $p \leq 0$

d) Existe algún $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $C\,q = p$ y $p^Tq \leq 0$

Antes de dar la demostración, debemos considerar lo siguiente

Observación 5.2.1

(a) Si C es no singular entonces existe C^{-1} entonces (d) se reduce a (d'):

$$q = C^{-1}p \wedge p^TC^{-1}p \leq 0$$

(b) Si C es singular entonces $\nexists$ C^{-1} luego se cumple uno u otro

i) No existe solución $q \in \mathbb{R}^n / C\, q = p$

ii) Existen varias soluciones

$$\begin{aligned} \exists\, q^1, q^2 \in \mathbb{R}^n / C\, q^{-1} &= p \\ C\, q^2 &= p \\ p^T q^1 &= \left(C\, q^2\right)^T q^1 \\ p^T q^1 &= \left(q^2\right)^T C\, q^1 \\ p^T q^1 &= \left(q^2\right)^T p \\ p^T q^1 &= \left(p\right)^T q^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$p^T q^1 = p^T q^2 \leq 0$$

(C) Haciendo $p = 0$ en el teorema 5.2.1

$\phi\,(x) = \dfrac{1}{2} x^T C\, x + p^T x$ es una función cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ sí y solo $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$

$$v^T C\, v < 0 \Rightarrow [C\, v] \; \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \; 0$$

Veamos: Si $\phi\,(x)$ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ entonces también lo es $Q(x)$ además notemos que $\phi\,(x)$ no es convexa entonces $Q(x)$ no es convexa pues: $(C < 0)$.

Esta observación nos permite emplear en la prueba del Teorema 5.2.2.

Demostración. (Del Teorema 5.2.2)

Supongamos que la función ϕ no es convexa pero es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ entonces por la Observación 5.2.1 (c) y en el Teorema 5.2.1 se tiene que

$$Q(x) = x^T C\, x$$

No es convexa pero si cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$

a) Probaremos la existencia de autovalores negativos

$$\exists\, v \in \mathbb{R}_{+}^{n} \,/\, v^{T} C\, v \;<\; 0$$

Entonces

$$C\, v \;<\; 0$$

$$\lambda v \;<\; 0$$

$$v^{T} \lambda v \;<\; 0$$

$$v^{T} v \lambda \;<\; 0$$

como

$$v^{T} v > 0$$

decimos

$$\lambda < 0$$

entonces C tiene por lo menos un autovalor negativo

b) ϕ no es convexa

luego

$$\exists\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}_{+}^{n} \,/\, v^{T} C\, v \;<\; 0$$

entonces

$$\left[C\, v\right] \begin{array}{c} < \\ \hline > \end{array} 0 \tag{5.22}$$

y

$$x^{T} x \;\geq\; 0, \;\; \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n} \tag{5.23}$$

multiplicamos (5.22) y (5.23)

$$x^{T} x\, v^{T} C\, v \;<\; 0$$

$$x^{T} v^{T} C\, v\, x \;<\; 0$$

$$v^{T} x^{T} C\, x\, v \;<\; 0$$

$$v^{T} v\, x^{T} C\, x \;<\; 0$$

entonces

$$x^T C\, x \;<\; 0, \;\; \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

es decir

$$C \;\leq\; 0$$

c) Veremos que para algún vector positivo $s > 0$ tenemos:

$$s^T C\, s \;<\; 0 \tag{5.24}$$

de

$$\begin{bmatrix} C\, s \\ p^T s \end{bmatrix} \;\frac{\leq}{>}\; 0$$

$$s^T C\, s \;<\; 0 \text{ implica que } C\, v \;<\; 0, \tag{5.25}$$

entonces

$$p^T s \;<\; 0$$

(5.26)

multiplicamos por $\left(s^T\right)$

$$p^T s s^T \;<\; 0 s^T$$

$$p^T s s^T \;<\; 0$$

$$p^T s s^T \;<\; 0 \text{ (pues } \left(s \;>\; 0\right) \;\Rightarrow\; s s^T \;>\; 0 \text{)}$$

$$p^T \;<\; 0 \text{ entonces } p \;\leq\; 0$$

d) Para la prueba consideramos que el sistema

$$C\, u \;=\; 0 \;\wedge\; p^T u \;=\; 1 \text{ tiene solución } u \in \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

Sea $v \;=\; s \;-\; 2\,(p^T\; s)\, u\; s > 0$

$i)\ v^T C\, v = (s - 2\,(p^T s)\,u)^T C\,(s - 2\,(p^T s)\,u)$

$v^T C\, v = (s^T - 2\,(p^T s)\,u^T)\, C\,(s - 2\,(p^T s)\,u)$

$v^T C\, v = s^T C\, s - 2\, s^T C\,\left(p^T s\right) u - 2\left(p^T s\right) u^T C\, s + 4\left(p^T s\right)^2 u^T C\, u$

$v^T C\, v = s^T C\, s - 2\left(p^T s\right) s^T C\, u - 2\left(p^T s\right) s^T C\, u + 4\left(p^T s\right)^2 u^T C\, u$

de (5.24), $s^T C\, s < 0$,

por lo tanto, $v^T C\, v < 0$.

$ii)\ C\, v = C\,(s - 2\,(p^T s)\,u)$

$C\, v = C\, s - 2\,(p^T s)\, C\, u$

de (5.25), $C\, s \leq 0$

por lo tanto, $C\, v \leq 0$

$iii)\ p^T v = p^T\left(s - 2\left(p^T s\right)\right)$

$p^T v = p^T s - 2\left(p^T s\right) p^T u,$

De (5.26), $p^T v = -\left(p^T s\right) > 0$

Por lo tanto, $p^T v > 0$.

Así tenemos

$$v^T C\, v < 0$$
$$C\, v \leq 0$$
$$p^T v > 0$$

Luego el sistema (5.27) no tiene solución es decir, el sistema $C\, q = p$ posee solución $q \in \mathbb{R}^n$.

Hemos probado que $C\, q = p$ faltará probar $p^T q \leq 0$.

Supongamos que $p^T q > 0$ y definamos $w = (p^T q)\, s - 2\,(p^T s)\, q$ con $s > 0$

$(i)\ w^T C\, w = \left[(p^T q)s - 2(p^T s)q\right]^T C\, \left((p^T q)S - 2(p^T s)q\right)$

$w^T C\, w = \left((p^T q)s\right)^T C\, (p^T q)s - 2\left((p^T q)s\right)^T C\, (p^T s)q - 2\left((p^T s)q\right)^T C\, (p^T q)s + 4\left((p^T s)q\right)^T C\, (p^T s)q$

$w^T C\, w = (p^T q)s^T C\, (p^T q)s - 2(p^T q)s^T C\, (p^T s)q - 2(p^T s)q^T C\, (p^T q)s + 4(p^T s)q^T C\, (p^T s)q$

$w^T C\, w = (p^T q)s^T C\, (p^T q)s - 2(p^T q)(p^T s)C\, q - 2(p^T s)(p^T q)q^T C\, s + 4(p^T s)^2 q^T C\, q$

$w^T C\, w = (p^T q)^2 s^T - 4(p^T q)(p^T s)s^T C\, q + 4(p^T s)^2 q^T C\, q$

$w^T C\, w = (p^T q)^2 s^T C\, s - 4(p^T q)(p^T s)(p^T s)^2 + 4(p^T s)^2 q^T p$

$w^T C\, w = (p^T q)^2 s^T C\, s - 4(p^T q)(p^T s)^2 + 4(p^T s)^2 q^T p$

$w^T C\, w = (p^T\, q)^2 s^T C\, s;$

de (5.24), $s^T C\, s < 0.$

por lo tanto, $w^T C\, w < 0.$

$(ii)\ C\, w = C\left((p^T q)s - 2(p^t s)q\right)$

$C\, w = (p^T q)C\, s - 2(p^T s)C\, q$

$C\, w = (p^T q)C\, s - 2(p^T s)C\, q$

$C\, w = (p^T q)C\, s - 2(p^T s)\, p \leq (p^T q)C\, s < 0$

de $p^T q < 0$ y (5.25) se tiene que $C\, w < 0$

$(iii)\ p^T w = p^T\left((p^T q)s - 2\,(p^T s)q\right)$

$p^T w = (p^T\, q)\,(p^T s) - 2\,(p^T s)\,(p^T q)$

$p^T w = -\,(p^T\, q)\,(p^T s) > 0$

de $p^T q < 0$ y (5.26) se tiene que $p^T w > 0.$

así tenemos

$$w^T C\, w < 0$$
$$C\, w \leq 0$$
$$p^T w > 0$$

el cual es una contradicción con el Teorema 5.2.1.

Por lo tanto, $\exists\, q \in \mathbb{R}^n / C\, q = p$ con $p^T q \leq 0.$

Recíprocamente, probaremos que si a) y b) se cumple entonces la forma cuadrática no convexa $Q(x) = x^T \mathrm{C}\, x$ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$, supongamos que Q no es cuasi-convexa.

Denotemos por λ_i $\mathrm{i} = 1{,}\mathrm{n}$ los autovalores C y y_i $\mathrm{i} = 1{,}\mathrm{n}$ sus respectivos autovectores, el cual podemos asumir que sean autonormalizados, es decir,

$$\| y_i \| = 1 \ \wedge \ \left\langle y_i, y_j \right\rangle = 0 \ \forall\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

Como $C \leq 0$ entonces existe al menos un autovalor negativo consideremos $\lambda_i < 0$ y como Q no es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ entonces

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^n / v^T C\, v < 0 \tag{5.28}$$

así, $C\,v$ tiene componentes de signo apuestos, entonces

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^n / x > 0$$

$$x^T (C\, v) = 0 \tag{5.29}$$

$$x^T C\, x \leq 0 \tag{5.30}$$

Como $\{ y_i \}_{i = 1, n}$ son ortonormalizado (es una base $\mathbb{R}^n$)

Como $\{ y_i / i = 1, n \}$ es una base $\mathbb{R}^n$, podemos expresar v, x como combinación lineal de $\{ y_i \}$ (pues $v, x \in \mathbb{R}^n$)

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i$$

i) De (5.28)

$$v^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; y_i\right)^T \; C \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; y_i\right) \;<\; 0$$

$$v^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; y_i^T\right) \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; C \, y_i\right)$$

$$v^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; y_i^T\right) \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \lambda_i \; C \, y_i\right)$$

$$v^T C\, v \;=\; \left(\alpha_1 \, y_1^T + \alpha_2 \, y_2^T + \alpha_3 \, y_3^T + \ldots \alpha_n \, y_n^T\right) \; \left(\alpha_1 \; \lambda_1 \, y_1 + \alpha_2 \; \lambda_2 \, y_2 + \ldots \alpha_n \; \lambda_n \; y_n\right)$$

$$v^T C\, v \;=\; \alpha_1^2 \; \lambda_1 + \alpha_2^2 \; \lambda_2 + \ldots \alpha_n^2 \; \lambda_n$$

$$v^T C\, v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^2 \; \lambda_i < 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{\,2} \; \lambda_i \;<\; 0$$

ii) De (5.29)

$$x^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \; y_i\right)^T \; C \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; y_i\right) \;=\; 0$$

$$x^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \; y_i^T\right) \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; C \, y_i\right) \;=\; 0$$

$$x^T C\, v \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \; y_i^T\right) \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \lambda_i \; y_i\right) \;=\; 0$$

$$x^T C\, v \;=\; \left(\varepsilon_1 \, y_1^T + \varepsilon_2 \, y_2^T + \ldots \; \varepsilon_n \, y_n^T\right) \; \left(\alpha_1 \; \lambda_1 \, y_1 + \alpha_2 \; \lambda_2 \, y_2 + \ldots \; \alpha_n \; \lambda_n \; y_n\right)$$

$$x^T C\, v \;=\; \varepsilon_1 \; \alpha_1 \; \lambda_1 + \varepsilon_2 \; \alpha_2 \; \lambda_2 + \ldots + \varepsilon_n \; \alpha_n \; \lambda_n$$

$$x^T C\, v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \varepsilon_i \; \lambda_i = 0$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \varepsilon_i \; \lambda_i \;=\; 0$$

iii) De (5.30)

$$x^T C\, x \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, y_i\right)^T \; C \; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, y_i\right) \;\le\; 0$$

$$x^T C\, x \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, y_i^{\,T}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, C\, y_i\right) \;\le\; 0$$

$$x^T C\, x \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, y_i^{\,T}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, \lambda_i\, y_i\right) \;\le\; 0$$

$$x^T C\, x \;=\; \left(\varepsilon_1\, y_1^T + \varepsilon_2\, y_2^T + \ldots \varepsilon_n\, y_n^T\right) \left(\varepsilon_1\, \lambda_1\, y_1 + \varepsilon_2\, \lambda_2\, y_2 + \ldots \varepsilon_n\, \lambda_n\, y_n\right)$$

$$x^T C\, x \;=\; \varepsilon_1^2\, \lambda_1 + \varepsilon_2^2\, \lambda_2 + \ldots + \varepsilon_n^2\, \lambda_n$$

$$x^T C\, x \;=\; \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\, \lambda_i \;\le\; 0$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\, \lambda_i \;\le\; 0$$

Asi tenemos

$$v^T C\, v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, \lambda_i \;<\; 0 \tag{5.31}$$

$$x^T C\, v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varepsilon_i\, \lambda_i \;=\; 0 \tag{5.32}$$

$$x^T C\, x \;=\; \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\, \lambda_i \le 0$$

(5.33)

(a) En (5.31), si $\alpha_1 = 0$,

entonces

$$\alpha_2^2\, \lambda_2 + \alpha_3^2\, \lambda_3 + \ldots\, \alpha_n^2\, \lambda_n \;<\; 0$$

luego

$$\exists\, \lambda_i \;<\; 0 \text{ para algún } i = \overline{2,n}$$

así, C posee otro autovalor negativo, contradiciendo la parte (a).

(b) En (5.33), si $\varepsilon_1 = 0$,

entonces

$$\varepsilon_2^2 \lambda_2 + \varepsilon_3^2 \lambda_3 + \ldots \varepsilon_n^2 \lambda_n < 0$$

luego

$$\exists \lambda_j < 0 \text{ para algún } j = \overline{2,n}$$

entonces C posee otro autovalor negativo, contradiciendo la parte (a).

(c) $si\ \alpha \neq 0 \wedge \varepsilon_1 \neq 0$

multiplicamos

$$\begin{gathered}(5.31) \text{ por } \varepsilon_1^2 > 0\\(5.32) \text{ por } \left(-2\,\varepsilon_1\,\alpha_1\right)\\(5.33) \text{ por } \alpha_1^2 > 0\end{gathered}$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1^2\, \alpha_i^2\, \lambda_i < 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} -2\varepsilon_1\, \alpha_1\, \alpha_i\, \varepsilon_i\, \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1^2\, \varepsilon_i^2\, \lambda_i \leq 0$$

Sumando

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1^2\, \alpha_i^2\, \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} -2\,\varepsilon_1\, \alpha_1\, \alpha_i\, \varepsilon_i\, \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^2\, \varepsilon_i^2\, \lambda_i < 0$$

$$\sum_{i=2}^{n} \left(\varepsilon_1\, \alpha_i - \alpha_1\, \varepsilon_i\right)^2 \lambda_i \leq 0$$

entonces existe $\lambda_i < 0$ para algún $i = \overline{2,n}$, luego C posee otro autovalor negativo, contradiciendo la parte (a).

$$x^T C\, x \text{ es cuasi-convexa en } \mathbb{R}_+^n$$

Ahora veamos la demostración del Teorema 5.2.2.

Supongamos que no es cuasi-convexa $\mathbb{R}^{n}_{+}$

Por el Teorema 5.2.1 $\exists\, v \in \mathbb{R}^{n} / v^{T} C\, v \; < \; 0,$ entonces

$$C\; v \;\geq\; 0$$
$$p^{T} v \;<\; 0$$

Definamos $w \;=\; \left(p^{T} s\right) v \;-\; \left(s^{T} c\; v\right) q$ para algún $s > 0$

Veamos

i) $w^{T} C\; w \;=\; \left(\left(p^{T} s\right) v - \left(s^{T} C\; v\right) q\right)^{T} C\; \left(\left(p^{T} s\right) v - \left(s^{T} C\; v\right) q\right)$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(\left(p^{T} s\right) v^{T} - \left(s^{T} C\; v\right) q^{T}\right) C \left(\left(p^{T} s\right) v - \left(s^{T} C\; v\right) q\right)$$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)^{2} v^{T} C - \left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) v^{T} C q - \left(s^{T} C\; v\right)\left(p^{T} s\right) q^{T} C v + \left(s^{T} C\; v\right)^{2} q^{T} C\; q$$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)^{2} v^{T} C\; v - \left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) v^{T} C q - \left(s^{T} C\; v\right)\left(p^{T} s\right) v^{T} C q + \left(s^{T} C\; v\right)^{2} q^{T} C\; q$$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)^{2} v^{T} C\; v - 2\left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) v^{T} C q + \left(s^{T} C\; v\right)^{2} q^{T} C q$$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)^{2} v^{T} C\; v - 2\left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) v^{T} p + \left(s^{T} C\; v\right)^{2} q^{T} p$$

$$w^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)^{2} v^{T} C\; v - 2\left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right)\left(p^{T} v\right) + \left(s^{T} C\; v\right)^{2} p^{T} q < 0$$

Por lo tanto, $w^{T} C\; w \;<\; 0.$

$ii)$ $s^{T} C\; w \;=\; s^{T} C\left(\left(p^{T} s\right) v - \left(s^{T} C\; v\right) q\right)$

$$s^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) - \left(s^{T} C v\right) - \left(s^{T} C\; v\right)\left(s^{T} C\; q\right)$$

$$s^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C\; v\right) - \left(s^{T} C\; v\right)\left(s^{T} p\right)$$

$$s^{T} C\; w \;=\; \left(p^{T} s\right)\left(s^{T} C v\right) - \left(s^{T} C\; v\right)\left(p^{T} s\right) \;=\; 0$$

Por lo tanto, $s^{T} C\; w = \; 0.$

Entonces Cw tiene componentes con signos opuestos (5.34)

como ϕ es cuasi-convexas

$$\forall\; v \in \mathbb{R}^{n} \;\; v^{T} C\; v \;<\; 0 \text{ implica que } C\; v \;{}^{>\,0}_{\leq\,0}$$

En particular para w

$$w^{T} C\; w \;<\; 0$$

entonces

$$C\,w \underset{>}{\overset{\leq}{-}} 0$$

lo cual es una contradicción, pues Cw tiene componentes opuestos.

Por lo tanto, ϕ es cuasi-convexa. ∎

Denotemos e_i como el i-esimo vector unitario $e_i = (0,\ 0,\ldots 1,\ldots 0)$

Del Teorema 5.2.2, inmediatamente tenemos lo siguiente.

Corolario 5.2.1 Para ϕ del Teorema 5.2.2, si $C\,e_i = 0$ implica $p^T e_i = 0$

Demostración. Por el Teorema 5.2.2, (d) $\left(C\,q = p \wedge p^T q \leq 0\right)$ y consideremos

$q = e_i$

$$C\,e_i = p \wedge p^T e_i \leq 0$$

Pero $C\,e_i = 0$ entonces $p = \theta$ luego $p^T e_i \leq 0$ ∎

Este resultado dice que, si C tiene una fila cero, la i-ésima componente correspondiente de $p, p_i = 0$ y $x_i = 0$ no aparece en la función total.

Estas variables serán llamadas irrelevantes, los demás serán llamados relevantes por lo tanto, la distinción tiene un mayor significado cuando las variables relevantes e irrelevantes están unidos en las restricciones.

Teorema 5.2.3 Si la función no convexa $\phi(x) = \dfrac{1}{2}x^T C\,x + p^T x$ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ con todas las variables relevantes entonces ϕ es pseudoconvexa en el ortante semipositivo $\mathbb{R}^n_+ - \{0\}$

Demostración. Como todas las variables son relevantes entonces C no tiene fila nula (por el Corolario 5.2.1)

Por la Observación 5.2.1 (c) (ϕ es no convexa y cuasi-convexa entonces Q no es convexa y cuasi-convexa).

Donde $Q(x) = \frac{1}{2}x^T C\, x$ como es cuasi-convexa en $\mathbb{R}^n_+$ entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n_+$

$$v^T C\, v < 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} C\, v \\ p^T v \end{bmatrix} \;\substack{\leq \\ -\\ >}\; 0 \tag{5.35}$$

Sean $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n_+ - \{0\}$ tal que

$$\left(x^1 - x^2\right)^T \left(C\, x^1 + p\right) \geq 0 \tag{5.36}$$

por demostrar que

$$\phi\left(x^2\right) \;\geq\; \phi\left(x^1\right)$$

Si $\frac{1}{2}\left(x^2 - x^1\right)^T C\left(x^2 + x^1\right) \;\geq\; 0$ $\qquad$ (5.37)

Sumando (5.36) y (5.37) tenemos

$$\left(x^2 - x^1\right)^T \left(C\, x^1 + p\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - x^1\right)^T C\, \left(x^2 + x^1\right) \;\geq\; 0$$

$$x^{2^T} \mathrm{C}\, \mathrm{x}^1 + x^{2^T} p \;-\; x^{1^T} C\, x^1 \;-\; x^{1^T} p \;+\; \frac{1}{2}x^{2^T} C\, x^2 \;-\; \frac{1}{2}x^{2^T} C\, x^1 \;-\; \frac{1}{2}x^{1^T} C\, x^2 \;+\; \frac{1}{2}x^{1^T} C\, x^1 \;\geq\; 0$$

$$\frac{1}{2}x^{2^T} \mathrm{C}\, \mathrm{x}^2 \;+\; x^{2^T} p \;-\; \frac{1}{2}x^{1^T} C\, x^1 \;-\; x^{1^T} p \geq 0$$

$$\frac{1}{2}x^{2^T} \mathrm{C}\, \mathrm{x}^2 \;+\; x^{2^T} p \;\geq\; \frac{1}{2}x^{1^T} C\, x^1 \;+\; x^{1^T} p \geq 0$$

$$\phi\, (\mathrm{x}^2) \;\geq\; \phi\, (\mathrm{x}^1) \tag{5.38}$$

Si $\frac{1}{2}\left(x^2 - x^1\right)^T C\left(x^2 - x^1\right) \;<\; 0$

Entonces por (5.35)

$$\left[C\, \left(x^2 - x^1\right)\right] \;\substack{\leq \\ -\\ >}\; 0 \;\; \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$$

Si

$$C\, \left(x^2 - x^1\right) \;<\; 0 \tag{5.39}$$

entonces

$$\left(x^2 - x^1\right)^T C \ < \ 0$$

Además $x^1 > 0$ (pues consideramos $x^1, x^1 \in \mathbb{R}_+^n - \{0\}$), entonces

$$\left(x^2 - x^1\right)^T C\, x^1 \ < \ 0 \tag{5.40}$$

Luego, por el Teorema 5.2.1

$$p^T \left(x^2 - x^1\right)^T < 0 \text{ implica que } \left(x^2 - x^1\right)^T p < 0 \tag{5.41}$$

Sumando (5.40) y (5.41)

$$\left(x^2 - x^1\right)^T C\, x^1 + \left(x^2 - x^1\right)^T p \ < \ 0$$

$$\left(x^2 - x^1\right)^T \left(C\, x^1 + p\right)^T \ < \ 0$$

Contradiciendo (5.36), entonces

$$C\left(x^2 - x^1\right) \ \geq \ 0 \tag{5.42}$$

Nuevamente por el teorema 5.2.1

$$p^T \left(x^2 - x^1\right)^T \ > \ 0 \tag{5.43}$$

multiplicando por $\frac{1}{2}\left(x^1 \ + \ x^2\right)^T$ a (5.42)

$$\frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right)^T C\left(x^2 - x^1\right) \ > \ 0 \tag{5.44}$$

sumando (5.43) y (5.44)

$$\frac{1}{2}\left(x^1 \ + \ x^2\right)^T C \ \left(x^2 \ - \ x^1\right) \ + \ p^T \left(x^2 \ - \ x^1\right) \ > \ 0$$

$$\frac{1}{2} x^{1^T} C\, x^2 \ - \ \frac{1}{2} x^{1^T} C\, x^1 \ + \ \frac{1}{2} x^{2^T} C\, x^2 - \ \frac{1}{2} x^{2^T} C\, x^1 \ + \ p^T x^2 \ - \ p^T x^1 > 0$$

$$\frac{1}{2} x^{2^T} C\, x^2 \ + \ p^T x^2 \ > \ \frac{1}{2} x^{1^T} C\, x^1 \ + \ p^T x^1 \ > \ 0$$

$$\phi\,(x^2) \ > \ \phi\,(x^1)$$

$$\phi\,(x^2) \ \geq \ \phi\,(x^1) \tag{5.45}$$

De (5.38) y (5.45) se prueba que ϕ pseudoconvexa ■

El siguiente corolario del Teorema 5.2.3 es muy importante para la aplicación del método de gradiente para resolver problemas de programación.

Corolario 5.2.2 Sea $X \subset \mathbb{R}^n_+$ convexo y ϕ satisfaciendo las condiciones del Teorema 5.2.3. Si $x^* \in X$, $x^* \neq 0$, satisface la siguiente desigualdad $\forall\, x \in X$

$$\left(x - x^*\right)^T \left(C\, x^* + p\right) \geq 0 \tag{5.46}$$

Entonces x^* es una solución óptima del problema $\min\left\{\ \phi\left(x\right) / \, x \in X\ \right\}$ o equivalente $\phi\left(x\right) \geq \phi\left(x^*\right)\ \forall\ x \in X$

Demostración. Por el Teorema 5.2.2

$$C \leq 0$$
$$p \leq 0$$

como $x^* \in X \subset \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$x^{*^T} C\, x^* \leq 0$$
$$\frac{1}{2} x^{*^T} C\, x^* \leq 0 \tag{5.47}$$
$$p^T x^* \leq 0 \tag{5.48}$$

debido a que $x^* > 0 \ y \ p^T \leq 0$, entonces

$$p^T x^* \leq 0$$

sumando (5.47) y (5.48)

$$\frac{1}{2} x^{*^T} C\, x^* + p^T x^* \leq 0$$
$$\phi\ (x^*) \leq 0 = \phi\ \left(0\right)$$
$$\phi\ (0) \geq \phi\ (x^*) \tag{5.49}$$

Por otro lado, por hipótesis

$$\left(x + x^*\right)^T \left(C\, x^* + p\right) \geq 0$$

Por Teorema (5.2.3)

$$\phi(\mathrm{x}) \geq \phi(x^*)\,; \;\; \forall\, x, x^* \in \mathbb{R}^n_+ - \{0\} \tag{5.50}$$

De (5.49) y (5.50)

$$\phi(x) \geq \phi(x^*); \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$$

así,

$$\phi(x) \geq \phi(x^*); \;\; \forall\, x \in X$$

■

Observación 5.2.2 La relación en (5.46) nos dice que la derivada direccional de ϕ es no negativa en x^* para cualquier dirección admisible y esto nos servirá como un criterio de optimalidad para las clases de funciones que estudiamos en el trabajo.

5.3 Solución de Programas Cuadráticas con Funciones Objetivos Cuasi-convexas

Considerar el problema de programación cuadrática (PC)

$$\begin{gathered}
\min \phi(x) = \frac{1}{2} x^T C\, x + p^T x \\
s.a \\
Ax + By = b \\
x \geq 0 \\
y \geq 0
\end{gathered}$$

Donde x es un n-vector de las variables que son relevantes con respecto a la función objetivo, y es un k -vector de las variables irrelevantes.

A y B son $m \times n$ y $m \times k$ matrices, respectivamente, y b es un m - vector

Introduciendo la notación $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y L = $\left\{ z / [A, B] z = b,\; z \geq 0 \right\}$ podemos escribir el problema (PC) en la forma:

$\min \left\{ \phi(x) / z \in L \right\}$

L Será llamada el conjunto admisible o viable. Los vectores z, x, y están distinguidos por el mismo índice inferior (es decir x_0, y_0 son subvectores de z_0)

Como hemos mencionado, varios métodos son conocidos para resolver (PC) siempre que ϕ es convexa. Estos métodos son más eficientes de los que vamos a considerar, pues nos limitamos al caso no convexo, a pesar de que estos métodos funcionan también para el caso convexo.

Consideramos las siguientes hipótesis

A. ϕ es cuasi-convexa en $\mathbb{R}_+^n$ no convexa.

B. L es no vacio y acotado.

Con estas condiciones, el Teorema 5.2.3 y Corolario 5.2.2 nos permitirá utilizar cualquier método de programación Pseudoconvexa para resolver el problema de programación cuadrática cuasi-convexa, o cualquier método que nos asegura la convergencia para un punto estacionario de Kuhn-Tucker $\left(x^*, y^*, z^*\right)$ con $x^* > 0$ permitirá obtener (5.46) y así obtenemos la optimalidad en el problema cuasi-convexo.

Observación 2.3.1 Tenemos dos observaciones

(a) Si se cumplen las hipótesis A y B por el Teorema 5.2.3, ϕ es Pseudoconvexa y así podemos utilizar cualquier método de programación Pseudoconvexa.

(b) Si se cumplen las condiciones del Corolario 5.2.2 y si usamos cualquier método donde obtengamos un punto estacionario mostraremos que se cumple (5.46). Y por el Corolario 5.2.2 se tendrá una solución óptima.

Para fijar ideas, escojamos el método de Frank y Wolfe. Como una representación de los métodos mencionados anteriormente.

Es bien conocido que

Este método converge a una solución óptima si la función objetivo es pseudoconvexa.

El algoritmo de Frank-Wolf es descrito como sigue:

i) Empezar con cualquier solución viable $\hat{z}^0 = z^1$ cuando aplicamos a nuestro problema $\hat{x}^0 = x^1 > 0$

ii) Generar una sucesión de soluciones básicas viables $\hat{z}^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3 \ldots$ y una sucesión de soluciones viables $z^1, z^2, \ldots$ tal que $\hat{z}^r$ es una solución básica optima del problema de programación lineal

PL(r):

$$\min\left\{x^T\left(C\,x^r + p\right)/\,z \in L\right\}$$

y

$$z^{r+1} = \lambda_r\,\hat{z}^r + (1-\lambda_r)\,z^r$$

Donde λ_r es una solución óptima del problema de minimización unidimensional:

$$\min\left\{\ \psi(\lambda) = \phi\,(\lambda\,\hat{x}^r + (1-\lambda)\,x^r)\ /\ 0 \leq \lambda \leq 1\ \right\}$$

Este último problema puede ser resuelto explícitamente.

* Si la solución $z^1, z^2, \ldots$ es finita entonces el último término es la solución óptima.

* Si la sucesión $z^1, z^2, \ldots$ es infinita entonces $\left\{z^n\right\}$ converge a una solución óptima.

Ejemplo 5.3.1

$$\text{minimizar}\,\phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{-1}{2}\left[(x_1)^2 + 4x_1x_2 + 14x_1x_3\right] - 5x_1$$

sujeto a:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$$
$$x_2 + 2x_3 \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Veamos que ϕ cumple las condiciones

La función objetivo ϕ es no convexa, pues el menor principal de la Hessiana de ϕ es negativo

$$\nabla^2\phi\ (x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_3\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_3\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es llamada la Hessiana

$$\nabla^2\phi\ (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Donde

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= -1 < 0 \\ \nabla_2 &= -4 < 0 \\ \nabla_3 &= 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Entonces ϕ es no convexa.

Ahora veamos $\phi(x)$ es cuasi-convexa para esto usaremos el Teorema 5.2.2 en $\mathbb{R}^n_+$ como

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Notemos que C tiene exactamente un autovalor negativo

$$|\ C - \lambda I\ | = \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -7 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ -7 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$|\, C-\lambda I \,| = (-1-\lambda)\lambda^2 + 2(2\lambda) - 7(-7\lambda) = 0$$

$$|\, C-\lambda I \,| = \lambda^3 + \lambda^2 - 53\lambda = 0$$

$$|\, C-\lambda I \,| = \lambda(\lambda^2 + \lambda - 53) = 0$$

$$\lambda = 0 \wedge \lambda^2 + \lambda - 53 = 0$$

Usando la formula general

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{213}}{2}$$

Efectivamente $\lambda = \frac{-1-\sqrt{213}}{2}$ es un autovalor negativo.

b) $C \leq 0 \Leftrightarrow x^t\, C\, x \leq 0\,, \forall x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$-x_1^2 - 2x_1\, x_2 - 7x_3\, x_1 - 2x_1\, x_2 - 7x_1\, x_3 < 0$$

c) $p = (-5, 0, 0)^T$, pues

$$\phi\,(x) = \frac{1}{2}\,(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $p \leq 0$ la cual cumple la condición del Teorema 5.2.2, (c).

d) Existe $q = (0,-1,1)^T \in \mathbb{R}^3$ tal que $C\,q = p$ y $p^T q \leq 0$

Notemos que

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{y} \quad \begin{pmatrix}-5, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix} \leq 0 \tag{5.51}$$

$$-q_1 - 2q_2 - 7q_3 = -5 \tag{5.52}$$

$$-2q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 0$$
$$-7q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 0$$
$$\Rightarrow q_1 = 0$$

En (5.52)

$$2q_2 + 7q_3 = 5$$

Consideremos $q_2 = -1,\ q_3 = 1$ satisface la igualdad en (5.52), veamos si satisface (5.51),

$$\begin{pmatrix}-5, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = 0 \leq 0$$

De esta manera se cumple a); b); c); d) y por el Teorema 5.2.2, ϕ es cuasi-convexa para $x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0.$

Observación 5.3.2 Debido a que C no tiene filas nulas entonces todas las variables son relevantes para ϕ (excepto quizás para las variables de holgura que pueden ser introducidas)

Además el conjunto viable o región factible

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,\ x_2 + 2x_3 \leq 12,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}.$$

El algoritmo de Frank y Wolfe procede de la siguiente manera:

Consideremos el problema

$$\min \phi\ (x_1, x_2, x_3) \ = \ \frac{-1}{2}\ \left\{ x_1^2 \ + \ 4x_1x_2 \ + 14x_1x_3 \right\} \ - \ 5x_1$$

$$s.a$$

$$2x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3 \ \leq \ 16$$

$$x_2 + \ 2x_3 \ \leq \ 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \ \geq \ 0$$

El cual se puede escribir como

$$\min \left\{ \ x^T \left(C\ x^r \ + \ p \right) / \ z \in L \ \right\},$$

Donde $z = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$L \ = \ \left\{ \ z / 2x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3 \ + \ x_4 \ = \ 16; \ \ x_2 \ + \ 2x_3 \ + \ x_5 \ = \ 12; \ \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ \geq \ 0 \ \right\}$$

Consideremos el punto viable: $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \ z^1 \ = \ \hat{z}^0 \ = \ \left(2, 12, 0, 0, 0 \right)$

$$\min \left\{ \left(x_1, x_2, x_3 \right) \ \left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) / \ z \in L \right\}$$

$$\min \left\{ \left(x_1, x_2, x_3 \right) \ \begin{pmatrix} -31 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} / \ z \in L \right\}$$

$$\begin{cases} \min -31x_1 \ - \ 4x_2 \ - \ 14x_3 \\ \\ \qquad\qquad s.a \\ \\ \qquad\qquad z \in L \end{cases}$$

Para calcular $z^{r+1} \ = \ \lambda_r \ \hat{z}^r \ + \ (1-\lambda_r) \ z^r$ debemos resolver el problema anterior, para ello usaremos el siguiente resultado.

Hallemos $\hat{z}^1$, resolviendo el problema

$$(I)\begin{cases}\min\ -31x_1 - 4x_2 - 14x_3\\ \qquad s.a\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\\ \quad x_2 + 2x_3 + x_5 = 12\\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\min\ -31x_1 - x_2 - 14x_3\\ \qquad s.a\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\\ \quad x_2 + 2x_3 + x_5 = 12\\ \quad -x_1 \leq 0\\ \quad -x_2 \leq 0\\ \quad -x_3 \leq 0\\ \quad -x_4 \leq 0\\ \quad -x_5 \leq 0\end{cases}$$

Usando el método de KKT.

$$l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = -31x_1 - 4x_2 - 14x_3 + t_1(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16) + t_2(x_2 + 2x_3 + x_5 - 12) - t_3x_1 - t_4x_2 - t_5x_3 - t_6x_4 - t_7x_5$$

$$-31 + 2t_1 - t_3 = 0$$
$$-4 + t_1 + t_2 - t_4 = 0$$
$$-14 + t_1 + 2t_2 - t_5 = 0$$
$$t_1 + t_6 = 0$$
$$t_2 - t_7 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 + x_5 - 12 = 0$$
$$t_3x_1 = 0$$
$$t_4x_2 = 0$$
$$t_5x_3 = 0$$
$$t_6x_4 = 0$$
$$t_7x_5 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 \geq 0$$

Resolviendo

Si $x_4 \neq 0 \Rightarrow t_6 = 0,\ t_1 = 0 \Rightarrow t_3 = -31\ (\Rightarrow\Leftarrow)\ (pues\ t_3 \geq 0)$

Entonces

$$x_4 = 0 \text{ implica que } t_1 \neq 0$$

Si $x_5 \neq 0,$ entonces $t_7 = 0\ y\ t_2 = 0$

$$t_4 = -4 + t_1 \geq 0 \tag{5.53}$$

$$t_5 = -14 + t_1 \geq 0 \tag{5.54}$$

$$t_3 = -31 + 2t_1 \geq 0 \tag{5.55}$$

De (5.53), (5.54), (5.55)

$$t_1 \geq \frac{31}{2} \tag{5.56}$$

remplazando (5.56) en (5.53)

$$t_4 = -4 + t_1 \geq \frac{31}{2} - 4 = \frac{23}{2} > 0$$

$$t_4 > 0 \Rightarrow t_4 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

remplazando (5.56) en (5.54)

$$t_5 = -14 + t_1 \geq \frac{31}{2} - 14 = \frac{3}{2} > 0$$

$$t_5 > 0 \Rightarrow t_5 \neq 0$$

entonces

$$x_3 = 0,\ x_1 = 8 \text{ y } x_5 = 12$$

entonces

$$\hat{z}^1 = (8,0,0,0,12)$$

Notamos que el punto que minimiza la función en el problema (I) es

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{y}^1 \end{pmatrix} = \hat{z}^1 = (8,0,0,0,12) = (\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}_3^1, \hat{x}_4^1, \hat{x}_5^1)$$

Ahora debemos encontrar λ_1 resolviendo el problema cuadrático unidimensional

$$\min\left\{ \psi(x) = \phi\,(\lambda_1\, \hat{x}^1 + (1-\lambda_1)\, x^1) \,/\, 0 \le \lambda_1 \le 1 \right\}$$

$$\min\left\{ \psi(x) = \phi\,(\lambda_1\, (8,0,0) + (1-\lambda_1)\, (2,12,0)) \,/\, 0 \le \lambda_1 \le 1 \right\}$$

$$\psi(x) = \phi\,(6\lambda_1 + 2,\ 12 - 12\lambda_1,\ 0) \,/\ 0 \le \lambda_1 \le 1$$

evaluando en ϕ,

$$\min\left\{ \psi(\lambda_1) = -\frac{1}{2}\left[(6\lambda_1+2)^2 + 4(6\lambda_1+2)\,(12-12\lambda_1)\right] - 5(6\lambda_1+2) \,/\, 0 \le \lambda_1 \le 1 \right\}$$

$$\psi(\lambda) = -\left[2(3\lambda_1+1)^2 + 2(6\lambda_1+2)(12-12\lambda_1)\right] - 5(6\lambda_1+2)$$

$$\psi(\lambda) = -18\lambda_1^2 - 12\lambda_1 - 2 - 144\lambda_1 + 144\lambda_1^2 - 48 + 48\lambda_1 - 30\lambda_1 - 10$$

$$\psi(\lambda) = 126\lambda_1^2 - 138\lambda_1 - 60$$

$$\min\left\{\psi(\lambda) = 126\lambda_1^2 - 138\lambda_1 - 60 \,/\ 0 \le \lambda_1 \le 1\right\} \qquad (5.57)$$

Es claro que, resolviendo la ecuación $\psi'\,(\lambda) = 0$, obtenemos la solución óptima del problema (5.57).

En efecto, derivando

$$126.2\lambda_1 - 138 = 0$$

entonces,

$$\lambda_1 = \frac{23}{42} \text{ es óptimo para (5.57).}$$

Hallando z^2 :

$$z^2 = \lambda_1\, \hat{z}^1 + (1-\lambda_1)\, z^1$$

$$z^2 = \frac{23}{42}(8,0,0,0,12) + \frac{19}{42}(2,12,0,0,0)$$

$$z^2 = \left(\frac{37}{7}, \frac{38}{7}, 0, 0, \frac{46}{7}\right)$$

$$\min\left\{ (x_1, x_2, x_3)\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{37}{2} \\ \frac{38}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) / z \in L \right\}$$

$$\min\left\{ (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -\frac{148}{7} \\ -\frac{74}{7} \\ -\frac{259}{7} \end{pmatrix} / z \in L \right\}$$

$$\begin{cases} \min \ -\frac{148}{7}x_1 - \frac{74}{7}4x_2 - \frac{259}{7}x_3 = -\frac{1}{7}(148x_1 + 74x_2 + 259x_3) \\ s.a \\ z \in L \end{cases}$$

Para calcular $z^{r+1} = \lambda_r \hat{z}^r + (1-\lambda_r) z^r$, para $r = 2$ debemos resolver el problema anterior, para ello usaremos el siguiente resultado.

Hallemos $\hat{z}^2$, resolviendo el problema

$$(II)\begin{cases} \min\ -\frac{1}{7}(148x_1 + 74x_2 + 259x_3) \\ \qquad s.a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ -\frac{1}{7}(148x_1 + 74x_2 + 259x_3) \\ \qquad s.a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ \quad -x_1 \leq 0 \\ \quad -x_2 \leq 0 \\ \quad -x_3 \leq 0 \\ \quad -x_4 \leq 0 \\ \quad -x_5 \leq 0 \end{cases}$$

Usando el método de KKT.

$$l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = -\frac{1}{7}(148x_1 + 74x_2 + 259x_3)$$
$$t_1(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16) + t_2(x_2 + 2x_3 + x_5 - 12)$$
$$-t_3x_1 - t_4x_2 - t_5x_3 - t_6x_4 - t_7x_5$$

$$-\frac{148}{7} + 2t_1 - t_3 = 0$$
$$-\frac{74}{7} + t_1 + t_2 - t_4 = 0$$
$$-37 + t_1 + 2t_2 - t_5 = 0$$
$$t_1 + t_6 = 0$$
$$t_2 - t_7 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 + x_5 - 12 = 0$$
$$t_3x_1 = 0$$
$$t_4x_2 = 0$$
$$t_5x_3 = 0$$
$$t_6x_4 = 0$$
$$t_7x_5 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 \geq 0$$

Resolviendo

Si $x_4 \neq 0 \Rightarrow t_6 = 0, t_1 = 0 \Rightarrow t_3 = -\frac{148}{7}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ $(pues\ t_3 \geq 0)$

Entonces

$$x_4 = 0$$

Si $x_5 \neq 0,$ entonces $t_7 = 0\ y\ t_2 = 0$

$$t_4 = -\frac{74}{7} + t_1 \geq 0 \tag{5.58}$$
$$t_5 = -37 + t_1 \geq 0 \tag{5.59}$$
$$t_3 = -\frac{148}{7} + 2t_1 \geq 0 \tag{5.60}$$

De (5.58), (5.59), (5.60)

$$t_1 \geq 37 \tag{5.61}$$

remplazando (5.61) en (5.58)

$$t_4 = -\frac{74}{7} + t_1 \geq 37 - \frac{74}{7} = \frac{185}{7} > 0$$
$$t_4 > 0 \Rightarrow t_4 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

remplazando (5.61) en (5.60)

$$2t_1 \geq 74$$
$$t_3 = -\frac{148}{7} + 2t_1 \geq 74 - \frac{148}{7} = \frac{370}{7} > 0$$
$$t_3 > 0 \Rightarrow t_3 \neq 0$$

entonces $x_1 = 0$

como $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ y $x_4 = 0$ entonces $x_3 = 16$

entonces $x_5 = -20\ (\Rightarrow\Leftarrow)$

por lo tanto $x_5 = 0$

ahora

$$t_5 \neq 0 \text{ entonces } x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

como $x_3 = 0$ entonces $t_4 = 0$ y $t_2 = \frac{20}{7}$

como $x_1 = 0$ entonces $t_3 = 0$ y $t_1 = \frac{54}{7}$

entonces $t_5 = -\frac{165}{7}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ por lo tanto $t_5 = 0$

$t_4 \neq 0$ entonces $x_2 = 0$ y $x_3 = 6$

entonces $t_5 = 0$ luego $x_1 = 5$ por lo tanto $t_3 = 0, t_1 = \frac{74}{7}, t_6 = \frac{74}{7}, t_2 = t_7 = \frac{155}{14}$ y

$t_4 = \frac{155}{14}$

entonces

$$\hat{z}^2 = (5, 0, 6, 0, 0)$$

Notamos que el punto que minimiza la función en el problema (II) es

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^2 \\ \hat{y}^2 \end{pmatrix} = \hat{z}^2 = (5,0,6,0,0) = (\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2, \hat{x}_3^2, \hat{x}_4^2, \hat{x}_5^2)$$

Ahora debemos encontrar λ_2 resolviendo el problema cuadrático unidimensional

$$\min\left\{ \psi(x) = \phi\,(\lambda_2\ \hat{x}^2 + (1-\lambda_2)\ x^2)\,/\,0 \le \lambda_2 \le 1 \right\}$$

$$\min\left\{ \psi(x) = \phi\,(\lambda_2\ (5,0,6) + (1-\lambda_2)\ (\frac{37}{7},\frac{38}{7},0))\,/\,0 \le \lambda_2 \le 1 \right\}$$

$$\psi(x) = \phi\,(\frac{37}{7}-\frac{2\lambda_2}{7},\ \frac{38}{7}-\frac{38\lambda_2}{7},\ 6\lambda_2)\,/\ \ 0 \le \lambda_2 \le 1$$

evaluando en ϕ,

$$\min\left\{ \begin{array}{l} \psi(\lambda_2) = -\frac{1}{2}\left[(\frac{37-2\lambda_2}{7})^2 + 4(\frac{37-2\lambda_2}{7})\ (\frac{38-38\lambda_2}{7}) + 14(\frac{37-2\lambda_2}{7})\ (6\lambda_2) \right] \\ \qquad -5(\frac{37-2\lambda_2}{7})\,/\,0 \le \lambda_2 \le 1 \end{array} \right\} \quad (5.62)$$

Es claro que, resolviendo la ecuación $\psi'\ (\lambda_2) = 0$, obtenemos la solución óptima del problema (5.62).

En efecto, derivando

$\lambda_2 = 1$ es óptimo para (5.62).

Hallando z^3 :

$$z^3 = \lambda_2\ \hat{z}^2 + (1-\lambda_2)\ z^2$$

$$z^3 = 1(5,0,6,0,10) + 0(\frac{37}{7},\frac{38}{7},0,0,\frac{46}{7})$$

$$z^3 = \left(5,0,6,0,0\right)$$

y en forma análoga , se vuelve a realizar otra iteración y se obtiene $z^4 = z^3$ el cual es el óptimo del problema cuadrático.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

- Uno de los resultados más importantes en el presente trabajo de investigación es el deducir condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a las funciones cuadráticas cuasi-convexas en el ortante no negativo.
- Otro resultado obtenido en el presente trabajo es que cierto grupo de problemas de programación pseudoconvexos pueden ser resuelto mediante problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos con restricciones lineales.
- Se ha presentado el algoritmo de Frank y Wolfe para resolver problemas de programación cuasi-convexa.

6.2 Contrastación de resultados con otros resultados similares

- Para Acebedo en su tesis “Algoritmo de Espacio Rango para Programación Cuadrática” es un algoritmo eficaz, con mejores tiempos de respuesta que el Algoritmo de Espacio Nulo para Programación Cuadrática (NSAQP), calculando la solución óptima para problemas bien condicionados, mal condicionados, con degeneración y sin degeneración, con la función objetivo convexa, restricciones de desigualdad del tipo mayor o igual y con matriz Hessiana definida positiva. Comparando con la tesis Programación Cuadrática con una Función Objetivo Cuasi- convexa, también, se llega a la función objetivo, usando el método de Frank y Wolfe, donde la función cuadrática es función no convexa y sus restricciones o región factible son funciones lineales.

- Para Illescas Cangalaya en su tesis “Solución de un Problema de Operadores Monótonos Maximales usando el Algoritmo de Punto Proximal” utiliza el algoritmo de punto proximal para operadores Monotomos Maximales al obtener la solución de encontrar un $x^* \in \Box$ tal que $0 \in T(x^*)$ obtiene la solución de un problema de optimización convexa. En comparación con la tesis

Programación Cuadrática con una Función Objetivo Cuasi-convexa se utiliza condiciones necesarias y suficientes que caracterizan a la función cuadrática cuasi-convexa y luego se utiliza el algoritmo de Frank y Wolfe, que describe, que si la sucesión o puntos óptimos es finito, el ultimo termino es la solución óptima y si la sucesión es infinita, entonces converge a la solución óptima del problema.

- Astete Chuquichaico, en su tesis "Metodología para Mejorar el Proceso de Asignación de Tráfico a una Red de Transporte" manifiesta que el algoritmo de Frank-Wolfe es una combinación del método del gradiente con un método de optimización lineal, por lo que es adecuado para la asignación de viajes en redes de transporte ya que estos últimos son un problema de optimización no lineal.

  Para trabajar una matriz de asignación de viajes, el algoritmo resuelve un origen contra varios destinos lo que quiere decir que se debe de aplicar el algoritmo para cada origen nuevamente.

  El algoritmo de Frank-Wolfe es más fácilmente automatizable que otros algoritmos como el de multiplicadores de Lagrange.

  Este método de Frank y Wolfe es utilizada para problemas no lineales de programación y abarca en el campo de trasporte especialmente en el de asignación de tráficos. Este método va optimizar la función objetivo, en cada iteración que se hace se aproximara a la solución. Es necesario contar con herramientas analíticas y tecnológicas que permitan disponer una metodología de alternativas de solución a la complejidad del incremento del tráfico urbano y que afecta a la calidad de vida del ciudadano. En comparación, con la tesis Programación Cuadrática con una Función Objetivo Cuasi-convexa, se caracteriza a las funciones cuasi-convexas a peudoconvexas para utilizar el método de Frank y Wolfe.

6.3 Responsabilidad ética

La presente investigación de tesis titulada "PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA CON UNA FUNCIÓN OBJETIVO CUASI-CONVEXA" se desarrolló con las teorías de funciones convexas y diferenciables, que se menciona en las citas bibliográficas que hacen referencia al tema en mención.

La responsabilidad al ejecutar la tesis se contó con asesores de la línea de investigación de la Escuela Profesional de Matemática. Así como coasesores (Dr. Erik Papa Quiroz) que dominan la línea de optimización.

CONCLUSIONES

- El enfoque del trabajo contribuye al progreso en la solución eficiente de problemas de minimización con funciones objetivos cuadráticos cuasi-convexos en el ortante no negativo.
- Se pudo constatar que los problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos tiene una gran importancia en la solución de problemas de programación pseudoconvexos, debido a que encontró condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a las funciones cuasi-convexas.
- Se utilizó el método de Frank y Wolfe para optimizar problemas cuasi-convexas

RECOMENDACIONES

- En futuras investigaciones se espera mejorar esta caracterización de las funciones cuadráticas cuasi-convexas, de manera que no tenga dependencia de la matriz C.
- En futuros trabajos se espera estudiar otros métodos de programación pseudoconvexa y analizar si los resultados obtenidos en el presente trabajo son también aplicables a ellos.
- En trabajos futuros se desea presentar algoritmos de programación numérica en Matlab usando el método de Frank y Wolfe para programación cuadráticas cuasi-convexas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] *E.M.L.BEALE, On Minimizing a Convex Function Subject to Linea Inequalities, J. toy. Stat.* 17,173-184 (1955).

[2] *P. CANALES GARCIA, teoria y aplicaciones de optimización, Franco, Lima, Perú,* (2018).

[3] *CROUZEIX J.P., OCAÑA E. y SOSA W., Análisis convexo, IMCA monografía N°*33, (2003).

[4] *IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, Otimização Volume* 1: *Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade, IMPA,* (2005).

[5] *IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, Otimização Volume* 2: *Métodos Computacionais, IMPA,* (2007).

[6] *E. LAGES LIMA, Curso de Análisis Matemático I, Edición española,* (1991).

[7] *E. LAGES LIMA, Análisis Real, Volumen II, Rio de Janeiro: IMPA,* (2004).

[8] *J. MÁRQUEZ DIEZ – CANEDO, Fundamentos de Teoría de Optimización, Editorial Limusa,* 203, (1987).

[9] *E. A. PAPA QUIROZ, Optimización Continua, vol* 1, (2009).

[10] *N. MERENTES y S. RIVAS, El desrrollo del concepto de función convexa, escuela Venezolana de matemáticas, EMALCA – Venezuela* (2013).

[11] *C. VAN DE PANNE AND A. WHINSTON, the Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming, Opnal. Res. Quart.* 15, 355 – 388 (1964).

[12] *P.WOLFE, The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica* 27, 382 – 398 (1959).

[13] *R. BENAZIC TOMÉ,* Topología *en Espacios Euclidianos, IMCA, Lima, Perú* (2000).

[14] *I . ACEVEDO BAUTISTA, en su tesis* Algoritmo *de Espacio Rango para* Programación *Cuadrática, Universidad* Tecnologica *de la Mixteca,* 2005.

[15] *E. SOTO APOLINAR*, Diccionario Ilusrado de Conceptos Matemáticos, México, 2011.

[16] O. ILLESCA CANGALAYA, *en su tesis Solución de un* Problema *de Operadores Monotomos Maximales,Universidad Nacional del Callao,*(2016).

[17] R.G.ASTETE CHUQUICHAICO, *en su tesis* Metodología *para Mejorar el* Proceso *de Asignación de Tráfico a una* Red *de Transporte,Universidad Nacional de Ingenieria, Lima, Perú* (2011).

[18] *J.AMAYA.A, texto pre*lim*inar, optimizacion para estudiantes de ingenieria, Departamento de Ingenieria Matemática y Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile,* (2003).

- # Anexo

Matriz de consistencia

Programación Cuadrática con una Función Objetivo Cuasi-convexa			
Problema general. ¿Es posible establecer un método que optimice y resuelva la función cuadrática cuasi-convexa? **Especifico 1.** ¿Existe condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa? **Especifico 2.** ¿Existe condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa?	**Objetivo general**. Determinar el método para optimizar la función cuadrática cuasi convexa que lo resuelva. **Especifico 1** Determinar las condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa. **Especifico 2** Determinar las condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi-convexa.	**Hipótesis general.** Sí existe el método para optimizar la función cuadrática cuasi-convexa con el método de Frank y Wolfe. **Especifica 1** Sí existen las condiciones necesarias para optimizar una función cuadrática cuasi convexa utilizando resultados principales de teoremas, proposiciones y corolarios. **Especifico 2** Sí existen las condiciones suficientes para optimizar una función cuadrática cuasi convexa utilizando resultados principales de teoremas, proposiciones y corolarios.	**Metodología.** **Tipo y diseño de la investigación** El método fue de tipo deductivo y analítico. La investigación de la tesis es no experimental debido a que no se manipulan las variables. En la primera parte presentaremos un problema de optimización, el cual busca una solución óptima para maximizar o minimizar una función, luego analizaremos las restricciones (condicione necesarias y suficientes). En la segunda parte, desarrollamos un método de optimización con el fin de obtener una solución óptima al problema de minimización. **Población y muestra** Por ser nuestro trabajo netamente teórico-básico, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso en espacio euclidiano en el ortante no negativo. **Técnica e instrumento de recolección de datos** Para le realización de la tesis se realizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer texto, en forma detallada, para ello se revisó bibliografía especializada de funciones cuasi-convexas, pseudoconvexas, además recopilación de información obtenida vía internet, página del Instituto de Matemática y Ciencias Afines *(IMCA)*, Consejo Nacional de Ciencia, tecnología e Innovación Tecnológica *(CONCYTEC)*, repositorio de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos *(UNMSM)*, Universidad Nacional del Callao (*UNAC*) de la Facultad de Matemática, libros, proyectos y tesis relacionados al tema de interés. **Análisis y procesamiento de datos** Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.