UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

CONVERGENCIA Y EFICIENCIA DE UN MÉTODO DE SUBGRADIENTE PARA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES CUASI-CONVEXAS

TESÍS PARA OPTAR EL GRADO ACÁDEMICO DE TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

JOEL HECTOR VILLENA AIRE

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN.

CONVERGENCIA Y EFICIENCIA DE UN MÉTODO DE SUBGRADIENTE PARA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES CUASI-CONVEXAS

VILLENA AIRE JOEL HECTOR

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática con resolución decanal N°147-2018-D-FCNM, fecha de aprobación de la tesis 11 de enero del 2019

Aprobado por:

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Elmer Alberto León Zarate
Secretario

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Asesor

Callao - 2019
PERÚ

DEDICATORIA

A mi padre Juan (que en paz descanse), a mi madre Teresa, a mí compañera de toda la vida María, a mis hermanos y con mucho afecto a mi estimado tío Albino, por todo su apoyo incondicional a cambio de nada, infinitamente gracias.

AGRADECIMIENTO

- En primer lugar agradecer a Dios por darme salud y paz, así como la luz hacia el conocimento.

- Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor Mg. Edinson, Montoro Alegre, por compartir sus conocimientos en el desarrollo de está tesis.

- Agradesco al Dr. Coloníbol, Torres Bardales de la Maestria en Investigación y Docencia Universitaria de FCE de la Universidad Nacional del Callao, por compartir sus conocimientos, sus experiencias, y sobre todo su alegria, que de una u otra manera fortalecierón en mi aprendizaje.

- Mi agradecimiento a mi compañera incondicional y futura investigadora Mg. María Camarena Amaya por siempre estar apoyándome animicamente, academicamente cuando ya no había fuerzas, infinitamente gracias.

- Finalmente agradecer a todos los docentes, compañeros, que con sus sabiduría, conocimiento y apoyo, me motivarón a desarrollarme como persona y como profesional de la Universidad Nacional del Callao.

Índice

Resumen

En el presente trabajo de investigación se estudió un Método de Subgradiente Proyectado general para minimizar una función objetivo cuasi-convexa sujeta a un subconjunto de restricciones convexo de un espacio de Hilbert. Nuestro marco es general; debido a que se considera la función objetivo semicontinua superiormente en su dominio, el cual no necesariamente tiene que ser abierto, y asi mismo consideraremos diferentes subdiferenciales que podran ser utilizados [1],[14][15],[16],[20].

Con todo esto, se extiende los resultados obtenidos de anteriores, de $\mathbb{R}^n$ a espacion de Hilbert investigaciones, demostrando la convergencia del método en los valores objetivos y la solución generalizada para establecer tamaños de paso clásico $t_k \to 0$, $\sum t_k = \infty$.

Abstract

We study a general subgradient projection method for minimizing a quasiconvex objetive subject to a convex set constraint in a Hilbert space. Our setting is very general:the objetive is only upper semicontinuous on its domain which need not be open, and variosus subdifferentials may be used [1],[14][15],[16],[20].
We extend previous results by proving convergence in objetive values and to the generalized solution set for classical stepsizes $t_k \to 0$, $\sum t_k = \infty$.

Introducción

En el estudio de problemas de minimización(maximización) de funciones de dimensión finita o infinita, los conceptos de semicontinuidad inferior(superior) y compacidad juegan un papel importante en el área de la Optimización. Tales nociones han ido entendiendose cada vez más, lo que ha permitido introducir nuevas técnicas y nuevas herramientas matemáticas, también es cierto que los nuevos problemas son más complejos en su formulación y por lo tanto se está requeriendo de herramientas matemáticas más sofisticadas o adoptación de técnicas propias de otras disciplinas. El método para optimizar funciones no diferenciables pero convexas, es el método de subgradiente, fue desarrollado por el Sovietico Naum Zuselevich Shor en el año de 1979, fue uno de los pioneros en la optimización de funciones no diferenciales.
Consideremos el problema de minimización:

$$\inf\{\, f(x) \;:\; x \in X\}, \tag{1}$$

donde X es un subconjunto cerrado convexo de un espacio de Hilbert H.
Bajo algunas hipótesis en su función objetivo f y en su conjunto de restricciones X, estudiaremos el Método del Subgradiente Proyectado para resolver este problema.
Este método genera la sucesión $\{x^k\}$ en X, tomando longitud de paso $t_k > 0$ de x^k en la dirección opuesta del subgradiente de f en x^k y proyectando el punto resultante en X. Aquí el subgradiente significa un elemento del cono normal para el conjunto de nivel de f en x^k, y varios conjuntos de nivel dan diferentes subdiferenciales, existiendo asi diversos métodos de subgradientes.
Nuestro objetivo principal es el de extender los resultados de convergencia existentes para tales métodos, usando longitud de pasos convergentes $t_k \to 0$ con $\sum t_k = \infty$. Por

ejemplo, el Método Subgradiente uno de los métodos más utilizados es la Relajación Lagrangiana, donde por lo general f es continua y el problema (1) tiene el conjunto óptimal no vacío $X^* := Arg\, min_X\, f$.

En el marco teórico, se presenta algunas notaciones, definiciones de subdiferenciales generalizados y subconjuntos del subdiferencial de Fenchel,conjuntos de nivel y algunos ejemplos de aplicación.

En el desarrollo del trabajo de investigación, se presentará el algoritmo del subgradiente mostrándose la convergencia de los valores objetivos sujeto a $t_k \to 0$ y $\sum t_k = \infty$ y algunos resultados de convergencia finita. La estructura la de tesis esta conformada de 6 capítulos:

En el primer capítulo se muestra el planteamiento del problema donde se analiza la descripción de la realidad problemática de las funciones cuasi-convexas no diferenciables cuya formulación del problema es: ¿Es óptimo el método de subgradiente proyectado para la minimización de funciones cuasi-convexas?. Como objetivo de investigación es demostrar el método subgradiente para la minimización de funciones cuasi-convexas, finalmente mostraremos las limitantes de la investigación.

En segundo capítulo se muestra los antecedentes con respecto a este trabajo y las teorías y propiedades en el espacio de **Hilbert** necesarios para el desarrollo de la tesis que se usara a lo largo de su desarrollo, asi como los terminos básicos que se utilizó en la trabajo de investigación.

Tercer y cuarto capítulo se plantea la hipótesis que fue demostrada, también se define las variables y las dimensiones así como la operacionalizacion de variables. Además, la metodológia de la investigación así como la población y muestra, técnicas e intrumentos para la recolección de la información documental y finalmente análisis y procesamiento de datos.

Quinto capítulo se desarrolla las teorías de semicontinuidad(superior, inferior), los diferentes subdiferenciales con diferentes conjuntos de nivel, las condiciones necesarias y suficientes para el Algoritmo del subgradiente.

Sexto capítulo se hará una discusión con los resultados obtenidos sobre los subgradientes generalizados que se haya podido exetender el algoritmo del subgradiente proyectado

Capítulo 1

Planteamineto del problema

1.1 Descripción de la realidad problemática

La Optimización, es una rama de la Matemática Aplicada, que estudia problemas de minimización y maximización de funciones, sujeta a ninguna o algunas restricciones sobre su dominio, para resolver estos tipos de problemas cuando la función objetivo es convexa y diferenciable, existen varios métodos tales como: método de gradiente, método de penalización cuadratica, método de Newton generalizado,método cuasi-Newton, etc. El problema radica cuando la función objetivo no es convexa. Es así que el matemático Jhon Von Neuman [15], se interesó en estudio de las funciones cuasi-convexas (1928) en un trabajo sobre teoría de juegos, Algunas propiedades de estas funciones y una variedad de ejemplos están expuestas en el libro [16],[17]. Sin embargo el problema se dificulta aún más cuando la función objetivo no es diferenciable.
Consideremos el problema de minimización con las siguientes características.

$$min\{f(x) \, : \, x \in X\}, \tag{1.1}$$

La función a optimizar no poseen derivadas en algunos puntos de su dominio, donde posiblemente tenga un punto óptimo, la funcion objetivo es cuasi-convexa definido en un conjunto convexo. Los métodos para optimizar una función, consiste, que a partir de un punto inicial, se genera un segundo punto y apartir de este último punto se genera un tercer punto y así sucesivamente hasta llegar a un punto óptimo que se aproxima a la

solución del problema (1.1). Para tal fin se utiliza el método de subgradiente proyectado buscando condiciones necesarias y suficientes que reemplacen las técnicas del cálculo diferencial clásico. El método de subgradiente proyectado para (Navarro Rojas[2013],[14]) la define de la siguiente forma:
$x^{k+1} = x^k - l_k d_k$, donde $d_k \in \partial^\circ f(x^k)$. En el caso de no encontrar las condiciones necesarias y suficientes por el método que optimice la función, las aplicaciones prácticas de optimización computacional: en economía, teoría de control, relajación Lagrangeana y otros no se podrían resolver.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema general

Se quiere resolver la siguiente interrogante
¿Es óptimo el método de subgradiente proyectado para la minimización de funciones cuasi-convexas?

1.2.2 Problema específico

a. ¿Es convergente el método subgradiente para minimización de funciones cuasi-convexas?

b. ¿Es eficiente el método de subgradiente para funciones cuasi-convexas?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Demostrar el método subgradiente para la minimización de funciones cuasi-convexas

1.3.2 Objetivo específico

a. Estudiar la Convergencia del método subgradiente para minimizar las funciones cuasi-convexas.

b. Determinar la eficiencia del método de subgradiente para funciones cuasi-convexas

1.4 Limitantes

1.4.1 Teórico

En la actualidad, la Optimización matemática, es de gran interés debido a sus múltiples aplicaciones en las áreas de: Economía, Administración, Ciencias Básicas e Ingenierías, etc. Estos problemas se pueden modelar mejor usando: Análisis estadístico, minería de datos, beneficio y gastos de una empresa, costo de producción de un determinado producto, Sin embargo, debido que cada problema tiene su propia naturaleza se necesita de otras herramientas matemáticas para una mejor comprensión.

La teoría de apoyo, para el desarrollo de la tesis es: optimización conexa cuya función objetivo son funciones cuasi-convexas, para tal efecto se utilizó libros, revistas especializadas, artículos científicos, sugerencias de docentes especialistas y otras fuentes documentales. Cabe mencionar que las teo´rias que se utilizo en la investigación es: análisis convexo de Crouzeix (2013), asi como la optimización continua de Papa Quiroz (2009), algunos artículos sobre métodos iterativos para encontrar soluciones óptimas asi como: el operadores monótonos y el punto proximal de Rockafeller (1976), método del punto proximal de Guler (1991)

1.4.2 Temporal

El estudio es de tipo longitudinal se inició en julio del 2018 y se concluyó en enero del 2019

1.4.3 Espacial

El trabajo se realizó en la biblioteca especializada de Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional de Callao. Las unidades de análisis le corresponden al análisis convexo cuya función objetivo es cuasi-convexa.

Capítulo 2

Marco Teoríco

2.1 Antecedentes de estudio

2.1.1 Internacional

- **Nava, R. (2015)**, en su tesis titulada "Funciones convexas no diferenciables", de la Universidad Autónoma Metropolitana (México), planteo como objetivo estudiar diversos métodos (subgradiente, bundle y métodos con operador próximo) utilizados para resolver problemas de optimización no diferenciable, aplicarlos a una serie de problemas y comparar los resultados con otros métodos, se concluye finalmente que los métodos que utilizan el operador próximo fueron superiores al método de subgradiente y al método bundle. El tipo de investigación es no experimental, cuyo método de investigación es deductiva, se utilizó demostraciones de tipo directo indirecto,

2.1.2 Nacional

- **Navarro, F. (2013)**, en su tesis titulada "Algunas aplicaciones y extensión del método del subgradiente", se plantea como objetivo general extender el método del subgradiente proyectado para funciones cuasi-convexas que cumplan la condiciónes necesarias de *Ludwig Hölder* sobre el conjunto factible, además se probará un resultado de convergencia. Este trabajo se elaboró utilizando la metodología inductivo-deductiva. Los resultados obtenidos por el método de subgradiente son para funciones convexas.

- **Mandujano, J. (2013)**, en su tesis titulada “solución de un problema de desigualdad variacional en usando el método del punto proximal exacto con distancia de bregman”, planteo como objetivo general obtener la solución del problema de desigualdad variacional para operadores T en el conjunto C en $\mathbb{R}^n$ mediante el método de punto proximal exacto con distancia de Bregman, este trabajo de investigación se desarrolló en la línea de análisis numéricos y matemática computacional cuya metodología es deductivo, finalmente se concluye que toda distancia de Bregman es una cuasi-distancia, pero en general toda distancia de Bregman no es una distancia En está tesis proporcionada se tomará en cuenta los subdiferenciales usado en el método del punto proximal.

- **Fernández, N. (2013)**, en su tesis titulada “comportamiento del precio y publicidad en la proporción de clientes en un problema de, control óptimo” planteo como objetivo fundamental, presentar y analizar el comportamiento de variables de control publicidad y precio y variable de estado proporción de clientes, en un problema de control óptimo. Este trabajo es importante, desde que se modela matemáticamente un problema económico, y se analiza el comportamiento de sus variables de control (publicidad y precio) y estado (proporción de clientes) utilizando herramientas de optimización dinámica, la investigación es de tipo científico-teórica y la metodología a emplear durante la ejecución del proyecto consiste en un enfoque inductivo deductivo, se concluye que si la proporción de clientes es menor (mayor) que el valor de equilibrio, la empresa disminuirá (aumentará) el precio del producto en el mercado y simultáneamente aumentará (disminuirá) el presupuesto publicitario.

2.2 Marco

En esta sección presentamos las notaciones, definiciones y resultados importantes necesarias para el desarrollo del trabajo de investigación.

2.2.1 Teórico

- **Símbolos y Notaciones**

A lo largo de este trabajo adoptaremos las siguientes terminologías como lo sugiere Izmailov (2007) en su lista de notaciones

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales;

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: valor real extendido;

$L_{f,X}(c) = \{x \in X \, : \, f(x) \leq c\}$: denota el conjunto de nivel de la función f en el conjunto X, asociado a $c \in \mathbb{R}$;

$epi(f) = \{(x, \lambda) \, : \, f(x) \leq \lambda\}$: denota el epigrafo de la función f;

$f'(x; d)$: denota la derivada direccional de f;

$\nabla f(x)$: denota el gradiente de f en x;

$\partial f(x)$: denota el subdiferencial de Fenchel de f en x;

Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert:
$\langle x, z \rangle$: denota el producto interno entre $x, z \in \mathcal{H}$;

$\|x\|$: denota la norma inducida por el producto interno de $x \in \mathcal{H}$;

$\{x^k\} = \{x^0, x^1, \ldots, x^k, \ldots\}$: denota una sucesión de puntos en $\mathcal{H}$;

$x^k \to x \;\; (k \to +\infty)$: denota que la sucesión $\{x^k\}$ converge a un punto x;

$B(x, \epsilon) := \{y \in \mathcal{H} \, : \, |y - x| \leq \epsilon\}$: denota la bola con centro x y radio ϵ.

$r.i\, C$: denota el interior relativo del conjunto C;

$\overset{\circ}{C} = int\, C$: denotan el interior del conjunto C;

$\bar{C} = cl\, C$: denotan la clausura del conjunto C. (p.vii)

• Espacio de Hilbert

Definición 2.1 *(Pedro J. Miana[2006],[31]) Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Un producto escalar o producto interno sobre H es una aplicación*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que

(i). $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para* $x \in H$ *y* $\langle x, x \rangle = 0$, *si y sólo si,* $x = \theta$; *donde* θ *es el vector nulo.*

(ii). $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *para todo* $x, y \in H$.

(iii). $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ *para todo* $x, y \in H$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

El par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *se llama espacio pre-Hilbert*

Definición 2.2 *Un espacio pre-Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sedic de Hilbert si es completo con la topología asociada al producto escalar, es decir, a la norma definida por éste.*

• Algunos Resultados del Análisis Convexo

A lo largo del trabajo de investigación consideremos $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|\cdot\|$.
Un conjunto convexo se define según Pierre Crouzeix (2002)

Definición 2.3 *Un conjunto $C \subset \mathcal{H}$ es convexo si:*

$$C = \emptyset \quad o \quad \text{para todo} \quad x, y \in C \ : \lambda x + (1 - \lambda) y \in C, \ \text{para todo} \quad \lambda \in [0, 1] \quad (p.1)$$

Los siguientes conjuntos se define según Pierre Crouzeix (2003)

Definición 2.4 *Dada una función $f : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a valores reales extendidos.*

1. *El dominio efectivo de f es definido por:* $\mathcal{D}_f := \{x \in \mathcal{H} \ : \ f(x) < +\infty\}$;

2. *f es llamada una función propia si :* $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$ *y* $f(x) > -\infty$, *para todo* $x \in \mathcal{D}_f$;

3. *El conjunto de nivel de f es definido por:* $\quad L_{f,\alpha} := \{y \in \mathcal{H} \,:\, f(y) \leq \alpha\}$;

4. *El epigrafo de f es definido por:* $\quad epif := \{(x,\lambda) \in \mathcal{H} \times \overline{\mathbb{R}} \,:\, f(x) \leq \lambda\}$ *(p.15).*

Definición 2.5 *(Greenberg y Pierskalla [1973],[4]) Sea $f \,:\, \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función a valores reales extendidos.*

1. *f es una función convexa si :*
   Para todo $x, y \in \mathcal{H} : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$ *para todo* $\lambda \in [0,1]$

2. *f es estrictamente convexa si :*
   Para todo $x \neq y \in \mathcal{H} : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$ *para todo* $\lambda \in (0,1)$.

Definición 2.6 *(Navarro Rojas [2013],[14]) Una función $f \,:\, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{C}$ convexo, es llamda cuasi-convexa si para cualquiera x,y $\in \mathcal{C}$ se verifica:*

$$f(tx + (1-t)y) \leq max\{f(x), f(y)\} \, para \; cualquiera \; l \in [0,1].$$

Si la desigualdad se cumple de manera estricta, para $x \neq y$ y para todo $t \in (0,1)$, entonces f es denominada estrictamente cuasi-convexa.

Las definiciones de las funciones cuasi-convexas fueron definidas por primera vez por Finetti [28], posteriormente las propiedades y relaciones entre estas funciones y las funciones convexas fueron estudiadas por Frenchel [29]

La función f es define como semicontinua inferior, semicontinua superior según J. Pierre Crouzeix (2003)

Definición 2.7 *Sea $f \,:\, D \to \mathbb{R}$ una función definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$, f es semicontinua inferior en x_0 si y solo si, $\forall\ \lambda < f(x_0)$ existe una vecindad V de x_0 tal que $x \in V$ entonces $\lambda < f(x)$.*

Definición 2.8 *Sea $f \,:\, D \to \mathbb{R}$ una función definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$, f es semicontinua superior en x_0 si y sólo si, $\forall\ \lambda > f(x_0)$ existe una vecindad V de x_0 tal que $x \in V$ entonces $f(x) < \lambda$.*

Definición 2.9 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$, f es semi continua inferior (s.c.i), semicontinua superior (s.c.s) si f es s.c.i y s.c.s para todo $x \in D$.*

Definición 2.10 *Sea $f : X \to Y$ una función, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$,*
f es una función continua en x_0 si y sólo si, f es semicontinua inferior en x_0 y semicontinua superior en x_0. (p.16)

El infimo de un conjunto se define según Elon Lages (1991)

Definición 2.11 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, definiremos al infimo del conjunto A, $(inf(A) = \alpha)$. como el número α si cumple lo siguiente:*

(i) $\forall\, y \in A,\ \alpha \leq y$;

(ii) *Si* $k \leq y,\ \forall\, y \in A$, *entonces* $k \leq \alpha$. (p.62)

El subdiferencial se define según E. Papa (2009)

Definición 2.12 *Sea $f : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función propia convexa. Decimos que $y \in \mathcal{H}$ es un subgradiente de f en un punto $x \in \mathcal{H}$ si*

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle \text{ para todo } z \in \mathcal{H}.$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en x se llama el subdiferencial de f en x; lo denotaremos por $\partial f(x)$.

$$\partial f(x) = \{s \in \mathcal{H} : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \text{ para todo } y \in \mathcal{H}\} \text{ (p.145)}$$

.

Podemos considerar a manera de ejemplo lo siguiente.

Ejemplo 2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Haciendo un diseño geométrico, es fácil ver que*

$$\partial\, f(x) = \begin{cases} -1, & si\; x < 0 \\ [-1, 1]\,, & si\; x = 0 \\ 1, & si\; x > 0 \end{cases}$$

2.2.2 Conceptual

Debido, a que esta tesis es de ciencias básicas no me es necesario considerar el marco conceptual, ya que, las teorías utilizadas no se pueden refutar, por ser consideradas como verdaderas.

2.2.3 Teórico conceptual

Algunos resultados importantes

Proposición 2.1 *Sean A y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos cualesquiera.*

1. *Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$;*
2. *Si $A \subset B$, entonces $int(A) \subset int(B)$;*
3. *Si $A \subset B$, entonces $Co(A) \subset Co(B)$.*

Demostración. 1. Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

como $A \subset B$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset B$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

así, $x \in \overline{B}$.

2. Sea $x \in int(A)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$ y como $A \subset B$, obtenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset B$, por lo tanto, $x \in int(B)$.

3. Como $Co = \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ tal que $a_i \in A$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ y $A \subset B$, entonces

$$Co(A) \subset Co(B).$$

Proposición 2.2 *(Quispe Llamoca Rosa [2009],[27]) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, f es cuasi-convexa si y solo si, el conjunto de nivel de f es definido por:*
$S_{f,\lambda} := \{y \in \mathcal{H} \,:\, f(y) \leq \lambda\}$es un conjunto convexo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $x, y \in S_\lambda(f)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$f(x) \leq \lambda \ \text{ y } \ f(y) \leq \lambda$$

y como f es cuasi-convexa, para todo $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \lambda$$

así, $\alpha x + (1-\alpha)y \in S_\lambda(f)$, esto muestra que $S_\lambda(f)$ es un conjunto convexo.
Por otro lado, sean $x, y \in S_\lambda(f)$ como $S_\lambda(f)$ es un conjunto convexo para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, en particular lo será para $\lambda = \max\{f(x), f(y)\}$, entonces para todo $\alpha \in [0,1]$, se tiene

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \lambda = \max\{f(x), f(y)\},$$

por lo tanto f es cuasi-convexa. ■

Proposición 2.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y D_1, D_2 subconjuntos $\mathbb{R}^n$ tal que $D_2 \subset D_1$, entonces el infimo de f para todo $x \in D_1$ es menor o igual al infimo de f para todo $x \in D_2$*

Demostración. Denotemos por $y_1 = \inf\limits_{x \in D_1} f(x)$ y $y_2 = \inf\limits_{x \in D_2} f(x)$, entonces

$$y_1 \leq f(x) \ \text{ para todo } \ x \in D_1$$

pero como $D_2 \subset D_1$, entonces

$$y_1 \leq f(x) \ \text{ para todo } \ x \in D_2$$

luego por definición de infimo se tiene que

$$y_1 \leq y_2,$$

por lo tanto, $\inf\limits_{x \in D_1} f(x) \leq \inf\limits_{x \in D_2} f(x)$. ■

Proposición 2.4 *(I. Ya., Zabotin, A.I. Korablev, R.F. Khabibullin, [1972]). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función, donde $D \subset \mathbb{R}^n$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es semicontinua inferior;*

2. epi(f) es un conjunto convexo;

3. $S_\lambda(f)$ *es un conjunto cerrado* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver [17], pg 16.

Proposición 2.5 *(Jean Pierre Crouzeix [2003], pg.16) Sea* $f : D_1 \to \mathbb{R}$ *una función arbitraria, y* $f : D_2 \to \mathbb{R}$*, donde* $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$*, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $f_1 \leq f_2$*;*

2. $epi(f_2) \subset epi(f_1)$*;*

3. $S_\lambda(f_2) \subset S_\lambda(f_1),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero probaremos que 1. implica 2.
Sea $(x, \lambda) \in epi(f_2)$, entonces $f_2(x) \leq \lambda$ y como $f_1 \leq f_2$, se tiene que

$$f_1(x) \leq \lambda,$$

por lo tanto, $(x, \lambda) \in epi(f_1)$ así,

$$epi(f_2) \subset epi(f_1).$$

Ahora probaremos que 2. implica 3.
Sea $x \in S_\lambda(f_2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f_2(x) \leq \lambda$, así

$$(x, \lambda) \in epi(f_2)$$

como $epi(f_2) \subset epi(f_1)$, entonces

$$f_1(x) \leq \lambda,$$

por lo tanto,

$$S_\lambda(f_2) \subset S_\lambda(f_1),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalmente probaremos que 3. implica 1.
Supongamos que $f_1 > f_2$, por propiedad de números reales, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f_1 > \alpha > f_2$$

esto implica que

$$x \notin S_\alpha(f_1) \quad \wedge \quad x \in S_\alpha(f_2),$$

lo cual es una contradicción con el item 3. ■

2.3 Definición de términos básicos

1. Optimización.

   Término Optimizar incluirá a ambos objetivos tanto de Minimización como de Maximización de la funcion objetivo, según E. Papa (2009) “la optimización es una de las áreas de la matemática que estudia el problema de minimizar o maximizar una función sujeta generalmente a restricciones sobre su dominio” $(p.9)$.

2. Función objetivo.

   También llamado índice de rendimiento o criterio de elección, según Pedro Canales, (2009) la funcion objetivo “es la función que debe minimizarse o maximizarse” (p.64). Este es el elemento utilizado para decidir los valores adecuados de las variables de decisión que resuelven el problema de optimización. La función objetivo permite determinar los mejores valores para las variables de decisión.

3. Restricción.

   Es la región factible o viable donde se encuentra la solución óptima para minimizar o máximizar la función objetivo, las restricciones pueden ser con igualdad o desigualdad

   3.1. Restricciones con desigualadad.

   Son ecuaciones entre las variables de la forma

   $$h(\mathbf{x}) \;=\; h(x_1, \ldots x_n) \;\leq\; 0$$

   donde $h : \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función real de variables reales definida sobre un conjunto $\mathbf{A}$ de números reales.

3.2. Restricciones con igualdad.

Son ecuaciones entre las variables de la forma

$$h(\mathbf{x}) \;=\; 0$$

donde $h : \mathbf{A} \subseteq \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}^m$ es una función tal que $h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x))$, con $h_i : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}$.

4. Solución óptima.

   Diremos que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A} \subseteq \mathrm{I\!R}$ es solución factible si cumple con las condiciones de las restricciones del problema de programación no lineal (PPNL), además de óptimizar la función objetivo, Pedro Canales, (2004) afirma "un punto $x^* \in S$ se dice que es una solución óptima completa del problema de minimización si $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in S$"$(p.59)$

5. Conjunto factible ó viable.

   Se define región o conjunto factible Ω del problema (PPNL) al conjunto de todas sus soluciones factibles

$$\Omega = \{x \in A \subseteq \mathrm{I\!R} : x \text{ es una solución factible}\}$$

6. Sucesión.

   Para E.lages Lima "una sucesión de números reales es una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ de los números naturales y tomando valores en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales" (1991, p.81)

7. Iteración.

   Para Soto Apolinar, "Método de resolución de una ecuación a través de aproximaciones sucesivas a la solución buscada. Estos métodos se utilizan generalmente a través de la programación de computadoras porque requiere de muchos cálculos sucesivos, tarea que la computadora puede realizar fácilmente." (2011, p.85)

8. Algoritmo.

   Un algoritmo se puede definir como una secuencia de pasos que representan un modelo de solución para algún determinado tipo de problema. Tambien se dice que es un conjunto de instrucciones que realizadas en orden conducen a obtener la solución del problema

Capítulo 3

Hipótesis y variables

3.1 Hipótesis

La hipótesis para Dr. Colonibol Torres “es un planteamineto que establece una relación entre las variables para explicar y, si es posible, predecir probabilisticamente las propiedades, relaciones y conexiones internas del fenomeno objeto de estudio o para determinar las causas y consecuencias del problema de investigación” (2005, p.102)

3.1.1 Hipótesis general

El método de subgradiente para la minimización de funciones cuasi-convexas es óptimo.

3.1.2 Hipótesis específico

a. El método subgradiente para minimización de funciones cuasi- Convexas es convergente.

b. El método de subgradiente para funciones cuasi-convexas es eficiente

3.2 Operacionalizacion de variables

Para demostrar y comprobar la hipótesis formulada anteriormente, se tiene que someter al proceso de operacionalización, es decir determinar las variables, los indicadores de cada variable

Tabla 3.1: clasificación de la dimensión de la variable

variables	**Dimension**	**Indicadores**
Convergencia y eficiencia del Método de Subgradiente para minimización de funciones cuasi-convexas	Convergencia	• Convergencia bajo regularidades
		• Compacidad
		• Semicontinuidad inferior (superior)
	Eficiencia	• Subdiferenciales
		• Conjuntos de nivel
		• Condiciones de regularidad

Capítulo 4

Metodología de la Investigación

4.1 Tipo y diseño de la investigación

Según Ávila Acosta (1992) de acuerdo al propósito y naturaleza del tema perseguida, la presente investigación es de ciencias formal, Pura o fundamental, porque está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos, en la línea de análisis numéricos y matemática computacional y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata. La investigación de la tesis es no experimental debido que no se manipulan las variables independientes, además su diseño es transversal descriptivo pues su propósito es indagar las incidencias y valores en que se manifiesta una variable. El método de investigación es deductivo, a partir de axiomas – verdades simples y evidentes, y deducir de ello todas las demás verdades, usando las leyes y reglas del razonamiento correcto que la lógica proporciona. Según Elí de Gortari, en su obra Lógica General (1972) utilizaremos demostraciones de tipo directo e indirecto

Método:

Se da inicio de la siguiente manera:

a. Se comienza por definir la función objetivo que es una función cuasi-convexa, $\{min(max) = f(x); x \in X\}$

b. Se muestra algunas propiedades de semicontinua superior y las funciones cuasi-convexas en términos de conjuntos de subnivel $S_{f,\alpha} = \{x \in H : f(x) < \alpha\}$, a partir de este conjunto de nivel se generará diferentes conjuntos subdiferenciales.

c. Verificamos que f es una función cuasi-convexa que cumpla con todas las condiciones necesarias y suficientes. El punto x que pertenece al conjunto fáctible o viable ens solución de $\{minf(x), x \in X\}si\ y\ solo\ si$ $0 \in \partial^{\circ} f(x)$, es decir:

$$f(x^*) \leq f(x)\ para\ todo\ x \in X$$

d. Teniendo en cuenta los resultados anteriores hacemos la generalizamos del problema de optimización cuasi-convexa para diferentes subdiferenciales utilizando el método de subgradiente.

e. Se buscará la condición necesaria y suficiente para generar una sucesión que cumpla las propiedades de regularidad de tal manera que converge a la solución.

4.2 Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto debido que se trabaja con teoremas, corolarios y proposiciones, etc no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso en espacio euclidiano y optimización matemática del análisis convexo.

4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización de la tesis se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer texto en forma minuciosa, para ello se revisó bibliografía especializada de funciones cuasi-convexas no diferenciables, para obtener tal información se procedió a la recopilación de información obtenida vía internet así como: Instituto de Matemática y de Ciencias Afines del ($IMCA$), Concejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica ($CONCYTEC$) y repositorio de la $UNAC\ y\ UNMSM$ de la Facultad de Matemática, relacionada al tema de interés y artículos de tesis referentes al tema.Tambien se consulto a docentes especialistas en el área de optimización de funciones cuasi-convexas, análisis convexo

4.4 Análisis y procesamiento de datos

La presente investigación no requiere de análisis y procesamiento de datos estadísticos, púes la variable es cualitativa, además es no experimental

Capítulo 5

Resultados

Método de Subgradiente para Minimizar la Función Cuasi-convexa

Consideremos el problema de minimización

$$f_* := \inf\{f(x) \,:\, x \in X\}, \tag{5.1}$$

bajo las siguientes hipótesis sobre la función objetivo f y al conjunto de restricciones X.
$A_1 :$ $\overset{\circ}{D}_f$ es no vacio y convexo, con $\mathcal{D}_f \subset cl\,\overset{\circ}{D}_f$.
$A_2 :$ $\overline{\lim}_{t\downarrow 0} f(x + t(y - x)) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}_f$, $y \in \overset{\circ}{D}_f$.
$A_3 :$ f es semicontinua superior (scs) en $\overset{\circ}{D}_f$, es decir, $f(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \sup_{B(x,\epsilon)} f \ \ \forall\, x \in \overset{\circ}{D}_f$.
$A_4 :$ f es cuasi-convexa (cc) en $\overset{\circ}{D}_f$, es decir, el conjunto $\{x \in \overset{\circ}{D}_f \,:\, f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
$A_5 :$ El conjunto de restricciones $X \subset \mathcal{H}$ es convexo, cerrado y $X \cap \overset{\circ}{D}_f \neq \emptyset$.
En este capítulo estudiaremos un método de subgradiente proyectado para resolver el problema (5.1), pero primero, introduciremos extensiones de las subdiferenciales y brevemente revisaremos sus propiedades que seran utiles para el análisis del algoritmo.

5.1 Semicontinuidad Superior

El comportamiento de f en el interior de su dominio $\overset{\circ}{D}_f$ es descrita por la función

$$f^\circ = f + I_{\dot{\mathcal{D}}_f}. \tag{5.2}$$

Es claro que, bajo las condiciones A_1, A_2, A_5, f y f° tienen el mismo infimo sobre el conjunto de restricciones X.

Lema 5.1 *Supongamos que A_1, A_2, A_5 se verifican. Entonces para cada sucesión $\{y^i\}$ en $X \cap \mathcal{D}_f$ existe una sucesión $\{y_\circ^i\}$ en $X \cap \overset{\circ}{D}_f$ tal que*

$$\lim_i \left| y_\circ^i - y^i \right| = 0 \quad y \quad \overline{\lim}_i f(y_\circ^i) \leq \overline{\lim}_i f(y^i).$$

Consecuentemente,

$$f_* := \inf_X f = \inf_{X \cap \dot{\mathcal{D}}_f} f = \inf_X f^\circ.$$

Prueba. Por hipótesis A_1, $\overset{\circ}{D}_f$ es no vacio y convexo con $\mathcal{D}_f \subset cl\,\overset{\circ}{D}_f$, además de A_5, $X \cap \overset{\circ}{D}_f \neq \emptyset$ y X es convexo, entonces existe $y \in X \cap \overset{\circ}{D}_f$.
Además, por hipótesis $\{y^i\} \subset X \cap \mathcal{D}_f$, entonces

$$y^i \in X \;\text{ y }\; y^i \in \mathcal{D}_f \subset cl\,\overset{\circ}{D}_f,$$

luego se tiene que

$$y_\circ^i = y^i + \tau_i(y - y^i) \in \overset{\circ}{D}_f \;\text{ para todo }\; \tau_i \in (0,1)$$

como $y \in X$ y $\{y^i\} \subset X$ de la convexidad de X, se tiene que $\{y_\circ^i\} \subset X$, así

$$\{y_\circ^i\} \subset X \cap \overset{\circ}{D}_f,$$

luego por hipótesis A_2, se tiene que

$$\overline{\lim_{\tau_i \to 0}} f(y^i + \tau_i(y - y^i)) \leq f(y^i), \;\text{ para cada }\; i$$

pero como X es un conjunto convexo $y^i, y \in X$ se tiene $y_\circ^i = y^i + \tau_i(y - y^i)$, si $\tau_i \to 0$ implica que $y_\circ^i \to y^i$, así

$$\overline{\lim}_{y_\circ^i \to y^i} f(y_\circ^i) \leq f(y^i),$$

luego

$$\inf_{r>0} \sup_{y^i_\circ \in B_r(y^i)\cap cl\, \overset{\circ}{D}_f} f(y^i_\circ) \leq f(y^i),$$

además como

$$\sup_{y^i_\circ \in B_r(y^i)\cap cl\, \overset{\circ}{D}_f} f(y^i_\circ) \leq \inf_{r>0} \sup_{y^i_\circ \in B_r(y^i)\cap cl\, \overset{\circ}{D}_f} f(y^i_\circ) + r \ \text{ para algún } \ r > 0,$$

así,

$$f(y^i_\circ) \leq \sup f(y^i_\circ) \leq \inf\{\sup f(y^i_\circ)\} + r \leq f(y^i) + r,$$

entonces

$$f(y^i_\circ) \leq f(y^i) + r \ \text{ y } \ y^i_\circ \in B_r(y^i)$$

luego para $r = i^{-1} > 0$, se tiene que

$$\overline{\lim} f(y^i_\circ) \leq \overline{\lim} f(y^i) + \overline{\lim} i^{-1} \quad \text{y} \quad 0 \leq \left| y^i_\circ - y^i \right| \leq i^{-1},$$

tomando $i \to \infty$ se tiene que

$$\overline{\lim} f(y^i_\circ) \leq \overline{\lim} f(y^i) \quad \text{y} \quad \lim \left| y^i_\circ - y^i \right| = 0.$$

Ahora probaremos que:

$$f_* := \inf_X f = \inf_{X\cap \overset{\circ}{D}_f} f = \inf_X f^\circ.$$

Primero veamos que $\inf_{X\cap \overset{\circ}{D}_f} f = \inf_X f^\circ$.

Como $f^\circ = f + I_{\overset{\circ}{D}_f}$ donde el dominio de f es el interior $(\overset{\circ}{D}_f)$ describe la función anterior, sea $\inf_X f^\circ := \alpha$.

Entonces $\alpha \leq f^\circ(y)$ para todo $y \in X$, así

$$\alpha \leq f(y) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(y),$$

como $y \in dom\, f = \overset{\circ}{D}_f$, entonces

$$\alpha \leq f(y) \ \text{ para todo } \ y \in X \cap \overset{\circ}{D}_f.$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $y \in X$ tal que $\alpha \leq f^\circ(y) < \alpha + \epsilon$, luego

$$\alpha \leq f(y) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(y) < \alpha + \epsilon,$$

$$\alpha \leq f(y) < \alpha + \epsilon,$$

para algún $y \in v$, caso contrario $\infty < \alpha + \epsilon$.
Así, existe $y \in X \cap \overset{\circ}{D}_f$ tal que $\alpha \leq f^{\circ}(y) < \alpha + \epsilon$, por lo tanto, $\inf_{X \cap \overset{\circ}{D}_f} f = \alpha$.
Ahora probaremos que:

$$\inf_X f^{\circ} = \inf_X f$$

.

Como $f^{\circ} \geq f$, entonces

$$\inf_X f^{\circ} \geq f \geq \inf_X f$$

así,

$$\inf_X f^{\circ} \geq \inf_X f. \tag{5.3}$$

Por otro lado, sea $\{y^i\} \subset X$ tal que $\lim f(y^i) = \inf_X f$. Además, $y^i \in \mathcal{D}_f$, así $y^i \in X \cap \mathcal{D}_f$, entonces por lo mostrado anteriormente, existe $y^i_{\circ} \in X \cap \overset{\circ}{D}_f$ tal que

$$\overline{\lim}_i f(y^i_{\circ}) \leq \overline{\lim}_i f(y^i),$$

luego como $\inf_{X \cap \overset{\circ}{D}_f} f \leq \inf \sup f(y^i_{\circ})$, entonces

$$\inf_{X \cap \overset{\circ}{D}_f} f \leq \overline{\lim}_i f(y^i) = \inf_X f$$

pero como $\inf_X f^{\circ} = \inf_{X \cap \overset{\circ}{D}_f} f$, entonces

$$\inf_X f^{\circ} \leq \inf_X f,$$

por lo tanto de (5.3) se tiene que

$$\inf_X f^{\circ} = \inf_X f.$$

■

Ahora revisaremos algunas propiedades de semicontinuidad superior y cuasi-convexidad de f en términos de sus conjuntos de nivel.
Para $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in \mathcal{H}$, (Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32]) define los siguientes conjuntos:

$$S_{f,\alpha} := \{y \in \mathcal{H} \,:\, f(y) < \alpha\}, \quad S_f(x) := S_{f,f(x)}, \tag{5.4}$$

$$S^{\circ}_{f,\alpha} := \{y \in \overset{\circ}{D}_f \,:\, f(y) < \alpha\}, \quad S^{\circ}_f(x) := S^{\circ}_{f,f(x)}, \tag{5.5}$$

$$T_{f,\alpha} := \{y \in \mathcal{H} \,:\, f(y) \leq \alpha\}, \quad T_f(x) := T_{f,f(x)}. \tag{5.6}$$

Observación 5.1 *Notemos que* $D_{f^\circ} = \overset{\circ}{D}_f$ *y* $S_{f^\circ,\cdot} = S^\circ_{f^\circ,\cdot} = S^\circ_{f,\cdot}$.

En efecto, sea $x \in D_{f^\circ}$, entonces $f^\circ(x) < +\infty$, luego por definición de f°

$$f(x) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(x) < +\infty$$

esto implica que $x \in \overset{\circ}{D}_f$.

Reciprocamente, sea $x \in \overset{\circ}{D}_f$ y supongamos que $x \notin D_{f^\circ}$, entonces

$$f^\circ(x) \geq +\infty$$

luego

$$f(x) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(x) \geq +\infty$$

así,

$$f(x) \geq +\infty$$

lo cual es una contradicción, pues $\overset{\circ}{D}_f \subset \mathcal{D}_f$.

Por lo tanto, $D_{f^\circ} = \overset{\circ}{D}_f$.

Por otro lado, sea $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ y sea $y \in S_{f^\circ,\alpha}$, entonces

$$y \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad f^\circ(y) < \alpha,$$

luego, como $D_{f^\circ} = \overset{\circ}{D}_f$, se tiene que $y \in \overset{\circ}{D}_f$, así

$$f(y) = f(y) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(y) < \alpha,$$

luego $y \in \overset{\circ}{D}_f$ con $f(y) < \alpha$, esto es $y \in S^\circ_{f,\alpha}$.

Por lo tanto,

$$S_{f^\circ,\cdot} \subset S^\circ_{f,\cdot}. \tag{5.7}$$

Reciprocamente, sea $y \in S^\circ_{f,\alpha}$, entonces

$$y \in \overset{\circ}{D}_f \quad \text{tal que} \quad f(y) < \alpha,$$

luego,

$$f^\circ(y) = f(y) + I_{\overset{\circ}{D}_f}(y) < \alpha,$$

luego $y \in \mathcal{H}$ con $f^\circ(y) < \alpha$, esto es $y \in S_{f^\circ,\alpha}$.

Por lo tanto, $S^\circ_{f,\cdot} \subset S_{f^\circ,\cdot}$ y por (5.7), obtenemos $S^\circ_{f,\cdot} = S_{f^\circ,\cdot}$.

Ahora veamos que $S^\circ_{f^\circ,\cdot} = S_{f^\circ,\cdot}$.

En efecto, sea $y \in S_{f^\circ,\alpha}$ luego por (5.7) se tiene que $y \in S^\circ_{f,\alpha}$, así

$$y \in \overset{\circ}{D}_f \;\text{ con }\; f(y) < \alpha,$$

de esta manera,

$$y \in \overset{\circ}{D}_f \;\text{ con }\; f^\circ(y) < \alpha,$$

entonces

$$S_{f^\circ,\alpha} \subset S^\circ_{f^\circ,\alpha}$$

además es claro que, $S^\circ_{f^\circ,\alpha} \subset S_{f^\circ,\alpha}$.

Por lo tanto,

$$S^\circ_{f^\circ,\cdot} = S_{f^\circ,\cdot}.$$

Lema 5.2 *(Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32])*

(a) *f es semicontinua superior si y solo si, $S_{f,\alpha}$ es abierto para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ en el caso de $\mathcal{D}_f$ abierto.*

(b) *f es semicontinua superior en $\overset{\circ}{D}_f$ si y sólo si, f° es semicontinua superior si y sólo si, $S^\circ_{f,\alpha}$ es abierto para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(c) *f es cuasi-convexa en $\overset{\circ}{D}_f$ si y sólo si, f° es cuasi-convexa si y sólo si, $S^\circ_{f,\alpha}$ es convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(d) *Si A_1, A_2 se cumplen, entonces $\bar{S}^\circ_{f,\alpha} = \bar{S}_{f,\alpha}$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Prueba. (a) Sean $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ e $y \in S_{f,\alpha}$, como f es semicontinua superior, entonces

$$\exists\, V_y \text{ una vecindad de } y \text{ tal que si } \; y_0 \in V_y \text{ implica que } f(y_0) < \alpha$$

luego, es claro que $V_y \subset S_{f,\alpha}$, así existe V_y tal que $V_y \subset S_{f,\alpha}$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Por lo tanto, $S_{f,\alpha}$ es abierto para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Reciprocamente, ver [13, Teorema 1.6].

(b) Debido a que $f^\circ = f$ en $\overset{\circ}{D}_f$, entonces f es semicontinua superior en $\overset{\circ}{D}_f$ si y sólo si, f° es semicontinua superior en $\overset{\circ}{D}_f$, luego por la Observación 5.1, $\overset{\circ}{D}_f = \mathcal{D}_{f^\circ}$, así f° es semicontinua superior en $\mathcal{D}_{f^\circ}$.

Ahora probararemos la segunda equivalencia.

Por el item (a) y la Observación 5.1 f° es semicontinua superior si y sólo si, $S_{f^\circ,\alpha} = S^\circ_{f,\alpha}$ es abierto para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

(c) Debido a que $f^\circ = f$ en $\overset{\circ}{D}_f$, entonces f es cuasi-convexa en $\overset{\circ}{D}_f$ si y sólo si, f° es cuasi-convexa en $\overset{\circ}{D}_f$, luego por la Observación 5.1, $\overset{\circ}{D}_f = \mathcal{D}_{f^\circ}$, así f° es cuasi-convexa en $\mathcal{D}_{f^\circ}$.

Ahora probararemos la segunda equivalencia.

Recordemos que f° es cuasi-convexa si y sólo si, $S_{f^\circ,\alpha}$ es convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, luego por la Observación 5.1, $S_{f^\circ,\alpha} = S^\circ_{f,\alpha}$, así $S^\circ_{f,\alpha}$ es convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

(d) Es claro que, $S^\circ_{f,\alpha} \subset S_{f,\alpha}$, $\forall\, \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $\bar{S}^\circ_{f,\alpha} \subset \bar{S}_{f,\alpha}$.

Por otro lado, sea $x \in S_{f,\alpha}$, luego $x \in X \cap \mathcal{D}_f$ entonces por el Lema 5.1 con $X = \mathcal{H}$ para la sucesión $y^i = x$, existe $y^i_\circ \in X \cap \overset{\circ}{D}_f$ tal que $\lim_i |y^i_\circ - y^i| = 0$, luego $y^i_\circ \to x$ y

$$\overline{\lim}_i f(y^i_\circ) \leq \overline{\lim}_i f(y^i) = \overline{\lim}_i f(x) = f(x) < \alpha,$$

esto es,

$$\overline{\lim}_i f(y^i_\circ) < \alpha,$$

luego $y^i_\circ \in S^\circ_{f,\alpha}$, para todo i suficientemente grande. Asi, $x \in \bar{S}^\circ_{f,\alpha}$ luego $S_{f,\alpha} \subset \bar{S}^\circ_{f,\alpha}$ y por lo tanto, $\bar{S}_{f,\alpha} \subset \bar{S}^\circ_{f,\alpha}$. ■

5.2 Subdiferenciales

(Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32]) considera los siguientes subdiferenciales relativos a los conjuntos de nivel (5.4)-(5.6).

$$\partial^\circ f(x) := \{g \in \mathcal{H} \,:\, \langle g, y-x\rangle < 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f^\circ(x)\} \;\; \forall\, x, \tag{5.8}$$

$$\bar{\partial}^\circ f(x) := \{g \in \mathcal{H} \,:\, \langle g, y-x\rangle \le 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f^\circ(x)\} \;\; \forall\, x, \tag{5.9}$$

$$\partial^* f(x) := \{g \in \mathcal{H} \,:\, \langle g, y-x\rangle < 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)\} \;\; \forall\, x, \tag{5.10}$$

$$\bar{\partial}^* f(x) := \{g \in \mathcal{H} \,:\, \langle g, y-x\rangle \le 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)\} \;\; \forall\, x, \tag{5.11}$$

$$\partial^c f(x) := \{g \in \mathcal{H} \,:\, \langle g, y-x\rangle \le 0 \;\text{ para todo }\; y \in T_f(x)\} \;\; \forall\, x, \tag{5.12}$$

El subdiferencial $\partial^c f(x)$ es empleado en el método de subgradiente estandar definido en [10]. Los subdiferenciales (5.10) y (5.11) fueron introducidos en [4] y [14] respectivamente. en el especial caso en que $\mathcal{D}_f = \overset{\circ}{D}_f$. Nuestras modificaciones (5.8) y (5.9) de (5.10) y (5.11), respectivamente, nos permitirá extender los resultados algorítmicos para el caso en que $\mathcal{D}_f \neq \overset{\circ}{D}_f$.

Observación 5.2 *Si $\mathcal{D}_f$ es abierto, entonces se tiene que*

(a) $\partial^\circ f = \partial^* f$

(b) $\bar{\partial}^\circ f = \bar{\partial}^* f$

(a) Es claro que, $\partial^* f(x) \subset \partial^\circ f(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Ahora sean $x \in \mathcal{H}$ y $g \in \partial^\circ f(x)$, entonces

$$\langle g, y-x\rangle < 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f^\circ(x)$$

pero como $\mathcal{D}_f = \overset{\circ}{D}_f$, entonces $S_f^\circ(x) = S_f(x)$, así

$$\langle g, y-x\rangle < 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)$$

entonces, $g \in \partial^* f(x)$. Por lo tanto, $\partial^\circ f = \partial^* f$.

(b) Bajo el mismo procedimiento, es claro que $\bar{\partial}^* f(x) \subset \bar{\partial}^\circ f(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Sean $x \in \mathcal{H}$ y $g \in \bar{\partial}^\circ f(x)$, entonces

$$\langle g, y-x\rangle \le 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f^\circ(x)$$

pero como $\mathcal{D}_f = \overset{\circ}{D}_f$, entonces $S_f^\circ(x) = S_f(x)$, así

$$\langle g, y - x\rangle \leq 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)$$

entonces, $g \in \partial^* f(x)$. Por lo tanto, $\bar{\partial}^\circ f = \bar{\partial}^* f$.

Observación 5.3 *Los subdiferenciales* $(5.8) - (5.12)$ *contienen el usual subdiferencial de Fenchel*

$$\partial f(x) := \{g \,:\, \langle g, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \;\; \forall\, y\} \;\; \textit{para todo} \;\; x \in \textit{dom}\, f,$$

De las definiciones de los subdiferenciales $(5.8) - (5.12)$ es claro que,

$$\partial^\circ f(x) \subset \bar{\partial}^\circ f(x) \quad \text{y} \quad \partial^c f(x) \subset \partial^* f(x) \subset \bar{\partial}^* f(x),$$

entonces mostraremos que $\partial f(x)$ esta contenido en $\partial^\circ f(x)$ y $\partial f(x)$ es un subconjunto de $\partial^c f(x)$.

En efecto, sean $x \in \mathcal{H}$ y $g \in \partial f(x)$, entonces

$$\langle g, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \;\text{ para todo }\; y \in \mathcal{H}$$

en particular para $y \in S_f^\circ(x)$, se tiene que $f(y) < f(x)$, entonces

$$\langle g, y - x\rangle < 0 \;\; \forall\, y \in S_f^\circ(x),$$

así, $g \in \partial^\circ f(x)$.

Por otro lado, sean $x \in \mathcal{H}$ y $g \in \partial f(x)$, entonces

$$\langle g, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \;\text{ para todo }\; y \in \mathcal{H}$$

en particular para $y \in T_f(x)$, se tiene que $f(y) \leq f(x)$, entonces

$$\langle g, y - x\rangle \leq 0 \;\text{ para todo }\; y \in T_f(x),$$

así, $g \in \partial^c f(x)$. ∎

Definición 5.1 *Sea el conjunto* $C \subseteq \mathcal{H}$. C *es uniformemente convexo (u.c) si y sólo si,* $C = \cap_i h_i$ *donde* h_i *son semiespacios abiertos.*

Definición 5.2 *Decimos que úna función f es radialmente semicontinua superior en el conjunto C si y sólo si, para todo $x \in C$, $\overline{\lim} f(y^i) \leq f(x)$ cuando $y^i \to x$ a lo largo de una recta.*

Lema 5.3 *(Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32])*

(a) *Si $S_f^\circ(x)$ es uniformemente convexo, entonces $\emptyset \neq \partial^\circ f(x) \neq \{0\}$.*

(b) *$\partial^\circ f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathring{D}_f$ y $\mathring{D}_f$ es convexo si y sólo si, $S_{f,\alpha}^\circ$ es uniformemente convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si, $S_f^\circ(x)$ es uniformemente convexo para todo x.*

(c) *$\bar{\partial}^\circ f(x) \supseteq \partial^\circ f(x) \cup \{0\}$, con igualdad si $S_f^\circ(x)$ es abierto o f es radicalmente semicontinua superior en $S_f^\circ(x)$.*

(d) $0 \in \partial^\circ f(x) \Leftrightarrow \partial^\circ f(x) = \mathcal{H} \Leftrightarrow f(x) \leq \inf_{\mathring{D}_f} f$. *Además, si A_1, A_2 se cumplen, entonces $0 \in \partial^\circ f(x) \Leftrightarrow x \in Arg \min f$.*

(e) $\emptyset \neq \partial^* f(x) \neq \{0\}$ *si $S_f(x)$ es uniformemente convexo.*

(f) *$\partial^* f(x) \neq \emptyset$ para todo x si y sólo si, $S_{f,\alpha}$ es uniformemente convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si, $S_f(x)$ es uniformemente convexo para todo x.*

(g) *$\bar{\partial}^* f(x) \supseteq \partial^* f(x) \cup \{0\}$, con igualdad si $S_f(x)$ es abierto o f es radicalmente semicontinua superior en $S_f(x)$.*

(h) *$\partial^* f(x) \subseteq \partial^\circ f(x)$, con igualdad si $\mathcal{D}_f = \mathring{D}_f$.*

(i) *$\bar{\partial}^* f(x) \subseteq \bar{\partial}^\circ f(x)$, con igualdad si $S_f(x) \subset \bar{S}_f^\circ(x)$.*

(j) *$\partial^c f(x) \subseteq \bar{\partial}^\circ f(x)$, con igualdad si $T_f(x) \subset \bar{S}_f^\circ(x)$.*

(k) *$\partial^c f(x) \subseteq \bar{\partial}^* f(x)$, con igualdad si $T_f(x) \subset \bar{S}_f(x)$.*

Prueba. (a) $0 \notin \partial^\circ f(x)$, entonces $\{0\} \neq \partial^\circ f(x)$.
Supongamos que $S_f^\circ(x) \neq \emptyset$. Además, $\{x\} \cap S_f^\circ(x) = \emptyset$, caso contrario $x \in S_f^\circ(x)$, entonces $f(x) < f(x)$, (contradicción). Por lo tanto, $\{x\} \cap S_f^\circ(x) = \emptyset$.

Luego como $S_f^\circ(x)$ es uniformemente convexo, entonces $S_f^\circ(x) = \cap_{i\in J} h_i$ donde $h_i := \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a, z\rangle < \alpha,\ a \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Sea $y \in S_f^\circ(x)$, entonces $\langle a, y\rangle < \alpha$, además como $x \notin S_f^\circ(x)$, entonces $x \notin h_i \forall i \in J$, entonces

$$\langle a, y\rangle < \alpha \leq \langle a, x\rangle$$

luego

$$\langle a, y - x\rangle < 0 \quad \text{para todo} \quad y \in S_f^\circ(x)$$

así, $a \in \partial^\circ f(x)$.

Por lo tanto, $\partial^\circ f(x) \neq \emptyset$.

(b) Para cada $x \in \mathcal{H}$ tenemos g^x tal que si $x \notin \overset{\circ}{D}_f$, entonces $\langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle \ \ \forall\, y \in \overset{\circ}{D}_f$, si $x \in \overset{\circ}{D}_f$, entonces $g^x \in \partial^\circ f(x)$.

Probemos que

$$S_{f,\alpha}^\circ = \bigcap_{x \notin S_{f,\alpha}^\circ} \{y \,:\, \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}$$

En efecto, sea $z \in S_{f,\alpha}^\circ$.

Si $x \notin \overset{\circ}{D}_f$, entonces $\langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle$, luego

$$z \in \bigcap_{x \notin S_{f,\alpha}^\circ} \{y \,:\, \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{D}_f$, entonces $g^x \in \partial^\circ f(x)$, luego

$$\langle g^x, z\rangle < \langle g^x, x\rangle \ \ \forall\, x$$

en particular, para $\alpha = f(x)$ con $x \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, sea $z \in \bigcap_{x \notin S_{f,\alpha}^\circ} \{y \,:\, \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}$, entonces

$$\langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle \ \ \forall\, x \notin S_{f,\alpha}^\circ,$$

esto implica que $z \in S_{f,\alpha}^\circ$.

Debido a que $S_{f,\alpha}^\circ$ es uniformemente convexo para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, en particular para $\alpha = +\infty$ se tiene que

$$S_{f,\infty}^\circ = \overset{\circ}{D}_f \text{ es uniformemente convexo,}$$

así $S^\circ_{f,\infty} = \overset{\circ}{D}_f$ es convexo y por (a)

$$\emptyset \neq \partial^\circ f(y),\ \forall\, y \in \overset{\circ}{D}_f.$$

Para la segunda equivalencia solo es necesario considerar $\alpha = f(x)$.

(c) Es claro que, $\{0\} \subset \bar{\partial}^\circ f(x)$ y $\partial^\circ f(x) \subset \bar{\partial}^\circ f(x)$, entonces

$$\{0\} \cup \partial^\circ f(x)\ \textit{esta contenido en}\ \bar{\partial}^\circ f(x). \tag{5.13}$$

Por otro lado, sean $x \in \mathcal{H}$, $g \in \bar{\partial}^\circ f(x)$ y supongamos que $g \neq 0$.

Sea $y \in S^\circ_f(x)$, entonces

$$\langle g, y - x\rangle \leq 0,\ \ \forall\, y \in S^\circ_f(x). \tag{5.14}$$

Como $S^\circ_f(x)$ es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y,\epsilon) \subset S^\circ_f(x)$.

Definiendo $z := gt + x$ para $t \in (0, \frac{\epsilon - \|x-y\|}{\|g\|})$, se tiene que $z \in S^\circ_f(x)$, luego de (5.14)

$$\langle g, gt + x - x\rangle \leq 0,$$

así,

$$\|g\|^2 \leq 0$$

lo que implica que $g = 0$, lo cual es una contradicción.

Si f es radialmente semicontinua superior en $S^\circ f(x)$, entonces

$$\partial^\circ f(x) \cup \{0\} \supseteq \bar{\partial} f(x).$$

Sea $g \in \bar{\partial} f(x)$ por demostrar que $g = 0$ o $g \in \partial^\circ f(x)$.

Supongamos que $g \neq 0$ y $g \notin \partial^\circ f(x)$, luego

$$\langle g, y - x\rangle \geq 0\ \text{ para algún }\ y \in S^\circ f(x). \tag{5.15}$$

Consideremos la sucesión $y^i = y + i^{-1} g$, con $y \in \overset{\circ}{D}_f$, entonces $y^i \in \overset{\circ}{D}_f$.

Además,

$$\left\langle g, y^i - x\right\rangle = \left\langle g, y + i^{-1}g - x\right\rangle = \langle g, y - x\rangle + \left\langle g, i^{-1} g\right\rangle > 0 \tag{5.16}$$

haciendo $i \to +\infty$ se tiene que $y^i \to y$ y como f es radialmente semicontinua superior entonces

$$\overline{\lim}_{i\to+\infty} f(y^i) < f(y)$$

luego de (5.15) se tiene que

$$\overline{\lim}_{i\to+\infty} f(y^i) < f(x),$$

asi, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(y^i) < f(x)$ para todo $i \geq n_0$ y por tanto

$$y^i \in S^\circ f(x),\ \forall\, i \geq n_0,$$

pero como $g \in \bar{\partial}^\circ f(x)$, entonces

$$\langle g, y^i - x \rangle \leq 0$$

lo que contradice (5.16), por lo tanto obtenemos el resultado.

(d) Probemos la primera equivalencia.

Si $0 \notin \partial^\circ f(x)$ entonces $\partial^\circ f(x) \neq \mathcal{H}$ pues $0 \in \mathcal{H}$.

Por otro lado, es claro que $0 \notin \partial^\circ f(x)$.

Ahora probaremos que $0 \in \partial^\circ f(x)$ si y solo si $f(x) \leq \inf_{\mathring{D}_f} f$.

Supongamos que existe $y \in \mathring{D}_f$ tal que $f(x) > f(y)$, entonces $y \in S_f^\circ(x)$ luego como $0 \in \partial^\circ f(x)$, se tiene que

$$\langle 0, y - x \rangle < 0$$

lo cual es un absurdo, así, $f(x) \leq f(y)$ para todo $y \in \mathring{D}_f$ y por lo tanto

$$f(x) \leq \inf_{\mathring{D}_f} f.$$

Reciprocamente, supongamos que $0 \notin \partial^\circ f(x)$, entonces

$$\langle 0, y - x \rangle \geq 0 \ \text{ para algún } \ y \in S_f^\circ(x)$$

luego $y \in \mathring{D}_f$ tal que $f(y) < f(x)$, entonces $\inf_{\mathring{D}_f} f < f(x)$ lo cual contradice la hipotesis.

Por lo tanto, $0 \in \partial^\circ f(x)$.

Además, si A_1, A_2 se satisfacen, entonces $0 \in \partial^\circ f(x)$ si y solo si $x \in Argmin\, f$.

En efecto, supongamos que $x \notin Argmin\, f$, entonces existe $y \in \mathcal{D}_f$ tal que $f(y) < f(x)$, luego por el Lema 5.2 (d)

$$y \in S_f(x) \subset \bar{S}_f(x) = \bar{S}_f^\circ(x),$$

entonces existe $\{y^i\} \subset S_f^\circ(x)$ tal que $y^i \to y$, luego $\langle 0, y^i - x \rangle < 0$ lo cual es un absurdo, por lo tanto, $x \in Argmin\, f$.

Reciprocamente, supogamos que $0 \notin \partial \circ f(x)$, entonces

$$\langle 0, y - x\rangle \geq 0 \text{ para algún } y \in S_f^{\circ}(x),$$

mas aún,

$$\langle 0, y - x\rangle \geq 0 \text{ para algún } y \in \overset{\circ}{D}_f \text{ tal que } f(y) < f(x), \tag{5.17}$$

pero como $x \in Argmin\, f$, es decir, $f(x) \leq f(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f$, y $y \in \overset{\circ}{D}_f \subset \mathcal{D}_f$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$, lo cual es una contradicción con (5.17). Por lo tanto, $0 \in \partial^{\circ} f(x)$.
(e) $0 \notin \partial^* f(x)$, entonces $\{0\} \neq \partial^* f(x)$.
Si $S_f(x) \neq \emptyset$. Como $S_f(x)$ es uniformemente convexo por hipótesis y $\{x\} \cap S_f(x) = \emptyset$, entonces $x \notin \bar{S}_f(x)$ y por el Lema de Minkowski, existe $g \neq 0$ tal que

$$\langle g, x\rangle < \alpha < \langle g, y\rangle \quad \text{para todo } y \in S_f(x),$$

entonces

$$\langle -g, y - x\rangle < 0, \quad \text{para todo } y \in S_f(x),$$

así, $h = -g \in \partial^* f(x)$, luego $\partial^* f(x) \neq \emptyset$, además $0 \notin \partial^* f(x)$.
Por lo tanto, $\emptyset \neq \partial^* f(x) \neq \{0\}$.
(f) Por hipótesis tenemos que $\partial^* f(x) \neq \emptyset$ para todo x, así para cada x existe $g^x \in \partial^* f(x)$.
Probaremos que $S_{f,\alpha} = \cap_{x \notin S_{f,\alpha}} \{y : \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}$.
En efecto, sea $z \in \{y : \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}$ para todo $x \notin S_{f,\alpha}$, entonces

$$\langle g^x, z\rangle < \langle g^x, x\rangle \quad \text{para todo } x \notin S_{f,\alpha},$$

supongamos que $z \notin S_{f,\alpha}$, entonces

$$\langle g^x, z\rangle < \langle g^x, z\rangle$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto $z \in S_{f,\alpha}$.
Reciprocamente, sea $z \in S_{f,\alpha}$, entonces

$$\langle g^x, z\rangle < \langle g^x, x\rangle \quad \text{para todo } x,$$

en particular, para $x \notin S_{f,\alpha}$ se tiene que

$$\langle g^x, z\rangle < \langle g^x, x\rangle \quad \text{para todo } x \notin S_{f,\alpha},$$

así,

$$\cap_{x \notin S_{f,\alpha}} \{y \,:\, \langle g^x, y\rangle < \langle g^x, x\rangle\}.$$

por lo tanto, $S_{f,\alpha}$ es uniformemente convexa pata todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, en particluar también lo será para $\alpha = f(x)$, así se obtiene el otro resultado, para la vuelta sólo es necesario usar la parte (e).

(g) Sean $x \in \mathcal{H}$ y $S_f(x)$ abierto.

Sea $g \in \bar{\partial}^* f(x)$ y supongamos que $g \neq 0$ debemos mostrar que $g \in \partial^* f(x)$.

En efecto, por hipótesis tenemos que

$$\langle g, y - x\rangle \leq 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)$$

y

$$\exists \epsilon > 0 \;\text{ tal que }\; B(y, \epsilon) \subset S_f(x).$$

definiendo $z := gt + x$ para $t \in (0, \frac{\epsilon - \|x-y\|}{\|g\|})$. se tiene que $z \in S_f(x)$, así

$$\langle g, y - x\rangle = 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x)$$

luego, como $z \in S_f(x)$, se tiene que

$$\langle g, gt + x - x\rangle = 0$$

así, $g = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$\langle g, y - x\rangle < 0 \;\text{ para todo }\; y \in S_f(x).$$

Si f es radicalmente semicontinua superior es análogo a (c).

(h) Como $D_f = \mathring{D}_f$, entonces $f = f^\circ$ luego

$$S_f(x) = S_{f^\circ}(x) = \dot{S}_f(x),$$

por lo tanto de la igualdad anterior se tiene,

$$\partial^* f(x) = \partial^\circ f(x).$$

(i) supongamos $g \in \bar{\partial}^\circ f(x)$ por demostrar que $g \in \bar{\partial}^* f(x)$.

Sea $y \in S_f(x)$ entonces $y \in \bar{S}_f^\circ(x)$ pues $S_f(x) \subset \bar{S}_f^\circ(x)$, luego

$$\exists \{y^k\} \subset S_f^\circ(x) \;\text{ tal que }\; \lim_{k \to +\infty} y^k = y$$

entonces

$$\left\langle g, y^k - x \right\rangle \leq 0$$

tomando límite, cuando $k \to +\infty$, se tiene que

$$\langle g, y - x \rangle \leq 0,$$

así, $g \in \bar{\partial}^* f(x)$.

(j) Sea $g \in \bar{\partial}^\circ f(x)$ debemos demostrar que $g \in \partial^c f(x)$.

Sea $y \in T_f(x)$ entonces $y \in \bar{S}_f^\circ(x)$ pues $T_f(x)$ es un subconjunto $\bar{S}_f^\circ(x)$, luego

$$\exists \{y^k\} \subset S_f^\circ(x) \;\text{ tal que }\; \lim_{k \to +\infty} y^k = y$$

entonces

$$\left\langle g, y^k - x \right\rangle \leq 0$$

tomando límite, cuando $k \to +\infty$, se tiene que

$$\langle g, y - x \rangle \leq 0,$$

así, $g \in \partial^c f(x)$.

(k) Sea $g \in \bar{\partial}^* f(x)$ debemos demostrar que $g \in \partial^c f(x)$.

Sea $y \in T_f(x)$ entonces $y \in \bar{S}_f(x)$ pues $T_f(x)$ es un subconjunto de $\bar{S}_f(x)$, luego

$$\exists \{y^k\} \subset S_f(x) \;\text{ tal que }\; \lim_{k \to +\infty} y^k = y$$

entonces

$$\left\langle g, y^k - x \right\rangle \leq 0$$

tomando límite, cuando $k \to +\infty$, se tiene que

$$\langle g, y - x \rangle \leq 0,$$

así, $g \in \partial^c f(x)$. ■

A continuación mostraremos ejemplos simples ilustrando algunos aspectos del Lema 5.3

Ejemplo 5.1 *Para $f(x) = \min\{0, 1 - x\}$ en $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, mostremos que $\partial^\circ f(0) = -\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$, pero $\partial^c f(0) = \{0\}$.*

En efecto, primero notemos que

$$y \in S_f^{\circ}(0) \Leftrightarrow y \in \mathring{D}_f \text{ tal que } f(y) < 0 \Leftrightarrow \min\{0, 1-y\} < 0 \Leftrightarrow y > 1,$$

luego $S_f^{\circ}(0) = \{y \,:\, y > 1\}$. Así,

$$\begin{aligned} \partial^{\circ} f(0) &= \{g \in \mathbb{R} \,:\, gy < 0 \;\forall\, y \in S_f^{\circ}(0)\} \\ &= \{g \in \mathbb{R} \,:\, gy < 0,\, y > 1\} \\ &= \{g \in \mathbb{R} \,:\, g < 0\} \\ &= -\mathring{\mathbb{R}}_+ \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $g \in \partial^c f(0)$ tal que

$$gy \leq 0, \text{ para todo } \; y \in T_f(0),$$

luego, en particular para $y = 1 \in T_f(0)$ y $y = -1 \in T_f(0)$ se tiene respectivamente $g \leq 0$ y $g \geq 0$, consecuentemente $g = 0$.
Además, es claro que $0 \in \partial^c f(0)$ por lo tanto $\partial^c f(0) = \{0\}$. ■

Ejemplo 5.2 *Sea* $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_f = \{x \,:\, x_1 \geq 0,\, x_2 \leq \sqrt{x_1}\}$, $f(0) = 1$, $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$. *Entonces* $\mathring{D}_f = \{x \,:\, x_1 > 0,\, x_2 < \sqrt{x_1}\}$, $\partial^{\circ} f(0) = -\dot{\mathbb{R}}_+ \times \{0\}$ *y* $\bar{\partial}^{\circ} f(0) = \partial^c f(0) = -\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, *pero* $\partial^* f(0) = \emptyset$.

Probaremos que $\partial^{\circ} f(0) = -\mathring{\mathbb{R}}_+ \times \{0\}$.
Notemos lo siguiente

$$y \in S_f^{\circ}(0) \text{ si y solo si } y \in \mathring{D}_f \text{ tal que } f(y) < f(0) \text{ si y solo si } 0 < 1;\, y \in \mathring{D}_f,$$

por lo tanto, $S_f^{\circ}(0) = \mathring{D}_f$.
Ahora, sea $w \in \partial^{\circ} f(0)$, como $S_f^{\circ}(0) = \mathring{D}_f$, entonces

$$\langle w, y \rangle < 0, \;\forall\, y \in \mathring{D}_f,$$

mas aún,

$$w_1 y_1 + w_2 y_2 < 0, \;\forall\, y_1 > 0; y_2 < \sqrt{y_1} \tag{5.18}$$

en particular, para $y_2 = 0,\ y_1 = 1$ se tiene que $w_1 < 0$.

Supongamos que $w_2 > 0$, de (5.18) se tiene

$$\frac{w_1}{w_2} < -\frac{y_2}{y_1} < -\frac{y_2}{y_2^2} = -\frac{1}{y_2}; \forall\, y_1 > 0,\ 0 < y_2 < \sqrt{y_1},$$

luego

$$-\frac{w_2}{w_1} < y_2$$

haciendo $y_2 \to 0^+$, se tiene que

$$w_2 \leq 0, \ \text{ pues } \ w_1 < 0$$

.

lo cual es una contradicción con nuestra suposición.

Si $w_2 < 0$, $y_2 \neq 0$, $y_2 = -1$, entonces de (5.18)

$$y_1 - \frac{w_2}{w_1} > 0$$

luego haciendo $y_1 \to 0$, se tiene

$$-\frac{w_2}{w_1} \geq 0 \ \text{ lo cual es un absurdo, pues } \ w_2 < 0,\ w_1 < 0,$$

por lo tanto, $w \in -\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \times \{0\}$.

Además, del mismo procedimiento del primer ejemplo se obtiene que $\bar{\partial}^\circ f(0) = \partial^c f(0) = -\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, pero $\partial^* f(0) = \emptyset$. ■

Los siguientes resultados nos ayudaran a encontrar subgradientes de la función f en algunas aplicaciones.

Lema 5.4 *Supongamos que $f(x) = a(x)/b(x)$ para todo $x \in \overset{\circ}{D}_f$, donde a es una función convexa, b es finita y positiva en $\overset{\circ}{D}_f$, $\overset{\circ}{D}_f$ es convexo, y una de las siguientes condiciones se cumple:*

(a) *b es afín;*

(b) *a es no negativa en $\overset{\circ}{D}_f$ y b es cóncava;*

(c) *a es no positiva en $\overset{\circ}{D}_f$ y b es convexa.*

Entonces f es cuasi-convexa en $\overset{\circ}{D}_f$ y para cada $x \in \overset{\circ}{D}_f$, si $\alpha := f(x)$ es finita entonces $a - \alpha b$ es convexa y $\partial[a - \alpha b](x) \subset \partial^{\circ} f(x)$. Además, si las hipótesis de arriba se cumplen con $\overset{\circ}{D}_f$ reemplazado por $\mathcal{D}_f$, entonces f es cuasi-convexa y $\partial[a - \alpha b](x)$ es un subconjunto de $\partial^* f(x)$ y $\partial^c f(x)$.

Prueba. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, como $b > 0$ en $\overset{\circ}{D}_f$,

$$S^{\circ}_{f,\alpha} = \{y \in \overset{\circ}{D}_f,\ f(y) < \alpha\}$$

$$S^{\circ}_{f,\alpha} = \{y \in \overset{\circ}{D}_f,\ a(y) - \alpha b(y) < 0\}.$$

Caso (a), si $\alpha \geq 0$, entonces $f(y) = a(y) - \alpha b(y)$ es convexa.
Si $\alpha < 0$, entonces $f(y) = a(y) - \alpha b(y)$ es convexa.
Entonces, f es cuasi convexa para todo $y \in \overset{\circ}{D}_f$, pues $S^{\circ}_{f,\alpha}$ es convexo.
Caso (b), si $\alpha \geq 0$, entonces $f(y) = a(y) - \alpha b(y)$ es convexa, así $S^{\circ}_{f,\alpha}$ es convexo.
Si $\alpha < 0$, entonces $f(y) = a(y) - \alpha b(y) > 0$.
Entonces, $S^{\circ}_{f,\alpha} = \emptyset$ es convexo.
Caso (c), si $\alpha \geq 0$, probaremos que $S^{\circ}_{f,\alpha} = \overset{\circ}{D}_f$.
En efecto, es claro que $S^{\circ}_{f,\alpha} \subset \overset{\circ}{D}_f$.
Sea $z \in \overset{\circ}{D}_f$, entonces

$$a(z) - \alpha b(z) < 0,$$

así, $z \in S^{\circ}_{f,\alpha}$ por lo tanto, $S^{\circ}_{f,\alpha} = \overset{\circ}{D}_f$.
Si $\alpha < 0$, entonces $f(y) = a(y) - \alpha b(y)$ es convexa, así $S^{\circ}_{f,\alpha}$ es convexo.
De esta manera, $S^{\circ}_{f,\alpha}$ es convexo con las 3 condiciones y por el Lema (5.2) (c), f es cuasi-convexa en $\overset{\circ}{D}_f$.
Ahora Probaremos que si $\alpha := f(x)$ es finita entonces $a - \alpha b$ es convexa y $\partial[a - \alpha b](x) \subset \partial^{\circ} f(x)$.
Si $\alpha := f(x)$ para algún $x \in \overset{\circ}{D}_f$.

Sea $g \in \partial[a-\alpha b](x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle g, y-x\rangle &\leq [a-\alpha b](y)-[a-\alpha b](x)\\ &= a(y)-\alpha b(y)-a(x)+\alpha b(x)\\ &= a(y)-\alpha b(y)-a(x)+(a(x)/b(x))b(x)\\ &= a(y)-\alpha b(y)\\ &< 0\end{aligned}$$

entonces, $g \in \partial^{\circ} f(x)$.

Por lo tanto, $\partial[a-\alpha b](x)$ es un subconjunto de $\partial^{\circ} f(x)$. ■

Observación 5.4 *Ahora si reemplazamos en el Lema* $\overset{\circ}{D}_f$ *por* $\mathcal{D}_f$ *entonces mostraremos que:*

(i) f *es cuasi-convexa en* $\overset{\circ}{D}_f$*;*

(ii) $\partial[a-\alpha b](x) \subset \partial^{*} f(x)$*;*

(iii) $\partial[a-\alpha b](x) \subset \partial^{c} f(x)$*.*

En efecto, (i) es análogo a lo mostrado en la demostración del Lema 5.4.

(ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que

$$S_f(x)=\{y \in \mathcal{H} \,:\, f(y)<\alpha\}=\{y \in \mathcal{H} \,:\, a(y)-\alpha b(y)<0\},$$

luego sean $g \in \partial[a-\alpha b](x)$ e $y \in S_f(x)$, entonces

$$\langle g, y-x\rangle \leq a(y)-\alpha b(y)-a(x)+\alpha b(x)<0,$$

así, $g \in \partial^{*} f(x)$, por lo tanto $\partial[a-\alpha b](x) \subset \partial^{*} f(x)$.

(iii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que

$$T_f(x)=\{y \in \mathcal{D}_f \,:\, f(y) \leq \alpha\}=\{y \in \mathcal{D}_f \,:\, a(y)-\alpha b(y) \leq 0\},$$

luego sean $g \in \partial[a-\alpha b](x)$ e $y \in S_f(x)$, entonces

$$\langle g, y-x\rangle \leq a(y)-\alpha b(y)-a(x)+\alpha b(x) \leq 0,$$

así, $g \in \partial^{c} f(x)$, por lo tanto $\partial[a-\alpha b](x) \subset \partial^{c} f(x)$. ■

5.3 El Algoritmo del Subgradiente

Consideremos el siguiente algoritmo definido por (Navarro Rojas[2013],[14]) para resolver el problema 5.1 bajo las hipótesis
$A_1 - A_5$

$$x^{k+1} := \Pi_X(x^k - t_k\hat{g}^k),\ \hat{g}^k := g^k/\left\|g^k\right\|,\ g^k \in \bar{\partial}^{\circ} f(x^k),\ k = 1, 2, \ldots,\ x^1 \in X, \quad (5.19)$$

donde $\Pi_X := arg\, min_X \|x - \cdot\|$ es la proyección en X y $t_k > 0$ son longitudes de paso.

Observación 5.5 *El algoritmo esta bien definido, siendo $\bar{\partial}^{\circ} f(x^k)\backslash\{0\} = \partial^c f(x^k)\backslash\{0\} \neq \emptyset$ por el Lema 5.3 (a,c). El algoritmo se detiene si $0 \in \partial^{\circ} f(x^k)$; obteniendose la solución x^k, es decir, $x^k \in Argmin\, f$ por el Lema 5.3 (d).*

A continuación daremos primero resultados básicos por las longitudes de paso en series divergentes

$$t_k \to 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} t_k = \infty. \quad (5.20)$$

Lema 5.5 *(Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32])*

(a) $\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\|^2 \leq \left\|x^k - \bar{x}\right\|^2 - 2t_k \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x}\right\rangle + t_k^2$ *para cada* $\bar{x} \in X$.

(b) *Si* $B(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset \bar{S}_f^{\circ}(x^k)$ *para algún* $\bar{x} \in \mathcal{H}$ *y* $\bar{\epsilon} \geq 0$, *entonces* $\left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x}\right\rangle \geq \bar{\epsilon}$.

(c) *Si la condición de longitud de paso (5.20) se cumple, entonces*

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x}\right\rangle \leq 0 \ \ \textit{para cada} \ \ x \in X.$$

Prueba. (a) Por (5.19) y de la no expansividad de Π_X, $\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\|^2 \leq \left\|x^k - t_k\hat{g}^k - \bar{x}\right\|^2$ con $\left\|\hat{g}^k\right\| = 1$; desarrollando el segundo miembro de la desigualdad se tiene

$$\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\|^2 \leq \left\|x^k - \bar{x}\right\|^2 - 2t_k \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x}\right\rangle + t_k^2.$$

(b) Como $\left\|\hat{g}^k\right\| = 1$, entonces para $\bar{\epsilon} \geq 0$ se tiene que $\left\|\bar{x} + \bar{\epsilon}\hat{g}^k - \bar{x}\right\| \leq \bar{\epsilon}$, asi

$$\bar{x} + \bar{\epsilon}\hat{g}^k \in B(\bar{x}, \epsilon) \subset \bar{S}_f^{\circ}(x^k)$$

entonces existe $\{y^n\} \subset S_f^\circ(x^k)$ tal que $y^n \to \bar{x} + \bar{\epsilon}\hat{g}^k$, de (5.19) $g^k \in \bar{\partial}^\circ f(x^k)$, entonces

$$\left\langle g^k, y^n - x^k \right\rangle \leq 0$$

luego de la continuidad del producto interno, se tiene

$$\left\langle g^k, \bar{x} + \bar{\epsilon}\hat{g}^k - x^k \right\rangle \leq 0,$$

multiplicando por $\frac{1}{\|g^k\|}$ a ambos términos

$$\left\langle \frac{1}{\|g^k\|} g^k, \bar{x} + \bar{\epsilon}\hat{g}^k - x^k \right\rangle \leq 0$$

así,

$$\left\langle \hat{g}^k, \bar{x} - x^k \right\rangle + \left\langle \hat{g}^k, \bar{\epsilon}\hat{g}^k \right\rangle \leq 0$$

luego

$$\left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle \geq \bar{\epsilon}.$$

(c) Supongamos que $\underline{\lim}_{k\to+\infty} \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle > 0$ para algún $\bar{x} \in X, \bar{\epsilon} > 0$ entonces existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle > \bar{\epsilon}, \quad \forall\, k \geq \bar{k}$$

luego por la parte (a),

$$\begin{array}{rcl} \left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\|^2 & \leq & \left\|x^k - \bar{x}\right\|^2 - 2t_k \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle + t_k^2 \\ & \leq & \left\|x^k - \bar{x}\right\|^2 - t_k\bar{\epsilon} + t_k^2 \\ & \leq & \left\|x^{k-1} - \bar{x}\right\|^2 - t_{k-1}\bar{\epsilon} + t_{k-1}^2 - t_k\bar{\epsilon} + t_k^2 \\ & \leq & \left\|x^{k-2} - \bar{x}\right\|^2 - t_{k-2}\bar{\epsilon} + t_{k-2}^2 - t_{k-1}\bar{\epsilon} + t_{k-1}^2 - t_k\bar{\epsilon} + t_k^2 \end{array}$$

repitiendo el procedimiento $(k - \bar{k})$ veces, se tiene que

$$0 \leq \|x^{\bar{k}} - \bar{x}\|^2 - \bar{\epsilon} \sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j + \sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j^2$$

así,

$$\bar{\epsilon} \leq \frac{\|x^{\bar{k}} - \bar{x}\|^2}{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j} + \frac{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j^2}{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j}. \tag{5.21}$$

Por otro lado, de (5.20), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$, entonces para $k \geq \max\{\bar{k}, k_0\}$ se tiene que

$$\frac{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j^2}{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j} < \epsilon$$

así, $\lim_{k\to+\infty} \frac{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j^2}{\sum_{j=\bar{k}}^{k} t_j} = 0$ y de (5.20) $\sum_{j=\bar{k}}^{+\infty} t_k = \infty$, tomando limite cuando $k \to +\infty$ en (5.21), se tiene que

$$0 < \bar{\epsilon} \leq 0,$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto $\underline{\lim}_{k\to+\infty} \left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle \leq 0$ para cada $x \in X$. ∎

Podemos ahora probar la convergencia de los valores objetivos

$$f_*^k := min_{j=1}^k f(x^j) \ \ \forall\, k.$$

Teorema 5.1 *(Krzysztof C. Kiwiel,[2001],[32])*
Si se cumple (5.20), entonces $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f(x^k) = f_*$.

Prueba. La prueba se hara por contradicción, supongamos que $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f(x^k) > f_*$, entonces existen $\alpha > f_*$ y $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^k) \geq \alpha$ para todo $k \geq \bar{k}$.
Por el Lema 5.1, existe $\bar{x} \in X \cap \overset{\circ}{D}_f$ tal que $f(\bar{x}) < \alpha$, así por (5.5), $\bar{x} \in S_{f,\alpha}^{\circ}$. Del Lema 5.2 (b), si $S_{f,\alpha}^{\circ}$ es abierto, entonces contiene a una bola $B(\bar{x}, \bar{\epsilon})$ con $\bar{\epsilon} > 0$.
Para $k \geq \bar{k}$, $f(x^k) \geq \alpha$ y se tiene que

$$B(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset S_{f,\alpha}^{\circ} \subset S_f^{\circ}(x^k),$$

entonces por el Lema 5.5 (b) se tiene que

$$\left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle \geq \bar{\epsilon}, \ \ \forall\, k \geq \bar{k},$$

contradiciendo al Lema 5.5 (c). ∎

A continuación se dará condiciones para la convergencia finita al conjunto optimal del problema 5.1.

$$X^{\diamond} := Argmin_X\, f. \tag{5.22}$$

Denotemos $f_*^k := \min_{j=1}^k f(x^j)$, para todo k.

Teorema 5.2 *Si* $int\, X^{\diamond} \neq \emptyset$ *y (5.20) se cumple, entonces* $x^k \in X^{\diamond}$ *para algún* k.

Prueba. Como $int\, X^{\diamond} \neq \emptyset$, entonces existen $\bar{x}$ y $\bar{\epsilon} > 0$ tal que $B(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset X^{\diamond}$. Entonces $\mathring{B}(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset X \cap \mathring{D}_f$. Supongamos que $f_*^k > f_* \;\forall\, k$. Entonces $f(x^k) \geq f_*^k > f_*$ luego $\mathring{B}(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset S_f^{\circ}(x^k)$ y $B(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \subset \bar{S}_f^{\circ}(x^k)$, así por el Lema 5.5 (b), $\left\langle \hat{g}^k, x^k - \bar{x} \right\rangle \geq \bar{\epsilon} \;\forall\, k$, contradiciendo el Lema 5.5 (c). Por lo tanto, $f_*^k = f_*$ para algún k. ∎

Capítulo 6

Discusion de resultados

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

- Uno de los resultados más importantes de esta investigación es que se ha podido extender el análisis de convergencia del método de subgradiente proyectado sobre espacios de Hilbert, dado que éste resulta ser una extensión del espacio euclidiano.

- Debido a la utilización de los subgradientes generalizados se ha podido extender el algoritmo del subgradiente proyectado para funciones cuasi-convexas y semicontinuas superiores.

- Se mostró que el algoritmo está bien definido y considerando las longitudes de paso con las propiedades: $t_k \to +\infty$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k = +\infty$ se mostró que el algoritmo converje a una solución óptima.

6.2 Contrastación de resultados con otros resultados similares

- Para Frank Navarro es su tesis titulada: "algunas aplicaciones y extensión del método del subgradiente" los problemas de optimización no diferenciales, tiene una serie de desventajas que en su mayoría no pueden ser solucionados por métodos que ya se conocen: como por ejemplo la optimización de funciones diferenciales. Para la solución de estos tipos de problemas es necesario conocer su naturaleza. Los Métodos Subgradientes, tienen una estructura no tan compleja, pero, su velocidad de convergencia es muy lenta.

los Métodos de proyección, desviación y condicional del subgradiente para resolver problemas de optimización no diferenciales. A pesar de la desventaja en la velocidad de convergencia y en la del cálculo de un subgradiente, el Método Subgradiente son métodos iterativos muy practicos, que consisten en encontrar una sucesión que converja a la solución óptima, por la estructura de su algoritmo es de uso practico.

- Para Madujano Valle, en su tesis titulada: "solución de un problema de desigualdad variacional usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman" La subgradiente de una función convexa es un operador monótono maximal, paramonótono y pseudomonótono, los problemas de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$ es una generalización del problema de optimización convexa con restricción en $\mathbb{R}^n$, la sucesión generada por el algoritmo de punto proximal exacto con Distancia de Bregman converge a la solución del problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$. La presente investigación es de ciencia formal, porque está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos, en la línea de análisis numéricos y matemática computacional y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata, el método utilizado de la investigacion es deductivo.

6.3 Responsabilidad ética

El presente informe de tesis titulada: "CONVERGENCIA Y EFICIENCIA DE UN MÉTODO DE SUBGRADIENTE PARA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES CUASI-CONVEXAS" se dasarrollo con las teórias de funciones cuasi-convexas y no diferenciables, que se menciona en las citas bibliográficas que hacen referencia al tema en mención. La responsabilidad al ejecutar la tesis se contó con asesores de la linea de investigacion de la Escuela Profesional de Matemática, así como coasesores (Dr. Erik Papa Quiroz).

Conclusiones

- El enfoque del trabajo de investigación contribuye al progreso en la solución eficiente de problemas de minimización con funciones objetivos cuasi-convexos y semicontinua superiores definidos en un espacio de Hilbert.

- Debemos notar que en el algoritmo presentado se ha utilizado un tipo de subgradiente generalizado, en el cual queda abierta la posibilidad de investigar si es posible utilizar los demás subgradientes y obtener mejores resultados.

Recomendaciones

- Como estamos interesados en resolver el problema cuando la función objetivo es cuasi-convexa y semicontinua superior, se espera poder realizar implementaciones computacionales para resolver problemas en diversas áreas de la Economia, Ingeníerias como por ejemplo en la teoria de la decisión.

- En futuras investigaciones se espera estudiar el método del subgradiente proyectado utilizando otros subdiferenciales generalizados como el subdiferencial de Clark, el subdiferencial de Frechet, el subdiferencial en el límite, etc y analizar sus eficiencias teóricas.

Bibliografía

[1] K.J. Arrow and A. Enthoven., *Quasi-Concave Programming, Econometrica, vol 29, N4, October, 1966.*

[2] A. Auslender, M. Teboulle, *Interior Gradient and Proximal Methods for Convex and Conic Optimization, SIAM J. Optim., Vol 16, n. 3, pp. 697-725, 2006.*

[3] R.S. Burachik, L.M. Graña Drummond, A.N. Iusem and B.F. Svaiter, *Full Convergence of the Steepest Descent Method with Inexact Line Searches, Optimization, 32, pp. 137-146, 1995.*

[4] H.J. Greenberg, W.P. Pierskalla, *Quasiconjugate fucntions and surrogate duality. Cahiers Centre Études Rech. Oper. 15, 437-448, 1973.*

[5] O. Guler, *On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization, SIAM J. Control and Optimization, 29(2), 403-419, 1991.*

[6] A. Izmailov, M. Solodov , *Otimização Volume 2, Métodos computacionais, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.*

[7] E. Lages Lima , *Análisis Real. vol.1, IMCA, UNI, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.*

[8] E. Lages Lima , *Curso de análisis Matemático I, Rio de Janeiro, Brasil, 1991.*

[9] M. Makela M., *Nonsmooth Optimization, Theory and Algoritmos with Applications to Optimal control, University of Jyvaskila, 1990.*

[10] B. Martinet, *Régularisation D'inéquations Variationnelles par Approximations Sucessives. (French) Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelle 4, Ser. R-3, 154-158, 1970.*

[11] B.T. Polyak, *A general method for solving extremum problems. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 174, 33-36. English transl. in Soviet Math. Dokl, 8, 593-597, 1967.*

[12] E.A. Papa Quiroz and P. Roberto Oliveira, *An Extension of the Proximal Point Method for Quasiconvex Minimization, UFRJ, 2008*

[13] E. Papa Quiroz *Optimización Continua, UNAC, Perú, 2009*

[14] F. Navarro Rojas, *Algunas aplicaciones y extensión del método del subgradiente, UNMSM, 2013*

[15] R.T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control and Optimization, 14 (5), 877-898, 1976.*

[16] R.T. Rockafellar and R. Wets, *Variational Analysis. Grundlehren der Mathematischen, Wissenschaften, 317, Springer, 1998.*

[17] C.Torres B. *El proyecto de investigación cientifica, 2005, Lima, Perú*

[18] I. Ya. Zabotin, A.I. Korablev, R.F. Khabibullin, *On minimizing quasiconvex fucntionals, (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 10, 27-33, 1972.*

[19] J. von Neumann, Zur, *Theorie der Gesellschaftspiele. Math. Ann.100 (1928) 295-320.*

[20] J. Pierre Crouzeix, E. Ocaña y W. Sosa, Análisis Convexo, IMCA, Perú, 2003

[21] J.Mandujano Valle, *Solución de un problema de desigualdad variacional usando el método del punto proximal exacto con distancia de bregman, UNAC, 2013*

[22] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization, Cambridge Unversity Press, 2009.*

[23] W. Fenchel, *Conex cones, sets and functions, Mimeographed lecture notes, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1951.*

[24] H. J. Greenberg, W. P Pierskalla, *A review of quasi-convex functions, Reprinted from Oper. Res. 19, 7 (1971), 1553-1570.*

[25] Nava Manzo, Rafael Alejandro, *Funciones convexas no diferenciables,Universidad Autónoma Metropolitana, Mexico (2015)*

[26] B. De Finetti *Sulle stratificazioni convesse, Ann. Math. pura Appl.30,pp.173-183, 1949*

[27] N, Fernández Quispe,*Comportamiento del precio y publicidad en la proporción de clientes en un problema de control óptimo, UNAC, 2013*

[28] P. Canales García, *Convexidad y aplicaciones, XXII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, 2004, Perú*

[29] R. Quispe Llamoca *Tesis: Un método proximal continuo para minimizar funciones cuasi-convexas, 2009, Perú*

[30] P. Canales García, *Introducción a la Optimización e Investigación de Operaciones, Tomo I, Hozlo S.R.L, 2009, Perú*

[31] Pedro J. Miana, *Curso de Análisis Funcional, Departamento de Matemáticas, Universidad Zaragoza, 2006*

[32] Krzysztof C. Kiwiel, *Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization, 2001, 1-25*

Anexo
Matriz de consistencia

CONVERGENCIA Y EFICIENCIA DE UN MÉTODO DE SUBGRADIENTE PARA MINIMIZAR LAS FUNCIONES CUASI-CONVEXAS

planteamiento del problema	**Objetivos de la investigación**	**Hipótesis**	**Metodología**
¿Es óptimo el método de subgradiente proyectado para la minimización de funciones cuasi-convexas? •Específico 1: ¿Es convergente el método subgradiente para minimización de funciones cuasi-convexas? •Específico 2: ¿Es eficiente el método de subgradiente para funciones cuasi-convexas?	General: Demostrar el método subgradiente para la minimización de funciones cuasi-convexas. •Específicos 1: Estudiar la Convergencia del método subgradiente para minimizar las funciones cuasi-convexas. •Específicos 2: Determinar la eficiencia del método de subgradinete para funciones cuasi-convexas	General: Si es óptimo demostrar método de subgradiente para la minimización de funciones cuasi-convexas. •Especificas 1: El método subgradiente para minimización de funciones cuasi-convexas si es convergente. •Especificas 2: El método de subgradiente para funciones cuasi-convexas si es eficiente.	4.1 Tipo y diseño de investigación: El método fue de tipo deductivo y analítico. La investigación de la tesis es no experimental debido que no se manipulan las variables. 4.2 Población y muestra: El trabajo es netamente abstracto, no existe población. 4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental: Para la realización de la tesis se utilizó la técnica de lectura analítica, bibliografía especializada. 4.4 Análisis y procesamiento de datos: La presente investigación no requiere análisis y procesamiento de datos, pues la variable es cualitativa.