

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UNA  
ECUACIÓN DE NAVIER STOKES-3D ESTACIONARIA,  
COMPRESIBLE E ISOTÉRMICA**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN  
MATEMÁTICA

JOSÉ KENYN RODRIGUEZ BRICEÑO

Callao, 2018

PERÚ



**HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN**  
**EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UNA ECUACIÓN DE**  
**NAVIER STOKES-3D ESTACIONARIA, COMPRESIBLE E ISOTÉRMICA**  
**JOSE KENYN RODRIGUEZ BRICEÑO**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por

---

Dr. Walter Flores Vega  
(Presidente)

---

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana  
(Vocal)

---

Lic. Elmer Alberto León Zárate  
(Secretario)

---

Mag. Alfredo Sotelo Pejerrey  
(Asesor)

## DEDICATORIA

A mi madre Elena Briceño López por ser el pilar más importante en mi vida y educación, ayudándome en todo lo que necesito y teniendo siempre su apoyo en los buenos y no tan buenos momentos, para terminar esta exigente carrera, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su gran amor.

A mi hermana Cinthia por ser un ejemplo de una hermana mayor y de la cual aprendí a valorar los estudios, por brindarme sus consejos, apoyo y por demostrarme que con esfuerzo y sacrificio se consiguen las cosas más importantes en la vida.

A mis profesores por su gran apoyo y motivación para la culminación de nuestros estudios profesionales y para la elaboración de esta tesis. Finalmente, a los compañeros, aquellos que marcaron cada etapa de nuestro camino universitario, y que me ayudaron en asesorías y dudas presentadas en la elaboración de la tesis.

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar me gustaria agradecer a la UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO por haberme acogido en sus aulas y darme la oportunidad de estudiar hasta convertirme en un profesional.

Tambien me gustaria agradecer a mis grandes amigos y asesores de tesis,por las que expreso mi total agradecimiento.

Para Paulo Seminario Huertas por brindarme su confianza,sus consejos y en especial sus conocimientos que fueron de gran aporte para que este trabajo de investigación se volviera realidad.

De igual manera agradecer a Sotelo Pejerrey Alfredo por su visión crítica en las cosas cotidianas de la vida,por su rectitud en su profesión como docente y persona,por sus consejos,que me ayudaron a formarme como persona y profesional.por su constante motivación y orientación en la elaboración de este trabajo.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaria agradecerles su amistad,consejos,ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida.Algunas están aquí conmigo otras en mis recuerdos y en mi corazón,sin importar donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí,por todo lo que me han brindado y por todos sus buenos deseos.

# Índice de figuras

II.1	Volumen de control al cual se aplica el principio de conservación de masa. . . . .	14
II.2	Volumen de fluido cruzando un elemento de superficie de control $S$ . .	16
II.3	Sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas. . . . .	17
II.4	Volumen de control al cual se le aplican las leyes de la cantidad de movimiento. . . . .	21
II.5	Ecuación de Bernoulli. . . . .	31
II.6	Circulación en torno de una masa de fluido. . . . .	40

## Índice general

<b>RESUMEN</b>	<b>4</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>5</b>
<b>CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>8</b>
1.1 Descripción de la realidad problemática . . . . .	8
1.2 Formulación del Problema . . . . .	9
1.2.1 Problema General . . . . .	9
1.2.2 Problema Específico . . . . .	9
1.3 Objetivos . . . . .	10
1.3.1 Objetivo General . . . . .	10
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	10
1.4 Limitantes de la investigación . . . . .	10
1.4.1 Teórico . . . . .	10
1.4.2 Temporal . . . . .	11
1.4.3 Espacial . . . . .	11
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO</b>	<b>12</b>
2.1 Antecedentes . . . . .	12
2.1.1 Internacionales . . . . .	12
2.1.2 Nacionales . . . . .	13
2.2 Marco . . . . .	13
2.2.1 <b>Teórico</b> . . . . .	13
2.2.1.1 Ecuación de continuidad . . . . .	13

2.2.1.2	Acumulación y transporte de un escalar . . . . .	19
2.2.1.3	Ecuación de la cantidad de movimiento . . . . .	20
2.2.1.4	Propiedades del tensor de tensiones . . . . .	25
2.2.1.5	Ecuación de Euler . . . . .	29
2.2.1.6	Ecuación de Bernoulli . . . . .	30
2.2.1.7	Fluidos de Stokes y fluidos newtonianos . . . . .	31
2.2.1.8	Ecuación de Navier-Stokes . . . . .	35
2.2.1.9	Los números de Reynolds y de Froude . . . . .	36
2.2.1.10	Ecuación de vorticidad . . . . .	38
2.2.1.11	Ecuación de circulación . . . . .	40
2.2.1.12	La ecuación de la energía total ( $e + v^2/2$ ) . . . . .	43
2.2.1.13	Ecuación de entalpía de estancamiento ( $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$ ) . . . . .	48
2.2.2	Conceptual . . . . .	50
2.2.3	Teórico-conceptual . . . . .	50
2.2.3.1	Teoremas del análisis funcional . . . . .	50
2.2.3.2	Espacios de Sobolev y distribuciones . . . . .	56
2.2.3.3	Algunos teoremas de inmersiones y desigualdades . . . . .	60
2.2.3.4	Espacios de Sobolev de funciones periódicas . . . . .	66
2.2.3.5	Aspectos matemáticos para fluidos compresibles . . . . .	74
2.2.3.6	Fluidos compresibles: Caso estacionario . . . . .	78
2.3	Definición de términos básicos . . . . .	88
<b>CAPÍTULO III:HIPÓTESIS Y VARIABLES</b>		<b>91</b>
3.1	Hipótesis . . . . .	91
3.1.1	Hipótesis General . . . . .	91
3.1.2	Hipótesis específicas . . . . .	91
3.2	Operacionalización de las Variables . . . . .	91
<b>CAPÍTULO IV:METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN</b>		<b>92</b>
4.1	Tipo y diseño de la investigación . . . . .	92



4.1.1	Tipo de investigación . . . . .	92
4.1.2	Diseño de la investigación . . . . .	93
4.2	Población y muestra . . . . .	93
4.2.1	Población . . . . .	93
4.2.2	Muestra . . . . .	93
4.3	Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental . . . . .	94
4.4	Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo . . . . .	94
4.5	Análisis y procesamiento de datos . . . . .	95
<b>CAPÍTULO V: RESULTADOS</b>		<b>96</b>
5.1	Resultados descriptivos . . . . .	96
5.1.1	Soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	96
5.1.2	Problema estacionario básico . . . . .	96
5.1.3	El operador de Stokes . . . . .	97
5.1.4	El problema no lineal . . . . .	99
5.1.5	Otros métodos topológicos para lidiar con la no linealidad . . . . .	103
5.2	Resultados Inferenciales . . . . .	107
5.3	Otro tipo de resultado de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis . . . . .	107
<b>CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>		<b>108</b>
6.1	Contrastación de la hipótesis . . . . .	108
6.1.1	Existencia de Soluciones débiles y estimativa respecto a la fuerzas externas . . . . .	108
6.2	Contrastación de los resultados con estudios similares . . . . .	115
6.3	Responsabilidad Ética . . . . .	116
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>120</b>

## RESUMEN

### EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UNA ECUACIÓN DE NAVIER STOKES-3D ESTACIONARIA, COMPRESIBLE E ISOTÉRMICA

José Kenyn Rodriguez Briceño

Diciembre - 2018

Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Co-asesor: Mg. Paulo Nicanor Seminario Huertas

Título obtenido: Licenciado en Matemática

---

En el presente trabajo se estudiará el problema estacionario relacionado a las ecuaciones de Navier-Stokes en un ambiente tridimensional, bajo condiciones compresible e isotérmico. Apartir de su estudio físico y ciertas condiciones ambientales e ideales para ciertos fluidos llegamos a un modelaje matemático mostrando la existencia de soluciones débiles para el sistema de ecuaciones. Con este fin, se aplicará el método de aproximaciones sucesivas y se probará estimativas respecto a los datos iniciales. Llegando así a las soluciones débiles del problema con ayuda de la teoría de los espacios de Sobolev y los teoremas más importantes del análisis funcional. concluyendo no solo con la existencia de soluciones debiles sino también con la unicidad de estas soluciones para cada fuerza externa y densidad fijas. Consecuentemente hacer un estudio de un caso más general como sería el caso barotrópico con el mismo método ,pero con algunos cambios en la variable densidad.

**Palabras Claves:** Navier-Stokes ; compresible ; viscosidad ; Divergente ; Estacionario e isotérmico.

# ABSTRACT

## EXISTENCE OF WEAK SOLUTIONS FOR THE STATIONARY COMPRESSIBLE AND ISOTHERMAL NAVIER-STOKES-3D EQUATION

José Kenyn Rodríguez Briceño

December - 2018

Advisor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Co-advisor: Mg. Paulo Nicanor Seminario Huertas

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

---

In the present work, the stationary problem related to the Navier-Stokes equations in a three-dimensional environment under compressible and isothermal conditions is studied. of weak solutions for the system of equations. To this end, the method of successive approximations is applied and the initial relationships are compared with the initial data. This is the case of the most important solutions to the problem with the help of the theory of public spaces and the most important theories of functional analysis. This includes not only the existence of weak solutions but also the uniqueness of these solutions for each one. external force and fixed density. Consist in a more general case as a barotropic case with the same method, but with some changes in the density variable.

**Keywords:** Compressible; Navier-Stokes; Divergent; Stationary and isothermal.

## Introducción

Uno de los problemas más interesantes y de mayor dificultad en el estudio teórico-matemático de las ecuaciones en derivadas parciales que surgen en la Mecánica de Fluidos es sobre las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido compresible (por ejemplo los *gases*) están *bien definidas* en el sentido de Hadamard. La principal dificultad se presenta en el flujo de un fluido *compresible*, el cual es un fenómeno genuinamente *no lineal* regido por ecuaciones en derivadas parciales de tipo mixto (hiperbólico-parabólico). En la bibliografía sobre el estudio de ecuaciones de Navier-Stokes, existe varios resultados para el caso de un fluido *incompresible*, es decir, un fluido donde el volumen ocupado por una cantidad de partículas no varía con el tiempo. Esta condición se traduce en la siguiente propiedad para el campo de velocidades

$$\nabla \cdot u = 0,$$

dicha restricción supone una ventaja importante: la presión (comúnmente denotada por la letra  $p$ ) *desaparece* en la formulación variacional del problema, con lo que deja de ser una incógnita. Así, una vez resuelto el sistema (y, por tanto, conocido  $u$ ), la presión es recuperada como consecuencia del Lema de De Rham (véase [1, 2, 3, 4, 14] entre otros).

Sin embargo, no ocurrirá lo mismo para el caso *compresible*. No sólo no desaparece  $p$  en la formulación variacional, si no, que en la ecuación de momentos y la ley de conservación de la masa estarán acopladas.

Debido a la complejidad de este tipo de EDP's, se optará por estudiar el caso de un fluido estacionario considerando un gas isotérmico en un ambiente tridimensional, usando diferentes herramientas matemáticas del análisis funcional y las ecuaciones en derivadas parciales, con el fin de probar la existencia de *soluciones* para dicho problema. Esto permitirá conseguir resultados provechosos y novedosos en esta línea de estudio.

Así, se ha dividido el presente trabajo en seis capítulos, siendo el primero de ellos

referente al planteamiento del problema, mostrando la formulación de este, los objetivos esperados y los limitantes propios de una investigación.

En el segundo capítulo, se presenta la teoría respecto a las ecuaciones de Navier-Stokes, tanto en el ámbito físico como matemático, mostrando ciertos preliminares matemáticos respecto a los espacios de Sobolev y al análisis funcional.

El tercer capítulo está destinado a mostrar cuales son las variables de estudio, así como la hipótesis planteada, mientras que la metodología del presente trabajo se especifica en el cuarto capítulo.

Los resultados de la investigación serán mostrados en el quinto capítulo, a partir de la aplicación de la teoría desarrollada en el marco teórico por medio del método de aproximaciones sucesivas, probando la hipótesis general.

Finalmente, se destinará el sexto capítulo para la discusión de los resultados, así como las conclusiones del problema.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

En el presente trabajo estudiaremos el comportamiento de un fluido compresible, como puede ser un gas, o una masa de aire, isotérmico (al ser gas se considera ecuaciones relacionadas a la termodinámica lo que permiten considerar esta característica física en nuestro problema), viscoso -puesto que se consideran las fuerzas de cizallamiento- en un ambiente tridimensional, procurando probar la existencia de soluciones para el caso estacionario, es decir, las fuerzas físicas involucradas independen del tiempo. Este hecho permite aproximar la dinámica del comportamiento de dichos sistemas para el caso parabólico e hiperbólico. Una aplicación visible del presente estudio, es el comportamiento de una masa de aire en un ambiente *cerrado*, así se podrá conseguir aproximaciones del campo de velocidades de dicha masa, como de su densidad, a partir de las fuerzas externas participantes. Las ecuaciones que rigen el movimiento estacionario de un fluido compresible, isoterma y viscoso en un dominio acotado fijado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  se pueden escribir como sigue:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu(\nabla v + \nabla v^t) + \lambda(\nabla \cdot v)Id) + \nabla p + \rho v \cdot \nabla v = \rho f & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\rho v) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $v$  la velocidad,  $f$  son las fuerzas exteriores,  $p$  es la presión, cuya expresión viene dada por la ecuación de estado para un fluido isoterma:

$$p = K\rho,$$

con  $K > 0$  constante y  $\mu, \lambda$  siendo los llamados coeficientes de Lamé (que supondremos constantes).

Así, las anteriores consideraciones termodinámicas conducen a las restricciones:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0.$$

Si definimos

$$\zeta = \frac{3\lambda + 2\mu}{3},$$

podemos escribir las ecuaciones en los coeficientes  $\mu$  y  $\zeta$  ( $\mu > 0$ ,  $\zeta \geq 0$ ) como:

$$\begin{cases} -\mu\Delta v - \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) + K\nabla\rho + (\rho v \cdot \nabla)v = \rho f & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\rho v) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Además, suponemos las condiciones adicionales:

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} \rho(x) dx = \bar{\rho} \cdot |\Omega|, \quad (1.3)$$

donde  $\bar{\rho} > 0$  es una constante fijada, que representará la positividad de la masa total y la condición de adherencia sobre la frontera respectivamente (estamos suponiendo por ejemplo una frontera sólida, sin entrada ni salida de fluido). El objetivo del estudio de este último sistema es deducir la existencia de soluciones siguiendo los diferentes métodos usados por M. Padula [1].

## 1.2. Formulación del Problema

### 1.2.1. Problema General

Se quiere resolver la siguiente interrogante:

*¿Existirán soluciones débiles para una ecuación de Navier-Stokes-3D estacionaria, compresible e isotérmica para el problema (1.1)?*

### 1.2.2. Problema Específico

- a) ¿Existirán soluciones débiles para el problema aproximado de Stokes asociado al problema (1.1)?,

*b)* ¿converge el problema aproximado de Stokes asociado al problema (1.1)?.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo General**

Determinar la existencia de soluciones débiles para una ecuación de Navier-Stokes-3D estacionaria, compresible e isotérmica, dada por (1.1).

### **1.3.2. Objetivos Específicos**

- (a.)* Determinar la existencia de soluciones débiles para el problema aproximado de Stokes asociado al problema (1.1).
- (b.)* Establecer la convergencia del problema aproximado de Stokes asociado al problema (1.1).

## **1.4. Limitantes de la investigación**

### **1.4.1. Teórico**

Las ecuaciones de Navier-Stokes forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales del tipo convección-difusión mixta que representan problemas complejos, lo que hace que se tornen relevantes desde el punto de vista matemático. Ellas tienen la característica de necesitar muchas hipótesis sobre sus datos para la obtención de resultados como existencia, unicidad, regularidad y soluciones explícitas. Un ejemplo clásico de este hecho es que la existencia de solución global suave para las ecuaciones en el caso tridimensional, para fluidos incompresibles, es un problema en abierto.



### **1.4.2. Temporal**

En la actualidad, las ecuaciones diferenciales, es de gran interés debido a sus múltiples aplicaciones en las distintas áreas de estudio como la economía, ciencias básicas, ingenierías, etc., el estudio de los fluidos es de gran importancia, ya sea para nuestra vida cotidiana o para nuestro desarrollo como sociedad. El estudio de la dinámica de los fluidos puede ayudar a comprender por ejemplo cómo impulsar un barco en el mar, cómo vuela un avión, cómo represar el agua de nuestros ríos. Para el desarrollo de esta tesis uno de los limitantes que se encontró es la escasa bibliografía especializada en la escuela de matemática de la Universidad Nacional del Callao y biblioteca nacional, otro obstáculo que se pudo evidenciar es que en las páginas de internet las publicaciones de artículos, revistas, presentan un costo para ser descargadas. Además, revisando en la unidad de posgrado no se encontró literatura relacionada al tema de ecuaciones de Navier-Stokes. Por este motivo resulta importante la investigación en ecuaciones mixtas.

### **1.4.3. Espacial**

La importancia física de su estudio es debido a que tales ecuaciones modelan el comportamiento de fluidos. Cuando se habla de movimiento de gases, masas de aire, corrientes marítimas, flujo sanguíneo, entre otras. Consecuentemente, sus aplicaciones van desde previsiones meteorológicas hasta simulaciones de pruebas aerodinámicas. Por lo tanto, estas ecuaciones son de interés de estudiosos de varias áreas.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron derivadas inicialmente por M. Navier [37] en 1827 y por S. D. Poisson [38] en 1831, basándose en un argumento envolviendo consideraciones de fuerzas intermoleculares. Más tarde, las mismas ecuaciones fueron derivadas sin el uso de estas hipótesis por B. de Saint Venant [39] en 1843 y por G. G. Stokes [40] en 1945. Sus derivaciones fueron estudiadas a partir de las hipótesis de que las tensiones normales y de cizallamiento son funciones lineales de la tasa de deformación, en conformidad con la más antigua ley de viscosidad de Newton. La trascendencia del estudio de estas ecuaciones se refleja al ser consideradas como uno de los problemas del millón (por Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts) al estudiar la buena colocación del sistema en un región tridimensional, incompresible. Respecto al estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, la bibliografía es abundante, (por ejemplo [31, 32, 33, 34, 35]) tomando como principal referencia el libro de P. L. Lions [14] entre otros.

#### 2.1.1. Internacionales

1) Padula Mariarosario(1985) en su artículo llamado Existence and Uniqueness for Viscous Steady Compressible Motions Probamos la existencia de soluciones débiles globales para flujos compresibles viscosos inestables bidimensionales de un gas isotérmico ideal, sea cual sea el tamaño de los datos. Esto se logra mediante un acoplamiento adecuado del método de Hopf .con técnicas estándar en espacios Orlicz.

2) Albeto Valli (1987),en un artículo llamado On the Existence of Stationary Solutions to Compressible Navier-Stokes Equations. probamos la existencia de una solución estacionaria para las ecuaciones de Stier Naves para fluidos compresibles, bajo el supuesto de que el campo de fuerza externo es pequeño en un sentido adecua-

do, la prueba se basa en el resultado de la existencia para un problema linealizado, seguido de un argumento de punto fijo.

3) R. Bruce Kellogg, Biyue Liu, (1996) A Finite Element Method for Compressible Stokes Equations. Se considera un sistema de Navier-Stokes viscoso, compresible y de estado estacionario linealizado. Se formula un método de elementos finitos. La solvencia y estabilidad únicas de la solución de elementos finitos se desprenden de un teorema para una formulación abstracta. Está comprobado que cuando los subespacios de velocidad y presión satisfacen la condición inf-sup asociada con el sistema de Stokes (incompresible), el método de elementos finitos se puede resolver de manera única. Se obtiene una estimación de error para la aproximación numérica

4) L. Boudin, C. Grandmont, A. Moussa (2017) Global existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations in a time-dependent domain. En este artículo, probamos la existencia de soluciones débiles globales para el incompresible sistema Navier-Stokes-Vlasov en un dominio tridimensional dependiente del tiempo con condiciones de límite de absorción para la parte cinética. Este modelo surge del estudio del aerosol respiratorio en las vías aéreas humanas. La prueba se basa en una estrategia de regularización y aproximación diseñada para nuestro marco dependiente del tiempo.

## **2.1.2. Nacionales**

No se encontraron trabajos nacionales similares al trabajo de tesis.

## **2.2. Marco**

### **2.2.1. Teórico**

#### **2.2.1.1. Ecuación de continuidad**

Consideramos un volumen de control  $V$ , fijo en el espacio, simplemente conexo, a través del cual un fluido con masa específica  $\rho$  fluye, siendo  $v$  el campo de velocidades

del flujo. Sean  $S$  la superficie externa que delimita el volumen y  $n$  el vector unitario (de longitud igual a 1), perpendicular a la superficie en cada punto de la misma y orientado hacia afuera, conforme es mostrado en la figura 2.1. El principio de conservación de la masa establece que:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taza de acumulación de} \\ \text{masa dentro del volumen,} \\ \text{esto es, la cantidad de} \\ \text{masa acumulada dentro} \\ \text{del volumen por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{Flujo líquido de masa} \\ \text{para fuera del volumen} \end{array} \right). \quad (2.1)$$

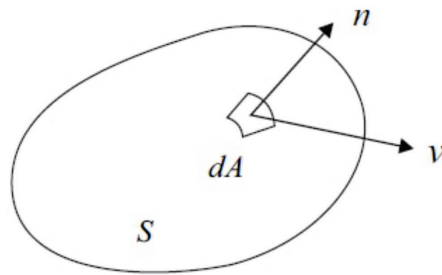


Figura II.1: Volumen de control al cual se aplica el principio de conservación de masa.

Expresemos de forma matemática la igualdad anterior. La tasa de acumulación de masa dentro del volumen  $V$  puede ser expresada como una integral sobre todo el volumen, de la variación de la cantidad de masa en cada punto del mismo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm.$$

Por otro lado, la cantidad infinitesimal de masa  $dm$  puede ser expresada como  $dm = \rho dV$ . Substituyendo es última expresión en la integral de arriba y observando que los volúmenes  $dV$  no varían con el tiempo, tenemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.2)$$

Para dar forma matemática al flujo neto de masa fuera del volumen  $V$ , consideramos inicialmente una pequeña parte de la superficie  $S$  conforme es mostrado en la figura 2.2.

Sea  $\Delta V$  un elemento de volumen del fluido que cruza la superficie en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Sean  $n$  el vector unitario perpendicular a la superficie y  $v$  la velocidad del elemento de fluido considerado. Esa velocidad puede ser descompuesta en dos componentes, una de ellas paralela a  $n$ , que denominamos  $v_n$ , y otra perpendicular a  $n$  que denominamos  $v_p$ .

La contribución del elemento de fluido para el flujo de masa que cruza la superficie es dada por  $\rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$ . El elemento de volumen  $\Delta V$  puede ser escrito como el producto de su longitud  $\Delta x$  por su área transversal  $\Delta A$ , que consideramos paralela a la superficie  $S$ . Así,  $\Delta V = \Delta x \Delta A$  y podemos reescribir el flujo de masa que cruza la superficie como:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta A.$$

El término  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  es precisamente la componente de la velocidad del elemento de fluido paralelo a  $n$ . Apenas esa componente contribuye para el flujo de masa que cruza la superficie. Esa componente puede ser escrita como  $v_n = v \cdot n$ . De esa forma, la contribución del elemento  $dV$  para el flujo de masa toma la forma:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho v \cdot n \Delta A.$$

Si la componente  $v_n$  tuviera el mismo sentido de la normal  $n$ , esto es, si el elemento de volumen  $dV$  estuviera cruzando la superficie para afuera de la misma, el producto  $v \cdot n$  será positivo, y si la componente  $v_n$  tuviera sentido opuesto a  $n$  el producto escalar será negativo. Al integrar la expresión de arriba a lo largo de toda la superficie  $S$  hacemos automáticamente el balance del flujo de masa que sale, menos lo que entra en el volumen  $V$ . Así, El flujo neto fuera del volumen es:

$$\oint_S \rho v \cdot n dA. \tag{2.3}$$

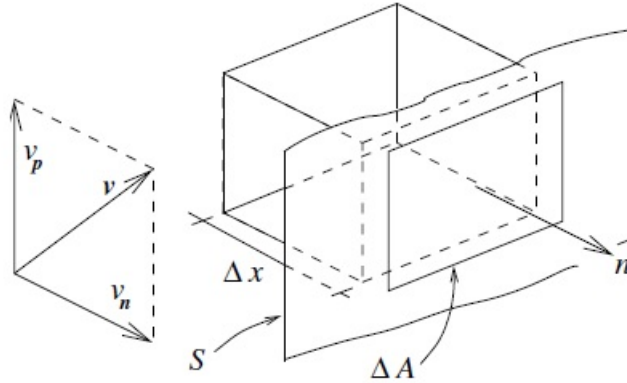


Figura II.2: Volumen de fluido cruzando un elemento de superficie de control  $S$ .

Substituyendo las ecuaciones (2.2) y (2.3) en el balance de masa (Ecuación 2.1) obtenemos la forma integral de la ecuación de conservación de masa [53, 52, 49, 48, 54, 51, 55, 50]:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho v \cdot n dA. \quad (2.4)$$

Esta ecuación relaciona la tasa de acumulación de masa en un volumen finito con el balance de los flujos de masa que cruzan la superficie. Se trata de una ecuación integral. Procuramos ahora una expresión local, esto es, una ecuación diferencial que traduzca el principio de conservación de masa. Recordando que, de acuerdo con el teorema de Gauss:

$$\int_V \operatorname{div} q dV = \oint_S q \cdot n dA$$

o

$$\int_V \operatorname{div} \rho v dV = \oint_S \rho v \cdot n dA,$$

utilizamos este teorema para reescribir la ecuación 2.4:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \rho v dV$$

o

$$\int_S \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \right) dV = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen de control, debemos tener, para un volumen infinitesimal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0 \quad (2.5)$$

que es la ecuación de continuidad [53, 52, 49, 48, 54, 51, 55]. En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (2.6)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (2.7)$$

En coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) = 0. \quad (2.8)$$

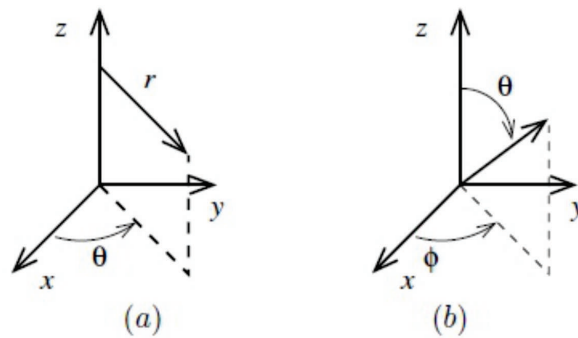


Figura II.3: Sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

Podemos reescribir la ecuación de continuidad (coordenadas cartesianas) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = 0.$$

Esta ecuación puede también ser escrita como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \text{grad} \right) \rho + \rho \text{div } v = 0$$

o

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } v = 0 \quad (2.9)$$

En la notación de los tensores cartesianos, la ecuación de la continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \quad (2.10)$$

En resumen, la ecuación de la continuidad puede ser escrita en cualquiera de las formas de abajo:

Cuadro II.1: Formas de la ecuación de continuidad.

Forma vectorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } v = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \text{div } v = 0$	$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$



La no linealidad inherente a los fenómenos que ocurren en fluidos ya se manifiestan en la ecuación de continuidad, donde el término  $\text{div } \rho v$  no es lineal pues contiene el producto de las dos incógnitas: la masa específica es la propia velocidad. En algunos casos, sin embargo, la ecuación de continuidad se torna lineal:

1.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  y  $\text{grad } \rho = 0$ , que es el caso de fluidos incompresibles.

En este caso, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\text{div } v = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

2. Flujo estratificado, esto es, en capas de fluidos inmiscibles. En este caso,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  y  $\text{grad } \rho \perp v$ . La ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

3. Acústica: se trata del caso en que la masa específica del fluido esta sujeta a variaciones pequeñas en torno de un valor medio,  $\rho_0$ . Escribimos  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , donde  $\rho_0$  no depende del tiempo ni de la posición en el espacio. La ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + v \cdot \text{grad } (\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho') \text{div } v = 0.$$

Esta ecuación se simplifica si consideramos que  $\rho_0$  no depende del tiempo ni de la posición, que  $(\rho_0 + \rho') \approx \rho_0$  y que  $v \ll \frac{\partial \rho'}{\partial t}$ . La ecuación de continuidad se reduce a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } v = 0,$$

que es una ecuación lineal.

### 2.2.1.2. Acumulación y transporte de un escalar

Las integrales dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) representan, respectivamente, la tasa de acumulación en un volumen de control, de la cantidad escalar masa, y

el flujo de la misma magnitud a través de las fronteras. La cantidad del escalar contenida en cada elemento de volumen de control es obtenida por el producto de la densidad local en el caso, de la masa específica del fluido transportado, por el volumen del elemento. La densidad del escalar tiene, en ese caso, la dimensión de masa por unidad de volumen del medio.

En cuanto al flujo del escalar a través de las fronteras del volumen de control, es obtenido integrándose, a lo largo de la superficie que delimita el volumen, el producto de la densidad local del escalar por el caudal volumétrico que cruza la superficie. Las integrales dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) pueden entonces ser generalizadas para caracterizar no solo la tasa de acumulación, y el flujo de la masa a través de la superficie que delimita un volumen, además también, de una magnitud escalar genérica  $\theta$ , cuya dimensión física es de un escalar (masa, componente de la cantidad de movimiento en una dirección, energía interna, energía cinética, entropía, etc.). Representamos por  $c$  la densidad de  $\theta$ . Si  $\theta$  se refiere a la componente de la cantidad de movimiento en una dirección genérica, asociada a la masa contenida en el volumen, y la masa cruzando la frontera del mismo, la densidad  $c$  será dada por  $c = \rho v_i v_i / 2$ . Si la acumulación de  $\theta$  fuera igual a la tasa neta de transferencia de  $\theta$  para dentro del volumen, el principio de conservación de la magnitud se traduce, en la forma integral, por:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint cv_j n_j dA.$$

Utilizando el teorema de Gauss se obtiene la ecuación de conservación de  $\theta$  en forma diferencial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cv_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.11)$$

El principio de conservación anterior se utiliza a continuación para la obtención de la ecuación de la cantidad de movimiento de un medio continuo compresible.

### 2.2.1.3. Ecuación de la cantidad de movimiento

Sea un volumen fijo en el campo de velocidades de un medio continuo. La tasa de variación de la cantidad de movimiento de ese volumen debe incluir, además de la

resultante de las fuerzas aplicadas, el balance del flujo de la cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen [53, 52, 49, 48, 54, 51, 55]. Esquemáticamente (ver figura 2.4):

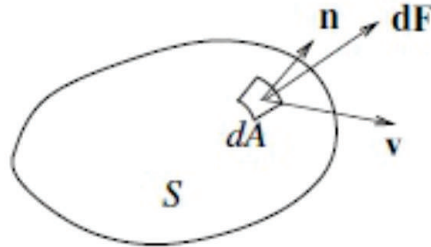


Figura II.4: Volumen de control al cual se le aplican las leyes de la cantidad de movimiento.

$$\left( \begin{array}{c} \text{taza de acumulación de} \\ \text{cantidad de movimiento} \\ \text{dentro del volumen de control,} \\ \text{esto es, variación de la} \\ \text{cantidad de movimiento} \\ \text{dentro del volumen por unidad} \\ \text{de tiempo.} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Flujo neto de cantidad} \\ \text{de movimiento para} \\ \text{fuera del volumen.} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Resultante de las fuerzas} \\ \text{aplicadas a la superficie de control} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Resultante de las fuerzas} \\ \text{de volumen.} \end{array} \right) \quad (2.12)$$

Expresemos cada una de las partes de arriba en forma matemática. La tasa de acumulación en el volumen de control, de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección genérica del vector unitario  $e_i$ , es dada por

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV$$

Vimos, en la sección 2.2.1.1, que el flujo de la masa a través de un elemento de área  $dA$  de la superficie de control es dado por  $\rho v_j n_j dA$ . Si lo multiplicáramos por la

componente en la dirección genérica  $i$  de la cantidad de movimiento por unidad de masa, esto es, por la componente del vector velocidad en esa dirección, tenemos una expresión para el flujo de aquella componente de la cantidad de movimiento que cruza el elemento de área:  $\rho v_i v_j n_j dA$ . Integrando ese término a lo largo de toda la superficie de control, tenemos el flujo neto de esa componente de la cantidad de movimiento para afuera de la superficie de control:

$$\oint_S \rho v_i v_j n_j dA.$$

En lo que se refiere a las fuerzas que actúan en la superficie del elemento, hacemos las siguientes hipótesis:

1. Admitimos que puedan ser expresadas como una combinación lineal de las componentes del vector  $n$  normal al elemento de la superficie considerada. Sean  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  las componentes del vector  $n$ . Siendo la fuerza  $dF$ , que actúa en el elemento de área, proporcional a una combinación lineal de las componentes de  $n$ ,  $dF$  no tienen de forma general, la dirección del vector normal;
2. El factor de proporcionalidad de arriba mencionado es el área del elemento de superficie al cual se aplica la fuerza, esto es, admitimos que la magnitud de la fuerza es proporcional al área del elemento.

En base a las hipótesis anteriores, representamos la fuerza actuando sobre el elemento de área por:

$$dF = \sigma n dA.$$

Como  $dF$  y  $n$  no tienen, de forma general, la misma dirección, es necesario que  $\sigma$  sea una matriz de orden  $3 \times 3$ , de modo, que aplicando al vector  $n$ , resulte un vector con otra dirección.

Siendo el área de un objeto vectorial, los elementos de área de la superficie de control pueden ser proyectados en las direcciones de los ejes de coordenadas. Así, la fuerza que actúa en la dirección  $x$  de un elemento de área se expresa como:

$$dF_x = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA, \quad (2.13)$$

donde  $n_x dA$ ,  $n_y dA$ ,  $n_z dA$  son las proyecciones de la área elemental en la dirección de cada uno de los ejes. En la dirección genérica, del eje  $x_i$ :

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dA, \quad (2.14)$$

donde  $\sigma$  puede ser representado, en un dato referencial, por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14) están basadas en la hipótesis de que la fuerza actuando sobre el elemento de área se expresa como una combinación lineal de las proyecciones del vector unitario  $n$ . Y, siendo ese vector multiplicado por una matriz, el vector fuerza resultante no tiene necesariamente la dirección normal a la superficie, lo que ocurre efectivamente cuando la partícula del medio está sujeta a tensiones de cizallamiento.

La resultante de las fuerzas que actúan sobre la superficie de control es obtenida por la integración de la ecuación (2.13) a lo largo de aquella:

$$F_i = \oint_S \sigma_{ij} n_j dA. \quad (2.16)$$

Por fin, la resultante de las fuerzas de volumen es dada por:

$$\int_V \rho g_i dV.$$

Reagrupando los cuatro términos, obtenemos la forma integral de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \oint_S \rho v_i v_j n_j dA + \oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho g_i dV. \quad (2.17)$$

En notación vectorial:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dV = - \oint_S \rho v (v \cdot n) dA + \oint_S \sigma n dA + \int_V \rho g dV. \quad (2.18)$$

El siguiente paso consiste en transformar las integrales de superficie en integrales de volumen por intermedio del Teorema de Gauss, de forma que podamos obtener la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la forma diferencial. Observamos que el término  $\rho v_i v_j$  representa el elemento general de un tensor de segundo orden. La divergente de ese tensor es obtenido de la misma forma que el del tensor de tensiones. Reescribiendo la ecuación (2.17) con todos los términos en la forma de integrales de volumen, tenemos para la tasa de variación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x_i$  dentro del volumen de control.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV.$$

Esta ecuación debe ser válida para volúmenes de control de cualquier dimensión, inclusive para volúmenes infinitesimales. Considerando un volumen infinitesimal y dividiendo la ecuación resultante por  $dV$ , encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

Reagrupando los términos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (2.19)$$

En la forma vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \text{div}(\rho v v) = \text{div} \sigma + \rho g.$$

El miembro izquierdo de la ecuación (2.19) se simplifica conforme se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = \\ &= \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) = \\ &= \rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

La expresión que se encuentra dentro del último par de paréntesis de la expresión anterior es igual a cero en virtud de la ecuación de continuidad (2.10). La ecuación (2.19) toma portanto la forma:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (2.20)$$

En la forma vectorial:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{\rho} \text{div } \rho + g.$$

#### 2.2.1.4. Propiedades del tensor de tensiones

##### a) Simetría del tensor de tensiones

Los Fluidos en los cuales los torques internos resultan del momento de fuerzas aplicadas externamente al fluido apenas se denominan fluidos apolares. Las partículas de un fluido polar son capaces de transmitir y de resistir los torques. Se encuadran en esa clase de algunos fluidos poliatómicos y algunos fluidos newtonianos.

Para el caso de fluidos apolares o hacemos la hipótesis de que las partículas del medio no resisten al torque, lo que resulta en simetría del tensor de tensiones, o admitimos la simetría del tensor y concluimos que las partículas del fluido no resisten al torque. Admitimos aquí la primera hipótesis y mostramos que  $\sigma$  es simétrico. El tratamiento presentado en esta sección sigue, en líneas generales, lo propuesto por Aris [47].

En virtud de la hipótesis de ser los torques aplicados al fluido resultante apenas de las fuerzas externas, tenemos que la tasa de acumulación de cantidad de movimiento angular en un volumen  $V$ , delimitado por una superficie  $S$  es dada por:

$$\int_V \frac{D}{Dt} (\rho x \times v) dV = \oint_S x \times \sigma n dA + \int_V \rho x \times g dV.$$

En notación tensorial cartesiana:

$$\int_V \frac{D}{Dt} (\epsilon_{ijk} \rho x_j v_k) dV = \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp} n_p dA + \int_V \rho \epsilon_{ijk} x_j g_k dV. \quad (2.21)$$

Desarrollamos el integrando del lado izquierdo de la ecuación (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\epsilon_{ijk}\rho x_j v_k) &= \epsilon_{ijk} \frac{Dx_j}{Dt} \rho v_k + \epsilon_{ijk} x_j \frac{D\rho v_k}{Dt} = \\ &= \epsilon_{ijk} v_j \rho v_k + \epsilon_{ijk} x_j \rho \frac{Dv_k}{Dt} = \epsilon_{ijk} x_j \rho \frac{Dv_k}{Dt}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

El desarrollo anterior tiene en cuenta que  $v \times v \equiv 0$  y que, por la ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho v}{Dt} = \rho \frac{Dv}{Dt}.$$

El término contenido en la integral de superficie puede ser transformado en una integral de volumen, resultando:

$$\oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp} n_p dA = \int_V \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp}) dV.$$

Desarrollando el integrando del miembro derecho de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp}) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_j} \sigma_{kp} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{kp} + \\ &+ \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} - \epsilon_{ikj} \sigma_{kj}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Reemplazando los resultados dados por las ecuaciones 2.22 y 2.23 en la ecuación 2.21, rordenando los términos y aplicando esta ecuación a un elemento de fluido, obtenemos:

$$\epsilon_{ijk} x_j \left( \rho \frac{Dv_k}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} - \rho g_k \right) = -\epsilon_{ijk} \sigma_{kj}.$$

La expresión entre paréntesis es igual a cero lo que implica que  $\epsilon_{ikj} \sigma_{kj}$  sea el elemento general de un vector nulo. Los elementos de este vector son  $\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$ ,  $\sigma_{31} - \sigma_{13} = 0$  y  $\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$ , lo que muestra que el tensor  $\sigma$  es simétrico.

### b) Descomposición del tensor de tensiones: Presión y tensor desviatorio

Descomponemos el tensor de tensiones  $\sigma$  en la suma de otros dos, el primero representado por una matriz cuyos elementos de la diagonal principal son idénticos, de valor  $\text{tr } \sigma / 3$  y cuyos elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Representamos los elementos del segundo tensor de la descomposición por  $\tau_{ij}$ :



$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.24)$$

En notación vectorial:

$$\sigma = \frac{1}{3}\text{tr } \sigma \mathbf{1} + \tau,$$

donde  $\mathbf{1}$  es el tensor identidad. El tensor  $(\text{tr } \sigma/3)\mathbf{1}$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $\text{tr } \sigma/3$  es el valor medio de las tensiones normales actuando en las caras perpendiculares en las tres direcciones del referencial utilizado;
2. Como el tensor  $\mathbf{1}$ , aplicado al vector  $n$  (y a cualquier otro vector), resulta en el mismo vector sobre el cual actúa, la fuerza:

$$dF = \frac{1}{3}\sigma ndA$$

tiene la misma dirección que  $n$ , esto es, es perpendicular al elemento de área;

3. Siendo la traza una invariante de  $\sigma$ , y el tensor identidad representado por la misma matriz en cualquier referencial, la fuerza generada por  $\text{tr } \sigma \mathbf{1}/3$  tiene el mismo valor algebraico en cualquier dirección y es siempre perpendicular a la superficie del elemento.

Definimos entonces el escalar presión como:

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr } \sigma,$$

y el tensor presión de segundo orden como el de componentes:

$$P_{ij} = -\frac{1}{3}\text{tr } \sigma \delta_{ij} = p\delta_{ij}.$$

Siendo el tensor de componentes  $\delta_{ij}$  representado por la misma matriz identidad en cualquier sistema de coordenadas, la fuerza generada por la presión tiene la misma magnitud en cualquier dirección, y perpendicular a la superficie y de sentido contrario al del vector normal  $n$ . Cabe notar que la presión así definida coincide

con la presión termodinámica en el caso de fluidos en reposo, sin efectos elásticos y gravitacionales y para gases monoatómicos.

Se deduce de la definición de presión que:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

y que el tensor  $\tau$  es simétrico. Sus invariantes son dados por:

$$I_\tau = 0 \tag{2.25}$$

$$II_\tau = \frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij} = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{2.26}$$

$$III_\tau = \frac{1}{3}\tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki}. \tag{2.27}$$

El tensor  $\tau$  recibe el nombre de desviatorio por abrir la posibilidad de la existencia de tensiones normales a la superficie de valores diferentes en diferentes direcciones y por permitir que la fuerza que actúa en la superficie del elemento tenga dirección diferente de la normal, esto es, que contenga componentes de cizallamiento de las tensiones viscosas.

Introduciendo las definiciones de presión y de tensor desviatorio en la ecuación (2.19), obtenemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \tag{2.28}$$

En notación vectorial:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\text{div}(p\mathbf{1}) + \frac{1}{\rho}\text{div}\tau + g. \tag{2.29}$$

Desarrollamos el término siguiente  $\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(p\delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(p\delta_{i3}).$$

Como  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , apenas el término en que  $j$  toma el valor particular atribuido a  $i$  es diferente de cero, lo que hace con que la suma anterior se reduzca a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{2.30}$$

además  $\partial p/\partial x_i$  es una de las componentes de **grad**  $p$ , lo que nos permite escribir, en notación vectorial:

$$-\text{div}(p\mathbf{1}) = -\mathbf{grad} p.$$

Llevando el resultado obtenido con la ecuación (2.30) a la ecuación (2.28) obtenemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (2.31)$$

En notación vectorial:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{div} \tau + g. \quad (2.32)$$

### 2.2.1.5. Ecuación de Euler

En el caso del fluido con coeficiente de viscosidad nulo, la ecuación (2.32) se reduce a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \mathbf{grad} v = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g} \quad (2.33)$$

o

$$\mathbf{g} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (2.34)$$

Cuadro II.2: Formas de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Forma vectorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} =$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$
$-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{div} \tau + \mathbf{g}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$
$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{div} \tau + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$

que es la ecuación de Euler (1775).

La ecuación de Euler puede ser escrita sin la presión, utilizándose la siguiente identidad vectorial:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (2.35)$$

donde  $\frac{v^2}{2} = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{2}$ . Combinando las ecuaciones (2.32) y (2.35) obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

Tomamos ahora el rotacional de la ecuación anterior. Los términos que contienen el operador gradiente se anulan, pues  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = 0$ . El término  $\mathbf{g}$  también se anula al calcular el rotacional, pues las derivadas de una constante son iguales a cero. Tenemos entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}). \quad (2.36)$$

### 2.2.1.6. Ecuación de Bernoulli

Se sabe del cálculo vectorial, que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

Sustituyendo el término  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  de la ecuación de Euler por la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

Consideramos el caso de un flujo incompresible y estacionario  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  y escribimos  $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} = \frac{v^2}{2}$ . Obtenemos:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - g = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

El término  $\mathbf{g}$  puede ser incorporado al que contiene el gradiente multiplicando o por  $z$ , pues  $\mathbf{grad} gz = -\mathbf{g}$ , donde  $g = |\mathbf{g}|$ . Obtenemos:

$$\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (2.37)$$

que es la ecuación de Bernoulli (véase [52]). Esta ecuación muestra la importancia de los flujos irrotacionales: Si el campo de velocidades tuviera esta característica  $\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = 0$ , esto es,  $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te}$  en todo el campo. Si

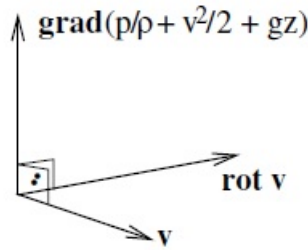


Figura II.5: Ecuación de Bernoulli.

$\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{v} \text{rot } \mathbf{v}$  es perpendicular al vector velocidad. Consecuentemente,  $\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)$  es perpendicular a la superficie cuyo plano tangente es definido, en cada punto del espacio, por los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\text{rot } \mathbf{v}$ . A lo largo de esa superficie, se tiene la forma mas conocida de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te}, \quad (2.38)$$

que es válida en todo el campo si el flujo fuera irrotacional. En esa forma, la constante de la ecuación es medida en unidades de  $[v^2/2]$ . Otras formas posibles son:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = C^{te} \quad [N/m^2] \quad (\text{Aerodinámica}) \quad (2.39)$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad [m] \quad (\text{Hidráulica}) \quad (2.40)$$

La ecuación de Bernoulli es usada en tubos de corriente, en los flujos unidimensionales permanentes.

### 2.2.1.7. Fluidos de Stokes y fluidos newtonianos

Para incluir el tensor desviatorio y las nuevas variables que este objeto matemático introduce en las ecuaciones de evolución ya obtenidas, necesitamos de hipótesis adicionales, además de los principios de conservación. Se hace tales hipótesis especificándose el medio, sus propiedades físicas, y las relaciona a los elementos del tensor desviatorio. Además de la dependencia de propiedades físicas del medio, el

tensor desviatorio depende también del estado de deformación y velocidades, denominándose *ecuaciones constitutivas*.

En el presente caso, excluimos la dependencia del estado de deformación del medio, lo que implica no considerar efectos de elasticidad, y hacemos la hipótesis de que las componentes de  $\tau$  dependen de la distribución de velocidades apenas en las proximidades del elemento de fluido, esto es, de  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . La hipótesis es válida para agua, aire, sangre, arriba de cierto de cizallamiento entre capas adyacentes, mas no se aplica a muchos casos donde el medio se constituye del fluido con cadena molecular larga.

Definimos, entonces en las secciones que siguen, lo que entendemos por fluido de Stokes y obtenemos la ecuación constitutiva aplicable al caso particular del fluido newtoniano, que se constituye de un fluido de Stokes lineal.

### **I) Fluidos de Stokes**

Fluidos de Stokes son, por definición, los que atienden a los siguientes requisitos (Aris [47]):

1. El tensor de tensiones, de componentes  $\sigma_{ij}$ , es función continua del gradiente de velocidades y del estado termodinámico local, mas independiente de otras grandezas cinemáticas. Esta hipótesis implica que la relación entre tensiones y deformación es local. En esta etapa, admitimos que  $\sigma_{ij}$  depende no solo de la tasa de deformación, sino también de la parte antisimétrica del gradiente de velocidades;
2. El fluido es homogéneo, esto es la relación entre  $\sigma_{ij}$  y  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  es la misma en todos los puntos del medio;
3. El fluido es isotrópico, esto es, no existen direcciones preferenciales que alteren la relación tensión-gradiente de velocidades. La hipótesis es válida para fluidos como agua, aire, varios aceites, mas no para ciertos fluidos con cadena molecular larga, para los cuales un mismo valor de la tasa de deformación da origen a tensiones diferentes, segundo la orientación de la deformación.

4. En la ausencia de deformaciones ( $e_{ij} = 0$ ), las tensiones son apenas hidrostáticas ( $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ).

Mostramos en la sección siguiente que las direcciones principales de los tensores  $\sigma_{ij}$  y  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  coinciden.

## II) Fluidos newtonianos

El desenvolvimiento presentado en esta sección sigue el raciocinio propuesto por Drakos, Moss y Angelidis (véase [48, 47]).

Fluidos newtonianos son fluidos de Stokes en que la relación entre  $\tau_{ij}$  y  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  es lineal, esto es:

$$\tau_{ij} = T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l},$$

donde  $T_{ijkl}$  debe satisfacer las hipótesis de homogeneidad y de isotropía del medio. Hacemos el producto interno del tensor  $T$  con cuatro vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , de modo para obtener el escalar  $S$ , como sigue:

$$S = T_{ijkl} A_i B_j C_k D_l.$$

Este escalar depende linealmente de la magnitud de cada uno de los vectores. Sin embargo, siendo  $T$  isotrópico, el valor de  $S$  no depende de la dirección absoluta de los vectores, sino solo de la orientación de cada uno con relación a los demás.  $S$  depende, por tanto de la magnitud y del ángulo entre los vectores o, de forma equivalente, del producto escalar entre los mismos. Por tanto:

$$\begin{aligned} S &= T_{ijkl} A_i B_j C_k D_l \\ &= \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) + \beta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + \gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Otros productos como  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$  no añaden más información a la ya contenida en la ecuación anterior. Reescribiendo esta ecuación en notación tensorial cartesiana:

$$\begin{aligned} T_{ijkl} A_i B_j C_k D_l &= \alpha A_i B_i C_j D_j + \beta A_i C_i B_j D_j + \gamma A_i D_i C_j B_j \\ &= (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) A_i B_j C_k D_l. \end{aligned}$$

Como esta ecuación debe ser satisfecha independientemente de los cuatro vectores, se tiene que:

$$T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (2.42)$$

que es la forma mas general de las componentes de un tensor isotrópico de cuarto orden. Como cada delta de Kronecker es invariante sobre la acción de una transformación. Adicionalmente, en virtud de la simetría del tensor de tensiones, tenemos:

$$\tau_{ij} = T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \tau_{ji} = T_{jikl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}.$$

Imponiendo esa condición a la ecuación (2.42) obtenemos:

$$\beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} = \beta\delta_{jk}\delta_{il} + \gamma\delta_{jl}\delta_{ik},$$

lo que implica:

$$(\beta - \gamma)\delta_{ik}\delta_{jl} = (\beta - \gamma)\delta_{il}\delta_{jk}$$

y  $\beta = \gamma$ . Los elementos del tensor de cuarto orden  $T$  son por tanto:

$$T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Teniendo en cuenta la presión escribimos el tensor de tensiones en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = -p\delta_{ij} + [\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \\ &= -p\delta_{ij} + \alpha\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \beta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Usando los símbolos usuales  $\mu$  en vez de  $\beta$  y  $\lambda$  en vez de  $\gamma$ , obtenemos:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} e_{kk}. \quad (2.43)$$

El tensor de tensiones depende solamente de la presión y de la parte simétrica del gradiente de velocidades y no de la antisimétrica, que representa la vorticidad.

Líquidos cuya estructura molecular es relativamente simples obedecen en general a esta relación. Las tensiones de cizallamiento actuan en líquidos con estructura molecular mas compleja, en particular los de cadena molecular muy larga, en ciertas



emulsiones y en misturas, así como en líquidos con comportamiento elástico, no son descritas por la relación anterior. En algunos casos, como el de la sangre, el fluido se comporta como no newtoniano abajo de cierto valor de la tasa de deformación, y como newtoniano por encima de ese valor. Tales fluidos son encontrados con cierta frecuencia en problemas de ingeniería química y de la solidificación de materiales fundidos. Tratamos aquí solamente de fluidos newtonianos.

Observamos, por fin, que las direcciones principales de los tensores de tensión y de la tasa de deformación son las mismas, en el caso de fluidos newtonianos. Como a lo largo de las direcciones principales del tensor de tensiones no hay tensiones de cizallamiento, y para haber deformación de cizallamiento en fluidos newtonianos es necesario que haya tensión, estas últimas no existen a lo largo de las direcciones principales del tensor de tensiones. Las direcciones principales de ambos tensores coinciden.

### 2.2.1.8. Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación de Navier-Stokes es obtenida sustituyéndose el tensor de tensiones  $\tau$  de la ecuación de movimiento, (2.29), por la ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos. Solo consideramos el caso de fluido incompresible, en el que se puede escribir el divergente del tensor de tensiones  $\tau$  como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i, \end{aligned}$$

pues, por la ecuación de la continuidad  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ . El coeficiente  $\frac{\mu}{\rho}$  es denominado como coeficiente de viscosidad cinemática del fluido,  $\nu$  (o viscosidad cinemática, de forma abreviada). El cuadro 2.3 presenta el valor de la viscosidad cinemática de algunos fluidos a  $20^\circ C$ .

Sustituyendo la definición de la viscosidad cinemática y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$  en la ecuación (2.31) obtenemos la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incom-

Cuadro II.3: Viscosidad cinemática y dinámica de algunos fluidos a 20°C.

Fluido	Viscosidad dinámica $\mu - kg/sm$	Viscosidad cinemática $\nu - m^2/s$
Agua	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-6}$
Aire	$1,8 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-5}$
Alcohol	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-6}$
Aceite de oliva	$8,4 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-4}$
Glicerina	$1,42 \times 10^{-1}$	$3,68 \times 10^{-4}$
Mercurio	$1,70 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-6}$

presibles:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i + g_i. \quad (2.44)$$

La ecuación de Navier-Stokes, aplicable a fluidos incompresibles, puede ser escrita de una de las siguientes formas, en coordenadas cartesianas:

Cuadro II.4: Formas de la ecuación de Navier-Stokes aplicable a fluidos incompresibles.

Forma vectorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} =$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$
$-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$

### 2.2.1.9. Los números de Reynolds y de Froude

Frecuentemente, se trabajan con las variables de la mecánica de los fluidos en la forma adimensional. Surgen entonces algunos grupos adimensionales, como los números de Reynolds y de Froude, conforme es mostrado mas abajo.

Consideramos la salida de un fluido sobre un cuerpo de longitud  $d$ , y sean  $p_0$  y  $U_0$  la presión y la velocidad de flujo lejos del mismo. La ecuación de Navier-Stokes toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}.$$

Sean:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U_0 \mathbf{v}^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & p &= p^* \rho U_0^2, \end{aligned}$$

donde las variables adimensionales se identifican por el asterisco. Sustituyendo las expresiones de arriba en la ecuación de Navier-Stokes encontramos:

$$\frac{U_0^2}{d} \left( \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* \right) = -\frac{U_0^2}{d} \mathbf{grad} p^* + \frac{U_0}{d^2} \nu \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g}.$$

Multiplicando esta ecuación por  $\frac{d}{U_0^2}$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* = -\mathbf{grad} p^* + \frac{1}{U_0 d / \nu} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \frac{gd}{U_0^2} \frac{\mathbf{g}}{g}.$$

El grupo adimensional  $Re = U_0 d / \nu$  se denomina número de Reynolds del problema. Depende de las propiedades físicas del fluido y de las características geométricas del cuerpo sobre el cual el fluido fluye. El número de Reynolds existe cuando el problema tiene una velocidad (o velocidad angular) impuesta como parámetro.

El grupo adimensional  $Fr = (U_0^2 / gd)^{1/2}$  se llama número de Froude. Usando la definición de los números de Reynolds y de Froude y representando las variables adimensionales sin los asteriscos reescribimos la ecuación de Navier-Stokes en la forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (2.45)$$

La adimensionalización de esta ecuación y la introducción del concepto de número de Reynolds permiten identificar la importancia relativa de algunos términos. El término  $(1/Re) \nabla^2 \mathbf{v}$  representa los efectos viscosos del flujo. Se ve que tales efectos son menos importantes cuando el número de Reynolds del flujo es elevado, como

es el caso de los flujos compresibles. Tomando como ejemplo un flujo en torno de un cuerpo en el aire, con velocidad de  $100m/s$ , y siendo la dimensión característica del aire igual a  $5m$ , y la viscosidad del aire  $\nu = 10^{-5}m^2/s$ , tenemos un número de Reynolds  $\Re = 5 \times 10^7$  y un número de Froude tal que  $Fr^2 = 204$ . Este resultado muestra que, en muchos casos, los efectos gravitacionales y los viscosos pueden ser despreciados en flujos de alta velocidad.

### 2.2.1.10. Ecuación de vorticidad

La ecuación de Navier-Stokes puede ser escrita sin la presión, siguiéndose el mismo procedimiento que usamos en la deducción de la ecuación (2.36). Obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{rot} \mathbf{v}. \quad (2.46)$$

El rotacional de la velocidad recibe el nombre de *vorticidad*. La ecuación anterior puede ser escrita bajo la forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2.47)$$

donde  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ . Demostramos esta última, que es conocida como ecuación de vorticidad [56]. Aplicando el operador rotacional la ecuación de Navier-Stokes con el término  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  escrito, en notación tensorial, en la forma  $\mathbf{grad} v^2/2 + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}$  obtenemos:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v_p v_p}{2} + \epsilon_{kpq} \omega_p v_q \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_p \partial x_p} + g_k \right),$$

donde  $\omega_p$  es la componente general de  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ . El rotacional de un gradiente y el de una constante son iguales a cero. En consecuencia, los términos conteniendo el gradiente de  $v^2/2$ , de la presión, y el término conteniendo la aceleración de la gravedad se anulan. Adicionalmente, intercambiamos el orden de derivación de algunos términos y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} \left( v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_p} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

El primer término del lado izquierdo y el del lado derecho de la ecuación anterior son, respectivamente, los elementos generales de  $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$  y de  $v\nabla^2\boldsymbol{\omega}$ . Haciendo esta sustitución y la de  $\epsilon_{kij}\epsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$  obtenemos:

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \left( v_q \frac{\partial\omega_p}{\partial x_j} + w_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = v\nabla^2\omega_i.$$

Desarrollando el segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \left( v_q \frac{\partial\omega_p}{\partial x_j} + w_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \\ v_q \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial\omega_j}{\partial x_j} + \omega_i \frac{\partial v_q}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial\omega_i}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Reagrupando los términos se llega a:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_q \frac{\partial}{\partial x_q} \right) \omega_i = \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v\nabla^2\omega_i,$$

lo que completa la demostración de la ecuación 2.47.

Observamos que, en el caso de flujos bidimensionales, la vorticidad es perpendicular al vector velocidad. Las líneas del tensor **grad v** contiene el gradiente de cada componente de la velocidad e son perpendiculares a la vorticidad. Consecuentemente,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad v} = 0$ . La ecuación (2.47) se reduce a:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = v\nabla^2\boldsymbol{\omega}.$$

Cabe también mencionar la relación existente entre vorticidad y efectos viscosos. Utilizamos la identidad vectorial:

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot v}) = \mathbf{grad} (\text{div v}) - \nabla^2\mathbf{v}.$$

Teniendo en cuenta que  $\text{div v} = 0$  para flúidos incompresibles, se tiene que:

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot v}) = -\nabla^2\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu}\text{div } \boldsymbol{\tau}.$$

Esta ecuación puede ser reescrita en la forma:

$$\mathbf{rot } \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\mu}\text{div } \boldsymbol{\tau}. \quad (2.48)$$

El resultado anterior muestra que, habiendo desbalanceamiento de las fuerzas viscosas, el rotacional en aquel punto será diferente de cero. Flujos incompresibles e isentrópicos en los cuales la vorticidad es diferente de cero están, o estuvieron en el pasado, bajo la acción de efectos viscosos. Como regla general, efectos viscosos producen vorticidad.

Los resultados de esta sección se aplican al caso de fluidos incompresibles. Efectos de compresibilidad o variaciones de entropía son otros factores de producción de vorticidad, como será visto en la sección 2.2.1.11.

### 2.2.1.11. Ecuación de circulación

En esta sección identificamos los mecanismos que dan origen a la *vorticidad*, esto es, al movimiento de rotación de masas de un fluido. Consideremos una superficie  $A$  del espacio, delimitada por una curva  $C$  conforme la figura 2.6, y sea  $d\mathbf{l}$  un elemento de arco de esta curva. El *flujo*  $\Gamma$  del vector vorticidad a través de la superficie  $A$  es definido como:

$$\Gamma = \int_A \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

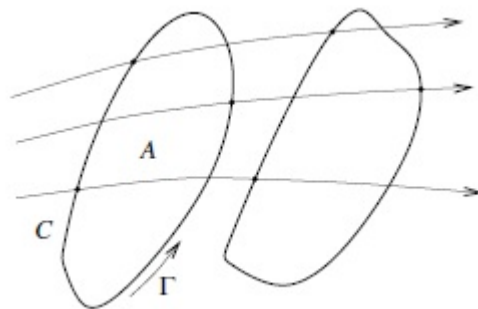


Figura II.6: Circulación en torno de una masa de fluido.

Este flujo es igual a la circulación del vector velocidad a lo largo de la curva que delimita la región considerada, de acuerdo con el teorema de Stokes. La existencia de una circulación indica que la velocidad media a lo largo de la curva es diferente de cero, y el teorema de Stokes asegura que en ese caso el valor medio del rotacional

en la región interna a la curva también es diferente de cero. Identifiquemos a los factores que influyen en la evolución de la circulación a lo largo de una curva que se desplaza de forma solidaria a una masa de fluido, esto es, determinaremos  $\frac{D\Gamma}{Dt}$ .

Podemos escribir:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{D}{Dt} v_i dx_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i \frac{Dx_i}{Dt}$$

o entonces

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i dv_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C \frac{1}{2} dv^2,$$

donde  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . La última integral representa la suma de las variaciones de una función a lo largo de una curva cerrada. Como el punto final de la integración coincide con el inicial, el valor de la función en los dos puntos es el mismo, y la integral anterior es igual a cero. Tenemos entonces:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i$$

Teniendo en cuenta que, por la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

tenemos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

o también

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.49)$$

Se sabe de la termodinámica que:

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho},$$

de donde se obtiene que:

$$-\frac{dp}{\rho} = T ds - dh.$$

Sustituyendo el resultado anterior en la primera integral del miembro derecho de la ecuación (2.49) obtenemos:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds - \oint_C dh.$$

La segunda integral del miembro derecho de la igualdad anterior representa la suma de variaciones de una función a lo largo de una curva cerrada. La integral es igual a cero, conforme a lo discutido anteriormente. Por tanto:

$$-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds.$$

Por tanto, la ecuación (2.49) puede ser escrita en la forma:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C T ds + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i.$$

Como la temperatura es un número siempre positivo, la primera integral del miembro derecho de la ecuación anterior se anula en los procesos isoentrópicos, y en algunos casos donde haya variaciones para más y para menos en la entropía del fluido a lo largo de la curva sobre la cual la circulación es calculada. En general, la circulación es diferente de cero cuando la entropía varía a lo largo de la curva, que debido a procesos reversibles, como el de la calefacción, que debido a irreversibilidades que ocurren, por ejemplo, en la mistura de masas de aire de temperaturas diferentes, o de masas de agua del mar con salinidades diferentes, La segunda integral de la ecuación (2.49) caracteriza variaciones de circulación en virtud de la acción de efectos viscosos.

La ecuación (2.49) presenta un resultado completamente general, que da origen a dos teoremas sobre la formación de vórtices. El primero es el *Teorema de Bjerknes*, que afirma que, en la ausencia de efectos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho}. \quad (2.50)$$



De forma general, este resultado muestra que las irreversibilidades termodinámicas generan circulación.

El segundo resultado es conocido como *Teorema de Kelvin*, que afirma que, en la ausencia de variaciones de entropía y de efectos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (2.51)$$

Este último resultado resalta la importancia de los flujos irrotacionales, pues muestra que, cuando los efectos viscosos y de variación de entropía son despreciables, y el campo es irrotacional, en un punto dado, el flujo será siempre irrotacional. Por otro lado, si una determinada masa de fluido presenta circulación diferente de cero en un instante dado, esta circulación se conserva a la medida que la masa se desplaza.

Un mecanismo de generación de vorticidad en los sistemas naturales proveen, por tanto, de las irreversibilidades viscosas o de misturas de masas de fluido con características distintas. Si, en un instante inicial, la vorticidad contiene un modo de la forma:

$$v_x = \exp(ikx) + \dots$$

El término no lineal de la ecuación de Navier dará origen, progresivamente, a modos con vectores de onda mayores, pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots = -\exp(ikx) ik \exp(ikx) + \dots \\ &= -ik \exp(2ikx) + \dots, \end{aligned}$$

esto es, los vórtices se rompen progresivamente, hasta que llegue a números de Reynolds suficientemente bajos para que los efectos disipativos se manifiesten y el vórtice se deshace por efectos de la viscosidad.

### 2.2.1.12. La ecuación de la energía total ( $e + v^2/2$ )

La ecuación de la energía total es obtenida a través de procedimientos semejantes a lo adoptado cuando deducimos las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento: se considera un volumen de control fijo en el espacio y se iguala a la tasa

de variación de la energía dentro del mismo con el balance de los diversos factores que contribuyen para que la energía total contenida dentro del volumen varíe. Se obtiene la forma integral de la ecuación de la energía. Con ayuda del Teorema de Gauss se pasa a la forma diferencial.

Consideremos un volumen fijo en el espacio. La tasa de variación de la energía total por unidad de masa ( $e + v^2/2$ ) dentro de este volumen debe incluir el balance del flujo de energía a través de las paredes del volumen, El trabajo de las fuerzas de superficie y del volumen, el balance del flujo de calor a través de la superficie de control y el calor eventualmente generado dentro del volumen por reacciones químicas, efecto Joule, o de otra forma [49, 50].

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{Taza de acumulación de } (e + v^2/2) \text{ dentro del volumen} \\ \text{de control, esto es, la variación de } (e + v^2/2) \text{ dentro de} \\ \text{volumen por unidad de tiempo} \end{array} \right) \\ &= - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo líquido de } (e + v^2/2) \\ \text{para afuera del volumen} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Trabajo de las fuerzas} \\ \text{aplicadas a la superficie} \\ \text{de control por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{array} \right) \\ &+ \left( \begin{array}{c} \text{Trabajo de las fuerzas de} \\ \text{volumen por unidad de tiempo} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo líquido de calor} \\ \text{Para afuera del volumen} \end{array} \right) \\ &+ (\text{Taza de generación de calor dentro del volumen}) \end{aligned}$$

Esta ecuación excluye algunas formas de transferencia de energía entre el medio y el volumen de control, como, por ejemplo, el trabajo previsto al volumen de control a través de un eje, que es el caso de motores, generadores de turbinas. Expresemos cada una de las partes anteriores en forma matemática. La tasa de acumulación de ( $e + v^2/2$ ) dentro del volumen de control es dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV.$$

Para calcular el flujo neto de  $(e + v^2/2)$  para afuera del volumen, recordamos que el flujo de masa a través de un elemento de área  $dA$  de la superficie de control es dado por  $\rho v_j n_j dA$ . Si lo multiplicamos por la energía total por unidad de masa, esto es, por  $(e + v^2/2)$ , tendremos una expresión para el flujo de la energía total que cruza el elemento de área:  $\rho(e + v^2/2)v_j n_j dA$ . Integrando este término a lo largo de toda la superficie de control tendremos el flujo neto de la energía para afuera de la superficie de control:

$$\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA.$$

El trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas de superficie es dado por el producto escalar de la fuerza por la velocidad local. El elemento de la fuerza de superficie es, asu vez, dado por  $\sigma_{ij} n_j dA$ , conforme fue visto en el capítulo anterior. El trabajo elemental por unidad de tiempo de las fuerzas de superficie es entonces dado por  $v_i \sigma_{ij} n_j dA$ .

El trabajo elemental por unidad de tiempo de las fuerzas de volumen es dado por el producto escalar de las fuerzas de volumen, que en el caso presente es la fuerza gravitacional, con el vector velocidad:  $\rho v_i g_i dV$ .

Integrando el término referente al trabajo de las fuerzas de superficie a lo largo de toda la superficie de control y de las fuerzas de volumen en todo el volumen, obtenemos:

$$\oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho v_i g_i dV.$$

El flujo de calor para afuera del volumen de control a través de un elemento de área  $dA$  de la superficie es dado por  $q_j n_j dA$ .

El calor generado en un elemento de volumen por unidad de tiempo es dado por  $Q dV$ .

Integrando el primer término a lo largo de toda la superficie de control y el segundo

en todo el volumen obtenemos:

$$-\oint_S q_j n_j dA + \int_V Q dV.$$

Cabe notar que la primera integral de arriba, con el signo negativo adelante, calcula la taza neta de transferencia de calor para adentro del volumen de control. Reagrupando todos los términos obtenemos la ecuación de la energía total en la forma integral:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = -\oint_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA + \oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho v_i g_i dV - \oint_S q_j n_j dA + \int_V Q dV. \quad (2.52)$$

Los términos que multiplican el factor  $\mathbf{n}dA$  en las integrales de superficie son magnitudes vectoriales. Por tanto, se aplica el teorema de Gauss y estas integrales pueden ser transformadas en integrales de volumen. La forma integral de la ecuación de la energía total puede entonces ser reescrita como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j dV + \int_V \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho v_i g_i dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V Q dV.$$

La ecuación anterior se debe aplicar para volúmenes de cualquier tamaño, particularmente, para volúmenes infinitesimales  $dV$ . Considerando este último caso, suprimiendo el signo d integración, y dividiendo la ecuación resultante por  $dV$  y pasando el primer término del lado derecho de la ecuación anterior para el lado izquierdo, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q \quad (2.53)$$

Los dos términos del miembro izquierdo de la ecuación anterior se simplifican de la

siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \\ \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) &= \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right), \end{aligned}$$

pues  $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0$  (ecuación de continuidad).

Reescribimos el término de  $\frac{\rho(v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j}$  y  $-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  de la ecuación 2.53, recordando que  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$  (ecuación 2.24):

$$\frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) = -\frac{\partial v_i p \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial v_i p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

El flujo de calor y sustituyendo por su expresión, dada por la ley de Fourier:

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2.54)$$

En notación vectorial:

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} T. \quad (2.55)$$

Esta ecuación es dada en coordenadas cilíndricas y esféricas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -k \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial q_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ \mathbf{q} &= -k \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right). \end{aligned}$$

Obtenemos para el divergente de flujo de calor:

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = k \nabla^2 T.$$

Reagrupando los términos y dividiendo por  $\rho$ , obtenemos la ecuación de la energía total:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho}. \quad (2.56)$$

En la forma vectorial:

$$\frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \mathbf{g} + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho} \quad (2.57)$$

### 2.2.1.13. Ecuación de entalpía de estancamiento ( $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$ )

La ecuación de entalpía de estancación es obtenida a partir de la ecuación de la energía total, que surge de la transformación de esta última, de la forma integral para la forma diferencial, usando el teorema de Gauss. Sustituyendo las ecuaciones 2.24 y 2.54 en la ecuación 2.53 obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) v_j - \frac{\partial v_j p}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + Q.$$

Aggrupando los dos primeros términos del miembro derecho de la ecuación anterior y pasandolo para el miembro izquierdo, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + Q.$$

Sumando el término  $\frac{\partial p}{\partial t}$  a los dos miembros de la última ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + Q.$$

El término  $\frac{\partial p}{\partial t}$  del miembro izquierdo de la ecuación anterior puede ser incorporado a  $\frac{\partial(e+v^2/2)}{\partial t}$ , resultando en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + Q.$$

Como  $h_0 = e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$  por definición, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_0 v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + \rho v_i g_i + k \nabla^2 T + Q.$$

Desarrollando los términos del miembro izquierdo de esta última ecuación, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho h_0 v_j = \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} + h_0 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) =$$

$$\rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} = \rho \frac{Dh_0}{Dt},$$

Pues  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$  (ecuación de continuidad). Por tanto, la ecuación de la entalpía de estancamiento toma la forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{k}{p} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho}. \quad (2.58)$$

En la forma vectorial:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho}. \quad (2.59)$$

En el caso de un flujo permanente sin efectos viscosos, sin fuentes internas de calor e despreciando efectos gravitacionales, la ecuación de entalpía de estancación se torna:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T,$$

lo que muestra que la adición de calor a través de la superficie de la partícula de fluido hace aumentar la entalpía de estancamiento de la misma.

Se puede incorporar el término  $v_i g_i$  de la ecuación 2.89 al miembro izquierdo de esta ecuación, lo que resulta adicionar a la entalpía de estancación un término referente a la energía potencial. De hecho, considerando un referencial como el eje  $z$  en la dirección vertical y orientado hacia arriba, se tiene que:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) h_0 + \rho v_z g.$$

Se puede escribir también que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) gz = g \frac{\partial z}{\partial t} + g v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = g v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = g v_z \frac{\partial z}{\partial z} = g v_z,$$

pues:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x,y,z=Cte} = 0.$$

Por tanto:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

y la ecuación 2.89 puede ser reescrita como:

$$\frac{D}{Dt} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho}. \quad (2.60)$$

## 2.2.2. Conceptual

Este trabajo no se considera conceptual ya que es un trabajo en ciencias básicas.

## 2.2.3. Teórico-conceptual

En este capítulo presentamos las herramientas matemáticas preliminares básicas para estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes incluidos los resultados del análisis funcional lineal y no lineal, así como la teoría de los espacios funcionales. Presentamos en particular algunos de los más utilizados teoremas como los de inmersión y desigualdades diferenciales, para esto usaremos diferentes referencias como [45, 57, 59, 60, 61, 62, 63] entre otros.

### 2.2.3.1. Teoremas del análisis funcional

Teoremas del análisis funcional lineal, el núcleo de esta subsección es el lema de Lax-Milgran que indicamos para espacios separables de Hilbert así como su demostración utilizando el método de Galerkin. Este método será muy útil en nuestras consideraciones posteriores, en las pruebas de la existencia de soluciones de problemas lineales y no lineales.

**Teorema 1.** *En un espacio reflexivo de Banach, cada bola cerrada es débilmente compacta. Se puede encontrar una prueba por ejemplo en [59], para espacios separables en [60].*



En particular sea  $\{x_n\}$  una sucesión en un espacio  $B$  reflexivo de Banach tal que  $\|x_n\|_B \leq M$  por algún  $M > 0$ , entonces existe una subsucesión  $\{x_\mu\}$  de la sucesión  $\{x_n\}$  y un elemento  $x$  en  $B$  con  $\|x\|_B \leq M$  tal que  $\{x_\mu\}$  converge débilmente a  $x$  en  $B$ ; es decir para toda  $L$  funcional y continua en  $B$ ,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} L(x_\mu) = L(x).$$

**Teorema 2** (Lema Lax-Milgran para espacios separables). *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable con una norma  $\|\cdot\|$ ,  $L \in H'$  un funcional lineal en  $H$ ,  $a(u, v)$  una forma bilineal y continua en  $H \times H$ , coerciva, es decir tal que para algunos  $\alpha > 0$  y para todo  $u \in H$*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

entonces existe un único elemento  $u \in H$ , tal que

$$a(u, v) = L(v); \forall v \in H \tag{2.61}$$

**Prueba.** usamos el método de galerkin, al cual nos referiremos en el siguiente capítulo consiste en probar la existencia de elementos  $u_m \in H_m$  tal que

$$a(u_m, v) = L(v); \forall v \in H_m \tag{2.62}$$

donde  $H_m$  son subespacios dimensionales finitos de  $H$  tales que  $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots \subset H_m \subset \dots$  y  $\cup_{m=1}^{\infty} H_m$  es un subconjunto denso de  $H$  y luego al pasar al límite con  $n$  obtenemos (1).

Sea  $w_1, w_2, w_3, \dots$  son bases de  $H$  y  $H_m = \text{gen}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$   $m = 1, 2, 3, \dots$

1. Mostraremos que para cada entero positivo  $m$  existe un  $u_m \in H_m$  tal que (2.62) se cumple. Sea

$$u_m = \sum_{k=1}^m \xi_k w_k$$

entonces (2.62) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^m \xi_k a(w_k, w_L) = L(w_L), \quad L = 1, 2, \dots, m$$

este sistema tiene una solución única  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  por cada lado derecho si y solo si la matriz  $\{a(w_k, w_L)\}_{k,L \leq m}$  es no singular. Mostraremos que el sistema homogéneo

$$\sum_{k=1}^m \xi_k a(w_k, w_L) = 0, \quad L = 1, 2, \dots, m$$

tiene una única solución por  $\xi_k$  y agregamos las ecuaciones para obtener

$$\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^m \xi_\ell \xi_k a(w_k, w_\ell) = a\left(\sum_{k=1}^m \xi_k w_k, \sum_{\ell=1}^m \xi_\ell w_\ell\right) = a(u_m, u_m) = 0$$

De la coerciva de la forma  $a(\cdot, \cdot)$  obtenemos  $u_m = 0$  como los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_m$  son linealmente independientes, concluimos que  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$  de ahí la matriz  $\{a(w_k, w_\ell)\}_{k,\ell \leq m}$  es no singular y para cada número entero positivo  $m$  existe una solución aproximada  $u_m \in H_m$ .

2. convergencia de la sucesión tenemos

$$\alpha \|u_m\|^2 \leq a(u_m, u_m) = L(u_m) \leq \|L\|_{H'} \|u_m\|$$

de donde  $\|u_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{H'}$

para cada entero positivo  $m$  del Teorema 1 se deduce que existe una subsucesión  $\{u_k\}$  de la sucesión de soluciones aproximadas  $\{u_m\}$  y un elemento  $u \in H$  tal que  $u_\mu \rightarrow u$  débilmente en  $H$ . Para  $\mu \geq j$  tenemos

$$a(u_\mu, v) = L(v); \forall v \in H_j \subset H_\mu$$

Así que

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} a(u_\mu, v) = a(u, v) = L(v) \text{ para } v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$$

como  $\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$  es un subconjunto denso de  $H$ , concluimos de la continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$  y  $L(\cdot)$  que (2.61) se mantiene para todo  $v \in H$ .

3. Unicidad de  $u$ . Supongamos que tenemos dos elementos diferentes  $u_1$  y  $u_2$  tal que  $a(u_1, v) = L(v)$  y  $a(u_2, v) = L(v)$ , para toda  $v \in H$  por lo tanto  $a(u_1 - u_2, v)$  y

tomando  $v = u_1 - u_2$  obtenemos

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$$

de aquí  $u_1 = u_2$ , llegamos a una contradicción que demuestra la unicidad. ■

**Observación 1.** Si  $L$  es un funcional lineal y continuo en el espacio de Banach  $B$ , escribiremos  $L \in B'$ , el espacio dual de  $B$  y utilizamos la notación  $L(v) = \langle L, v \rangle$  para  $v \in B$ .

Como corolario obtenemos los siguientes

**Teorema 3** (Teorema de Riesz-Fréchet para espacios separables). *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma  $\|\cdot\|$  y sea  $L \in H'$  un funcional lineal y continuo en  $H$  entonces existe un único elemento  $u \in H$  tal que*

$$(u, v) = L(v) \text{ para cada } v \in H \text{ y } \|u\| = \|L\|_{H'}$$

**Observación 2.** En los dos teoremas anteriores la separabilidad del espacio  $H$  no es esencial, para las pruebas ver [57].

### Teoremas de punto fijo

los teoremas del punto fijo son la herramienta básica que utilizaremos, comenzamos con el principio de contracción de Banach el único teorema de esta subsección que garantiza la singularidad del punto fijo la existencia de un punto fijo único es una condición fuerte, sin embargo y en la mayoría de los casos haremos uso de los teoremas de Schauder o Leray-schauder. Ambos siguen del Teorema del punto fijo de Brower.

**Teorema 4** (Principio de contracción de Banach). *Sea  $T$  un operador definido en el espacio  $X$  de Banach con valores en  $X$ . Suponga que  $T$  es una contracción, es decir, que un número  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  existe tal que para todos los pares de elementos  $u, v \in X$  tenemos*

$$\|Tu - Tv\|_X \leq \alpha \|u - v\|_X$$

entonces existe un único elemento  $u \in X$  tal que  $Tu = u$ .

**Prueba.** Sea  $u_0$  un elemento arbitrario del espacio  $X$ . Entonces la sucesión  $u_0, u_1, u_2, \dots$  donde para  $n \geq 1$ ,  $u_n$  se define recursivamente por  $u_n = Tu_{n-1}$ , converge en  $X$  hasta el punto fijo del operador  $T$ . ■

**Teorema 5** (Brouwer). *Sea  $K$  un conjunto no vacío convexo y compacto en  $\mathbb{R}^n$ , si  $T : K \rightarrow K$  es un mapeo continuo, luego tiene al menos un punto fijo, es decir existe  $u_0 \in K$  tal que  $T(u_0) = u_0$ .*

**Prueba.** Para la prueba ver [60, 61]. ■

**Teorema 6** (Schauder). *Sea  $K$  un conjunto cerrado no vacío, acotado y convexo en un espacio  $X$  de Banach.  $T$  es completamente continuo (es decir compacto y continuo) operador definido en  $K$  tal que*

$$T(K) \subset K$$

entonces existe al menos un elemento  $u_0 \in K$  tal que  $T(u_0) = u_0$ .

**Observación 3.** Si  $X = \mathbb{R}^n$ , entonces el Teorema de Schauder se reduce al Teorema de Brouwer.

**Prueba.** La cerradura del conjunto  $T(K)$  es compacto. para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_{\Gamma(n)}$  en  $T(K)$  tal que

$$\min_{1 \leq i \leq \Gamma(n)} \|x - x_i\|_x < \varepsilon = \frac{1}{n} \text{ para cada } x \in T(K)$$

Sea  $X_n$  el casco lineal del conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{\Gamma(n)}\}$ , es decir, el conjunto de todos los puntos de la forma  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{\Gamma(n)} x_{\Gamma(n)}$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\Gamma(n)}$  son números reales arbitrarios escribiremos  $x_n = \text{Gen}\{x_1, \dots, x_{\Gamma(n)}\}$ . El conjunto  $K_n$  es convexo, avotado, cerrado, no vacío y se encuentra en un subespacio dimensional finito de  $X$ , definimos el mapa  $T_n : K \rightarrow K_n$  por

$$T_n(X) = F_{\frac{1}{n}} T(X)$$

donde

$$F_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\Gamma(n)} m_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^{\Gamma(n)} m_i(x)}$$

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|_X & ; \text{ cuando } \|x - x_i\|_X < \varepsilon \\ 0 & ; \text{ cuando } \|x - x_i\|_X \geq \varepsilon \end{cases}$$

Tenemos  $F_\varepsilon(K) \subset K_n$ . El mapa  $T_n$  es continuo, ya que las funciones  $m_i$  son continuas para un arbitrario  $x \in K$  tenemos

$$\begin{aligned} \|T_x - T_n x\|_X &= \left\| \frac{\sum m_i(Tx)Tx - \sum m_i(Tx)x_i}{\sum m_i(Tx)} \right\|_X \\ &\leq \frac{\sum m_i(Tx)\|Tx - x_i\|_X}{\sum m_i(Tx)} < \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por lo tanto, hemos aproximado de manera uniforme el operador compacto  $T$  mediante un operador de dimensión finita  $T_n$  como  $T_n : K_n \rightarrow K_n$  satisface la hipótesis del Teorema del punto fijo de Brouwer, existe  $\widetilde{x}_n$  tal que  $T_n \widetilde{x}_n = \widetilde{x}_n$ , como  $T$  es compacto, la sucesión  $\{\widetilde{x}_n\}$  tiene una subsucesión convergente  $\widetilde{x}_{n_k} \rightarrow \widetilde{x}$ , de la continuidad de  $T$  se sigue que  $T_{\widetilde{x}_{n_k}} \rightarrow T\widetilde{x}$ , de (2.63) concluimos que  $T_{\widetilde{x}_{n_k}} - T_{n_k} \widetilde{x}_{n_k} \rightarrow 0$ , por lo tanto  $T\widetilde{x} = \widetilde{x}$ , y  $T$  tiene un punto fijo en  $K$ .

**Teorema 7** (Leray-Schauder). *Sea  $T$  un mapeo completamente continuo de un espacio  $X$  de Banach en si mismo y supongamos que existe una constante  $M$  tal que*

$$\|x\|_X < M \quad (2.64)$$

*para toda  $x \in X$  y  $\sigma \in [0; 1]$  satisfaciendo  $x = \sigma Tx$ . Entonces  $T$  tiene un punto fijo.*

**Prueba.** (cf. [57]) podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $M = 1$ , definimos el mapa  $T^*$  por

$$T^*x = \begin{cases} Tx & ; \text{ si } \|Tx\|_X \leq 1 \\ \frac{Tx}{\|Tx\|_X} & ; \text{ si } \|Tx\|_X > 1 \end{cases}$$

Entonces,  $T^*$  es un mapeo continuo de la bola unitaria cerrada  $B(1) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$  en si misma, como el conjunto  $TB(1)$  es precompacto, lo mismo es cierto para  $T^*B(1)$ , del teorema del punto fijo de Schauder se decue que  $T$  tiene un punto

fijo  $x$ . Mostraremos que  $x$  es un punto fijo de  $T$  de hecho, si  $\|Tx\|_X > 1$ , entonces  $x = T^*x = \sigma Tx$  con  $\sigma = \frac{1}{\|Tx\|_X}$  y  $\|x\|_X = \|T^*x\|_X = 1$ , que contradice (2.64). ■

**Teorema 8** (Kakutani-Fan-Glicksberg). *Sea  $S \subset X$  un conjunto, no vacío, compacto y convexo, donde  $X$  es un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo y permítase que el multifuncional  $\varphi : S \rightarrow 2^S$  tiene valores convexos no vacíos y gráfico cerrado, entonces el conjunto del punto fijo de  $\varphi$  (i.e.  $\{x \in S : x \in \varphi(x)\}$  es no vacío y compacto).*

### 2.2.3.2. Espacios de Sobolev y distribuciones

Asumimos que  $\Omega$  es un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  es un entero positivo.

**Definición 1.** Por  $L^P(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , denotamos un espacio lineal de funciones de valores reales  $f$  definidas en  $\Omega$  tales que  $|f|^p$  es integrable en  $\Omega$  con respecto a la medida de Lebesgue. El funcional

$$f \rightarrow \|f\|_{L^P(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es una norma en  $L^P(\Omega)$  (siempre que identifiquemos funciones que son iguales entre sí en casi todas partes en  $\Omega$ ).

El espacio  $L^P(\Omega)$  es un espacio de Banach, para  $P = 2$  es un espacio de Hilbert con un producto escalar  $(f, g) = \int_{\Omega} fg dx$

Tenemos:

**Teorema 9.** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $L^P(\Omega)$ , es decir*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{L^P(\Omega)} = 0$$

*entonces existe  $f \in L^P(\Omega)$  y una subsucesión  $\{f_v\}$  de la sucesión tal que  $\lim_{v \rightarrow \infty} \|f_v - f\|_{L^P(\Omega)} = 0$*

(completitud de  $L^P(\Omega)$ ), y  $f_v(x) \rightarrow f(x)$  para casi todas las  $x \in \Omega$  además existe  $h \in L^P(\Omega)$ , con  $h(x) \geq 0$ , a.e. en  $\Omega$  tal que  $|f_v(x)| \leq h(x)$  para cada  $x \in \Omega$ .

**Definición 2.** por  $L^\infty(\Omega)$  denotamos el conjunto de funciones reales medibles  $f$  en  $\Omega$  para el cual

$$essSup\{|f(x)| : x \in \Omega\} \equiv \inf\{k > 0; \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}) = 0\} < \infty$$

el espacio lineal  $L^\infty(\Omega)$  con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = essSup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

es un espacio de Banach.

Decimos que una función real  $f$  en  $\Omega$  es localmente integrable en  $\Omega$ , y se escribe  $f \in L^p_{Loc}(\Omega)$ , si para cada compacto  $K \subset \Omega$ ,  $f$  es integrable en  $K$ .

Similarmente, definimos espacios  $L^p_{LOC}(\Omega)$ , para  $1 < p < \infty$ , para  $f$  definido en  $\Omega$  definimos el soporte de  $f$  como el cierre del conjunto  $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$  y denotamos esto por  $suppf$ .

Sea  $\alpha = (\alpha_1 \cdots, \alpha_n)$  ser un multi-índice cuyas coordenadas son enteras no negativas. Escribimos  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ , y

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

decimos que  $f \in C^k(\Omega)$  (resp.  $f \in C^k(\overline{\Omega})$ ) si existen derivadas parciales  $D^\alpha f$  para toda  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$  que son continuas en  $\Omega$  (respectivamente  $\overline{\Omega}$ ).

Además  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

por  $C_0^\infty(\Omega)$  denotamos el conjunto de  $f \in C^\infty(\Omega)$  para el cual  $suppf \subset \Omega$ . Si  $\Omega$  es acotado,  $suppf$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$ .

**Lema 1.** cf. [45, 62] El conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

**Lema 2.** (Du Bois-Reymond, cf. [45, 63]) Sea  $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$  y  $\int_\Omega f \varphi dx = 0$  para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Entonces  $f = 0$  casi en todas partes en  $\Omega$ .

**Definición 3** (Derivada generalizada). Sea  $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  un multiíndice cuyas coordenadas son enteros no negativos llamamos a una función  $f^\alpha \in L^1(\Omega)$  la  $\alpha$  derivada generalizada en  $\Omega$  de  $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$  si para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \varphi dx$$

**Definición 4** (Espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ ). Sea  $m$  un entero positivo  $1 \leq p < \infty$  por  $W^{m,p}(\Omega)$  denotamos un subespacio lineal de los elementos  $f$  en  $L^p(\Omega)$  para el cual las derivadas parciales generales  $D^\alpha f$  existen para toda  $|\alpha| \leq m$  y pertenecen a  $L^p(\Omega)$  con la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (2.65)$$

**Lema 3.** (cf. [45, 62]) El espacio  $W^{m,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach, para  $1 < p < \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  es reflexivo.

**Lema 4.** Para  $1 < p < \infty$  cada sucesión acotada en  $W^{m,p}(\Omega)$  contiene una subsucesión débilmente convergente.

**Definición 5.** Por  $W_0^{m,p}(\Omega)$  denotamos la clausura del conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$  también se denotan por  $W_P^m(\Omega)$ .

Los espacios  $W^{m,2}(\Omega)$  y  $W_0^{m,2}(\Omega)$ , denotados también por  $H_0^m(\Omega)$ , respectivamente, son espacios de Hilbert con producto escalar

$$(f, g) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g dx$$

**Definición 6.** Sea  $m$  un entero positivo,  $1 < p < \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , por  $W^{-m,q}(\Omega)$  denotamos el espacio de funcionales lineales continuos en el espacio  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Los espacios  $W^{-m,2}(\Omega)$  también se denotan por  $H^{-m}(\Omega)$  ahora definiremos las distribuciones y las derivadas distribucionales, introduzcamos en el conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$ .

La siguiente noción de convergencia.

**Definición 7.** Decimos que una sucesión  $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  converge a cero si existe un compacto  $K \subset \Omega$  tal que

- (i)  $\text{Supp} \varphi_n \subset K$  para cada  $\varphi_n$ .



- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi_n = 0$  para cada multi-índice  $\alpha$ , uniformemente en  $\Omega$ , denotamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  el conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  junto con la convergencia introducida anteriormente.

**Definición 8.** Llamamos al mapa  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  una distribución en  $\Omega$  si es lineal, es decir

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

para toda  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\varphi$  y  $\psi \in \mathcal{D}$  y si  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$ .

Para cada sucesión  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  que converge a cero en  $\mathcal{D}(\Omega)$  denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  el conjunto de todas las distribuciones en  $\Omega$  y escribimos  $\langle T, \varphi \rangle$  en cambio  $T(\varphi)$  para  $f \in L_{Loc}^1(\Omega)$ , el mapa en  $\mathcal{D}$  definido por

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\varphi dx$$

es una distribución, por Lema 2 podemos identificar esto con  $f$ , y escribimos

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\varphi dx$$

distribuciones que pueden representarse por funciones integrables localmente las llamamos regular.

Un ejemplo de una distribución que no es regular es el mapa

$$\delta(x_0) = \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \rightarrow \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \in \mathbb{R}$$

para algún  $x_0 \in \Omega$ , llamado el Delta de Dirac.

**Definición 9** (Derivada distribucional). Sea  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Entonces el mapa  $\frac{\partial T}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , definido por  $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}; \varphi \right\rangle = - \left\langle T; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$  para cada  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , es una distribución, similarmente, para un multi-índice arbitrario  $\alpha$  definimos  $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Para  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Llamamos  $D^\alpha T$  la  $\alpha$ -ava derivada distribucional de  $T$ .

**Definición 10.** Decimos que un subconjunto abierto y acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  pertenece a la clase  $C^{k,\infty}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $k$  un entero no negativo, si para cada punto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe una bola  $B$  centrada en  $x_0$  y uno a uno un mapeo  $\psi$  de  $B$  sobre  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que.

(i)  $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$

(ii)  $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$

(iii)  $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$ ,  $\psi^{-1} \in C^{k,\infty}(D)$

Si el límite de  $\Omega$  es lo suficientemente uniforme, digamos  $\Omega \in C^{0,1}$ , entonces los espacios de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  definidos como en la definición 3.4 anterior puede describirse alternativamente como el cierre del conjunto  $C^n(\overline{\Omega})$  en la norma (3.5), cf[142] de esta nueva definición de  $W^{n,p}(\Omega)$  (siempre que el límite de  $\Omega$  es lo suficientemente suave). Aún otra definición, equivalente a la definición de 3.4 de los espacios de Sobolev. Se puede dar en términos de las distribuciones, definimos el espacio  $W^{m,p}(\Omega)$  como el subespacio lineal de aquellos  $f \in L^p(\Omega)$  para el cual todas las derivadas distribucionales  $D^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq m$ , pertenecen a  $L^p(\Omega)$ , con norma (3.5).

### 2.2.3.3. Algunos teoremas de inmersiones y desigualdades

Comenzamos con tres resultados generales.

**Teorema 10.** cf. [57, 11] Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  con límite de Lipschitz, es decir  $\Omega \in C^{0,1}$ . Entonces

(i) Si  $kp < n$ , entonces el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  está continuamente inmerso en el espacio  $L^{p^*}(\Omega)$ ,  $p^* = np/(n - kp)$ , e inmerso de forma compacta en  $L^q(\Omega)$  para  $q < p^*$ .

(ii) Si  $0 \leq n < k - \frac{n}{p} < n + 1$ , entonces el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  está inmerso continuamente en  $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $\alpha = k - \frac{n}{p - n}$ , e inmerso compactamente en  $C^{n,\beta}(\overline{\Omega})$ , para  $\beta < \alpha$ .

**Lema 5** (Una versión del Teorema de Rellich, cf. [63]). *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la inmersión de  $H_0^1(\Omega)$  en  $L^2(\Omega)$  es compacta.*

**Teorema 11.** *cf. [58, 64] Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  con el límite Lipschitz, y sea  $u$  una función en  $W^{n,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq r, q \leq \infty$ . Para algún multi-índice  $j$ ,  $0 \leq |j| < m$ , y para algún número  $\theta$  del intervalo  $\frac{|j|}{m} \leq \theta \leq 1$ , establece*

$$\frac{1}{p} = \frac{|j|}{m} + \theta \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q}$$

si  $m - |j| - \frac{n}{r}$  no es un entero negativo, entonces

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,r}(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \quad (2.66)$$

Si  $m - |j| - \frac{n}{r}$  es un entero no negativo, entonces la desigualdad 2.71 se cumple para  $\theta = \frac{|j|}{m}$ . La constante  $C$  solo depende de  $\Omega$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $m, j, \theta$ .

Ahora indicaremos algunos casos especiales de los teoremas 10 y 11 útiles en los siguientes capítulos.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  como en el Teorema 3.10, entonces.

1.  $H'(\Omega)$  esta continuamente inmerso en  $L^6(\Omega)$ .

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c \|u\|_{H'(\Omega)}$$

(c.f. Lema 3.9 a continuación)

2.  $H'(\Omega)$  esta continuamente inmerso en  $L^4(\Omega)$ .
3.  $H^2(\Omega)$  esta continuamente inmerso en  $C^{0, \frac{1}{2}}(\Omega)$ , y  $C^{0, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$  esta compactamente inmerso en  $C(\bar{\Omega})$ , en particular tenemos

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  como límite Lipschitz. Entonces

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{H'(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}$$

[cf. Desigualdad (3.10)]

**Lema 6.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  un entero positivo,  $d = \text{mbdiam}(\Omega) = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}$ . Entonces, para cada  $u \in H_0^1(\Omega)$  y  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.67)$$

**Demostración.** Sea  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , y fijando  $i = 1$ . Tenemos

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

Por la desigualdad de Schwartz.

$$\begin{aligned} |u(x_1, \dots, x_n)| &\leq \int_{x_1^*}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt (x_1 - x_1^*) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx_1 (x_1 - x_1^*) \end{aligned}$$

donde  $x_1^* = \inf\{t : u(t, x_2, \dots, x_n) = 0, (t, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\}$  integrando con respecto a  $x_1$  obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx \leq \frac{d^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx_1$$

ahora integrando con respecto a  $x_2, \dots, x_n$  obtenemos la desigualdad 2.67 para  $i = 1$  y  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Sea  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Existe una sucesión  $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ . Sea  $u \in H_0^1(\Omega)$ , existe una sucesión  $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  convergente a  $u$  en  $H_0^1(\Omega)$ . Probamos 2.67 para  $u$ , pasando al límite en

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

para  $i \in \{1, \dots, n\}$  ■

**Corolario 1.** sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado entonces las siguientes dos normas son equivalentes en  $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\| = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{y}$$

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

**Lema 7** (Desigualdad ladyzhenkaya en dos dimensiones). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad (2.68)$$

**Prueba.** cf. [65] Demostraremos la desigualdad (2.68) para funciones uniformes con soporte compacto en  $\Omega$ , y el caso general se deriva inmediatamente de la densidad de estas funciones en  $H_0^1(\Omega)$ . Sea  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  por conveniencia consideramos  $u$  como definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^2$  e igual a cero fuera de  $\Omega$ .

Tenemos

$$u^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_k} uu_{xx} dx_k \quad \text{para } k = 1, 2$$

De esto

$$\max_{x_k} u^2(x_1, x_2) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_2} u^2 dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \max_{x_1} u^2 dx_2 \quad (2.69)$$

y por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \max_{x_2} u^2 dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \max_{x_1} u^2 dx_2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} |uu_{x_2}| dx \int_{\mathbb{R}^2} |uu_{x_1}| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} |D_u|^2 dx, \end{aligned}$$

Que demuestra el lema para funciones suaves con soporte compacto en  $\Omega$ . ■

**Lema 8** (Desigualdad Ladyzhenskaya en tres dimensiones). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$ .*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \quad (2.70)$$

**Prueba.** [cf. [65]] Como en el Lema anterior, basta con probar la desigualdad (2.70) para funciones uniformes con soporte compacto. Sea  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Tenemos por (2.68)

y (2.69)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} u^4 dx &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^2} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\
&\leq 2 \max_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \\
&\leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |u u_{x_3}| dx \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \\
&\leq 4 \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Da la desigualdad. ■

**Lema 9** (cf. [65]). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq 48^{1/6} \|Du\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.71)$$

**Prueba.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  y  $u \geq 0$ , tenemos.

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^3 u^3 dx_2 dx_3 \right) dx_1 \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_2} u^3 dx_2 \right) dx_1 \\
&\leq 9 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u^2 u x_2| dx_2 dx_3 \int_{\mathbb{R}^2} |u^2 u x_3| dx_2 dx_3 \right) dx_1 \\
&\leq 9 \int_{\mathbb{R}^1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx_2 dx_3 \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^2 x_2 dx_2 dx_3 \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^2 x_3 dx_2 dx_3 \right)^{1/2} \right\} dx_1
\end{aligned}$$

Ahora usamos la desigualdad de Schwarz y procedemos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
I &\leq 9 \max_{x_1} \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx_2 dx_3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} u^2 x_2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} u^2 x_3 dx \right)^{1/2} \\
&\leq 36 \int_{\mathbb{R}^3} |u^3 u x_1| dx \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u^2 x_2| dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u^2 x_3| dx \right)^{1/2} \\
&\leq 36 \sqrt{I} \prod_{i=1}^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u^2 x_i| dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

En el final

$$\begin{aligned}\sqrt{I} &\leq 36 \prod_{i=1}^3 \|ux_i\|_{L^2(\Omega)} = 36 \left\{ \prod_{i=1}^3 \|ux_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq 36 \left\{ 3^{-3} \left( \sum_{i=1}^3 \|ux_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^3 \right\}^{1/2}\end{aligned}$$

Como  $(a_1 a_2 a_3)^{1/3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$  para  $a_i \geq 0$ , lo que da la desigualdad deseada. ■

**Teorema 12** (Desigualdad de Hardy, cf. [66, 62]). *Sea  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $u \in L^p(a, b)$  con  $p > 1$ . Entonces*

$$\int_a^b \left( \frac{1}{x-a} \int_a^x |u(s)| ds \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx, \quad (2.72)$$

y

$$\int_a^b \left( \frac{1}{b-x} \int_x^b |u(s)| ds \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx \quad (2.73)$$

**Prueba.** Sea  $u_n(x) = 0$ , para  $x \in (a, a + \frac{1}{n})$  y  $u_n(x) = u(x)$  para  $x \in (a + \frac{1}{n}, b)$ . Probaremos la primera desigualdad. Integrando por partes y la desigualdad de Holder tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \left( \frac{1}{x-a} \int_a^x |u_n(s)| ds \right)^p dx &= \frac{1}{(b-a)^{p-1} (1-p)} \left( \int_a^b |u_n(s)| ds \right)^p \\ &\quad + \frac{p}{p-1} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{p-1}} \left( \int_a^x |u_n(s)| ds \right)^{p-1} |u_n(x)| dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{p-1}} \left( \int_a^x |u(s)| ds \right)^{p-1} |u_n(x)| dx \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left( \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} \left( \int_a^x |u_n(s)| ds \right)^p dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_a^b |u_n(x)|^p dx \right)^{1/p}\end{aligned}$$

Así,

$$\int_a^b \left( \frac{1}{x-a} \int_a^x |u_n(s)| ds \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx \quad (2.74)$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ , aplicando el lema de Fatou obtendremos (2.72) de manera similar obtenemos la segunda desigualdad. ■

#### 2.2.3.4. Espacios de Sobolev de funciones periódicas

Consideramos espacios de Sobolev  $H_p^s(Q)$  de funciones  $L$  periódicas en el dominio  $m$  dimensional  $Q = [0, L]^m$ . Sea  $C_p^\infty(Q)$  el espacio de restricciones a  $Q$  de funciones infinitamente diferenciables que son  $L$  periódicas en cada dirección, esto es,  $u(x + Le_j) = u(x)$ ,  $j = 1, \dots, m$  (Por ejemplo denotamos los vectores de base canónica,  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , donde 1 está en la  $j$ -ésima coordenada).

**Definición 11.** Para un entero no negativo arbitrario  $S$ , definimos el espacio de Sobolev  $H_p^S(Q)$  como la completación de  $C_p^\infty(Q)$  en la norma.

$$\|u\|_{H_p^S(Q)} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq S} \|D_u^\alpha\|_{L^2(Q)}^2 \right\}^{1/2}$$

denotamos,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  para enteros no negativos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!$ . Por  $X = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ ,  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$  en esta notación, la serie de Taylor en  $\mathbb{R}^m$  puede escribirse igual que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha$$

### Caracterización de los espacios de Sobolev $H_p^S(Q)$ mediante las series de Fourier

Cada función  $u \in C_p^\infty(Q)$  tiene una representación

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$$

donde  $c_k$  son números complejos. Consideremos funciones reales, para las cuales  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . Se sabe que para las funciones de la forma  $C_p^\infty(Q)$  la serie anterior converge uniformemente. Tenemos

$$D^\alpha u(x) = \left( \frac{2\pi i}{L} \right)^{|\alpha|} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k K^\alpha e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$$



De la identidad de Parseval

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(Q)}^2 = L^m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2|\alpha|} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_k|^2 k^{2\alpha}$$

Introducimos una nueva norma en  $H_P^S(Q)$  por

$$\|u\|_{H_f^S(Q)}^2 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^{2s}) |c_k|^2 \right\}^{1/2}$$

**Lema 10.** Las normas  $\|\cdot\|_{H_P^S}$  y  $\|\cdot\|_{H_f^S(Q)}$  son equivalentes, esto es

$$C_1 \|u\|_{H_f^S(Q)} \leq \|u\|_{H_P^S(Q)} \leq C_2 \|H_f^S(Q)\|$$

para toda  $u \in H_P^S(Q)$  y alguna constante positiva  $C_1$  y  $C_2$ .

**Prueba.** Para todo entero  $S$  existen constantes positivas  $C_1, C_2$  tales que para toda  $k \in \mathbb{R}^m$

$$C_1 \leq \frac{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq S} k^{2\alpha}}{1 + |k|^{2S}} \leq C_2 \quad (2.75)$$

ahora

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_P^S(Q)}^2 &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq S} \|D^\alpha u\|_{L^2(Q)}^2 = L^m \sum_{0 \leq |\alpha| \leq S} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2|\alpha|} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_k|^2 k^{2\alpha} \right) \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq S} |k|^{2|\alpha|} \right) |c_k|^2 \leq cC_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^{2S}) |c_k|^2 \\ &= cC_2 \|u\|_{H_f^S(Q)}^2 \end{aligned}$$

Tomando  $c_2 = cC_2$  tenemos la segunda desigualdad del Lema. Utilizando una vez mas 2.75 obtenemos la primera desigualdad del lema. ■

Tenemos a si

**Lema 11.** El espacio  $H_P^S(Q)$  coincide con

$$\left\{ u \in L^2(Q) : u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}, \overline{c_k} = c_{-k}, \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2S} |c_k|^2 < \infty \right\}$$

**Lema 12.** *En el espacio*

$$H_P^S(Q) = \left\{ u \in H_P^S(Q) : \int_Q u(x) dx = 0 \right\}$$

(De esto  $u \in H_P^S(Q)$  para el cual  $c_0 = 0$  en su representación en serie) La expresión

$$\|u\|_{H_P^S(Q)} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2s} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

es una norma equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{H_P^S(Q)}$ .

**Prueba.** La prueba viene de la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_{H_P^S(Q)} \leq \frac{L}{2\pi} \|Du\|_{L^2(Q)} \quad (2.76)$$

que vale para todo  $u$  en  $H_P'(Q)$  de hecho, tenemos

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^2(Q)}^2 &= \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{|\alpha|=1} L^m \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} |c_k|^2 |k|^2 \\ &\geq \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 L^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} |c_k|^2 = \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \|u\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

con lo cual termina la prueba. ■

En el espacio  $\| \cdot \|_{H_P^S(Q)}$  introducimos el producto escalar

$$(u, v)_{H_P^S(Q)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2s} c_k \bar{d}_k,$$

por  $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i x \frac{x}{L}}$ ,  $V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} d_k e^{-2\pi i k \frac{x}{L}}$

también tenemos

$$c_k = \hat{u}(k) = \frac{1}{L^m} \int_Q u(x) e^{-2\pi i k \frac{x}{L}} dx$$

Los coeficientes de Fourier  $\hat{u}$  de  $u$  son amplitudes complejas de armónicos  $e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$  asociados a los números de onda  $\frac{2\pi k}{L}$  es igual  $\frac{L}{|k|}$  tenga en cuenta

$$\frac{L}{\sqrt{m} k_{\text{máx}}} \leq \frac{L}{|k|} = \frac{L}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2}} \leq \frac{L}{k_{\text{mín}}}$$

**Teorema 13** (Teorema de inmersión de Sobolev). Sea  $u \in H_P^S(Q)$ ,  $S > \frac{m}{2}$ . Entonces  $u \in C_P^0(Q)$  y

$$\sup_{x \in Q} |u(x)| = \|u\|_{L^\infty(Q)} \leq C(S) \|u\|_{H_P^S(Q)}$$

**Prueba.** Sea  $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$ . Entonces, para  $S > \frac{m}{2}$  tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(Q)} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{(1 + |k|^{2S})^{1/2}} (1 + |k|^{2S})^{1/2} |c_k| \\ &\leq \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{1 + |k|^{2S}} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^{2S}) |c_k|^2 \right\}^{1/2} = C(s) \|u\|_{H_P^S(Q)} \end{aligned}$$

Además, la convergencia absoluta de la serie de coeficientes  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_k|$  implica la convergencia uniforme de la serie de Fourier de  $u$  y, en consecuencia, la continuidad de  $u$ . ■

**Teorema 14** (Rellich-Kondrachov). El espacio  $H'_P(Q)$  está inmerso de forma compacta en el espacio  $L^2(Q)$  lo que significa que por cada sucesión de funciones acotadas en  $H'_P(Q)$  existe una subsucesión de funciones que es convergente en  $L^2(Q)$ .

**Prueba.** Sea  $\{u_n\}$ ,  $u_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_{n,k} e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es una sucesión acotada en  $H'_P(Q)$  esto es,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^2) |c_{n,k}|^2 \leq M$$

para toda  $n$  y alguna constante positiva  $M$ . Tenemos que demostrar que existe una subsucesión  $u_j$  que converge a alguna  $u^* = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k^* e^{2\pi i k \frac{x}{L}} \in H'_P(Q)$  fuertemente en  $L^2(Q)$ . Se sabe que de cada sucesión limitada en un espacio de Hilbert se puede elegir una subsucesión débilmente convergente.

Supongamos que  $u_j$  converge débilmente a  $u^*$  en  $H'_P(Q)$  entonces  $u^*$  satisface.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^2) |c_k^*|^2 \leq M$$

■

**Observación 4.** Sea  $u_j$  convergente débilmente a  $u^*$  en  $H'_p(Q)$ . Notemos que esto es equivalente a la convergencia de todos los coeficientes de Fourier, a saber  $c_{j,k} \rightarrow c_k^*$  como  $j \rightarrow \infty$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}^m$ .

Vamos a demostrar que la subsucesión  $u_j$  converge a  $u^*$  en  $L^2(Q)$ . Observe que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^2) |c_{j,k} - c_k^*|^2 \leq 4M$$

donde:

$$\begin{aligned} \|u_j - u^*\|_{L^2(Q)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_{j,k} - c_k^*|^2 \leq \sum_{|k| \leq k} |c_{j,k} - c_k^*|^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{|k| > k} |c_{j,k} - c_k^*|^2 |k|^2 \\ &\leq \sum_{|k| \leq k} |c_{j,k} - c_k^*|^2 + \frac{4M}{k^2} \end{aligned}$$

para cada  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $k$  lo suficientemente grande para que  $\frac{4M}{k^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces, en vista de la observación 4 podemos tomar  $j$  suficientemente grande para que el primer término en el lado derecho sea más pequeño que  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Esto demuestra la convergencia  $u_j \rightarrow u^*$  en  $L^2(Q)$ .

## Ecuación de Laplace en espacios de Sobolev de funciones periódicas

Sea  $f \in L^2(Q)$  supongamos que buscamos  $u \in H_p^S(Q)$  satisfaciendo la ecuación

$$-\Delta u = f \tag{2.77}$$

si  $u \in H_p^S(Q)$  es una solución de (2.77) entonces para una constante arbitraria  $c$ ,  $u + c$  también es una solución en el mismo espacio. Para garantizar la unicidad restringimos nuestra atención a soluciones que satisfacen la propiedad adicional.

$$\int_Q u(x) dx = 0 \tag{2.78}$$

que es equivalente a  $u \in H_p^S(Q)$ . Pero también tenemos

$$\int_Q \Delta u(x) dx = 0 \tag{2.79}$$

**Observación 5.** Notar que si  $u \in H_P^S(Q)$  satisface (2.78) entonces se cumple (2.79).

Luego se tiene que

$$\int_Q f(x)dx = 0,$$

donde  $f$  esta en  $L^2(Q) = H_P^0(Q)$ . Además, para cualquier  $f \in L^2(Q)$  existe una constante  $c$  tal que  $f + c \in L^2(Q)$ , en consecuencia, para que la solución sea única, asumiremos que  $f \in L^2(Q)$ .

Sea

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}; \quad f_0 = 0$$

y

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}; \quad u_0 = 0 \tag{2.80}$$

Calculamos

$$-\Delta u(x) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^2 u_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}} = f$$

y comparando los coeficientes obtenemos

$$u_k = \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{f_k}{|k|^2} \text{ para } k \neq 0 \tag{2.81}$$

Podemos probar ahora lo siguiente.

**Lema 13.** Si  $f \in L^2(Q)$  y  $u \in H_P^1(Q)$  es una ecuación generalizada de la ecuación de Laplace, esto es  $u$  satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u : \nabla v dx = \int_Q f v dx \tag{2.82}$$

para toda  $v$  en  $C_P^1(Q)$ , entonces  $u \in H_P^2(Q)$  y

$$\|u\|_{H_P^2(Q)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)} \tag{2.83}$$

**Prueba.** Observemos que la identidad integral anterior podemos tomar las funciones Lds funciones de prueba del espacio  $H_P^1(Q)$ . Entonces la existencia de una solución generalizada única en  $H_P^1(Q)$  sigue fácilmente del Teorema Riesz-Frechet

esta solución se da por (2.80) donde los coeficientes se dan en (2.81), además, la solución pertenece a  $H_P^2(Q)$ , como

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_P^2(Q)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^4 |u_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^4 \left( \frac{L^2}{4\pi^2} \cdot \frac{f_k}{|k|^2} \right)^2 \\ &= \frac{L^4}{16\pi^4} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |f_k|^2 = \frac{L^4}{16\pi^4} \|f\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. ■

Observando la ecuación  $-\Delta u = f$  como en la ecuación abstracta del operador  $Au = f$  en el espacio  $L^2(Q)$  con el operador  $A : L^2(Q) \supset D(A) \rightarrow L^2(Q)$  vemos que

$$D(A) = \{u \in H_P^1(Q) : Au \in L^2(Q)\} = H_P^2(Q)$$

de hecho, de (2.83) resulta que  $D(A) \subset H_P^2(Q)$ , por otro lado, para cada  $u$  en  $H_P^2(Q)$ ,  $Au \in L^2(Q)$ , de donde  $H_P^2(Q) \subset D(A)$ .

**Lema 14.** *El operador  $A$  es invertible en  $L^2(Q)$  y  $A^{-1} : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$  es compacto, esto es, asigna conjuntos acotados en  $L^2(Q)$  a conjuntos precompactos en  $L^2(Q)$ .*

**Prueba.** De las consideraciones, sabemos que el operador  $A^{-1}$  asigna  $L^2(Q)$  a  $H_P^2(Q)$  y que la correspondencia es uno a uno. Del Teorema 14 se deduce que  $H_P^2(Q)$  esta inmerso de forma compacta en  $L^2(Q)$ , donde  $A^{-1}$  es compacto. ■

**Lema 15.** *En el caso considerado de condiciones de frontera periódicas, las funciones propias del operador laplaciano en  $L^2(Q)$  pertenecen a  $C_P^\infty(Q)$ .*

**Prueba.** Sea  $AW = \lambda W \in L^2(Q)$ , del Lema 13 se deduce que  $W \in H_P^2(Q)$  por lo tanto  $AW = \lambda W \in H_P^2(Q)$ . Así concluimos que  $W \in H_P^1(Q)$ . Por inducción obtenemos  $W \in H_P^S(Q)$  para cada entero  $S$ , ahora, es suficiente usar el Teorema de inmersión de Sobolev para concluir que  $W$  pertenece a  $C_P^\infty(Q)$ . ■

**Observación 6.** Notar que si  $f \in C_P^\infty(Q)$ ,  $u \in H_P^1(Q)$ , y  $\Delta u = f$  entonces  $u$  es infinitamente suave, es decir,  $u \in C_P^\infty(Q)$ .

**Teorema 15.** cf. [67]. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $A$  un operador lineal simétrico en  $H$ , cuyo rango sea todo  $H$ , y suponga que su inversa esta definida y compacta. Entonces  $A$  tiene un conjunto infinito de autovalores reales  $\lambda_n$  con funciones propias correspondientes  $w_n : Aw_n = \lambda_n w_n$ . Si los autovalores estan ordenados de modo que  $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$  uno tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ . Además, el  $w_n$  puede ser elegido para que forman una base ortonormal para  $H$ , y en términos de esta base, el operador  $A$  puede ser representado por

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j)_H w_j$$

en su dominio

$$D(A) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \lambda_j^2 < \infty \right\}$$

$D(A)$  es un espacio de Hilbert con un producto interno  $(u, v)_{D(A)} = (Au, Av)_H$  y la norma correspondiente

$$\|u\|_{D(A)} = \|Au\|_H$$

Para el operador  $Au = -\Delta u$  en  $L^2(Q)$ , de donde tenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}} = \sum c_k \left( \cos(2\pi k \frac{x}{L}) + i \operatorname{sen}(2\pi k \frac{x}{L}) \right) \\ &= \sum_{\frac{L^m}{2}} \sum_{k \in (\mathbb{Z}^m \setminus \{0\})/2} \left( \operatorname{Re}(c_k) w_k^{(c)} - \operatorname{Im}(c_k) w_k^{(s)} \right) \end{aligned}$$

donde

$$w_k^{(c)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L^m}} \cos(2\pi k \frac{x}{L}), \quad w_k^{(s)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L^m}} \operatorname{sen}(2\pi k \frac{x}{L})$$

$$\text{y } Aw_k^{(\cdot)}(x) = \frac{4\pi^2 |k|^2}{L^2} w_k^{(\cdot)}, \quad \|w_k^{(\cdot)}\|_{L^2(Q)} = 1.$$

Por ejemplo, para  $m = 2$ , el valor propio mas pequeño es  $4\frac{\pi^2}{L^2} |k|^2$  con  $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1$ , se repite cuatro veces,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$  en la sucesión  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \dots$

Las funciones propias correspondientes se dan como  $w_1 = w_{(1,0)}^{(c)}$ ,  $w_2 = w_{(1,0)}^{(s)}$ ,  $w_3 = w_{(0,1)}^{(c)}$ ,  $w_4 = w_{(0,1)}^{(s)}$

### 2.2.3.5. Aspectos matemáticos para fluidos compresibles

El marco de resolución de las ecuaciones serán los espacios de Lebesgue,  $L^p$ , y Sobolev,  $W^{m,p}$  ( $m$  entero,  $1 \leq p \leq +\infty$ ) usuales con las normas estándar  $|\cdot|_p$ ,  $|\cdot|_{m,p}$  respectivamente.

Definimos los espacios de Sobolev con media nula, como:

$$W_M^{m,p}(\Omega) = \left\{ \psi : \psi \in W^{m,p}(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} \psi dx = 0 \right\}$$

dotado de la misma norma que  $W^{m,p}$ .

**Lema 16** (Desigualdad de Poincaré para funciones con media nula). *Sea  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  y  $\psi \in W_M^{1,p}(\Omega)$ . Entonces:*

$$|\psi|_{1,p} \leq C_1 \left( \sum_{n=1}^3 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|_p^p \right)^{1/p} \quad (2.84)$$

donde  $C_1$  es una constante positiva que solo depende de  $\Omega$  y  $p$ .

Consideramos el problema de Stokes no homogéneo en  $\Omega$ :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi + \nabla \varphi = F, & \nabla \cdot \varphi = g, \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

**Lema 17 (Cattabriga-Solonnikov).** *Sea  $\partial\Omega$  de clase  $C^m$ ,  $F \in (W^{m-2,q})^3$  y  $g \in W^{m-1,p}$  ( $m \geq 1$ ,  $1 < q < \infty$ ) tal que verifica la condición de compatibilidad:*

$$\int_{\Omega} g(x) dx = 0.$$

*Entonces existe una y solo una solución  $(\varphi, \pi) \in (W^{m,q})^3 \times W^{m-1,q}$  de (2.54) ( $\pi$  es única salvo constantes aditivas). Además se tiene la siguiente estimación de dependencia continua de la solución  $(\varphi, \pi)$  respecto de los datos  $(F, g)$ :*

$$|\varphi|_{m,q} + |\nabla \pi|_{m-2,q} \leq C_2 (|F|_{m-2,q} + |g|_{m-1,q})$$

donde  $C_2$  es una constante que solo depende de  $m$ ,  $q$  y  $\Omega$ .



**Lema 18.** Sea  $L$  el operador diferencial lineal de primer orden

$$L\psi = a\psi + \nabla \cdot (b\psi),$$

donde  $a > 0$  es una constante y  $b \in (W^{2,4})^3 \times (H_0^1)^3$ . Consideramos que  $L$  actúa sobre funciones escalares  $\psi$  definidas en  $\Omega$ , y consideramos

$$D(L) = \left\{ \psi \in W^{1,4} : L\psi \in W^{1,4} \text{ y } \int_{\Omega} \psi(x) dx = 0 \right\}$$

si

$$a - 7C_4C_1|\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4C_4|b|_{2,4} > 0 \quad (2.86)$$

para  $C_4$  la constante tal que  $|\psi|_{\infty} \leq C_4|\psi|_{1,4}$  (i.e., la constante de la inyección continua de Sobolev de  $W^{1,4}$  en  $C^0(\overline{\Omega})$ ), entonces, para cada  $G \in W^{1,4}$  con  $\int_{\Omega} G dx = 0$ , existe una única solución  $\psi \in D(L)$  de

$$L\psi = G \quad (2.87)$$

### **Demostración.**

Gracias a la linealidad del operador diferencial, la existencia y unicidad en el espacio  $H^1(\Omega)$  con medida nula se seguirá de forma standar si conseguimos estimaciones a priori en dicho espacio.

Aplicamos un razonamiento de tipo Galerkin, eligiendo como base especial en  $H^1(\Omega)$  una base  $\{z_1, z_2, \dots, z_m, \dots\}$  de autovectores del problema:

$$\begin{cases} -\Delta z + z = \lambda z & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya formulación variacional es:

$$z \in H^1(\Omega) \text{ tal que } ((z, w)) = \lambda(z, w), \quad \forall w \in H^1,$$

donde  $((\cdot, \cdot))$  es el producto escalar en  $H^1(\Omega)$  y  $(\cdot, \cdot)$  es el producto escalar en  $L^2(\Omega)$ .

Para demostrar la existencia de dicha base, consideramos el operador

$$T : f \in L^2(\Omega) \rightarrow z \in H^1(\Omega)$$

donde  $z(f)$  es la solución del problema variacional:

$$((z, w))_{H^1} = (f, w)_{L^2}, \quad \forall w \in H^1.$$

Como  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  (inyección compacta), entonces

$$T : L^2 \rightarrow L^2 \text{ es un operador compacto.}$$

Además  $(Tf, g) = ((Tf, Tg)) = (f, Tg)$ ,  $\forall f, g \in L^2$ , luego  $T$  es autoadjunto.

Como  $L^2(\Omega)$  es Hilbert separable, en virtud del Teorema de Hilbert-Schmidt, podemos asegurar la existencia de una base ortonormal en  $L^2$ ,  $\{z_1, z_2, \dots, z_m, \dots\}$  formada por autovectores de  $T$ . Es fácil ver que dicha base también es una base ortogonal de  $H^1$ .

Dada  $G \in W^{1,4}$ , consideramos el problema:

$$\text{hallar } \psi \in H^1(\Omega) \text{ tal que } a\psi + \nabla \cdot (b\psi) = G,$$

es decir,

$$\psi \in H^1 \text{ tal que } a(\psi, \varphi) - \int_{\Omega} \psi b \cdot \nabla \varphi = (G, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1 \quad (2.88)$$

■

Planteamos el problema discretizado:

$$\psi_m \in \langle z_1, \dots, z_m \rangle, \quad a(\psi_m, \varphi) - \int_{\Omega} \psi_m b \cdot \nabla \varphi = (G, \varphi), \quad \varphi \in \langle z_1, \dots, z_m \rangle. \quad (2.89)$$

Poniendo

$$\psi_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j z_j \text{ y } \varphi = z_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.90)$$

obtenemos que (2.89) es equivalente al sistema lineal:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \alpha_j a(z_j, z_i) - \alpha_j \left( \int_{\Omega} z_j b \cdot \nabla z_i \right) \right\} = (G, z_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

La matriz del sistema es:

$$A = \left( a(z_j, z_i) - \int_{\Omega} z_j b \cdot \nabla z_i \right)_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Veamos que  $A$  es definida positiva. En efecto, dado  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , si consideramos  $\psi_m$ , como en (2.90),

$$(A\alpha, \alpha) = a|\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot b)\psi_m^2$$

Como

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot b)\psi_m^2 \leq |\nabla \cdot b|_{\infty} |\psi_m|_2^2 \leq C_4 |\nabla \cdot b|_{1,4} |\psi_m|_2^2 \leq C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 |\psi_m|_2^2$$

tenemos

$$(A\alpha, \alpha) \geq \left( a - \frac{1}{2} C_4 c_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 \right) |\psi_m|_2^2$$

Gracias a la hipótesis (2.86), en particular,  $a - C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 > 0$ . Por tanto, el problema discreto (2.89) tiene una única solución:  $\psi_m$ . Además si tomamos en (2.89) como función test  $\varphi = \psi_m$ :

$$a|\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot b)\psi_m^2 = (G, \psi_m) \leq \frac{a}{2} |\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2a} |G|_2^2$$

Si repetimos el procedimiento anterior tenemos la siguiente estimación de  $\psi_m$ :

$$|\psi_m|_2^2 \leq \frac{|G|_2^2}{a(a - C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4)}. \quad (2.91)$$

En consecuencia, podemos extraer una subsucesión  $(\psi_{m'})_{m'}$  tal que  $\psi_{m'} \rightarrow \psi$  en  $L^2$  débil. Además, pasando al límite en (2.89), tenemos que  $\psi$  es solución de (2.88). Además,  $\int_{\Omega} \psi dx = 0$ ; para ello, basta tomar  $\psi \equiv 1$  en (2.88) y tener en cuenta que  $\int_{\Omega} G = 0$ .

De este modo obtenemos solución de (2.87) en  $H^1$ . La unicidad es fácil, ya que el operador diferencial es lineal.

Para terminar la demostración del lema 18, veamos que realmente  $\psi \in W^{1,4}$  (como  $H^1 \hookrightarrow L^4$ , basta ver que  $\nabla \psi \in (L^4)^3$ ). Tomando gradiente en la ecuación  $L\psi = G$ , elevando a la 4 e integrando en  $\Omega$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
|\nabla G|_4^4 &= a^4 |\nabla \psi|_4^4 + |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_4^4 + 2 \int_{\Omega} a^2 |\nabla \psi|^2 |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx \\
&\quad + 4 \int_{\Omega} a^2 |\nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx + 4 \int_{\Omega} a^3 |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi)) dx \\
&\quad + 4 \int_{\Omega} a \nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi)) |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx
\end{aligned}$$

Empleando las desigualdades de Schwartz, Holder y young deducimos que que:

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 \geq \int_{\Omega} [\nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))]^2 dx \quad (2.92)$$

$$\int_{\Omega} a \nabla \psi \cdot (\nabla \cdot (b\psi)) |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx \geq -\frac{1}{6} |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_4^4 - \frac{3}{2} a^2 |\nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_2^2 \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi)) dx = \\
&\quad \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot [b \cdot \nabla(\nabla \psi) + \psi \nabla(\nabla \cdot b) + (\nabla b)(\nabla \psi) + (\nabla \cdot b)(\nabla \psi)] dx \geq \\
&\quad -\frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^4 (\nabla \cdot \psi) dx - C_4 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 |\nabla \psi|_4^4 - |\nabla b|_{\infty} |\nabla \psi|_4^4 + \int_{\Omega} (\nabla \cdot b) |\nabla \psi|^4 dx \geq \\
&\quad - \left( \frac{3}{4} |\nabla \cdot b|_{\infty} + |\nabla b|_{\infty} + C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 \right) |\nabla \psi|_4^4 \quad (2.94)
\end{aligned}$$

De (2.92), (2.93) y (2.94) obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
|\nabla G|_4^4 &\geq a^3 \left\{ a - 4 \left( \frac{3}{4} C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 + C_4 |b|_{2,4} + C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 \right) \right\} |\nabla \psi|_4^4 \geq \\
&\quad a^3 \{ a - 7 C_1 C_4 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4 C_4 |b|_{2,4} \} |\nabla \psi|_4^4
\end{aligned}$$

luego, gracias a (2.86), tenemos que  $\nabla \psi \in (L^4)^3$ .

### 2.2.3.6. Fluidos compresibles: Caso estacionario

Nos adentramos ahora en la llamada *Mecánica de los Medios Continuos*. Supongamos un medio físico, dentro de un dominio  $\Omega$ , caracterizado por las siguientes propiedades:

**Definición 12.** Una **densidad de masa**,  $\rho$  con  $\rho \in C^1(\omega \times [0, T])$  y positiva, tal que la masa en un abierto acotado  $W$ ,  $W \subset \Omega$ , en un instante  $t$  vendrá determinada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(x, t) dx,$$

**Definición 13.** Un **campo de velocidades**,  $u$ , con  $u \in C^1(\omega \times [0, T]; \mathbb{R}^N)$  y tal que la cantidad de movimiento en  $W$  y  $t$  será:

$$M(W, t) = \int_W (\rho u)(x, t) dx.$$

**Definición 14.** Una **densidad de energía interna por unidad de masa**,  $w$ , con  $w \in C^1(\Omega \times [0, T])$  y positiva, de manera que la energía total en  $W$  en el instante  $t$  será:

$$E_{\text{total}}(W, t) = \int_W \left( \frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho w \right) (x, t) dx,$$

donde  $|u|$  denota la norma euclídea del vector  $u$ , es decir,  $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ .

En una primera aproximación, estudiamos la ecuación de la densidad de masa  $\rho = \rho(x, t)$ . Aplicando el principio de conservación de masa, observamos que la variación de la masa de un volumen  $W$  en un instante  $t$ ,  $\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx$ , debe ser igual al flujo de masa a través de la frontera  $\partial W$ , en ese mismo instante.

Como las partículas de fluido se mueven a través de las líneas de corriente (que son las curvas características soluciones del sistema diferencial ordinario:  $\dot{X} = u(X, t)$ ), dicho flujo de masa a través de la forma se expresa como  $-\int_{\partial W} \rho u \cdot n dS$ , que aplicando la fórmula de Stokes al miembro de la derecha, se transforma en:

$$\int_W \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right\} = 0, \quad (2.95)$$

para cada  $W \subset \Omega$  y  $t \in (0, T)$ , donde por  $\nabla \cdot (\rho u)_i$  denotamos  $\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u)_i$ . Con ello llegamos a la ecuación conocida como la Ley de Conservación de la Masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (2.96)$$

Otra forma de obtener (2.96) es a partir del transporte de masa sobre un intervalo  $(t, t + h)$ , usando la conservación de la masa, pues:

$$\rho(X(t + h), t + h)J(h) = \rho(x, t),$$

donde:

$$\begin{cases} X(t) = x, \\ \dot{X}(s) = u(X(s), x). \end{cases}$$

y  $J(h)$  es el jacobiano de la transformación:  $x \rightarrow X(t + h, x)$ .

Se conoce que  $J(h) = 1 + h\nabla \cdot u(x, t) + o(h)$ , con lo que obtenemos:

$$\rho(x, t) + h \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + (\nabla \cdot u)\rho \right\} (x, t) + o(h) = \rho(x, t),$$

y llegamos a (2.96).

Nos fijamos ahora en el campo de velocidades  $u = u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)$ , concretamente sobre la evolución de  $u$ , o del llamado momento  $\rho u$ . Justamente, aplicando el principio de conservación del momento, encontramos:

$$\int_W \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = - \int_{\partial W} \rho u (u \cdot n) dS + \int_W \rho f dx - \int_{\partial W} \sigma \cdot n dS, \quad (2.97)$$

Los dos últimos términos representan respectivamente la acción de las fuerzas externas sobre el fluido (gravedad, coriolis, fuerzas electromagnéticas,  $\dots$ ) y las fuerzas de tensión ejercidas sobre la frontera  $\partial W$  en el contacto de  $W$  con otras partículas. Mientras que  $f$  es normalmente un dato,  $\sigma$  es ahora un tensor que se introduce como una nueva incógnita en las ecuaciones que estamos considerando, llamado tensor de esfuerzos. Clásicamente, un fluido está sometido a dos tipos de esfuerzos: efectos de compresión (normales a  $\partial W$ ) y efectos viscosos (tangenciales a  $\partial W$ ), de manera que:

$$\sigma = -pId + \tau, \quad (2.98)$$

donde  $p$  es la presión (magnitud escalar) y  $\tau$  el tensor de esfuerzos viscosos.  $Id$  es el tensor identidad,  $Id = (\delta_{ij})_{ij}$ .

Conjugando (2.97) y (2.98), y usando la fórmula de Stokes llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho f, \quad (2.99)$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial de vectores, lo que escrito explícitamente por componentes sería:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho_j(\rho u_i u_j - \tau_{ij}) + p \delta_{ij} = p f_i \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.100)$$

(adoptando la convención de suma de índices repetidos y notando  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ).

Además, usando a (2.96), (2.99) se reescribe de la forma:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho f, \quad (2.101)$$

Respecto a  $\tau$ , si aplicamos el principio de conservación del momento angular llegamos a que  $\tau$  es un tensor simétrico. Además, clásicamente se supone que:

$$\tau = \tau(\nabla u, \rho, T),$$

donde  $T$  es la temperatura. En este trabajo, hablaremos ampliamente de los llamados fluidos newtonianos, es decir, supondremos que  $\tau$  es lineal en  $\nabla u$  de la forma:

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot u)Id + 2\mu d, \quad (2.102)$$

con  $d = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u')$  es el tensor de deformaciones, y  $\lambda$  y  $\mu$  los coeficientes de viscosidad de Lamé (en principio,  $\mu$  y  $\lambda$  dependen de  $\rho$  y  $T$ ). Por ejemplo, para los llamados gases monoatómicos, se supone la relación de stokes  $\lambda = -\frac{2\mu}{N}$ , con  $N$  la dimensión del espacio. Para la mayoría de los fluidos,  $\lambda + \frac{2\mu}{3}$  es muy pequeño, con lo que a veces se podrían aproximar por un modelo donde dicha relación sea nula. Sin embargo, en la práctica se consideran sólo las hipótesis:

$$\mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2\mu}{N} \geq 0, \quad (2.103)$$

se distingue entonces entre fluidos viscosos  $\mu > 0, \lambda + \mu > 0$  y no viscosos ( $\lambda = \mu = 0$ , luego  $\tau = 0$ ).

Por último, se deduce las ecuaciones que son consecuencia de la Ley de conservación de la Energía o Primera Ley de la Termodinámica. Para ello es necesario que las fluctuaciones termodinámicas sean suficientemente débiles en torno a una condición de equilibrio, en cada punto y en cada instante. Dicho estado termodinámico viene determinado por la presión,  $p$ , la energía interna por unidad de masa,  $e$ , la temperatura,  $T$ , y la densidad,  $\rho$ , que a su vez están relacionados por las ecuaciones de estado.

La energía total viene dada por la suma de la energía cinética  $\rho \frac{|u|^2}{2}$  y la energía interna  $\rho e$ , luego la ley de conservación de la energía se escribe:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \left( \frac{|u|^2}{2} + e \right) dx = - \int_{\partial W} \rho \left( \frac{|u|^2}{2} + e \right) u \cdot n ds + \int_W \rho f \cdot u dx + \int_{\partial W} u \cdot (\sigma n) dS + Q, \quad (2.104)$$

donde las dos últimas integrales corresponden al trabajo realizado respectivamente por las fuerzas externas y de tensión, mientras que  $Q$  es la variación de calor a lo largo de la frontera, es decir,

$$Q = - \int_{\partial W} q \cdot n ds,$$

donde  $q$  aparece como una nueva incógnita vectorial que describe el flujo de calor a través de la frontera.

Usando de nuevo la fórmula de Stokes, llegamos a una nueva reescritura de (2.104):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{|u|^2}{2} + e \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \left( \frac{|u|^2}{2} + e \right) u \right\} \\ = -\nabla \cdot (pu) + \nabla \cdot (r \cdot u) - \nabla \cdot q + \rho f \cdot u. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Para terminar con la descripción de las ecuaciones anteriores queda estudiar el comportamiento de  $p$ ,  $e$  y  $q$ . Se desarrollará sólo en el caso en que  $\rho$  y  $T$  son independientes,  $p = p(\rho, T)$ ,  $e = e(\rho, T)$  y

$$q = -k(\rho, T, |\nabla T|) \nabla T, \quad (2.106)$$



donde  $k$  es una función escalar, que en la mayoría de los casos dependerá sólo de  $\rho$  y  $T$  o incluso será una constante (llamada coeficiente de conductividad térmica).

En ese intento de descripción, usamos la variable de estado Entropía, denotada por  $s$  que satisface la ecuación de Gibbs (supuesta la hipótesis de equilibrio termodinámico)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{p} \right) \right\}, \quad (2.107)$$

donde  $\frac{d}{dt}$  es la derivada convectiva ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x \cdot$ ). Multiplicando por  $\rho$  y usando (2.96), se obtiene:

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} + p(\nabla \cdot u) \right). \quad (2.108)$$

Por otra parte, la entropía en un volumen dado  $W$  es  $\int_W \rho s dx$ , lo que nos conduce, aplicando la Segunda Ley de la Termodinámica, a:

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) \geq \int_{\partial W} \rho s u \cdot n ds - \int_{\partial W} \frac{q}{T} \cdot n ds, \quad (2.109)$$

y razonando de manera ya habitual en nuestra descripción:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) \geq -\nabla \cdot \left( \frac{q}{T} \right). \quad (2.110)$$

Multiplicando ahora (2.101) por  $u$ , obtenemos:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|u|^2}{2} \right) + \rho(u \cdot \nabla) \frac{|u|^2}{2} - \nabla \cdot (\tau u) + u \cdot \nabla p = \rho f \cdot u - \tau : Du = \rho f \cdot u - \tau : d,$$

donde: denota el producto escalar de matrices, que se transforma (usando (2.96)) en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{|u|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \frac{|u|^2}{2} u \right\} - \nabla \cdot (\tau u) + u \cdot \nabla p = \rho f \cdot u - \tau : d, \quad (2.111)$$

y sustituyendo esta expresión a (2.105):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e u) + p(\nabla \cdot u) = -\nabla \cdot q + \tau : d, \quad (2.112)$$

que se transforma por (2.96) en:

$$\rho \frac{de}{dt} + p(\nabla \cdot u) = -\nabla \cdot q + \tau : d,$$

que, a su vez, usando (2.108) y de nuevo (2.96), nos lleva a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot q) + \frac{1}{T}\tau : d. \quad (2.113)$$

Comparando con (2.110), se deuce que:

$$\tau : d - \frac{1}{T}q \cdot \nabla T \geq 0, \quad (2.114)$$

que deberá verificarse para todo  $(\rho, u, T)$  (pues no hemos usado hipótesis restrictivas en el proceso inductivo). En el caso particular en que  $u \equiv 0$ , de (2.114) tenemos que  $-q \cdot \nabla T \geq 0$ , lo que implica de (2.106) que la función allí descrita,  $k$ , es positiva, lo cual es consistente experimentalmente.

Por el contrario, si elegimos  $T$  constante, (2.114) se escribe  $\tau : d \geq 0$ , y de (2.102) llegamos a la relación:

$$\tau : d = 2\mu|d|^2 + \lambda(\nabla \cdot u)^2 \geq 0,$$

para los fluidos newtonianos, que es equivalente a la relación que consideramos que verifican los coeficientes de Lamé.

Por otra parte, de la ecuación de la entropía, considerando la hipótesis termodinámica de que  $\rho$  y  $T$  como variables independientes, se puede deducir que:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right\}. \quad (2.115)$$

Para terminar, exponemos dos ejemplos: el caso de un gas ideal y el de un fluido newtoniano.

Un gas ideal es un fluido que obedece:

- La Ley de Mariotte, con  $f$  una función escalar.
- El efecto de Joule,  $e = e(T)$  para  $e$  una función escalar.

Se deduce entonces que  $f$  es lineal en  $T$ , lo que nos permite expresar  $p$  y  $e$  de la forma:

$$p = R\rho T, \quad e = e(T), \quad (2.116)$$

donde  $R > 0$  y  $e$  es creciente en  $T$ . La constante  $R$  recibe el nombre de constante del gas ideal. Escribiendo  $c_v = e'(T)$  y ( $c_v \geq 0$ ),  $c_v \geq 0$ ,  $c_p = \frac{\partial h}{\partial T} = R + e'(T)$  donde  $h = e + \frac{p}{\rho}$  es la entalpía, se tiene que  $c_p > c_v$ . Luego, denotando  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , entonces  $\gamma > 1$ .

Con este modelo se suelen describir los fluidos comunes y los gases en condiciones normales (es decir, que no poseen altas densidades o no soportan altas temperaturas).

Suponiendo además que  $c_p$  y  $c_v$  son constantes:

$$e = c_v T, \quad c_v > 0, \quad \gamma = 1 + \frac{R}{c_v} > 1. \quad (2.117)$$

Deducimos entonces de (2.115) que  $\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{c_v}{T} = \frac{R}{\gamma-1}$  y  $\frac{\partial s}{\partial p} = -\frac{R}{\rho}$ , de donde:

$$s = R \log \left( \frac{T^1}{den} \right). \quad (2.118)$$

Es posible deducir de la teoría cinética de los gases que  $\gamma = \frac{N+2}{N}$  (para gases monoatómicos). La región más interesante para su estudio, desde el punto de vista físico, es para  $\gamma \in (1, \frac{5}{3}]$ .

El modelo para fluidos newtonianos es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u_i) - \partial_j \{ \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \} - \partial_i (\lambda (\nabla \cdot u)) + \partial_i p = \rho f_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e u) + p (\nabla \cdot u) - \nabla \cdot (k \nabla T) = \frac{\mu}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 + \lambda (\nabla \cdot u)^2, \end{cases} \quad (2.119)$$

donde  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $p$  y  $e$  son funciones de  $\rho$  y  $T$ ,  $k$  verifica (2.106), y  $\lambda$  y  $\mu$  satisfacen (2.103).

El caso más usual es  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $k$  constantes,  $p = R\rho T$  ( $R > 0$ ),  $e = c_v T$  ( $c_v > 0$ ) y  $\gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$ . Finalmente,  $s$  definida por (2.115) satisface:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s u) = -\frac{1}{T} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\mu}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 + \lambda (\nabla \cdot u)^2. \quad (2.120)$$

El presente trabajo se centrará en (2.119) con las condiciones  $\mu > 0$  y  $\lambda + \frac{2}{N}\mu > 0$ , esto es las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles.

Establecemos una clasificación de los principales modelos compresibles:

(I) Cuando  $\lambda = \mu = k = 0$ , nos encontramos ante las ecuaciones de Euler compresibles, que vienen representadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho \cdot T) = pf, \\ \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \rho \left( \frac{|u|^2}{2} + e \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \left( \rho \frac{|u|^2}{2} + \rho e + p \right) \right\} = pf \cdot u, \end{cases}$$

y en el caso de gases ideales,  $p$ ,  $e$  y  $\gamma$  verifican (2.116) y (2.117). Además, en el caso en que  $\rho$ ,  $u$  y  $T$  sean suficientemente regulares la ecuación para la entropía (2.120) se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) = 0 \text{ o } \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla s = 0.$$

De hecho, aparecen discontinuidades (“shocks”) sobre las que la ecuación de la entropía no se verifica. Solo tenemos garantizado que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) \geq 0. \quad (2.121)$$

Para evitar la formación de esas discontinuidades, consideramos  $s$  constante en el instante inicial, de manera que  $s$  seguirá siendo constante en todo tiempo:  $s = s_0$ . Para el gas ideal, usando (2.118) se verifica que:

$$p = R e^{s_0/c_v} \rho^\gamma = C_0 \rho^\gamma \quad (C_0 > 0), \quad (2.122)$$

con lo que la ecuación de la energía queda desacoplada y obtenemos, para las incógnitas  $(\rho, u)$ , el llamado sistema dinámico para gases barotrópicos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + C_0 \rho^\gamma = 0. \end{cases}$$

En general, por flujo barotrópico entendemos aquel en el que las fluctuaciones de la temperatura tienen un efecto pequeño sobre la densidad, por lo que la

ecuación de la energía se puede desacoplar en la ecuación de continuidad y la ecuación de momentos.

Este sistema tiene validez física restringida. En general, para un gas no ideal se tiene que una ley para la presión con  $s = s_0$  conduce a:

$$p = p(\rho) = \bar{p}(\rho, T),$$

donde  $T$  ha sido previamente determinada para  $s = s_0$  y  $p$  es creciente en  $\rho$ .

(II) Caso  $\lambda, \mu > 0, k \geq 0$  y se desprecian los efectos de calor debidos a la disipación viscosa de la temperatura, es decir, la ecuación de la temperatura es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e u) + p \nabla \cdot u - k \nabla^2 T = 0.$$

Si suponemos que se verifican la ley de Mariotte y el efecto de Joule (en el caso de un gas ideal,  $e = c_v T, p = R \rho T$ ), así como  $k = 0$ , la ecuación de la entropía se convierte de nuevo en:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla s = 0. \quad (2.123)$$

Si consideramos de nuevo  $s_0$  constante, podemos deducir que  $s = s_0$  y llegamos a las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles barotrópicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \nabla^2 u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \nabla p(\rho) = \rho f, \end{array} \right.$$

donde  $p(\rho) = \bar{p}(\rho, T)$  es creciente en  $\rho$  (y  $s(\rho, T) = s_0$ ). De nuevo, en el caso de un gas ideal,  $p(\rho) = C_0 \rho^\gamma, C_0 = R e^{s_0/c_v}$ .

(III) Las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles en el caso isoterma.

Estas provienen de la descripción matemática del comportamiento asintótico de los fluidos de (II) cuando:

$$p = p(\rho)T, \quad e = c_v T \text{ y } c_v \rightarrow +\infty.$$

Obtenemos entonces que  $T$  verifica:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla T = 0 \text{ o } \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla T - k \nabla T = 0,$$

si  $\frac{k}{c_v} \rightarrow k$ . Una solución particular es entonces  $T = T_0 > 0$  (es decir, temperatura constante). De este modo la descripción de (III) es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \nabla u - (\lambda + u) \nabla(\nabla \cdot u) + T_0 \nabla p(\rho) = 0, \end{cases}$$

y  $p(\rho) = R_\rho$  en el caso de un gas ideal ( $p = p(\rho)$  creciente en  $\rho$  en el caso general).

Respecto a la elección de las condiciones sobre  $\partial\Omega$  para  $\rho, u$  y  $T$  en el caso de  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$  conexo acotado y suficientemente regular, las más fáciles de tratar son:

- $u \cdot n = 0$  o  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  (según sean las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes),
- sin restricciones sobre  $\rho$  (gracias a las condiciones homogéneas anteriores para  $u$ ), y
- $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

## 2.3. Definición de términos básicos

- Ecuaciones de Navier Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido.
- 3D. es el espacio euclidiano cuando dimension su es 3 (n=3), Un espacio euclídeo de dimensión finita es un espacio vectorial normado sobre los números reales de dimensión finita, en que la norma es la asociada al producto escalar ordinario.

- **Gradiente.** Se toma como campo escalar el que se asigna a cada punto del espacio una presión  $P$  (campo escalar de 3 variables), entonces el vector gradiente en un punto genérico del espacio indicará la dirección en la cual la presión cambiará más rápidamente.
- **Divergencia** La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros", la divergencia será negativa.
- **Fluido** Un fluido es un conjunto de partículas que se mantienen unidas entre sí por fuerzas cohesivas débiles y las paredes de un recipiente; el término engloba a los líquidos y los gases. En el cambio de forma de un fluido la posición que toman sus moléculas varía, ante una fuerza aplicada sobre ellos, pues justamente fluyen.
- **Presión** es una magnitud física que mide la proyección de la fuerza en dirección perpendicular por unidad de superficie, y sirve para caracterizar cómo se aplica una determinada fuerza resultante sobre una línea.
- **Compresible** La compresibilidad es una propiedad de la materia a la cual hace que todos los cuerpos disminuyan el volumen al someterlos a una presión o compresión determinada manteniendo constantes otros parámetros.
- **Incompresible** Un fluido incompresible es cualquier fluido cuya densidad siempre permanece constante con el tiempo, y tiene la capacidad de oponerse a la compresión del mismo bajo cualquier condición. Esto quiere decir que ni la masa ni el volumen del fluido puede cambiar.
- **Viscosidad** La viscosidad es una propiedad física característica de todos los fluidos, el cual emerge de las colisiones entre las partículas del fluido que se mueven a diferentes velocidades, provocando una resistencia a su movimiento.

- Estacionario Se dice que un sistema o proceso está en estado estacionario si las variables que definen su comportamiento (las llamadas variables de estado), respecto del tiempo, permanecen invariantes.
- Isotérmico Se denomina proceso isotérmico o proceso isoterma al cambio reversible en un sistema termodinámico, siendo dicho cambio a temperatura constante en todo el sistema.



# CAPÍTULO III

## HIPÓTESIS Y VARIABLES

### 3.1. Hipótesis

#### 3.1.1. Hipótesis General

Si existen soluciones débiles para una ecuación de Navier-Stokes-3D estacionaria, compresible e isotérmica dada por (1.1)

#### 3.1.2. Hipótesis específicas

- a) El sistema (1.1) posee soluciones débiles en el espacio  $(W^{2,4}(\Omega))^3 \times W^{1,4}(\Omega)$  que modelan el campo de velocidades y densidad de un gas.
- b) Las soluciones débiles del sistema (1.1) satisfacen estimativas relacionadas a las fuerzas externas, con las cuales es posible controlar el crecimiento del campo de velocidades y la densidad de un gas.

### 3.2. Operacionalización de las Variables

Debido a las características físicas envueltas en el sistema (1.1), el cual es uno de los focos principales de estudio, consideraremos como variables al campo de velocidades  $v$  y a la densidad  $\rho$  de un gas, ambas independientes del tiempo debido al estudio estacionario de la dinámica del gas isotérmico.

Variables	Definición conceptual	Dimensiones	Indicadores
Campo de velocidades $v$	Velocidad de transporte de un gas	$v \in (W^{2,4}(\Omega))^3$	Independiente del tiempo
Densidad $\rho$	Densidad de un gas	$\rho \in W^{1,4}(\Omega)$	Requiere de ecuaciones termodinámicas

# CAPÍTULO IV

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

### 4.1. Tipo y diseño de la investigación

#### 4.1.1. Tipo de investigación

La presente investigación se podrá clasificar de acuerdo a los siguientes criterios:

- (i) *Según su objeto de estudio:* Para A. Zorrilla [41], la investigación *básica*-denominada también pura o fundamental- busca el progreso científico, acrecentar los conocimientos teóricos, sin interesarse directamente en sus posibles aplicaciones o consecuencias prácticas; es más formal y persigue las generalizaciones con vistas al desarrollo de una teoría basada en principios y leyes. Así este trabajo se puede clasificar por su objeto de estudio como **básico**.
- (ii) *Según su naturaleza:* De acuerdo A. Zorrilla [41], la investigación documental es aquella que se realiza a través de la consulta de documentos (libros, revistas, periódicos, memorias, anuarios, registros, códigos, constituciones, etc.). Luego, debido a la detallada recopilación de datos a partir de libros, publicaciones científicas, etc. la presente investigación, según su naturaleza, es del tipo **documental**.
- (iii) *Según su objetivo general:* Babbie [42], Selltiz et. al. [43], A. Zorrilla [41], concuerdan en que la investigación *descriptiva*, es la descripción, registro, análisis e interpretación, mediante análisis. En ésta investigación se ven y se analizan las características y propiedades para que con un poco de criterio se las pueda clasificar, agrupar o sintetizar, para luego poder profundizar más en el tema. Por lo tanto, esta investigación es del tipo **descriptiva**.

## 4.1.2. Diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación presentará la siguiente estructura:

- i) Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del modelaje físico de las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que permitirá entender la construcción de dicho modelo, tanto en el caso incompresible como compresible.
- ii) Se empleará formulas físicas y técnicas del análisis matemático para la construcción y modelaje en el caso compresible isotérmico, teniendo en cuenta las ecuaciones de estado o termodinámicas.
- iii) Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve a los espacios de Sobolev con el fin de poder probar la buena colocación (i.e. existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales) para el problema de Navier-Stokes compresible isotérmico.
- iv) Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis funcional, de tal manera que se pueda probar la existencia de soluciones en el espacio de fase  $(W^{2,4}(\Omega))^3 \times W^{1,4}(\Omega)$ .

## 4.2. Población y muestra

### 4.2.1. Población

Por ser un trabajo netamente abstracto no existe población que estudiar, si embargo nuestro estudio se encuentra enmarcado en la línea de las ecuaciones diferenciales parciales.

### 4.2.2. Muestra

Por ser un trabajo netamente abstracto no existe muestra que estudiar, si embargo nuestro estudio se encuentra enmarcado en las ecuaciones diferenciales parcia-

les, específicamente ecuaciones de Navier-Stokes.

### **4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental**

Las Técnicas e Instrumentos de recolección de datos utilizados en esta investigación fueron:

- a) Revisión Bibliográfica Esta técnica permite extraer información relacionada con el tema a investigar por medio de diversas fuentes como libros encontrados en la biblioteca virtual del Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (CONCYTEC), también poder consultar diferentes artículos de acceso libre de la información (ALICIA) y de sus diferentes bibliotecas asociadas como trabajos de grado y publicaciones de Internet en el directorio de investigadores del concytec (DINA).
- b) Consultas Académicas Se realizaron consultas a los asesores de tesis, con el fin de obtener orientación, establecer los parámetros de estudio y definir los pasos a seguir para el desarrollo del proyecto.

### **4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos.

## 4.5. Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó de análisis y procesamientos de datos.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS

### 5.1. Resultados descriptivos

#### 5.1.1. Soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes

En este capítulo presentamos algunas nociones básicas de la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes; los espacios funcionales  $H$ ,  $V$  y  $V'$ , el operador  $A$  de Stokes con su dominio  $D(A)$  en  $H$ , y la forma bilineal  $B$  aplicamos el método de Galerkin y teorema del punto fijo para probar la existencia de soluciones del problema estacionario no lineal y consideramos problemas de singularidad y regularidad de las soluciones. Para esto seguiremos la teoría resuelta en [44, 56] entre otros.

#### 5.1.2. Problema estacionario básico

Sea  $Q = [0, L]^3$  y definimos el espacio

$$H = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \dot{L}_p^2(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0\},$$

y

$$V = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \dot{H}_p^1(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0\},$$

con las normas

$$\|u\|_H = |u| = \sqrt{\int_Q |u(x)|^2 dx}, \quad |u|^2 = (u, u),$$

y

$$\|u\|_V = \|u\| = \sqrt{\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad \|u\|^2 = (\nabla u, \nabla u),$$

respectivamente.  $V$  y  $H$  son espacios de Hilbert y  $V \subset H$ . Si identificamos  $H$  con su dual  $H'$  en vista del Teorema de representación de Riesz-Fréchet, tenemos que  $V \subset H \subset V'$  con inmersión continua y con cada espacio denso en el siguiente.

### 5.1.3. El operador de Stokes

Definimos el operador de Stokes  $A : V \rightarrow V'$

$$\langle Au, v \rangle = \int_Q \nabla u \cdot \nabla v dx; \text{ para todo } v \in V. \quad (5.1)$$

Usando esta definición podemos escribir la formulación débil del problema de Stokes dado  $f \in V$ , entonces  $u \in V$  y  $p \in \dot{L}^2(Q)$  tales que

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f, \text{ div } u = 0, \quad (5.2)$$

en el sentido débil, es decir,

$$\nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \text{div } v) = \langle f, v \rangle, \text{ } v \in \dot{H}_p^1(Q)^3, \quad (5.3)$$

en una forma abstracta equivalente

$$\nu \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in V. \quad (5.4)$$

Vamos a demostrar que para  $f \in H$ , el operador de Stokes coincide, con el menos laplaciano,  $Au = -\Delta u$ , para este fin. usamos la representación espectral explícita de funciones en  $L^2(Q)^3$ . Supongamos al principio que  $f \in L^2(Q)^3$ . Entonces.

$$f(x) = \sum_{k \in Z^3} f_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}, \sum_{k \in Z^3} |f_k|^2 < \infty, f_{-k} = \bar{f}_k, f_0 = 0, \quad (5.5)$$

donde:  $f_k = (f_k^1, f_k^2, f_k^3)$ . Sea  $u \in V$  y  $p \in \dot{L}^2(Q)$  satisfaciendo 6.3. Asumiendo que

$$u(x) = \sum_{k \in Z^3} u_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}, p(x) = \sum_{k \in Z^3} p_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}} \quad (5.6)$$

con  $u_0 = 0, k \cdot u_k = 0, p_0 = 0, u_{-k} = \bar{u}_k, p_{-k} = \bar{p}_k$  obtenemos

$$\nu \frac{4\pi^2 |k|^2}{L^2} u_k + \frac{2\pi i k}{L} p_k = f_k.$$

Multiplicando esta ecuación por  $k$  y usando la relación  $k \cdot u_k = 0$  obtenemos

$$p_k = \frac{L}{2\pi i} \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \text{ para } k \neq 0,$$

y luego calculamos

$$u_k = \frac{1}{\nu} \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} \left( f_k - k \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \right), \quad k \neq 0.$$

Ahora, si  $f \in H$ , entonces  $f_k \cdot k = 0$  y la ecuación para  $u_k$  se reduce a

$$u_k = \frac{1}{\nu} \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} f_k \quad \text{para } k \neq 0.$$

Por lo tanto, la solución débil del problema  $-\Delta u = f$  para  $f \in H$ . De esto vemos inmediatamente que  $u \in H_p^2(Q)^3$  además, de las fórmulas explícitas anteriores para los coeficientes de Fourier  $u_k$  y  $p_k$  tenemos el siguiente Teorema.

**Teorema 16.** Si  $f \in \dot{L}_p^2(Q)^3$ , entonces  $u \in \dot{H}_p^2(Q)^3$ ,  $p \in \dot{H}_p^1(Q)$ , y

$$\|u\|_{\dot{H}_0(Q)^3}^2 + \|p\|_{\dot{H}_0(Q)}^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \left( \frac{L^2}{\pi^2 \nu^2} + 1 \right) \|f\|_{\dot{L}^2(Q)^3}^2.$$

**Prueba.**

Tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{H}_0(Q)^3}^2 &= \sum_{k \in Z^3} |k|^4 |u_k|^2 = \sum_{k \in Z^3} |k|^4 \frac{1}{\nu^2} \frac{L^4}{16\pi^4 |k|^4} \left| f_k - k \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k \in Z^3} |k|^4 \frac{1}{\nu^2} \frac{L^4}{16\pi^4 |k|^4} |f_k|^2 + 2 \sum_{k \in Z^3} |k|^4 \frac{1}{\nu^2} \frac{L^4}{16\pi^4 |k|^4} |f_k|^2 \\ &= \frac{L^4}{4\pi^4 \nu^2} \|f\|_{\dot{L}^2(Q)^3}^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|p\|_{\dot{H}_p^1}^2 &= \sum_{k \in Z^3} |k|^2 |p_k|^2 = \sum_{k \in Z^3} |k|^2 \frac{L^2}{4\pi^2} \left| \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in Z^3} \frac{L^2}{4\pi^2} |f_k|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \|f\|_{\dot{L}^2(Q)^3}^2, \end{aligned}$$

terminamos la prueba. ■

**Observación 7.** Observe que esa configuración  $f, u, p$  de la forma (6.5) (6.6) respectivamente, directamente en las ecuaciones (6.2) obtendríamos las mismas representaciones espectrales de la solución  $u, p$ . Por tanto, en particular

$$D(A) = \{u \in V : Au \in H\} = V \cap \dot{H}_p^2(Q)^3.$$



### 5.1.4. El problema no lineal

Consideremos el problema estacionario

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \text{ en } Q, \\ \operatorname{div} u &= 0 \text{ en } Q, \end{aligned}$$

con una de las condiciones de contorno:

1.  $Q = [0, L]^3$  en  $\mathbb{R}^3$  y asumimos condiciones de contorno periódicas o
2.  $Q$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$ , con un límite uniforme y suponiendo que la condición de frontera dirichlet homogénea es  $u = 0$  en  $\partial Q$ .

En el segundo caso definimos

$$H = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0, u_n = u \cdot n|_{\partial Q} = 0\},$$

y

$$V = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in H_0^1(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0\},$$

con las normas

$$\|u\|_H = |u| = \sqrt{\int_Q |u(x)|^2 dx}, \quad |u|^2 = (u, u),$$

y

$$\|u\|_V = \|u\| = \sqrt{\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad \|u\|^2 = (\nabla u, \nabla u).$$

El operador Stokes  $A$  se define de la misma manera que en el caso periódico (6.1) y tenemos

$$D(A) = \{u \in V : Au \in H\} = V \cap H^2(Q)^3.$$

Para ambos casos denotemos  $b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v, w)$  para  $u, v, w \in V$  y definimos un operador no lineal  $B : V \rightarrow V'$ ,  $(Bu, v) = b(u, u, v)$  para todo  $v \in V$ . También escribiremos  $((u, v))$  en lugar de  $(\nabla u, \nabla u)$ .

**Observación 8.** Note que:

(i)  $\forall u, v, w \in V$  es

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v),$$

y así  $b(u, v, v) = 0$ .

(ii) Para todo  $u, v, w \in V$ ,

$$|b(u, v, w)| \leq C(Q)\|u\|\|v\|\|w\|.$$

Sean  $H$  y  $V$  los espacios funcionales correspondientes. Entonces la formulación débil del problema estacionario no lineal anterior es el siguiente.

**Problema 1.** Para  $f \in H$  ( $f \in V'$ ) entonces  $u \in V$  tal que

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in V$$

o equivalentemente

$$\nu Au + Bu = f \text{ en } H \text{ o } V'.$$

**Teorema 17.** Sea  $Q = [0, L]^3$  (para el problema periódico) o sea  $Q$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  con frontera suave (para el problema de Dirichlet) entonces

(i) Para todo  $f \in V'$  y  $\nu > 0$  existe al menos una solución del problema 1.

(ii) Si  $\nu^2 \geq c_1(Q)\|f\|_{V'}$ , entonces la solución del problema 1 es única.

**Prueba.**

De (i) para demostrar la existencia de soluciones, utilizamos el método de Galerkin.

Para cada  $m \in \mathbb{N}$  sea

$$u_m(x) = \sum_{j=1}^m \xi_{j,m} w_j(x); \quad \xi_{j,m} \in \mathbb{R}$$

es la solución aproximada, donde  $w_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  son las funciones propias del operador de Stokes correspondientes al problema considerado. Esto significa que

$$\nu((u_m, v)) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v \rangle; \text{ para todo } v \in V_m \quad (5.7)$$

donde  $V_m = \text{Gen}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  tal solución existe en vista del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. ■

**Prueba de la existencia de  $u_m$ .** Consideramos la bola

$$B = \{u \in V_m : \|u\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}\}$$

y el mapa  $\phi : \hat{u} \rightarrow u$  donde,  $\hat{u}$  y  $u$  es la solución única del problema lineal

$$\nu((u, v)) + b(\hat{u}, u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in V_m.$$

Tomando  $v = u$  en esta identidad obtenemos que  $u \in B$ .

Mostraremos que  $\phi$  es continuo en  $V_m$ , para este fin, se

$$\nu((w, v)) + b(\hat{w}, u, v) = \langle f, v \rangle; \quad \forall v \in V_m,$$

restando la ecuación para  $W$  de que es para  $u$ , dejando  $v = u - w$ , y usando la estimación para la solución  $V$ , obtenemos

$$\|u - v\| \leq \frac{C(Q)}{\nu^2} \|f\|_{V'} \|\hat{u} - \hat{w}\|$$

Lo cual demuestra la continuidad de  $\phi$ . Como  $V_m$  es un espacio de dimensión finita y  $\phi$  es una mapa continuo de un conjunto convexo y compacto  $B$  a  $B$ , concluimos la existencia de  $u_m$ , solución de (6.7) en vista del Teorema del Punto Fijo de Brouwer de (6.7) concluimos  $\|u\|_m \leq \frac{\|f\|_{V'}}{\nu}$ .

Por tanto, para una subsucesión

$$u_m \rightarrow u \text{ débilmente en } V,$$

y

$$u_m \rightarrow u \text{ fuertemente en } H,$$

como  $V$  esta inmerso compactamente en  $H$ , al pasar con  $m$  al límite en la ecuación 6.7 obtenemos la ecuación

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle$$

para todo  $v$  siendo una combinación lineal finita de los elementos de la base  $w_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dado que tales elementos son densos en  $V$ , la parte de la existencia del Teorema ha sido probada.

**Prueba de (ii).** Para probar la unicidad de las soluciones para grandes coeficientes de viscosidad con respecto a las fuerzas de masa,  $\nu^2 > C_1(Q)\|f\|_{V'}$ , supongamos que hay dos soluciones distintas  $u_1$  y  $u_2$ , esto es

$$\nu((u, v)) + b(u_1, u_1, v) = \langle f, v \rangle \text{ y } \nu((u_2, v)) + b(u_2, u_2, v) = \langle f, v \rangle.$$

Para todo  $v \in V$ . Tomando  $v = u_1 - u_2$  y restando la segunda ecuación de primera obtenemos.

$$\begin{aligned} \nu\|u_1 - u_2\|^2 = -b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &\leq c_1(Q)\|u_1 - u_2\|^2\|u_2\| \\ &\leq \frac{c_1(Q)}{\nu}\|f\|_{V'}\|u_1 - u_2\|^2 \end{aligned}$$

como  $\|u\|_2 \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'}$ , de donde:

$$\left(v - \frac{c_1(Q)}{\nu}\|f\|_{V'}\right)\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$$

que da una contradicción. Por lo tanto  $u_1 = u_2$ .

Al final mostraremos como se puede proceder de manera diferente para demostrar la existencia de las soluciones aproximadas de Galerkin  $u_m$  satisfaciendo (6.7).

**Teorema 18.** *Sea  $X$  un espacio de Hilbert en dimensión finita, con un producto escalar  $[\cdot, \cdot]$  y la norma asociada  $[\cdot]$ , y sea  $P : X \rightarrow X$  sea un mapa continuo tal que*

$$[P(\xi), \xi] > 0 \text{ para } [\xi] = K > 0$$

*para algún  $K$ , entonces existe  $\xi \in K$  con  $[\xi] \leq K$  para el cual  $P(\xi) = 0$ .*

**Prueba.**

Sea  $B = B(0, k)$  es una bola cerrada en  $X$ , centrada en cero y radio  $k$ . Supongamos que  $P$  es diferente de cero en esta bola. Entonces el mapa

$$\xi \rightarrow S(\xi) = -\frac{kP(\xi)}{[P(\xi)]}; S : B \rightarrow B \tag{5.8}$$

es continua en  $X$ , del Teorema del Punto Fijo de Brouwer se desprende que  $S$  tiene un punto fijo en  $B$ , es decir

$$\xi_0 = -\frac{kP(\xi_0)}{[P(\xi_0)]} \quad (5.9)$$

para algún  $\xi_0 \in B$ . Tenemos  $[\xi_0] = k$ . Multiplicando 6.9 por  $\xi_0$  obtenemos

$$[\xi_0]^2 = -k \frac{[P(\xi_0), \xi_0]}{[P(\xi_0)]}$$

que contradice  $[P(\xi), \xi] > 0$  para  $[\xi] = k$ . Por lo tanto  $P(\xi) = 0$  para algún  $\xi \in B$ .

Ahora, sea  $x = v_m$  con la norma inducida por  $V$ . Vamos a definir  $P = P_m : V_m \rightarrow V_m$  por la relación

$$[P_m(u), v] = ((P_m(u), v)) = \nu((u, v)) + b(u, u, v) - \langle f, v \rangle \quad (5.10)$$

Para todos  $u, v \in V_m$ . El mapa esta bien definido en vista del Teorema de representación de Riesz-Fréchet. De hecho para cada  $u$  en  $V_m$ , el mapa  $\nu \rightarrow \nu((u, v)) + b(u, u, v) - \langle f, v \rangle$  define un funcional lineal y continuo en  $V_m$ . Por lo tanto, existe una única  $P_m(u)$  en  $V_m$  satisfaciendo la relación anterior.

El mapa  $P_m$  es continua en  $V_m$  y

$$\begin{aligned} [P_m(u), u] &= \nu\|u\|^2 + b(u, u, u) - \langle f, u \rangle = \nu\|u\|^2 - \langle f, u \rangle \\ &\geq \nu\|u\|^2 - \|f\|_{V'}\|u\| = \|u\|\{\nu\|u\| - \|f\|_{V'}\} \end{aligned}$$

de ahí, para  $k > \frac{\|f\|_{V'}}{\nu}$  y  $\|u\| = k$  tenemos  $[P_m(u), u] > 0$ . En vista de nuestro Teorema auxiliar, existe  $U_m$  en  $V_m$  tal que se cumple  $P_m(u_m) = 0$ , es decir, se satisface (6.7). ■

### 5.1.5. Otros métodos topológicos para lidiar con la no linealidad

En esta subsección usaremos el schauder y, alternativamente los teoremas de Puntos Fijos de Leray-Schauder para probar directamente la existencia de una solución del problema no lineal, eludiendo así las soluciones aproximadas del Galerkin cuando la

viscosidad es lo suficientemente grande con respecto a las fuerzad externas, utilizaremos el principio de contracción de Banach para probar la existencia de la solución única del problema no lineal.

**Problema 2.** Sea  $f \in V'$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^3$  lo anterior, probar que existe  $u \in V$  tal que

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle; \text{ para todo } v \in V$$

mediante el uso:

- (a) El teorema del punto fijo de Schauder.
- (b) El teorema del punto fijo de Leray-Schauder.
- (c) Suponiendo que la viscosidad es lo suficientemente grande con respecto a las fuerzas externas, use el principio de contracción de Banach para probar la solución única  $u$ .

**Solución al problema (2)** (a), definamos un mapa  $T$  en  $V$  por

$$\nu((Tu, v)) + b(u, Tu, v) = \langle f, v \rangle; \forall v \in V$$

usando el Lema de Lax-Milgran concluimos que el mapa  $T$  esta bien definido. Tomando  $v = Tu$  obtenemos.

$$\nu\|Tu\|^2 = \langle f, Tu \rangle \leq \|f\|_{V'}\|Tu\|$$

de donde  $\|Tu\| \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'} \equiv \Gamma$  define  $K = \{v \in V : \|v\| \leq \Gamma\}$  entonces  $T(K) \subset K$ . Consideremos el mapa  $T : K \rightarrow K$  mostraremos que  $T$  es continuo y compacto en la topología de  $V$ , sean  $u_1, u_2$  estan en  $K$ , tenemos

$$\nu((Tu, v)) + b(u_1, Tu_1, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V$$

y

$$\nu((Tu_2, v)) + b(u_2; Tu_2, v) = \langle f, v \rangle; \forall v \in V$$

restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$$\nu((Tu_1 - Tu_2, v)) + b(u_1 - u_2, Tu_2, v) + b(u_1, Tu_1 - Tu_2, v) = 0$$

para todo  $v$  en  $V$ . Establezca  $v = Tu_1 - Tu_2$  y obtenemos, ya que

$$\begin{aligned} b(u_1, Tu_1 - Tu_2, Tu_1 - Tu_2) &= 0, \\ \|Tu_1 - Tu_2\| &\leq \frac{C}{V} \|Tu_2\| \|u_1 - u_2\|_{L^4(Q)^3} \leq \frac{C_1}{\nu} r \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

la continuidad sigue inmediatamente para comprobar la compacidad, observe que cualquier secuencia  $(u_k) \subset K$  contiene una subsecuencia que converge fuertemente en la topología  $L^4$ . Por lo tanto, la compacidad se deduce fácilmente de la primera de las desigualdades anteriores.

(b) Definamos el mapa  $u \rightarrow Tu$  en  $V$  por

$$\nu((Tu, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle; \text{ para todo } v \in V \quad (5.11)$$

utilizando el Teorema de Representación de Riesz-Frechet concluimos que el mapa  $T$  esta bien definido.

Supongamos que  $\lambda Tu = u$ , donde  $\lambda \in [0, 1]$ . Probaremos que todos las  $u$  están en alguna bola. Si  $\lambda = 0$ , tenemos  $u = 0$ , ahora, para  $\lambda > 0$ ,  $Tu = \frac{1}{\lambda}u$ . Tomando  $v = u$  en (6.11) obtenemos  $\nu\|u\|^2 \leq \lambda\|f\|_{V'}\|u\|$ , de donde  $\|u\| \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'} \equiv M$  ahora, probaremos continuidad y compacidad de  $T$  en  $V$ . Sean  $u_m, u_k$  en  $V$ . Luego, restando las ecuaciones para  $Tu_m$  y  $Tu_k$ , y estableciendo  $v = Tu_m - Tu_k$  obtenemos

$$\begin{aligned} \nu\|Tu_m - Tu_k\|^2 &= b(u_m, Tu_m - Tu_k, u_m - u_k) + b(u_m - u_k, Tu_m - Tu_k, u_k) \\ &\leq \|u_m\|_{L^4(Q)^3} \|Tu_m - Tu_k\| \|u_m - u_k\|_{L^4(Q)^3} + \\ &\quad \|u_m - u_k\|_{L^4(Q)^3} \|Tu_m - Tu_k\| \|u_k\|_{L^4(Q)^3} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|Tu_m - Tu_k\| &\leq \frac{1}{\nu} (\|u_m\|_{L^4(Q)^3} + \|u_k\|_{L^4(Q)^3}) \|u_m - u_k\|_{L^4(Q)^3} \\ &\leq \frac{C}{\nu} (\|u_m\|_{L^4(Q)^3} + \|u_k\|_{L^4(Q)^3}) \|u_m - u_k\| \end{aligned}$$

para probar la continuidad de  $T$  en  $V$  observa que si  $u_m \rightarrow u_k$  en  $V$  luego la estimación anterior,  $\|Tu_m - Tu_k\| \rightarrow 0$ . Para probar la compacidad de  $T$  en  $V$ , sea  $\{u_m\}$  una subsucesión acotada en  $V$ , luego, contiene una subsucesión convergente  $\{u_u\}$  en  $L^4(Q)^3$  por lo tanto, de la estimación anterior se deduce, que la sucesión  $\{Tu_u\}$  es convergente.

Usando el teorema del punto fijo de Leray- Schauder, concluimos que existe  $u$  en  $V$  tal que  $Tu = u$ . Esta  $u$  es, por supuesto una solución a nuestro problema estacionario de Navier-Stokes.

(c) Vamos a definir el mapa  $T_V \rightarrow V$  por

$$\nu((Tu, v)) + b(u, Tu, v) = \langle f, u \rangle \text{ para todo } v \in V \quad (5.12)$$

el mapa esta bien definido. Demostraremos que se esta contrayendo en una bola  $B(0, r)$  en  $V$  siempre que la viscosidad sea lo suficientemente grande con respecto a las fuerzas externas.

Sea

$$\nu((Tu, v)) + b(u, Tu, v) = \langle f, u \rangle; \text{ para todo } v \in V$$

obtenemos

$$\nu((Tu - Tu_1, v)) + b(u, Tu - Tu_1, v) + b(u - u_1, Tu_1, v) = 0$$

para todo  $v \in V$ , de donde con  $v = Tu - Tu_1$

$$\|Tu - Tu_1\| \leq \frac{C}{\nu} \|Tu_1\| \|u - u_1\|$$

de (6.12) se deduce que para cada  $u \in V$ ,  $Tu \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}$ , supongamos además  $\frac{C}{\nu^2} \|f\|_{V'} < 1$ , entonces el mapa  $T$  tiene las siguientes propiedades  $T : B \rightarrow B$  se esta contrayendo en  $B$ , por el principio de contracción de Banach, existe un único  $u \in B(0, r)$  tal que  $Tu = u$  esta  $u$  es la solución única del problema estacionario de Navier-Stokes.



## **5.2. Resultados Inferenciales**

No es el caso de nuestro estudio.

## **5.3. Otro tipo de resultado de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis**

No es el caso de nuestro estudio.

# CAPÍTULO VI

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 6.1. Contratación de la hipótesis

#### 6.1.1. Existencia de Soluciones débiles y estimativa respecto a la fuerzas externas

Dado  $f \in (L^4)^3$ , definimos las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\equiv \frac{C_4 C_2}{K} |f|_4 \left\{ \frac{49}{\mu} C_1 + 12 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\mu} \right) \right\} \\
 A_2 &\equiv \frac{7C_1 C_2}{(\zeta + \mu/3)} + C_2 C_4 |f|_4 \left\{ \frac{4}{K} C_1 + 9C_2 \left( \frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 |f|_4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{K} C_1 C_2 C_4 |f|_4 \right) \right\} \\
 A_3 &\equiv C_2 |f|_4 \left\{ \frac{4}{K} (C_1 C_4 + C_5) \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\mu} \right) + 3 \left( \frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 C_2 \left( C_4 + (1 + C_4) \frac{C_1 C_2}{K} |f|_4 \right) \right\} \\
 A_4 &\equiv C_6 \left\{ \frac{2}{K} + \frac{C_2 \mu}{(\zeta + \mu/3)} \right\} \\
 A_5 &\equiv C_2 \left\{ \frac{\mu K}{(\zeta + \mu/3)} + |f|_4 \left( K_1 + \frac{9}{2} \left( C_2 C_4 \frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 |f|_4 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

donde  $K_1 = |\Omega|^{1/4}$  ( $|\Omega|$  es la medida de Lebesgue del dominio  $\Omega$ ) y  $C_5$  y  $C_6$  son constantes que definiremos más adelante.

A seguir enunciamos el resultado principal de la presente investigación.

**Teorema 19.** *Sea  $\partial\Omega$  de clase  $C^2$  y  $f \in (L^4)^3$ , tales que se verifican las desigualdades  $A_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  entonces existe al menos una solución  $(v, \rho) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$  del problema (1.2)-(1.3).*

Además, dicha solución verifica las siguientes estimaciones:

$$|v|_{2,4} \leq \frac{3C_2 \bar{\rho}}{2 \mu} |f|_4 \tag{6.1}$$

$$|\nabla \rho|_4 \leq 2C_2 \frac{\bar{\rho}}{K} |f|_4 \tag{6.2}$$

$$\min_{\Omega} \rho > \frac{\bar{\rho}}{2} \tag{6.3}$$

**Observación 9.** Las condiciones  $A_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , establecen restricciones sobre:

1.  $\mu$  y  $\zeta$ , tales que  $\zeta/\mu$  sea suficientemente grande.
2.  $K$ , tal que  $K$  sea suficientemente grande.
3.  $f$ , tal que  $|f|_4$  sea suficientemente pequeña.

**Demostración del Teorema:**

Haciendo el siguiente cambio de variables dependientes:

$$\begin{cases} \pi = K\rho - (\zeta + \mu/3)\nabla \cdot v \\ u = \mu v \\ \sigma = \rho - \bar{\rho}, \end{cases}$$

el sistema de edp (1.2) se escribe:

$$\begin{aligned} -\nabla u + \nabla \pi &= -\frac{\sigma + \bar{\rho}}{\mu^2} u \cdot \nabla u + (\sigma + \bar{\rho})f \\ \nabla \cdot u &= \frac{\mu}{\zeta + \mu/3} \{K(\sigma + \overline{r\bar{h}o}) - \pi\} \\ K\sigma + \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \nabla \cdot (\sigma u) &= \pi - \bar{\rho}K \end{aligned}$$

Finalmente, las condiciones adicionales se escriben:

$$v|_{\partial\Omega}, \int_{\Omega} \pi dx = K\bar{\rho}|\Omega| \text{ y } \int_{\Omega} \sigma dx = 0.$$

De este modo, el problema se puede dividir en dos subproblemas:

**Problema A:** Hallar  $(u, \pi) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$  tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla \pi = F \\ \nabla \cdot u = \theta \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} \pi dx = \bar{\rho}K|\Omega| \end{cases}$$

donde  $F \equiv -\frac{(\sigma + \bar{\rho})}{\mu^2} u \cdot \nabla u + (\sigma + \bar{\rho})f$  y  $\theta = \frac{\mu}{(\zeta + \mu/3)} \{K(\sigma + \bar{\rho}) - \pi\}$ .  
(Observar que  $\int_{\Omega} \theta dx = 0$ ).

**Problema B:** Dado  $(u, \pi)$  mediante el Problema A, hallar  $\sigma \in W^{1,4}$  tal que:

$$K\sigma + \nabla \cdot (\sigma w) = G \text{ en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} \sigma dx = 0,$$

donde  $G \equiv \pi - \bar{\rho}K$  y  $w = \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu}$ . Observar que  $\int_{\Omega} \Omega G dx = 0$  y  $w \in (W^{2,4} \cap H_0^1)^3$ .

A continuación se usará el método de las aproximaciones sucesivas para la búsqueda de solución de ambos problemas. Así, una etapa  $n$  del método iterativo se define como: Dados los datos  $(u_{n-1}, \pi_{n-1}) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$  tales que  $\int_{\Omega} \pi_{n-1} dx = K\bar{\rho}|\Omega|$  y  $\sigma_{n-1} \in W^{1,4}$  tal que  $\int_{\Omega} \sigma_{n-1} dx = 0$ .

**Problema  $A_n$ :** Hallar  $(u_n, \pi_n) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$  solución del problema de Stokes no homogéneo:

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \nabla \pi_n = F_{n-1}, & F_{n-1} = -\frac{\sigma_{n-1} + \bar{\rho}}{\mu^2} u_{n-1} \cdot \nabla u_{n-1} + (\sigma_{n-1} + \bar{\rho})f \\ \nabla \cdot u_n = \theta_{n-1}, & \theta_{n-1} = \frac{\mu}{\zeta + \mu/3} \{K(\sigma_{n-1} + \bar{\rho}) - \pi_{n-1}\} \left( \int_{\Omega} \theta_{n-1} = 0 \right) \\ u_n|_{\partial\Omega} = 0, & \int_{\Omega} \pi_n dx = K\bar{\rho}|\Omega| \end{cases} \quad (6.4)$$

**Problema  $B_n$ :** Hallar  $\sigma_n \in W^{1,4}$  tal que:

$$K\sigma_n + \nabla \cdot (\sigma_n w_{n-1}) = G_{n-1} \text{ en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} \sigma_n dx = 0, \quad (6.5)$$

donde  $G_{n-1} = \pi_{n-1} - \bar{\rho}K$  y  $w_{n-1} = \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} u_{n-1}$ .

Para la inicialización del método iterativo tomaremos:

$$\sigma_0 = \theta_0 = 0, \quad v_0 = 0 \text{ y } \pi_0 = \bar{\rho}K$$

Intentamos pues probar que una solución de nuestro problema se obtiene como límite de soluciones de problemas aproximados  $A_n$  y  $B_n$ . La existencia y unicidad de solución de dichos problemas se tendrá por los lemas 17 y 18.

En la demostración seguiremos los siguientes pasos:

a) Acotación de  $\theta_{n-1}$  y  $F_{n-1}$  en función de  $(u_{n-1}, \pi_{n-1})$  y  $\sigma_{n-1}$ .

- b) Existencia de solución de los problemas  $A_n$  y  $B_n$ .
- c) Verificación de una acotación apropiada para  $(u_n, \pi_n)$  y  $\sigma_n$ .
- d) Convergencia de  $(u_n, \pi_n)$  y  $\sigma_n$  hacia una solución del problema inicial (1, 1) – (1, 2).

a) **Acotación de  $\theta_{n-1}$ ,  $F_{n-1}$  en función de  $(u_{n-1}, \pi_{n-1})$  y  $\sigma_{n-1}$ :**

Suponemos que  $(u_{n-1}, \pi_{n-1})$  y  $\sigma_{n-1}$  satisfacen las estimaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_{n-1}|_{2,4} + |\pi_{n-1}|_{1,4} \leq \frac{3}{2}C_2\bar{\rho}|f|_4 \\ |\nabla\sigma_{n-1}|_4 \leq \frac{2C_2\bar{\rho}}{K}|f|_4 \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Entonces de la definición de  $\theta_{n-1}$  y  $F_{n-1}$  deducimos:

$$|\theta_{n-1}|_{1,4} \leq C_1|\nabla\theta_{n-1}|_4 \leq C_1C_2\bar{\rho}|f|_4 \frac{7}{2(\zeta + \mu/3)} \quad (6.7)$$

$$|F_{n-1}|_4 \leq (\bar{\rho} + C_1C_4|\nabla\sigma_{n-1}|_4) \left( \frac{C_4}{\mu^2}|u_{n-1}|_{2,4}^2 + |f|_4 \right) \quad (6.8)$$

lo cual conduce a:

$$|F_{n-1}|_4 \leq \left( 1 + \frac{2C_1C_2C_4}{K}|f|_4 \right) \left( 1 + \frac{9}{4}C_4 \left( \frac{C_2\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 |f|_4 \right) \bar{\rho}|f|_4 \quad (6.9)$$

b) **Existencia de  $A_n$  y  $B_n$ :**

De (6.7), (6.9) y (6.4)<sub>2,3</sub> se tiene respectivamente que  $\theta_{n-1} \in W^{1,4}$ ,  $F_{n-1} \in (L^4)^3$  y  $\int_{\Omega} \theta_{n-1} dx = 0$ ,  $\forall n \geq 2$ .

Si  $\partial\Omega$  es de clase  $C^2$ , entonces el lema 17 nos dice que existe una única solución del Problema  $A_n$ ,  $(u_n, \pi_n) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$ :

El lema 18 y las condiciones  $A_1 < 1$ . aseguran la existencia de solución  $\sigma_n$  del Problema  $B_n$ , tomando:

$$a = K, \quad b = \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) u_{n-1}, \quad \psi = \sigma_n, \quad \text{y } G = \pi_{n-1} - \bar{\rho}K$$

pues se verificará la condición (2.86). En efecto,

$$\begin{aligned} a - 7C_1C_4|\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4C_4|b|_{2,4} &= \\ k - 7C_1C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) |\nabla(\nabla \cdot u_{n-1})|_4 - 4C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) |u_{n-1}|_4 &= \\ K - C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) \{7C_1|\nabla(\nabla \cdot u_{n-1})|_4 + 4|u_{n-1}|_{2,4}\} &\geq \\ K - C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) \{7C_1|\nabla(\nabla \cdot u_{n-1})|_4 + 6C_2\bar{\rho}|f|_4\} &= \\ K - C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) 7C_1C_2\bar{\rho}|f|_4 \frac{7}{2(\zeta + \mu/3)} - 6C_2C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) \bar{\rho}|f|_4 &= \\ K - \frac{49}{2\mu}C_1C_2C_4|f|_4 - 6C_2C_4 \frac{(\zeta + \mu/3)}{\mu}|f|_4 &= \\ K - C_2C_4|f|_4 \left\{ \frac{49C_1}{2\mu} + 6 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) \right\} &= K(1 - \frac{A_1}{2}) > 0. \end{aligned}$$

Luego  $\sigma_n$  es la única solución,  $\sigma_n \in D(L)$  ( $= \{\psi \in W^{1,4} : L\psi \in W^{1,4}, \int_{\Omega} \psi = 0\}$ ), tal que:

$$L\sigma_n = K\sigma_n + \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) \nabla \cdot (\sigma_n u_{n-1}) = \pi_{n-1} - K\bar{\rho}$$

c) **Verificación de la acotación de (6.6) para  $(u_n, \pi_n)$  y  $\sigma_n$ :**

Vamos a demostrar (6.6) por inducción, es decir, supuesto cierto (6.6) queremos obtener (6.6) cambiando  $n - 1$  por  $n$ .

De la desigualdad:

$$|\nabla G|_4^4 \geq a^3 [a - 7C_1C_4|\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4C_4|b|_{2,4}] |\nabla \psi|_4^4$$

que aparece al final de la demostración del lema 18, tomando  $a$ ,  $G$ ,  $b$  y  $\psi$  como antes, obtenemos:

$$K^3 \left[ K - 7C_1C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) |\nabla(\nabla \cdot u_{n-1})|_4 - 4C_4 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \right) |u_{n-1}|_{2,4} \right] |\nabla\sigma_n|_4^4 \geq |\nabla\pi_{n-1}|_4^4 \quad (6.10)$$

Sustituyendo en la estimación del lema 17 las desigualdades (6.6), (6.7) y (6.8), y teniendo en cuenta la hipótesis  $A_2 < 1$ :

$$\begin{aligned} |u_n|_{2,4} + |\pi_n|_{1,4} &\leq C_2(|F_{n-1}|_4 + |\sigma_{n-1}|_{1,4}) \leq \\ &\left[ \frac{7C_1C_2}{2(\zeta + \mu/3)} + \left( 1 + \frac{2}{K}C_1C_2C_4|f|_4 \right) \left( 1 + \frac{9}{4}C_4 \left( C_2\frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 |f|_4 \right) \right] \bar{\rho}C_2|f|_4 \leq \\ &\left( \frac{A_2}{2} + 1 \right) C_2\bar{\rho}|f|_4 \leq \frac{3}{2}C_2\bar{\rho}|f|_4 \end{aligned}$$

y usando las desigualdades (6.6) y (6.10), teniendo en cuenta la hipótesis  $A_1 < 1$ :

$$|\nabla\sigma_n|_4 \leq 2C_2\frac{\bar{\rho}}{K}|f|_4$$

En consecuencia, las soluciones  $(u_n, \pi_n)$ ,  $\sigma_n$  están acotadas en  $(W^{2,4})^3 \times W^{1,4} \times W^{1,4}$ , como en (6.6).

d) **Convergencia de  $(u_n, \pi_n)$  y  $\sigma_n$ :**

Denotamos:

$$\begin{aligned} u'_{n+1} &= u_{n+1} - u_n \\ \pi'_{n+1} &= \pi_{n+1} - \pi_n \\ \sigma'_{n+1} &= \sigma_{n+1} - \sigma_n \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones que verifican  $(u_{n+1}, \pi_{n+1})$  y  $\sigma_{n+1}$  de las que verifican  $(u_n, \pi_n)$  y  $\sigma_n$ , gracias a los lemas 17 y 18, (2.91) (definido para las  $a$ ,  $b$ ,  $\psi$  y  $G$  del apartado b)) ya que se verifica la condición  $A_1 < 1$ , deducimos que:

$$|u'_{n+1}|_{1,2} + |\pi'_{n+1}|_2 \leq C_2\{|F_n - F_{n-1}|_{-1,2} + |\theta_n - \theta_{n-1}|_2\} \quad (6.11)$$

$$|\sigma'_{n+1}|_2 \leq \frac{4}{K}C_2 \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\mu} \right) (C_1C_4 + C_5)|f|_4|u'_n|_{1,2} + \frac{2}{K}|\pi'_n|_2 \quad (6.12)$$

donde  $C_5$  es la constante de inyección de  $H^1$  en  $L^4$ .

Por otra parte, de la definición de  $F_n$  obtenemos que:

$$F_n - F_{n-1} = \frac{1}{\mu^2}(\bar{\rho} + \sigma_{n-1})(u'_n \cdot \nabla u_n + u_{n-1} \cdot \nabla u'_n) + \sigma'_n \left( \frac{1}{\mu^2} u_n \cdot \nabla u_n - f \right)$$

lo que junto con la definición de  $\theta_n$  y  $G_n$  nos conduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} |F_n - F_{n-1}|_{-1,2} \leq \frac{1}{\mu^2}(2\bar{\rho}C_4|u_n|_{2,4} + |u_n|_{1,4}|\sigma_{n-1}|_{1,4} + C_4|\sigma_{n-1}|_{1,4}|u_n|_{1,4})|u'_n|_{1,2} \\ \quad + \left( \frac{1}{\mu^2}C_4^2|u_n|_{2,4}^2 + |f|_4K_1 \right) |\sigma'_n|_2 \\ |\theta_n - \theta_{n-1}|_2 \leq \frac{\mu}{\zeta + \mu/3} \{K|\sigma'_n|_2 + |\pi'_n|_2\} \\ |G_n - G_{n-1}|_2 = |\pi'_n|_2 \end{array} \right.$$

Uniendo finalmente las relaciones anteriores y (6.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} & |u'_{n+1}|_{1,2} + |\nabla \pi'_{n+1}|_{-1,2} + |\sigma'_{n+1}|_2 \leq \\ & C_2|f|_4 \left\{ \frac{4}{K} \left( \frac{\zeta + \mu/3}{\mu} \right) (C_1C_4 + C_5) + 3C_2 \left( \frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 \left( C_4 + (1 + C_4) \frac{C_1C_2}{K} |f|_4 \right) \right\} |u'_n|_{1,2} \\ & + \left\{ \frac{2}{K} + C_2 \frac{\mu}{\zeta + \mu/3} \right\} |\pi'_n|_2 + \left\{ |f|_4 \left( K_1 + \frac{9}{4} \left( C_2C_4 \frac{\bar{\rho}}{\mu} \right)^2 |f|_4 \right) + \frac{\mu K}{\zeta + \mu/3} \right\} C_2 |\sigma'_n|_2 \end{aligned}$$

y con las condiciones de los  $A_i$ , para  $i = 3, 4, 5$ , queda:

$$|u'_{n+1}|_{1,2} + |\nabla \pi'_{n+1}|_{-1,2} + |\sigma'_{n+1}|_2 \leq A_3|u'_n|_{1,2} + A_4|\nabla \pi'_n|_{-1,2} + A_5|\sigma'_n|_2$$

Para obtener esta numeración, hemos usado el siguiente resultado:

**Lema 19** (Necas). (cf. [29]): *Existe una constante  $C_6 > 0$  tal que:*

$$|q|_0 \leq C_6|\nabla q|_{-1,2} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Entonces, como hemos supuesto que  $A_i < 1$ , para  $i = 3, 4, 5$ , podemos deducir la convergencia fuerte en las respectivas normas de  $H_0^1$ ,  $L^2$ ,  $L^2$ , de toda la sucesión  $(u_n, \pi_n, \sigma_n)$  a un límite que llamaremos  $(u, \pi, \sigma)$ .



Tomando entonces límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en las condiciones del Problema  $A_n$ , (6.5) y las definiciones de  $F_{n-1}$ ,  $\theta_{n-1}$  y  $G_{n-1}$ , encontramos que  $(u, \pi)$  y  $\theta$  satisfacen:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla \pi = -\frac{\bar{\rho} + \sigma}{\mu^2} u \cdot \nabla u + (\sigma + \bar{\rho})f \\ \nabla \cdot u = \frac{\mu}{(\zeta + \mu/3)} K(\sigma + \overline{rho}) - \pi \\ K\sigma + \frac{\zeta + \mu/3}{\bar{\rho}\mu} \nabla \cdot (\sigma u) = \pi - \bar{\rho}K, \text{ con } \int_{\Omega} \sigma dx = 0 \end{cases}$$

Como dicho problema es equivalente a (1.2), vemos que  $(v, p)$  (para  $v = u/\mu$  y  $\rho = \bar{\rho} + \sigma$ ) es una solución del problema (1.2)-(1.3). Además, las estimaciones (6.1) y (6.2) se obtienen fácilmente de (6.6). Solo nos queda entonces demostrar la estimación puntual inferior (6.3). Dicha estimación se deduce de que  $A_2 < 1$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \bar{\rho} + \sigma \geq \bar{\rho} - |\sigma|_{\infty} \geq \bar{\rho} - C_4 |\sigma|_{1,4} \geq \text{Poincaré pues } \int_{\Omega} \sigma dx = 0 \\ &\geq \bar{\rho} - C_1 C_4 |\nabla \sigma|_4 \geq \bar{\rho} - \frac{2C_1 C_2 C_4}{K} |f|_4 \bar{\rho} = \bar{\rho} \left( 1 - \frac{2C_1 C_2 C_4}{K} |f|_4 \right) > \frac{\bar{\rho}}{2}. \end{aligned}$$

## 6.2. Contrastacion de los resultados con estudios similares

- Un trabajo trascendente que sirvió de base para el trabajo en ecuaciones de Navier-Stokes incompresible es el trabajo de Fujita [30] donde propone una primera estrategia para abordar los problemas de Navier-Stokes asociados a los dominios móviles. La cual es seguida en nuestro trabajo para llegar al modelamiento matemático.
- Por otro lado, En el trabajo pionero de F.A. Williams [15], plantea la idea de acoplar las ecuaciones de Navier-Stokes con las ecuaciones de transporte, aplicando los resultados a la combustion de fluidos, tanto en gases como en

líquidos.caso que llevamos en nuestro trabajo un estudios de fluidos compresibles .

- Dada la trascendencia del estudio de este tipo de ecuaciones compresibles ,es importante estudiar el caso estacionario ,puesto que en los tanto parabólicos como hiperbólicos ,la dinámica tiende al estudio de los puntos estacionarios.Debido a esto ,el estudio del caso isotermico para un gas viscoso ,estacionario ,tridimensional,representa un resultado significativo,basados en los propuestos por M.Padula[1].

### 6.3. Responsabilidad Ética

El presente trabajo tambien da la importacia al estudio de la responsabilidad profesional.El profesional al ser parte de una institución y obtener el título profesional le corresponde un responsabilidad con su sociedad.En nuestra sociedad como en muchas ocasiones se han visto a profesionales corruptos ,soberbios ,charlatanes que nos muestran poco interés en el desarrollo humano, por ello la importancia de la responsabilidad ética y el rol del profesional de tomarse con seriedad.

En conclusión como profesionales nos comprometemos con la sociedad ,teniendo una alta responsabilidad en nuestro camino y en nuestras desiciones que llevaremos a cabo proyectos en el futuro.para lograr una buena formación profesional ,así aportar un beneficio social.

## CONCLUSIONES

### Conclusión 1:

Respecto al estudio de la ecuación (1.1), y del Teorema 19, podemos concluir que no solo existen soluciones débiles del problema, si no, que estas son únicas para cada fuerza externa  $f \in (L^4)^3$  y densidad  $\rho \in W^{1,4}$  fija. Esto es debido a que si suponemos que existen dos soluciones debiles  $(v_i, \rho) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$  para  $i = 1, 2$  con la misma fuerza externa  $f \in (L^4)^3$  y la misma densidad  $\rho$ , entonces, al comparar las velocidades, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu(\nabla w + \nabla w^t) + \lambda(\nabla \cdot w)Id) + \nabla p + \rho w \cdot \nabla w = 0 \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\rho w) = 0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (6.13)$$

con  $w = v_1 - v_2$ , donde, por el Teorema 19 sobre el sistema (6.13) con fuerza externa nula, se tiene que

$$|w|_{2,4} \leq 0,$$

es decir,  $v_1 = v_2$  en  $(W^{2,4})^3$ .

### Conclusión 2:

El caso barotrópico general, i.e., donde  $p = p(\rho)$  se atacaría por el mismo método, realizando previamente la siguiente modificación:

$$\nabla p(\rho) = p'(\rho)\nabla\rho = p'(\bar{\rho})\nabla\rho + (p'(\bar{\rho}))\nabla\rho$$

donde  $p'(\bar{\rho}) \equiv$  constante, al ser el valor de la función  $p$  en el punto  $\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho dx$ . Sustituimos  $\nabla p(\rho)$  en la ecuación (1.2) por  $p'(\bar{\rho})\nabla\rho$ , pasando  $p'(\rho) - p'(\bar{\rho})\nabla\rho$  al segundo miembro, es decir:

$$-\mu\Delta u - (\zeta + \mu/3)\nabla(\nabla \cdot v) + p'(\bar{\rho})\nabla\rho = [p'(\bar{\rho}) - p'(\rho)]\nabla\rho - \rho[(v \cdot \nabla)v - f]$$

y la  $F$  del problema A queda de la forma:

$$F = -\frac{\sigma + \bar{\rho}}{\mu^2} u \cdot \nabla u + (\sigma + \bar{\rho})f + [p'(\bar{\rho}) - p'(\sigma + \bar{\rho})]\nabla\sigma$$

Si  $p \in C^2$ , podríamos escribir:

$$p'(\bar{\rho}) - p'(\bar{\rho} + \sigma) = -p''(\xi)\theta$$

donde  $\xi$  es un valor intermedio entre  $\bar{\rho}$  y  $\bar{\rho} + \sigma$  (variable), con lo que:

$$F = \frac{\sigma + \bar{\rho}}{\mu^2} v \cdot \nabla v - (\sigma + \bar{\rho})f - p''(\xi)\sigma \nabla \sigma$$

Se introducirán entonces las modificaciones correspondientes en la escritura de los  $A_i$ , para que a partir de las nuevas acotaciones de  $F_{n-1}$ , podamos garantizar las mismas desigualdades necesarias para la convergencia del método de las aproximaciones sucesivas.

### **Conclusión 3:**

Se obtiene unicidad de solución (que no existencia) para la linealización de las ecuaciones de Navier-stokes barotrópicas cerca de un flujo en un ambiente ideal dado. La novedad se presenta que la formulación de la solución en velocidad-presión y no en velocidad-densidad, como se hace normalmente.

## RECOMENDACIONES

Como se pudo mostrar en el presente trabajo, el área de estudio de la dinámica de fluidos es un tema donde se encuentra aún muchos problemas en abierto. Esperamos y recomendamos que este trabajo sirva de motivación para futuras tesis, publicaciones, etc.

Una de las fortalezas de esta tesis es el completo marco teórico presentado y la abundante bibliografía, que lamentablemente como se comentó en las limitaciones del trabajo, no es fácil de encontrar en la biblioteca especializada de la UNAC, o la biblioteca central.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. Padula, Existence and Uniqueness for Viscous Steady Compressible Motions, Arch. Rational Mech. Anal., 1982
- [2] A. Valli, On the Existence of Stationary Solutions to Compressible Navier-Stokes Equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 4, No. 1, 1987.
- [3] A. Valli, Periodic and Stationary Solutions for Compressible Navier-Stokes Equations Via a Stability Method, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, 1983.
- [4] A. Valli, W. M. Zajaczkowski, Global Existence and Qualitative Properties of the Solutions in the General Case, Comm. Math. Phys., t. 103, pp. 259-296, 1986.
- [5] R. Bruce Kellogg, Biyue Liu, A finite Element Method for Compressible Stokes Equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 33, No. 2, pp. 780-788, April 1996.
- [6] O. Pironneau, J. Rappaz, Numerical Analysis for Compressible Viscous Adiabatic Stationary Flows, Comput. Sci. Engrg., 1, pp. 109-137, 1989.
- [7] J. Simon, Existencia de Solución del Problema de Navier-Stokes con Densidad Variable, Curso de la Universidad de Sevilla, 1989.
- [8] R. Bellido, Análisis Matemático de Algunos Sistemas de Tipo Navier-Stokes: Fluidos Quasi-Newtonianos y Ecuaciones Primitivas del Océano, Curso de la Universidad de Sevilla , 2001.
- [9] A. Matsumura, T. Nishida, The Initial Value Problem for the Equations of Viscous and Heat-Conductive gases, J. Math. Kyoto Univ., 20, pp. 67-104, 1980.
- [10] J. G. Heywood, R. Rannacher, Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem II: Stable Solutions and Error Estimates Uniform in Time, SIAM J. Numer. Anal. 23, pp. 750-777, 1986.

- [11] J. Necas, Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Mason, Paris, 1967.
- [12] J. Necas, Sur les norms équivalentes dans  $W_p^k(\Omega)$  et sur la coercivité des formes formellement positives, Équations aux Dérivées Partielles, Les Presses de l'Université de Montréal, Canada, 1965.
- [13] J. Necas, Sur une méthode pour résoudre les edp du style elliptique voisine de la variationnelle, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4, pp. 305-326, 1962.
- [14] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluids Mechanics, Vol. 1, Incompressible Models, Univ. Paris-Dauphine École Polytechnique, Oxford Univ. Press. Inc., NY, 1996.
- [15] F.A. Williams, Combustion Theory, second edition, Benjamin Cummings, 1985.
- [16] P.J. O'Rourke, Collective drop effects on vaporizing liquid sprays, PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [17] G. Dufour, Modélisation multi-fluide eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées, PhD thesis, Université Paul-Sabatier Toulouse-III, France, 2005.
- [18] L. Desvillettes, Some aspects of the modeling at different scales of multiphase flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199(21-22) (2010) 1265-1267.
- [19] L. Boudin, C. Grandmont, A. Moussa, Global existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations in a time-dependent domain, J. Differential Equations 262(2017) 1317-1340.
- [20] L. Boudin, C. Grandmont, A. Lorz, A. Moussa, Modelling and numerics for respiratory aerosols, Commun. Comput. Phys. 18(3) (2015) 723-756.
- [21] T. Goudon, L. He, A. Moussa, P. Zhang, The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium, SIAM J. Math. Anal. 42(5) (2010) 2177-2202.

- [22] C. Baranger, L. Boudin, P.-E. Jabin, S. Mancini, A modeling of biospray for the upper airways, in: CEMRACS 2004-Mathematics and Applications to Biology and Medicine, in: ESAIM Proc., vol.14, EDP Sci., Les Ulis, 2005, pp.41-47 (electronic).
- [23] C. Baranger, L. Desvillettes, Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, classical solutions, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 3(1) (2006) 1-26.
- [24] J. Mathiaud, Local smooth solutions of a thin spray model with collisions, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 20(2) (2010) 191-221.
- [25] A. Mellet, A. Vasseur, Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 17(7) (2007) 1039-1063.
- [26] A. Mellet, A. Vasseur, Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes system of equations, *Comm. Math. Phys.* 281(3) (2008) 573-596.
- [27] M. Chae, K. Kang, J. Lee, Global classical solutions for a compressible fluid-particle interaction model, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 10(3) (2013) 537-562.
- [28] F. Li, Y. Mu, D. Wang, Global well-posedness and large time behavior of strong solution to a kinetic-fluid model, arXiv:1508.07389, 2015.
- [29] M. Chae, K. Kang, J. Lee, Global existence of weak and classical solutions for the Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations, *J. Differential Equations* 251(9) (2011) 2431-2465.
- [30] H. Fujita, N. Sauer, On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* 17 (1970) 403-420.



- [31] T. Caraballo, J. Real, Navier-Stokes equations with delays, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 457, 2441-2453 (2001).
- [32] T. Caraballo, J. Real, Asymptotic behaviour of two-dimensional Navier-Stokes equations with delays, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 459, 3181-3194 (2003).
- [33] T. Caraballo, J. Real, Attractors for 2D-Navier-Stokes models with delays, J. Differ. Equ. 205, 271-297 (2004).
- [34] T. Caraballo, G. Lukaszewicz, J. Real, Pullback attractors for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains, C. R. Acad. Sci. I Math. 342, 263-268 (2006).
- [35] T. Caraballo, J. Real, A.M.Márquez, Three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations with delay, Int. J. Bifurcation Chaos 20, 2869-2883 (2010).
- [36] P. N. Seminario, T. Caraballo, T. F. Ma, *Well-posedness for the 3D-Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations with drag force with delay in a time-dependent domain.* (Sometido para publicación).
- [37] M. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mém. de l'Acad. de Sci., 6:389-416, (1827).
- [38] S. D. Poisson. Nouvelle Théorie de l'action capillaire. Ann. Phys., 101: 270-287, (1832).
- [39] B. de Saint-Venant, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 17 (1843).
- [40] G. G. Stokes. Mathematical Physical Papers, vol. 1 p. 225, Cambridge University Press (1880).
- [41] S. A. Zorrilla. Introducción a la metodología de la investigación, México Océano: Aguilar, León y Cal 1988 [reimpresión 2007]. ISBN 968-493-040-2.

- [42] E. Babbie. Fundamentos de la Investigación Social. Editorial Thompson Editores. México. 2000.
- [43] C. Selltiz, M. Jahoda, M. Deutsch, et al. Métodos de investigación en las relaciones sociales. Ediciones Rialp, S.A., Madrid, 1965.
- [44] R. Teman. Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. Vol. 2 of Studies in mathematics and its applications, North-Holland Pub. Co., 1979.
- [45] R, Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [46] H, Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, 2011.
- [47] R. Aris. Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Dover, New York, 1990. ISBN-13 978-0486661100.
- [48] G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge, 1994.
- [49] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. Wiley, New York, 1960.
- [50] A. L. Coimbra. Mecânica dos Meios Cointínuos. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.
- [51] R. W. Fox, A. T. McDonald, P. J. Pritchard. Introdução à Mecânica dos Fluidos. LTC, Rio de Janeiro, 2006. ISBN-10: 8521614683.
- [52] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. Pergamon, New York, 1959.
- [53] W. H. Liepman, A. Roshko. Elements of Gas Dynamics. Wiley, New York, 1957.
- [54] H. Schlichting, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, 1999.
- [55] F. M. White. Mecânica dos Fluidos. McGraw-Hill, Lisboa, 2002. ISBN: 868680424X.

- [56] G. Lukaszewicz, P. Kalita. Navier-Stokes equations. An introduction with applications. *Advances in Mechanics and Mathematics*, 34. Springer, Cham, 2016. xiv+390 pp. ISBN: 978-3-319-27758-5; 978-3-319-27760-8.
- [57] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1983.
- [58] A. Friedman. *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, Austin, TX, 1969.
- [59] A. Friedman. *Foundations of Modern Analysis*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
- [60] V.C.L. Hutson, J.S. Pym. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.
- [61] L.A. Ljusternik, V.I. Sobolev. *Elements of Functional Analysis*. Hindustan Publishing Corporation, Delhi; Halstadt Press, New York, 1974.
- [62] A. Kufner, O. John, S. Fucik. *Function Spaces*. Academia, Prague, 1977.
- [63] Ch.B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [64] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol II/B: Nonlinear Monotone Operators*. Springer, New York, 1990.
- [65] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2nd edn, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [66] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
- [67] J.C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.