

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**



**INFORME FINAL DEL TEXTO**

**“TEXTO: INTEGRAL DE SUPERFICIE Y SUS  
APLICACIONES”**

**AUTOR: EDUARDO HUACCHA QUIROZ**

**(PERIODO DE EJECUCIÓN :Del 01 de abril 2017  
al 31 de marzo de 2018)  
(Resolución de aprobación N°328-2017-R)**

**Callao, 2018  
PERÚ**

## **Dedicatoria**

El presente texto esta dedicado a mis padres Máximo y Julia, por su amor incondicional, a mi querida esposa , a mis amados hijos quienes han sido la inspiracion para escribir este texto, ellos con sus enseñanzas, paciencia y aliento me dieron la fuerza para escribir capitulo por capitulo el presente texto que espéro sea de gran utilizad a los estudiante de ingenieria de nuestra querida facultad.

También dedico este texto a mis colegas y amigos quienes con sus sugerencias y comentarios supieron darme las orientaciones necesarias para plasmar mi experiencia en el dictado , en este texto que presento.

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.

## AGRADECIMIENTO

Gracias a Dios por darme la inspiración en escribir este texto que me permite plasmar la experiencia del dictado en aulas, gracias a mi familia por apoyarme moralmente y materialmente en la redacción de cada capítulo, por su aliento incansable e incondicional, por sus consejos. Doy gracias también a cada uno de mis colegas y amigos que con sus críticas y comentarios me permitieron presentar cada capítulo de este texto de la manera más clara y didáctica posible para así hacer accesible el conocimiento a cada estudiante de ingeniería de nuestra gran y querida facultad.

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.

I. INDICE	1
II. PRÓLOGO	6
III. INTRODUCCION	7
IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO	8
CAPITULO I FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES (FRVV)	
1.1 Introducción	9
1.2 Funciones reales de varias variables.	9
1.3 Límites y continuidad.	17
1.4 Derivada parcial de una FRVV.	21
1.5 Diferenciabilidad y la regla de la cadena.	26
1.6 Vector gradiente y planos tangentes.	33
1.7 Valores extremos y puntos silla para funciones reales de dos variables.	38
1.8 Ejemplos de aplicación.	43
CAPITULO II INTEGRALES MULTIPLES	48
2.1 Integración doble.	48
2.2 Modificación de variable en integrales dobles.	50
2.3 Integración triple.	59
2.4 Modificación de variable en integración triple.	61
2.5 Integración triple usando coordenadas cilíndricas y esféricas.	62
CAPITULO III CAMPOS VECTORIALES	72
3.1 Campo vectorial tridimensional. Definición.	72
3.2 Campos vectoriales continuos y diferenciables.	72
3.3 Ejemplos de campos vectoriales.	73
3.4 Trabajo realizado por un campo vectorial	74
3.5 Integral de flujo y circulación.	77
3.6 Flujo a través de una curva plana.	77
3.7 Campos vectoriales conservativos.	80
CAPITULO IV AREA DE SUPERFICIE E INTEGRAL DE SUPERFICIE	95
4.1 Definición del área de superficie.	95
4.2 Superficies suaves.	96
4.3 Fórmula para el área de una superficie	97



4.4 Integral de superficie para funciones reales de 2 y 3 variables.	98
4.5 La integral de superficie para campos vectoriales. Integral de superficie para el flujo	102
4.6 Teorema de Stokes	112
4.7 Teorema de la Divergencia	116
4.8 Aplicación de la integral de superficie: Ley de Gauss	127
V. REFERENCIALES	120
VI. APENDICES	122
VII. ANEXOS	124



## LISTA DE FIGURAS

Fig. N°I.1 Representación gráfica del dominio y rango de una FRVV.....	9
Fig. N°I.2 Representación gráfica del dominio de la función del problema.....	10
Fig. N°I.3 Representación grafica de $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ .....	10
Fig. N°I.4 Representación del dominio de la composición de una función real con una FRVV.....	12
Fig. N°I.5 Representación gráfica de curvas de nivel.....	13
Fig. N°I.6 Representación gráfica de superficies de nivel.....	13
Fig. N°I.7 Representación gráfica de conjuntos abiertos en el plano.....	15
Fig. N°I.8 Representación gráfica de conjuntos abiertos en el espacio.....	16
Fig. N°I.9 Representación gráfica de puntos de acumulación para Semiplanos.....	16
Fig. N°I.10 Representación gráfica de trayectorias que pasa por (0;0).....	18
Fig. N°I.11 Representación gráfica de trayectorias que pasa por (0;0) según f.....	19
Fig. N°I.12 Interpretación geométrica de la derivada parcial respecto a x.....	22
Fig. N°I.13 Interpretación geométrica de la derivada parcial respecto a y.....	23
Fig. N°I.14 Superficie que proviene de una función diferenciable.....	28
Fig. N°I.15 Superficie que proviene de una función no diferenciable.....	28
Fig. N°I.16 Representación grafica del diagrama de árbol.....	31
Fig. N°I.17 Interpretación geométrica del diagrama de árbol para la función g.....	32
Fig. N°I.18 Interpretación geométrica del vector normal a una superficie.....	34
Fig. N°I.19 Interpretación geométrica de la recta tangente a la a la intersección de dos superficies.....	35
Fig. N°I.20 Gráfica de la función $z = 9 - x^2 - y^2$ .....	39
Fig. N°I.21 Gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ .....	39
Fig. N°I.22 Disco cerrado ,dominio de la función $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ .....	39
Fig. N°I.23 Gráfica de una función que es acotada.....	40
Fig. N°I.24 Gráfica de una función con valores extremos relativos.....	40
Fig. N°I.25 Gráfica de un disco con centro en (0;0).....	41
Fig. N°I.26 Gráfica de una función con punto silla.....	41
Fig. N°II.1 Gráfica de una región acotada en el plano.....	48
Fig. N°II.2 Gráfica del solido U en el espacio.....	48
Fig. N°II.3 Gráfica de la región triangular de integración.....	49
Fig. N°II.4 Gráfica del solido U del que se obtendrá su volumen.....	49
Fig. N°II.5 Gráfica del proceso de cambio variable en integrales dobles.....	50

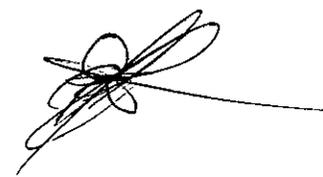


Fig. N°II.6 Gráfica del proceso de cambio variable para el ejemplo.....	51
Fig. N°II.7 Gráfica del proceso de cambio variable usando coordenadas polares.....	53
Fig. N°II.8 Gráfica del cambio de orden de integración para el caso a).....	54
Fig. N°II.9 Gráfica del cambio de orden de integración para el caso b).....	54
Fig. N°II.10 Gráfica del sólido formado debajo del cono.....	55
Fig. N°II.11 Gráfica del sólido formado debajo del plano y dentro del cilindro.....	56
Fig. N°II.12 Gráfica del cambio de cartesianas a polares.....	57
Fig. N°II.13 Gráfica del sólido formado dentro del cilindro y debajo del plano.....	60
Fig. N°II.14 Gráfica que indica el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas.....	62
Fig. N°II.15 Gráfica del cambio de cartesianas a cilíndricas para el caso 1.....	63
Fig. N°II.16 Gráfica del cambio de cartesianas a cilíndricas para el caso 2.....	64
Fig. N°II.17 Gráfica del cambio de cartesiana a cilíndricas para el ejemplo.....	65
Fig. N°II.18 Gráfica del cambio de coordenadas cartesianas a esféricas.....	67
Fig. N°II.19 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso a).....	67
Fig. N°II.20 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso b).....	68
Fig. N°II.21 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso c).....	69
Fig. N°III.1 Representación de un campo vectorial tridimensional.....	72
Fig. N°III.2 Representación de un campo vectorial bidimensional.....	72
Fig. N°III.3 Representación de un campo vectorial gravitatorio.....	73
Fig. N°III.4 Representación de un campo vectorial gradiente.....	73
Fig. N°III.5 Representación de la integral de Línea para campos vectoriales.....	74
Fig. N°III.6 Representación de la trayectoria del problema.....	75
Fig. N°III.7 Representación de la trayectoria que une (0;0;0) a (1;1;1).....	76
Fig. N°III.8 Representación geométrica de la existencia de $\vec{n}$ .....	78
Fig. N°III.9 Representación geométrica de la independencia de la trayectoria.....	80
Fig. N°III.10 Representación geométrica de la independencia para $\vec{F} = (2x; 2z; 2y)$ .....	83
Fig. N°III.11 Interpretación física de la divergencia.....	87
Fig. N°III.12 Interpretación física del operador rotacional.....	87
Fig. N°III.13 Gráfica en el plano XY de la región en coordenadas polares.....	88
Fig. N°III.14 Gráfica de como actúa $\vec{F}$ en frontera C.....	89
Fig. N°III.15 Gráfica de una región simplemente conexa.....	90
Fig. N°III.16 Gráfica de una región múltiplemente conexa.....	90
Fig. N°IV.1 Gráfica del paraboloides debajo del plano $z=4$ .....	97
Fig. N°IV.2 Gráfica de la superficie del cubo.....	99
Fig. N°IV.3 Gráfica de la superficie plana dentro del cilindro.....	100
Fig. N°IV.4 Gráfica de distintas orientaciones de superficie.....	101

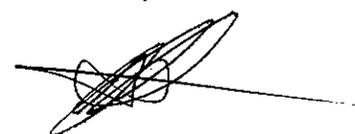


Fig. N°IV.5 Gráfica de la superficie cilíndrica y su orientación.....	102
Fig. N°IV.6 Gráfica de la porción de cono limitada por un plano.....	105
Fig. N°IV.7 Gráfica del proceso de parametrización de una superficie.....	106
Fig. N°IV.8 Gráfica del proceso de parametrización del cilindro.....	107
Fig. N°IV.9 Gráfica de la parametrización de la porción del plano dentro del cilindro..	108
Fig. N°IV.10 Gráfica del proceso de integral de superficie para un campo escalar.....	109
Fig. N°IV.11 Gráfica del proceso de integral de superficie para un campo vectorial....	109
Fig. N°IV.12 Gráfica del proceso de integral de superficie para $\vec{F} = (yz, x, -z^2)$ .....	110
Fig. N°IV.13 Gráfica del proceso como actúa el campo vectorial y la orientación.....	112
Fig. N°IV.14 Gráfica de la superficie donde se aplica el Teorema de Stokes.....	114
Fig. N°IV.15 Gráfica de dos superficies diferentes con la misma frontera.....	115
Fig. N°IV.16 Gráfica de la interpretación de la divergencia en el espacio.....	115
Fig. N°IV.17 Gráfica de un campo vectorial aplicado a una superficie cerrada.....	116
Fig. N°IV.18 Gráfica del flujo en cada superficie.....	118



## II PRÓLOGO

El Texto ha sido escrito como texto para un curso de Cálculo en Varias Variables que se dicta nivel universitario, cuyo contenido se adecua a los planes de las carreras de Matemática e Ingeniería.

Las principales características son la forma clara y sencilla pero rigurosa de exponer la teoría una adecuada cantidad de ejemplos prácticos, los cuales permitan una mejor comprensión de los capítulos expuestos.

El objetivo principal de este texto es brindar al estudiante de ingeniería eléctrica el mejor entendimiento y comprensión profunda de los temas del cálculo en varias variables.

El estudiante y el profesor que están comprendidos con el que hacer de la formación matemática del estudiante de Ingeniería, encontrarán en este Texto una gran ayuda para la evaluación y preparación de clases, por parte del profesor, y un aprendizaje continuo, por parte del alumno.

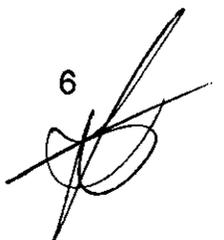
El "Texto: Integral de superficies y sus aplicaciones" consta de 4 capítulos; en el capítulo 1 se estudia las Funciones reales de varias Variables. El capítulo 2. Integrales múltiples poniendo énfasis en los cambios de variables.

En el capítulo 3 se hace un estudio de los campos vectoriales haciendo énfasis en las integrales de Línea en la cual se encuentra el notable Teorema de Green, y finalmente el Capítulo 4 en el que se hace un estudio la Integral de Superficie, mediante el cálculo de área de superficie e Integral de Superficie. En este capítulo están los importantísimos Teorema de Stokes y Teorema de Divergencia de Gauss. Justamente aquí es donde especialmente se hará la aplicaciones al flujo Eléctrico.

En cada capítulo se presentan ejemplos completamente desarrollados en los cuales el estudiante deberá efectuar a modo de ejercicio los cálculos de los pasos intermedios. También se propone una cantidad adecuada de ejercicios.

El autor

6



### III. INTRODUCCIÓN

#### 3.1 CONTENIDO DEL TEXTO

Prefaciales

Capítulo I.-

Funciones reales de varias variables

Capítulo II

Integrales Múltiples: Integral Doble e Integral Triple.

Capítulo II

Integral de Línea

Capítulo IV

Integral de Superficie

**Consideraciones finales**

**Apéndice**

**Anexos**

#### 3.2 IMPORTANCIA DE LA OBRA

El "Texto: Integral de superficie y sus aplicaciones" tiene una gran importancia en la ingeniería y en especial en la ingeniería Eléctrica pues articula conceptos de integral doble y triple con los conceptos de integral de línea y de superficie mediante los Teoremas fundamentales: Teorema de Green en el Plano, Teorema de Stokes y Teorema de la Divergencia de Gauss. Que nos permitirá interpretar el flujo eléctrico a través de una curva, o el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada  $S$ , orientada por un campo de vectores normales unitario.

Precisamente en electromagnetismo el **flujo eléctrico**, o **flujo electrostático**, es una magnitud escalar que expresa una medida del campo eléctrico que atraviesa una determinada superficie  $S$ , o expresado de otra forma, es la medida del número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Su cálculo para superficies cerradas se realiza aplicando la ley de Gauss.

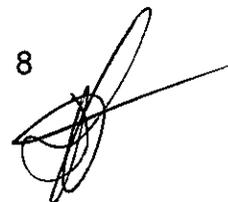
### **3.3 JUSTIFICACIÓN DE LA OBRA**

La presentación del "Texto : La integral de superficie y sus aplicaciones " está justificado en cuanto a que en la bibliografía correspondiente al curso de Cálculo en Varias Variables(Cálculo Vectorial) hay ausencia de un texto específicamente para el tratamiento de las integrales de superficie y su aplicación al tratamiento de Flujos(la magnitud matemática relacionada con el número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie recibe el nombre de flujo),en especial Flujos eléctricos ,pasando también por el tratamientos del concepto de Trabajo a lo largo de una curva, circulación antihoraria, flujo a través de una curva y Flujo a través de una superficie .

### **IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO**

En los ítems siguientes se colocan el desarrollo de los cuatro capítulos programados en el contenido del texto.

Se subdividió en capítulos a fin de mantener una secuencia ordenada de los capítulos.



# CAPÍTULO I

## FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

### 1.1 INTRODUCCION

Las funciones reales de varias variables( dos o tres variables) son funciones de gran utilidad en el área de la ingeniería eléctrica. Puede representar una carga eléctrica, temperatura o ser una función potencial para un campo vectorial conservativo. También pueden ser los integrandos tanto de una integral doble como de una integral Triple. Por último pueden representar a operadores diferenciales como el rotacional o la divergencia de campos vectoriales, que luego permitan llegar a tratar los grandes Teoremas fundamentales que se tratará en el presente Texto, a saber: Teorema de Green en el Plano, Teorema de Stokes y el Teorema de la Divergencia de Gauss.

### 1.2 FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES(FRVV)

Definición.-Una función real de  $n$  varias variables  $f$  (FRVV) es una regla que asigna a cada  $n$ -upla  $p$  de un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  un único valor real  $z$ , denotado por  $f(p)$ . El conjunto  $D$  es el dominio de  $f$  y su imagen es el conjunto de los valores que toma  $f$ , es decir  $Ran(f) = \{f(p) / p \in D\}$  (Mitacc,1999,p.66)

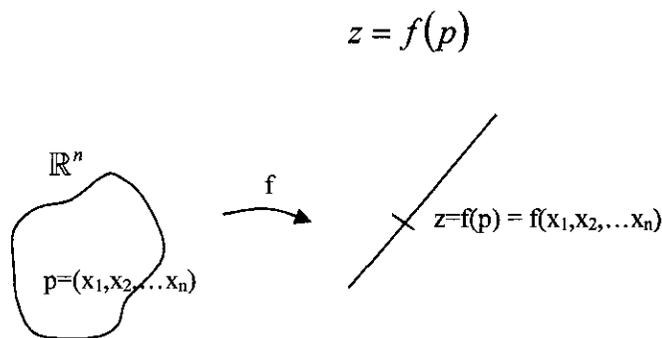


Fig.Nº1.1 Representación gráfica de dominio y rango una FRVV

#### 1.2.1 Dominio y Rango de una FRVV

$$Dom(f) = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists z \in \mathbb{R} \wedge z = f(p)\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$Ran(f) = \{z \in \mathbb{R} / \exists p \in \mathbb{R}^n \wedge z = f(p)\} \subset \mathbb{R}$$

#### 1.2.2 Gráfica de una FRVV

$$G(f) = \{(p; f(p)) \in \mathbb{R}^{n+1} / p \in Dom(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

**Ejemplo:** Sea  $z = f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

Determine  $Dom(f)$ ,  $Ran(f)$ ,  $G(f)$

Sol:  $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 36 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

$x^2 + y^2 \leq 36 \rightarrow Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 36\}$  Disco cerrado de radio 6

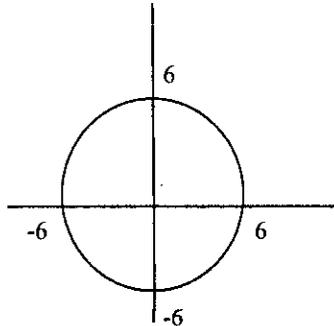


Fig.Nº1.2 Representación gráfica del dominio de la función del problema.

Ahora  $Ran(f) = \{z \in \mathbb{R} / z = f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}\}$

Detallando:  $z^2 = 36 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = 36 - z^2 \geq 0$

$z^2 \leq 36 \rightarrow -6 \leq z \leq 6$

También considerar que  $z \geq 0$ , por ello  $Ran(f) = [0, 6]$ .

Finalmente veamos  $G(f) \rightarrow G(f) = \{(x, y; f(x, y)) / x^2 + y^2 \leq 36\}$

$G(f) = \{(x, y; \sqrt{36 - x^2 - y^2} / x^2 + y^2 \leq 36)\}$

Al sumar los cuadrados:

$x^2 + y^2 + \underbrace{36 - x^2 - y^2}_{z^2} = 36$

$x^2 + y^2 + z^2 = 36$  (semiesfera (pues  $z \geq 0$ ))

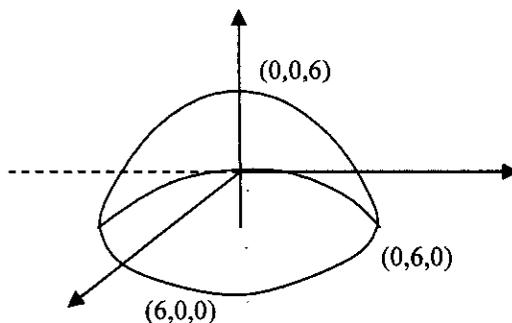
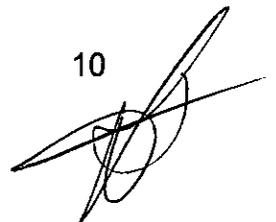


Fig.Nº1.3 Representación gráfica de la función  $z = f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

### 1.2.3 OPERACIONES CON FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Sean  $f$  y  $g$  funciones reales de varias variables con dominios  $Dom(f)$  y  $Dom(g)$ , definimos.

1.  $(f \pm g)(p) = f(p) \pm g(p)$  ;  $p \in Dom(f) \cap Dom(g)$
2.  $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$  ;  $\lambda$  constant real ,  $p \in Dom(f)$



$$3. (f \cdot g)(p) = f(p)g(p); p \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(p) = \frac{f(p)}{g(p)}; p \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{p / g(p) = 0\}$$

### 1.2.4 COMPOSICIÓN DE UNA FUNCION REAL CON UNA FUNCION REAL DE VARIAS VARIABLES

Definición.-Sean las funciones  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la composición  $\varphi \circ f$  como aquella función que tiene la regla de correspondencia:  $(\varphi \circ f)(p) = \varphi(f(p))$  y tiene como dominio  $\text{Dom}(\varphi \circ f) = \{p \in \text{Dom}(f) / f(p) \in \text{Dom}(\varphi)\}$ .

(Mitacc, 1999, p.72).

#### Ejemplo:

Sean las funciones

$$\varphi(x) = \arccos(x) \quad ; \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Hallar la función  $\varphi \circ f$  y su dominio.

#### **Solución:**

$$\text{Dom}(\varphi \circ f) = \{(x; y; z) \in \text{Dom}f / f(x; y; z) \in \text{Dom}\varphi\}$$

$$\text{Sabemos } \text{Dom}f = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\} \quad ; \quad \text{Dom}\varphi = [-1; 1]$$

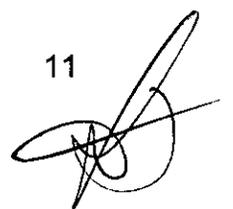
$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \in [-1, 1]$$

$$\text{Osea } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \leq 1; \text{ pues } \sqrt{\quad} \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 9 \leq 1$$

$$9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$$

$$\text{Finalmente } \text{Dom}(\varphi \circ f) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\}$$



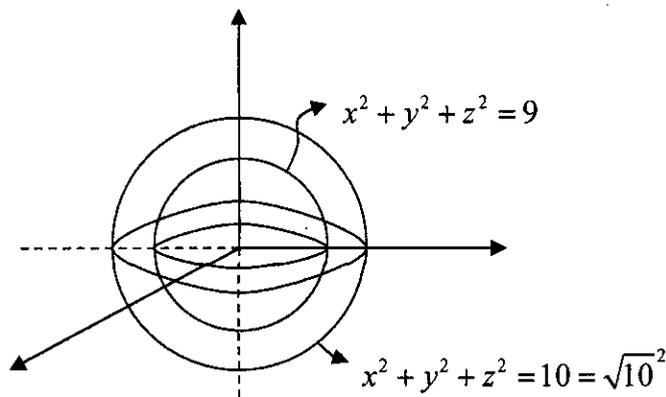


Fig.Nº1.4 Representación del dominio de la composición

y la regla de correspondencia es

$$(\varphi \circ f)(x, y, z) = \varphi(f(x, y, z)) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}) = \arccos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9})$$

### 1.2.5 CONJUNTOS DE NIVEL

Definición.-Sea la FRVV  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; sea asimismo  $c \in \text{Ran}(f)$ . Definimos el conjunto de nivel de valor  $c$  como el conjunto determinado mediante

$$\{p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D : f(p) = c\} \quad (\text{Thomas y Finney, 1999, p.912})$$

**Observación:**

a) Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; c \in \text{Ran}\{f\}$

$$\{(x; y) \in D / f(x; y) = c\} \quad \text{Curva de nivel de valor } c$$

b) Si  $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; c \in \text{Ran}\{f\}$

$$\{(x; y) \in D / f(x; y) = c\} \quad \text{Superficie de nivel de valor } c$$

**Ejemplo:**  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \text{Ran}(f) = [0; +\infty)$$

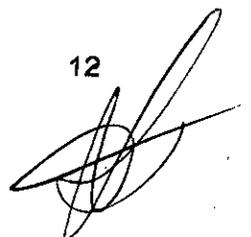
Tomemos los siguientes valores  $k = 0, 1, 4, 9$

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\} = \{(0; 0)\} \quad \text{curva de nivel de valor cero}$$

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \{(0; 0)\} \quad \text{curva de nivel de valor 1}$$

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\} = \{(0; 0)\} \quad \text{curva de nivel de valor 4}$$

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 9\} = \{(0; 0)\} \quad \text{curva de nivel de valor 9}$$



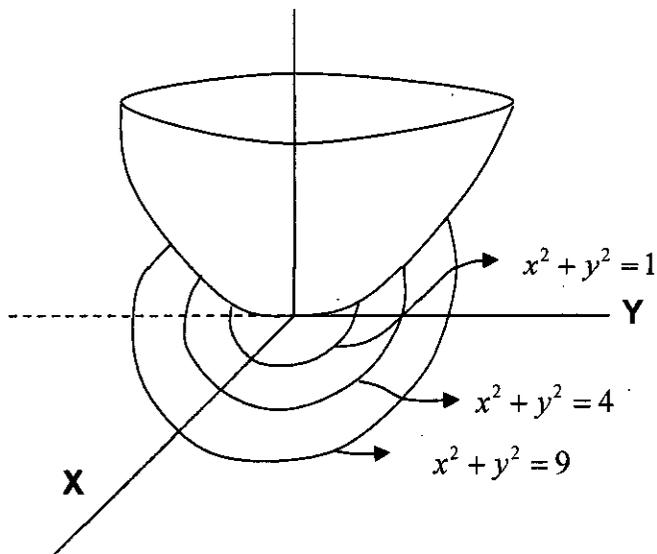


Fig.Nº1.5 Representación gráfica de curvas de nivel

**Ejemplo:** Sea  $w = f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$

$Dom(f) = \mathbb{R}^3$  ,  $Ran(f) = [0; +\infty)$

Tomemos los siguientes valores de  $k$ : 0, 1, 4, 9

$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$  Superficie de nivel de valor 0

$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  Superficie de nivel de valor 1

$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$  Superficie de nivel de valor 4

$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$  Superficie de nivel de valor 9

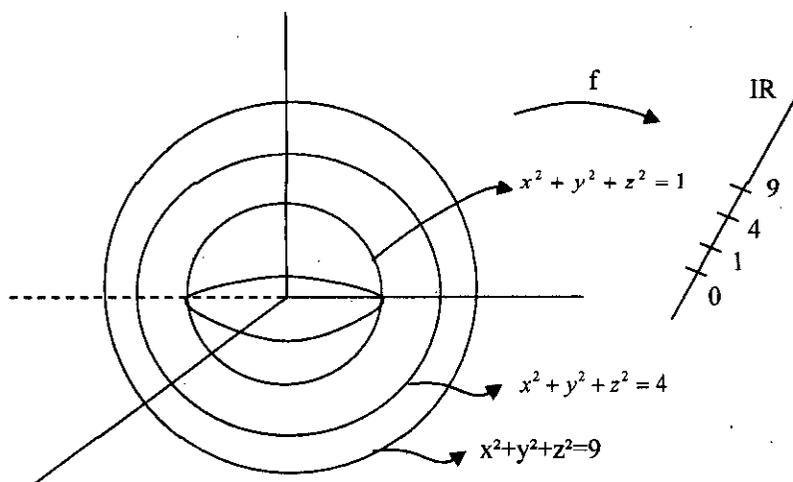


Fig.Nº1.6 Representación gráfica de superficies de nivel

## 1.2.6 BOLA ABIERTA, BOLA CERRADA, CONJUNTO ABIERTO CONJUNTO ABIERTO.

Definición: Sean  $P=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ;  $Q=(y_1,y_2,\dots,y_n)$  puntos en  $\mathbb{R}^n$

La distancia entre los puntos P y Q se define

$$d(P,Q)=\|P-Q\|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

### BOLA ABIERTA DE CENTRO $P_0$ Y RADIO $r$

$$B(P_0,r)=\{P\in\mathbb{R}^n/d(P,P_0)<r\}$$

$$=\{P\in\mathbb{R}^n/\|P-P_0\|<r\}$$

### BOLA CERRADA DE CENTRO $P_0$ Y RADIO $r$

$$\bar{B}(P_0,r)=\{P\in\mathbb{R}^n/d(P,P_0)\leq r\}$$

$$=\{P\in\mathbb{R}^n/\|P-P_0\|\leq r\}$$

### BOLA REDUCIDA

$$B'(P_0,r)=\{P\in\mathbb{R}^n/0<d(P,P_0)<r\}$$

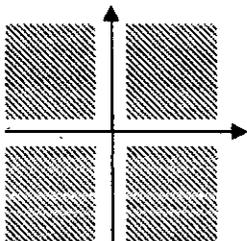
$$=B(P_0,r) - \{P_0\} = \{P\in\mathbb{R}^n/0<\|P-P_0\|<r\}$$

### CONJUNTO ABIERTO

Diremos que un conjunto  $D\subset\mathbb{R}^n$  es abierto, si para todo punto  $p\in D$  existe una bola abierta  $B(p;r)$  tal que  $B(p;r)\subset D$ . (Mittac, 1999,p.81)

### Ejemplos de conjuntos abiertos

1. En  $\mathbb{R}$ : es conjunto abierto  $D = \langle a,b \rangle$ ;  $a,b\in\mathbb{R}$ .
2. En  $\mathbb{R}^2$ , son conjuntos abiertos por ejemplo:



$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0;y>0\}$$

$$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x<0;y>0\}$$

$$D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x<0;y<0\}$$

$$D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0;y<0\}$$

También:

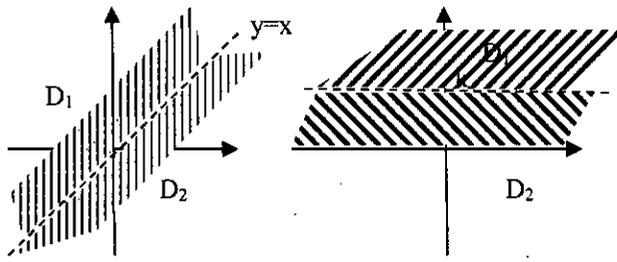


Fig.Nº1.7 Representación. gráfica de conjuntos abiertos en el plano

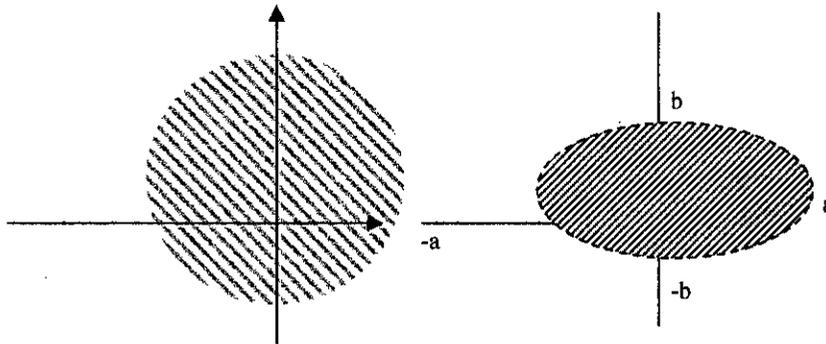
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$$

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > k\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < k\}$$

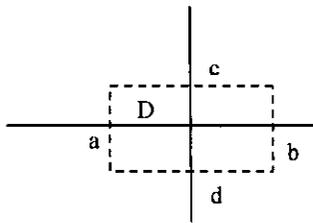
También:



$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < r^2\}$$

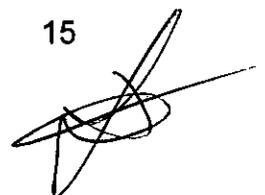
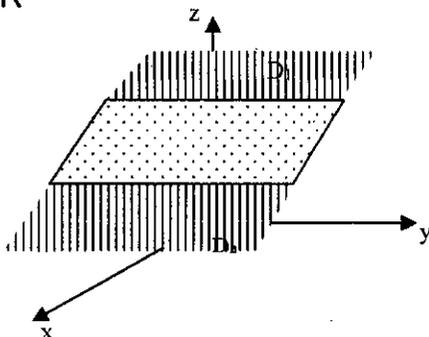
$$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > r^2\}$$



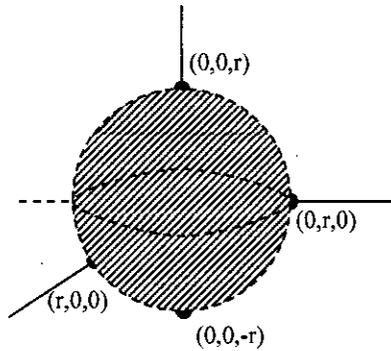
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b; d < y < c\}$$

3. En  $\mathbb{R}^3$



$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > k\}$$

$$D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z < k\}$$



$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$$

Fig.Nº1.8 Representación gráfica conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^3$

### 1.2.7 PUNTO DE ACUMULACIÓN

Sea  $D$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que el punto  $P_0$  es un punto de acumulación de  $D$  si y solo si toda bola abierta  $B(P_0;r)$  cumple:  $B'(P_0;r) \cap D \neq \emptyset$ .

(Mitacc, 1999, p. 81)

**Ejemplo:**

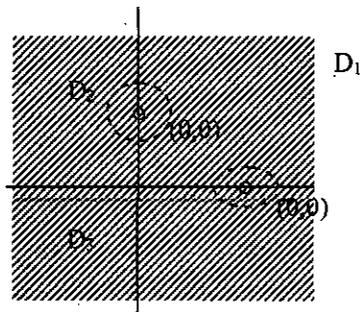


Fig.Nº1.9 Representación gráfica de puntos de acumulación en  $\mathbb{R}^2$ .

con respecto al conjunto abierto  $D_1$  por ejemplo  $(0,a)$  y  $(b,0)$  son puntos de acumulación de  $D_1$  y asimismo son puntos de acumulación los puntos interiores de  $D_1$ .

**Ejemplo:**

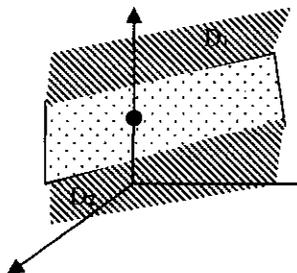


Fig.l.9 Representación gráfica de puntos de acumulación para semiplanos.

Con respecto al conjunto  $D_1$  por ejemplo cualquier punto del plano  $z=k$ ; es punto de acumulación del conjunto  $D_1$ , como también cualquier punto interior de  $D_1$ ; es punto de acumulación de  $D_1$ .

### 1.3 LÍMITES Y CONTINUIDAD.

#### 1.3.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIAS VARIABLES (FRVV)

Definición.-Sea la función  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; definida en el conjunto abierto  $D$ . Sea  $P_0$  un punto de acumulación de  $D$ . Definimos:

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \leftrightarrow \text{Dado } \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 / 0 < \|p - p_0\| < \delta \text{ entonces } |f(p) - L| < \varepsilon. (\text{Mitacc, 1999, p. 82})$$

**Ejemplo 1:** Sea la función real de dos variables

$$z = f(x, y) = 4x + 3y. \text{ Probar que } \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = 10$$

Demostración:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = 10 \leftrightarrow \text{Dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < \|(x, y) - (1, 2)\| < \delta \\ \text{entonces } |4x + 3y - 10| < \varepsilon$$

$$\text{Ahora: } \|(x, y) - (1, 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \rightarrow |x-1| < \delta$$

$$|y-2| = \sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \rightarrow |y-2| < \delta$$

Luego:

$$|4x + 3y - 10| = |4(x-1) + 3(y-2)| \leq 4|x-1| + 3|y-2| < 4\delta + 3\delta = 7\delta = \varepsilon$$

$$\rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{7}$$

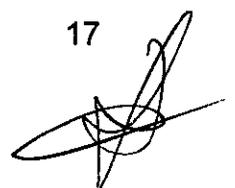
Por lo tanto tomando  $\delta = \varepsilon/7$ , se tiene probado el límite.

**Ejercicio:** Sea  $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ ;  $(x, y) \neq (0, 0)$

Demostrar que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

#### 1.3.2 PROPIEDADES DEL LÍMITE DE UNA FRVV

Sean  $\lim_{p \rightarrow P_0} f(p) = L_1$  y  $\lim_{p \rightarrow P_0} g(p) = L_2$ ; entonces



1.  $\lim_{P \rightarrow P_0} \lambda f(p) = \lambda \lim_{P \rightarrow P_0} f(p) = \lambda L_1$
2.  $\lim_{P \rightarrow P_0} (f(p) \pm g(p)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(p) \pm \lim_{P \rightarrow P_0} g(p) = L_1 \pm L_2$
3.  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(p)g(p) = \left( \lim_{P \rightarrow P_0} f(p) \right) \left( \lim_{P \rightarrow P_0} g(p) \right) = (L_1)(L_2)$
4.  $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(p)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(p)} = \frac{L_1}{L_2}; L_2 \neq 0$

### 1.3.3 REGLA DE LAS 2 TRAYECTORIAS

Sea la función real de dos variables  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $P_0 = (x_0; y_0)$  sea un punto de acumulación del conjunto abierto  $D$ . Si consideramos dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  que pasen por  $P_0$  y si los límites  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ C_1}} f(p)$  y  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ C_2}} f(p)$  son diferentes entonces  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(p)$  no existe. (Thomas y Finney, 1999, p.920)

**Ejemplo:** Sea  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \forall (x, y) \neq (0, 0)$

Determinar si existe  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

**Solución:**

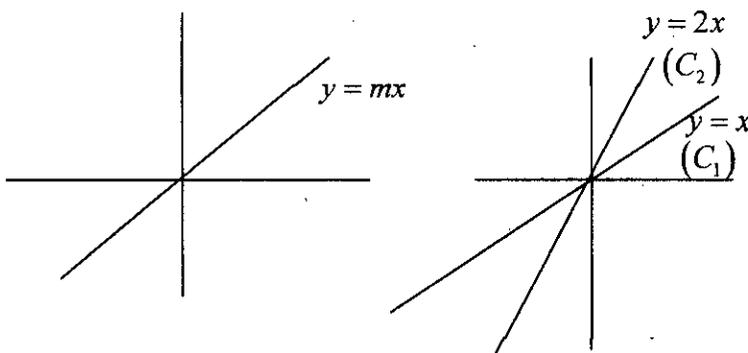
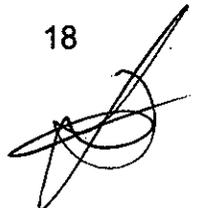


Fig. Nº.10 Representación gráfica de trayectorias que pasan por  $(0;0)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + m^2 x^2}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Si tomamos  $m = 1 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1/2$

$$m = 2 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 2/5$$

El  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  ¡no existe!

**Ejemplo:** Sea  $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;  $(x,y) \neq (0,0)$

Determinar si existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

**Solución:**

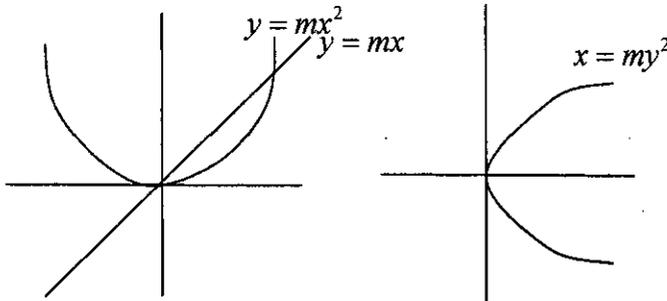


Fig. N°1.11 Trayectorias que pasan por (0;0) según f

Ahora

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2 m}{|x| \sqrt{1+m^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| m}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \end{aligned}$$

Asimismo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx^2)}{\sqrt{x^2 + m^2 x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x |x|^2 m}{|x| \sqrt{1+m^2-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x)m}{\sqrt{1+m^2+x^2}} = 0 \end{aligned}$$

También:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(my^2)y}{\sqrt{m^2 y^4 + y^2}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m|y|^2 y}{|y| \sqrt{m^2 y^2 + 1}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m|y|y}{\sqrt{m^2 y^2 + 1}} = 0$$

Esto convierte a 0 en un candidato a límite. Para que efectivamente sea el límite lo confirmaremos con la demostración:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \leftrightarrow \text{Dado } \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$$

Tal que si  $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ , entonces  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$

Como  $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$\rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |x| < \delta$$

$$\rightarrow \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |y| < \delta$$

Ahora:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x|\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= |x| < \delta$$

$\rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \delta = \varepsilon$  Así pues tomando  $\delta = \varepsilon$  se tiene que el límite existe y es

igual a "0".

### 1.3.4 CONTINUIDAD DE UNA FRVV

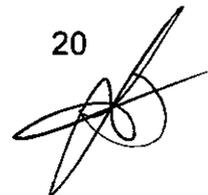
Definición.- Diremos que una función real de varias variables  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en un punto  $p_0$ , si se cumple:

1.  $f(p_0)$  está definida.
- 2)  $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p)$  existe

3.-  $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$  (Mitacc, 1999, p.93)

**Ejemplo :** Sea  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Determinar si  $f$  es continua en  $(0,0)$



**Solución**

i)  $f(0,0) = 0$  existe

ii) Sea  $S_1 = \{(x, y)/y = 0\}$ , entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{0}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0 \quad (1)$$

Sea  $S_2 = \{(x,y)/y = x\}$ , entonces

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_2)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Por consiguiente, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

Luego  $f$  no es continua en el punto indicado.

## 1.4 DERIVADA PARCIAL DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIAS VARIABLES

1.4.1 Definición.-Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , una función real de varias variables definida en el conjunto abierto  $D$ ; tal que  $P_0 \in D$ . Definimos la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x_j$ , en el punto  $P_0$  como el siguiente límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h e_j) - f(P_0)}{h}, \text{ siempre y cuando exista. (Mittac, 1999, p. 103)}$$

**Observación:**  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$   
↳ Lugar  $j$

en particular

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) & e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) & & \vdots \\ & & e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

**Observación2:** En el caso de  $\mathbb{R}^3$  se usara los vectores  $e_1=(1,0,0)$ ,  $e_2=(0,1,0)$ ,  $e_3=(0,0,1)$  y en el caso de  $\mathbb{R}^2$  se usara los vectores  $e_1=(1,0)$ ,  $e_2=(0,1)$ .

## Observación 2:

Si no se especifica el punto, la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x_j$  significa que las otras variables quedan como "constantes" y solo queda derivar respecto a  $x_j$ .

Ejemplo: Sea  $f(x,y,z) = x \operatorname{Sen} y + y \operatorname{Cos} z + z \operatorname{Sen} x$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen} y + z \cos x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + \cos z; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -y \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} x$$

Ejemplo: Sea la función  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Ln}(xy)}{xy-1}; & xy \neq 1 \\ 1; & xy = 1 \end{cases}$ . Hallar  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1); \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h;1) - f(1;1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{Ln}(h+1)}{h+1-1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{Ln}(h+1)}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(h+1) - h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h-1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(h+1)} = -1/2 \text{ ¡existe!} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1;1+h) - f(1;1)}{h} = -\frac{1}{2} \therefore \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1/2 \text{ ¡existe!}$$

## 1.4.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL

(Para el caso de  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )

Sea  $z=f(x,y)$  una función definida en  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Asimismo considere la gráfica de  $f$   $G(f) = \{(x,y,f(x,y)) / (x,y) \in D\}$  la cual es una superficie  $S$ , sea  $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ .

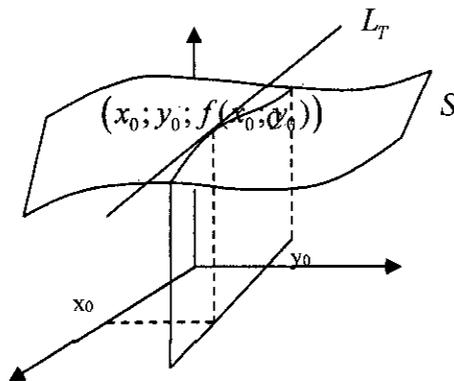
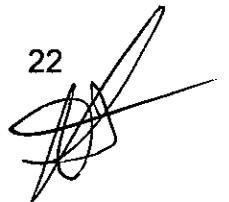


Fig. N° 1.12 Interpretación geométrica de la derivada parcial respecto a  $x$ .

Si además consideramos el plano  $y=y_0$ , vemos que dicho plano corta a  $S$  en una curva  $C_1$  y teniendo presente que  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ ; la derivada parcial



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  es la pendiente de la recta tangente  $\mathcal{L}_T$  a la curva  $C_1$  en el punto

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . (Mittac, 1999, p.104)

Por otro lado con las mismas consideraciones del caso anterior:

$z = f(x, y)$ ;  $(x, y) \in \text{Dom}(f)$  y  $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in D_f\}$  que representa una superficie.

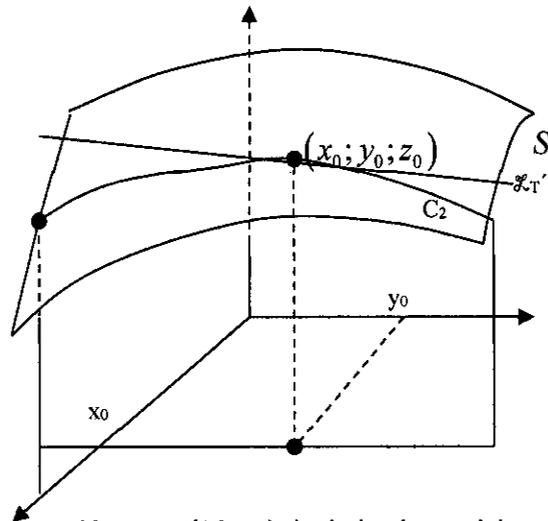


Fig N° 1.13 Interpretación geométrica de la derivada parcial respecto a y.

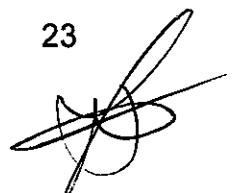
Si además consideramos el plano  $x=x_0$ , vemos que dicho plano corta a  $S$  en una curva  $C_2$  y teniendo presente que  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$  y también pertenece a

$C_2$ , la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  es la pendiente de la recta tangente  $\mathcal{L}_T'$  a la

curva  $C_2$  en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . (Larson, Hostetler y Edwards, 2006, p.907)

### **Observaciones**

1. Las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  son pendientes de la superficie en las direcciones del eje X y del eje Y respectivamente en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .
2. Las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  también representan las razones de cambio o intensidades de variación de  $f$  respecto a  $x$  e  $y$  respectivamente.



**1.4.3 DERIVADA PARCIAL DE ORDEN SUPERIOR :** Se rige de acuerdo a las siguientes notaciones

1. Sea  $z = f(x; y); P_0 = (x_0; y_0) \in D(f)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) = f_{xx}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) = f_{yy}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) = f_{yx}(P_0)$$

$$\frac{d^2 f}{dy dx}(P_0) = \frac{d}{dy} \left( \frac{df}{dx} \right) (P_0) = f_{xy}(P_0)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(P_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) (P_0) = f_{xyy}(P_0)$$

2. Sea  $z = f(x; y); P_0 = (x_0; y_0; z_0) \in D(f)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) = f_{xx}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) = f_{yy}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) (P_0) = f_{zz}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (P_0) = f_{zx}(P_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (P_0) = f_{yz}(P_0)$$

**Ejercicio: Considere**  $f(x, y) = \begin{cases} e^x + e^y + \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Evalúe las derivadas parciales  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; 0)$  ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$

**Solución:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0)$$

Primero determinemos  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^x + e^y + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right); & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0); & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pautas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^x + e^y + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) &= e^x + y \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \\ &= e^x + y \left[ \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = e^x + y \left[ \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= e^x + \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

También:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{1} = 1$$

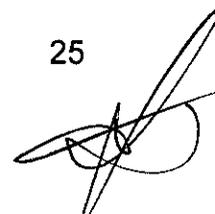
$$\rightarrow F = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} e^x + \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 1; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \frac{\partial(F)}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + 0 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ (existe)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0)$$

Determinemos  $\frac{\partial f}{\partial y}$



$$G = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} e^y + \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pauta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( e^x + e^y + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) &= e^y + x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= e^y + x \left[ \frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = e^y + x \left[ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = e^y + \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Concluyendo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} (G)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h, 0) - G(0, 0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty \text{ (no existe)}$$

**1.4.4 TEOREMA(CLAIROUT):** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  sean continuas en el conjunto abierto  $D$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p), \forall p \in D.$$

## 1.5 DIFERENCIABILIDAD Y REGLA DE LA CADENA.

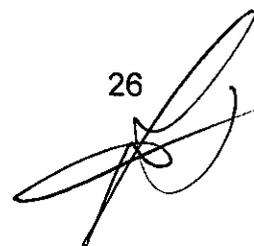
### INCREMENTOS Y DIFERENCIABILIDAD

#### 1.5.1 INCREMENTO

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el conjunto abierto  $D$ . Sea  $P=(x, y) \in D$  y consideramos su incremento  $\Delta P=(\Delta x, \Delta y)$  tal que  $P+\Delta P \in D$ . Definimos el incremento de  $f$  en  $p$  mediante la ecuación :

$$\Delta f(p) = f(p+\Delta p) - f(p).$$

Este concepto de incremento en dos dimensiones nos permitirá definir la diferenciabilidad para una función real de dos variables usando el hecho de que existan las primeras derivadas parciales .



### 1.5.2 DIFERENCIABILIDAD

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el conjunto abierto  $D$ . Sea  $P=(x,y) \in D$  y consideremos su incremento  $\Delta p=(\Delta x, \Delta y)$  tal que  $p+\Delta p \in D$ . Diremos que la función  $f$  es diferenciable en  $P=(x_0; y_0)$ , si existe tal que para  $P+\Delta P \in D$  el incremento  $\Delta f(P)$  se puede expresar en la forma

$$\Delta f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

Donde  $\varepsilon_1 \rightarrow 0; \varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0; \Delta y \rightarrow 0$  (Larson et al., 2006, p.917)

En forma puntual:

Una función de dos variables  $z = f(x; y)$  es diferenciable en  $(x_0; y_0)$ , si el incremento de  $z$ ;  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ ; puede escribirse en la forma

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y; \dots (2.5)$$

donde  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \rightarrow (0; 0)$ , cuando  $(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ .

Si escribimos  $x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y$ ; entonces la ecuación 2.5, tiene la forma

$$f(x; y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0) (*)$$

donde  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \rightarrow (0; 0)$ , cuando  $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$ .

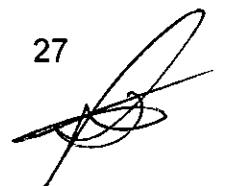
La ecuación (\*) explica el concepto de forma clara si escribimos el plano tangente a  $S$  en  $P_0$ :

$$L(x; y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} (y - y_0).$$

Tenemos entonces la aproximación lineal  $f(x; y) \approx L(x; y)$ ; en una vecindad de  $(x_0; y_0)$ . Note que la función  $L$  es precisamente el plano tangente en el punto  $(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ :

$$z = L(x; y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} (y - y_0). \text{ Tenemos así que } f$$

es diferenciable en  $(x_0; y_0)$  si puede linealizarse localmente, esto es en una vecindad de un punto  $(x_0; y_0)$  la gráfica de  $f$  se ve "casi" plana, siendo dicho plano precisamente el plano tangente.



### Observación

Cuando  $z=f(x,y)$  sea diferenciable  $\forall p \in D$ , su gráfica  $G(f)$  presenta la siguiente característica.

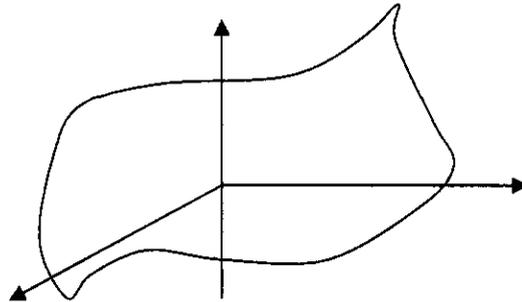


Fig. N° 1.14 Superficie que proviene de una función diferenciable.

En cada punto un único plano tangente.

Cuando  $z=f(x,y)$  no sea diferenciable en ciertos puntos, su gráfica  $G(f)$  presentan los siguientes detalles.

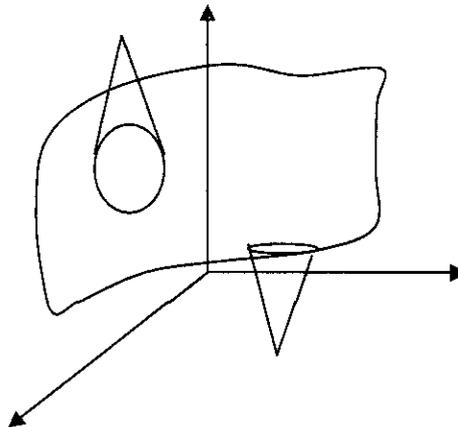
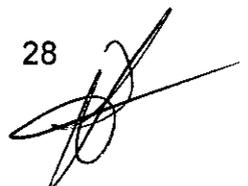


Fig.I.15 Representación gráfica de una función no diferenciable.

**Ejemplo:** Mostrar que la función  $f(x,y) = x^2 + 3y$ , es diferenciable en todo punto del plano.

### Solución

Haciendo  $z=f(x,y)$ , el incremento de  $z$  en un punto arbitrario  $(x,y)$  en el plano es



$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \\ \Delta z &= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta y \\ &= 2x(\Delta x) + 3\Delta y + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\ &= f_x(x; y)\Delta x + f_y(x; y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

Donde  $\varepsilon_1 = \Delta x$  y  $\varepsilon_2 = 0$ . Como  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ , cuando  $(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ , se sigue que  $f$  es diferenciable en todo punto en el plano.

**TEOREMA:** Si  $f$  es diferenciable en  $P_0=(x_0, y_0) \rightarrow f$  es continua en  $P_0=(x_0, y_0)$ .

**TEOREMA:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función definida en el conjunto abierto  $D$ . Si

$f; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $D \rightarrow f$  es diferenciable,  $\forall p \in D$ .

**Observación:**

• Si solo queremos analizar en  $P_0=(x_0, y_0)$  tienen que cumplirse:

1)  $f$  continua en  $(x_0, y_0)$ .      2)  $\frac{\partial f}{\partial x}$  continua en  $(x_0, y_0)$ .

3)  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continua en  $(x_0, y_0)$ .

**Ejemplo:** Considere  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$

**Solución:**

1) ¿ $f$  es continua en  $(0, 0)$ ?

1.1.  $f(0, 0) = 0$  (ok)

1.2.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(m^2 x^2)}{(x^2 + m^2 x^2)^2}$ ; a través de  $y=mx$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 m^2}{x^4 (1 + m^2)} = \frac{m^2}{1 + m^2}$  (el límite no existe, pues depende de  $m$ )

$\therefore$  osea  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$

**1.5.3 DIFERENCIAL TOTAL**

1. Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; es diferenciable en  $D$ , definimos la diferencial total como

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy$$

2.- Si  $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ; es diferenciable en  $D$ , definimos la diferencial total como

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz$$

#### 1.5.4 REGLA DE LA CADENA

**Teorema:** Sea  $z=f(x,y)$  una función real de dos variables diferenciable en un conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$ ; y supongamos que  $x=g(t)$ ;  $y=h(t)$ , son funciones derivables según  $t$ ; entonces  $z = z(t) = f(x(t); y(t))$  es una función derivable según  $t$ , y se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \dots(1)$$

**Demostración:** Puesto que  $f$  es diferenciable se tiene que

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y;$$

Donde  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \rightarrow (0; 0)$  cuando  $(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ . Dividiendo ambos miembros de la ecuación por  $\Delta t$  y tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \dots\dots\dots(2)$$

Donde

$$(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \rightarrow (0; 0), \text{ cuando } (\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0).$$

Por un lado:

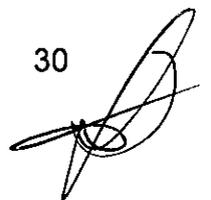
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \text{ .Por otro lado}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(t + \Delta t) - x(t) = 0$ ; puesto que  $x=x(t)$  es continua por ser diferenciable. De la misma forma  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ; lo que significa que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0 \text{ ,por lo que la ecuación (2) se convierte en la ecuación (1)}$$

**Teorema:** Sea  $z=f(x,y)$  diferenciable tal que  $x=g(t,s)$ ,  $y=h(t,s)$  tenga primeras derivadas parciales respecto a  $t$  y  $s$  entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

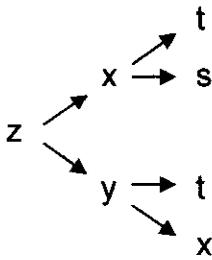


Fig.I.16 Representación gráfica del diagrama de árbol.

**Teorema:** Si  $w = f(x,y,z)$  es diferenciable tal que  $x = g(t,s)$ ;  $y = h(t,s)$ ;  $z = j(t,s)$  tengan primeras derivadas parciales respecto a  $t$  y  $s$ , entonces:

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

**TEOREMA(CASO GENERAL)**

Sea  $w=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$  , diferenciable tal que  $x_i=x_i(t_1,t_2,\dots, t_m)$

para  $i=1,2,3,\dots,n$ ; de modo que existen  $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$  ;  $i = 1,2,\dots,n$ ;  $j = 1,2,\dots,m$ .

Entonces:

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

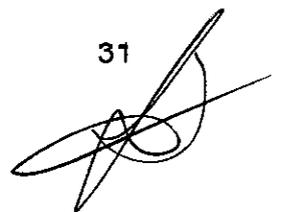
$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

⋮

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

**Observación**

Hay  $m$  ecuaciones y en cada ecuación hay  $n$  sumandos.



**PROBLEMA:** Sean las funciones  $f$  y  $g$  diferenciables tal que  $g(x) = f(x; y(x); z(x; y(x)))$ , donde  $y(1) = 2$ ;  $z(1; 2) = 3$ ;  $y'(1) = 1$ ;  $\nabla f(1; 2; 3) = (4; 5; 6)$ ,  $g'(1) = 10$ .

a) Diagrama del árbol para la función  $g(x)$

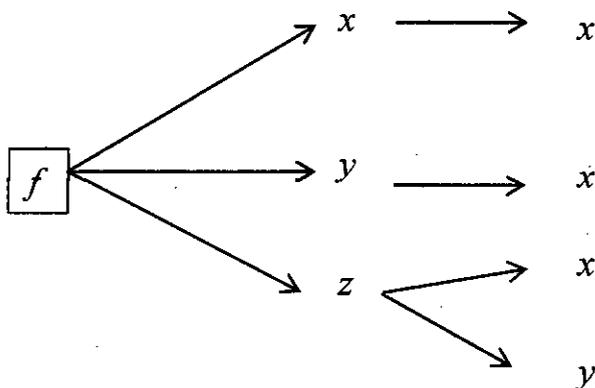


Fig. N° 1.17 Figura del diagrama de árbol para la función  $g$ .

b. Cálculo de  $\frac{\partial z}{\partial x}(1; 2) + \frac{\partial z}{\partial y}(1; 2)$

Por la regla de la cadena

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)$$

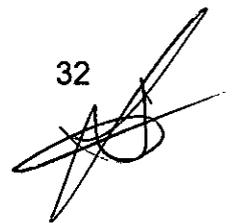
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} y'(x) \right).$$

Evaluando en  $x=1$

$$g'(1) = \frac{\partial f(1; 2; 3)}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f(1; 2; 3)}{\partial y} y'(1) + \frac{\partial f(1; 2; 3)}{\partial z} \left( \frac{\partial z(1; 2)}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z(1; 2)}{\partial y} y'(1) \right)$$

$$10 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \left( \frac{\partial z(1; 2)}{\partial x} + \frac{\partial z(1; 2)}{\partial y} \right)$$

$$1 = 6 \left( \frac{\partial z(1; 2)}{\partial x} + \frac{\partial z(1; 2)}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial z(1; 2)}{\partial x} + \frac{\partial z(1; 2)}{\partial y} = \frac{1}{6}$$



**PROBLEMA: Dadas la funciones**

$$w = \frac{1}{2} s^4 t^5; \quad s = x^2 + y^2; \quad t = \frac{y}{x}.$$

a) ¿Cuál es la dirección unitaria, para que w decrezca más rápidamente en  $(x;y)=(1;1)$ ?

b) Determine la derivada direccional en el punto  $(x;y)=(1;1)$  en la dirección que w decrece con mayor rapidez.

Solución: Se deja al lector

a)  $\vec{u} = \frac{(1; -9)}{\sqrt{82}}$                       b)  $D_{\vec{u}} f(1;1) = -8\sqrt{82} \approx -72,4$

**1.6 VECTOR GRADIENTE Y PLANOS TANGENTES.**

**1.6.1 GRADIENTE**

**DEFINICIÓN:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el conjunto abierto D tal que existan

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p); \frac{\partial f}{\partial x_2}(p); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(p); \quad \forall p \in D. \text{ Definimos el gradiente de } f \text{ en } p$$

como:  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p); \frac{\partial f}{\partial x_2}(p); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ . (Mitacc, 199, p. 122)

**Observación. 1** Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$

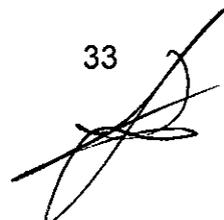
$$\rightarrow \nabla f(x_0; y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \right)$$

**PROPIEDADES DEL GRADIENTE**

Sean  $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; definida en el conjunto abierto D tal que existan

$\nabla f(p); \nabla g(p); \forall p \in D$ , entonces

1.  $\nabla(f \pm g)(p) = \nabla f(p) \pm \nabla g(p)$
2.  $\nabla(\lambda f)(p) = \lambda \nabla f(p)$
3.  $\nabla(f \cdot g)(p) = g(p) \nabla f(p) + f(p) \nabla g(p)$
4.  $\nabla(f/g)(p) = \frac{g(p) \nabla f(p) - f(p) \nabla g(p)}{[g(p)]^2}; g(p) \neq 0$
5.  $\nabla[f(p)]^n = n[f(p)]^{n-1} \nabla f(p)$



## 1.6.2 PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES

**Definición:** Sea  $S$  la superficie dada por  $F(x,y,z) = 0$ , tal que  $\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z}$  sean continuas en los puntos de  $S$ . Entonces  $\nabla F(p) = \left( \frac{\delta F}{\delta x}(p), \frac{\delta F}{\delta y}(p), \frac{\delta F}{\delta z}(p) \right)$  es el vector normal a la superficie  $S$  en el punto  $P \in S$ . (Mitacc, 1999, p.139)

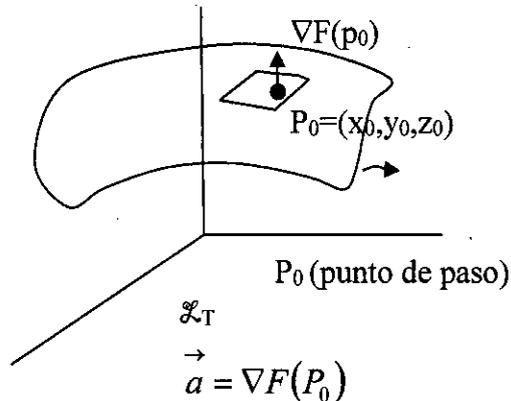


Fig. N° 1.18 Interpretación geométrica del vector normal a una superficie.

### Ecuación del plano tangente a $S$ en $P_0$

$$\nabla F(P_0) \cdot [(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$$

También puedes presentar la **RECTA NORMAL** a  $S$  en  $P_0$  como:

$$\mathcal{L}_N = \{P_0 + \lambda \nabla F(P_0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

### RECTA TANGENTE A LA CURVA DE INTERSECCIÓN DE DOS SUPERFICIES

Sean  $S_1: F(x,y,z) = 0$ ;  $S_2: G(x,y,z) = 0$ ; tal que se intersectan en la curva  $C$ .

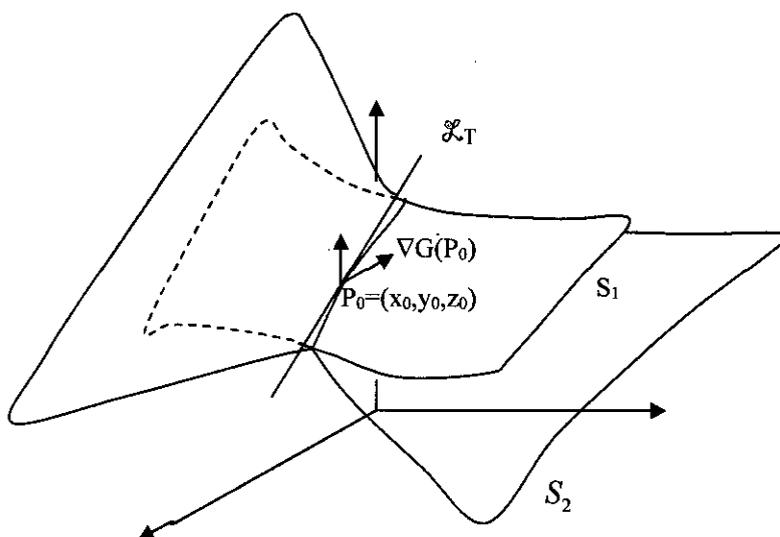


Fig. N° 1.19 Interpretación geométrica de la recta tangente a la intersección de dos superficies.

Resulta que  $\mathcal{L}_T$  tiene como vector dirección  $\vec{a} = \nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0) = \frac{\delta F}{\delta x}(P_0)$ ;

$$\frac{\delta F}{\delta y}(P_0), \frac{\delta F}{\delta z}(P_0) \times \left( \frac{\delta G}{\delta x}(P_0), \frac{\delta G}{\delta y}(P_0), \frac{\delta G}{\delta z}(P_0) \right)$$

$$\therefore \mathcal{L}_T = \{P_0 + \lambda(\nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0)) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

**Propuesto:** Determine la *ecuación vectorial* de la *recta tangente* a la curva de intersección de las superficies  $\tau_1: x^2 + y^2 - z = 8$ ; ;  $\tau_2: x - y^2 + z^2 = -2$  ;, en el punto  $(2; -2; 0)$  .

La solución se deja para el lector.

**Ejemplo:** Determine la *ecuación vectorial* de la *recta tangente*  $\mathcal{L}_T$  a la curva C que resulta de la intersección de las superficies  $x+z=5$  ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  en el punto  $P_0 = (2, 2\sqrt{3}, 3)$ .

**Solución:**

$$\left\{ \underbrace{x+z-5=0}_{F(x,y,z)} \rightarrow \nabla F(P_0) = \left( \frac{\delta F}{\delta x}(P_0), \frac{\delta F}{\delta y}(P_0), \frac{\delta F}{\delta z}(P_0) \right) = (1, 0, 1) \right.$$

También

$$\left\{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0}_{G(x,y,z)} \rightarrow \nabla G(P_0) = \left( \frac{\delta G}{\delta x}(P_0), \frac{\delta G}{\delta y}(P_0), \frac{\delta G}{\delta z}(P_0) \right) \right.$$

$$= (2x|_{P_0}, 2y|_{P_0}, 2z|_{P_0}) = (4, 4\sqrt{3}, 6)$$

$$\rightarrow \vec{a} = \nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4\sqrt{3} & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4\sqrt{3}) - \hat{j}(2) + \hat{k}(4\sqrt{3})$$

$$= (-4\sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3})$$

$$\therefore \mathcal{L}_T = \{(2, 2\sqrt{3}, 3) + \lambda(-4\sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

### 1.6.3 DERIVADA DIRECCIONAL

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el conjunto abierto  $D$ . Sea  $P_0 \in D$  y asimismo consideramos un vector unitario  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Definimos la derivada direccional de  $f$  en  $P_0$  como el siguiente límite.

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{u}) - f(P_0)}{h}, \text{ siempre y cuando exista. (Mitacc, 1999, p. 124)}$$

#### **Observación 1**

Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$ ;  $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$D_{\vec{u}} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0; y_0) + h(u_1; u_2)) - f(x_0; y_0)}{h}$$

#### **Observación 2**

Si  $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{u}) - f(P_0)}{h}$$

**Observación 3:** Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{u} = (1, 0)$

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}$$

#### **TEOREMA**

Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en el conjunto abierto  $D$ , tal que  $P_0 \in D$ , asimismo consideremos el vector unitario  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  entonces:

$$D_{\vec{u}} f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \vec{u} \quad \dots (*)$$

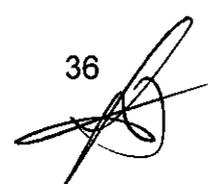
#### **Observación. 1**

Si  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$D_{\vec{u}} f(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (u_1; u_2)$$

#### **Observación. 2**

Si  $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$



$$D_{\vec{u}}f(x_0; y_0; z_0) = \nabla f(x_0; y_0; z_0) \cdot (u_1; u_2; u_3)$$

**Ejemplo:** Si la derivada direccional de  $f(x; y; z) = mxy^2 + nyz + pz^2x^3$ ; en el punto  $A = (1; 2; -1)$ , tiene valor máximo 64, en la dirección de A a B(1;2;0). Determine el valor de

$$T = \frac{\partial f}{\partial x}(1; 1; 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1; 1; 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1; 1; 1)$$

**Solución:**

$$\nabla f = (my^2 + 3px^2z^2; 2mxy + nz; ny + 2pzx^3)$$

$$\nabla f(1; 2; -1) = (4m + 3p; 4m - n; 2n - 2p)$$

$$D_{\vec{u}}f(1; 2; -1) = \nabla f(1; 2; -1) \cdot \vec{u} = 64 \rightarrow n - p = 32 \text{ siendo } \vec{u} = (0; 0; 1)$$

Pero por propiedad

$$\|\nabla f(1; 2; -1)\| = 64$$

$$\sqrt{(4m + 3p)^2 + (4m - n)^2 + 4(n - p)^2} = 64$$

$$(4m + 3p)^2 + (4m - n)^2 + 4096 = 4096$$

$$(4m + 3p)^2 + (4m - n)^2 = 0 \rightarrow 4m = -3p; n = 4m; \text{ ademas } n - p = 32$$

$$m = 6; n = 24; p = -8$$

$$\text{Finalmente } \frac{\partial f}{\partial x}(1; 1; 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1; 1; 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1; 1; 1) = 26$$

**Observación:**

La derivada direccional  $D_{\vec{u}}f(p_0)$ , también se le interpreta como la pendiente

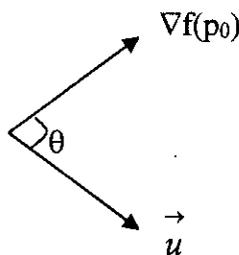
de la superficie S en la dirección del vector unitario  $\vec{u}$ .

**Observación: Respecto a (\*)**

$$D_{\vec{u}}f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \vec{u}$$

Recordar

$$\cos \theta = \frac{\nabla f(p_0) \cdot \vec{u}}{\|\nabla f(p_0)\| \|\vec{u}\|}$$

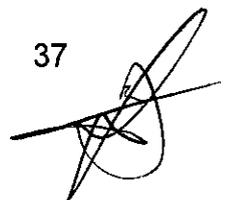


$$\rightarrow \nabla f(p_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(p_0)\| \cos \theta$$

Así pues tenemos otra versión de la derivada direccional:

$$D_{\vec{u}}f(p_0) = \|\nabla f(p_0)\| \cos \theta$$

Pero como :  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$



Multiplicamos  $\|\nabla f(p_0)\| \rightarrow -\|\nabla f(p_0)\| \leq \|\nabla f(p_0)\| \cos \theta \leq \|\nabla f(p_0)\|$

$$-\underbrace{\|\nabla f(p_0)\|}_{\text{mínimo valor de la derivada direccional}} \leq \underbrace{D_u f(p_0)}_u \leq \underbrace{\|\nabla f(p_0)\|}_{\text{máximo valor de la derivada direccional}}$$

Obtenemos las siguientes interpretaciones:

a) La derivada direccional de  $f$  en  $P_0$  alcanza su máximo valor en la dirección del gradiente de  $f$  en  $P_0 : \nabla f(P_0)$ . O también se dice que  $f$  crece más rápidamente en la dirección del gradiente de  $f$  en  $P_0 : \nabla f(P_0)$ .

b) La derivada direccional de  $f$  en  $P_0$  alcanza su mínimo valor en la dirección del opuesto del gradiente de  $f$  en  $P_0 : -\nabla f(P_0)$ . O también se dice que  $f$  decrece más rápidamente en la dirección del opuesto del gradiente de  $f$  en  $P_0 : -\nabla f(P_0)$ .

## 1.7 VALORES EXTREMOS Y PUNTOS SILLA PARA FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES.

### 1.7.1 VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN REAL DEL 2 VARIABLES.

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en la región  $D$ . Diremos que  $f(a,b)$  es el valor máximo absoluto de  $f$ , si se cumple:

$$f(x,y) \leq f(a,b), \forall (x,y) \in D. \quad (\text{Mitacc, 1999, p.193})$$

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en la región  $D$ . Diremos que  $f(c,d)$  es el valor mínimo absoluto de  $f$ , si se cumple:

$$f(c,d) \leq f(x,y), \forall (x,y) \in D. \quad (\text{Thomas y Finney, 1999})$$

**Ejemplo:** Sea  $z = f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$

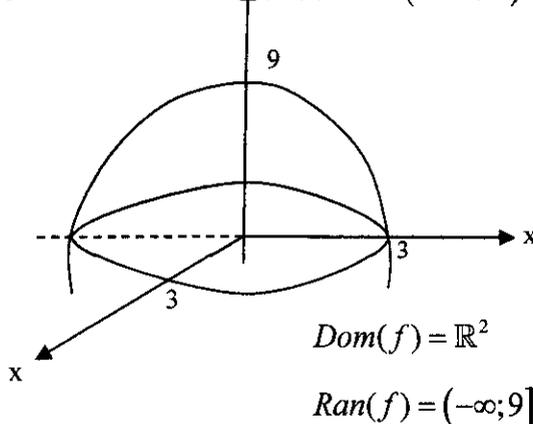
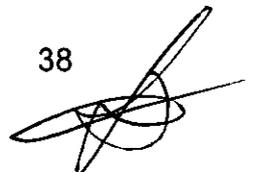


Fig. N° 1.20 Gráfica de la función  $z = f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$



Valor máximo absoluto:  $9 = f(0;0)$  "Techo"

**Ejemplo:**  $z = f(x; y) = x^2 + y^2$  .  $Dom(f) = \mathbb{R}^2$  ;  $Ran(f) = [0; +\infty)$

Valor mínimo absoluto:  $0 = f(0;0)$  "piso"

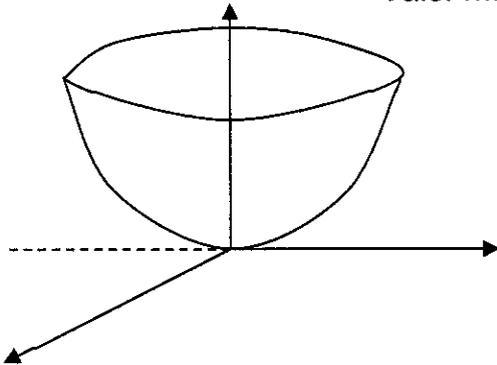


Fig. N° I .21 Gráfica de la función  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Ahora si se quiere que  $f$  tenga ambos; valor máximo absoluto y valor mínimo absoluto se debe imponer las condiciones que establece el siguiente teorema.

**Teorema:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; una función continua en el conjunto cerrado y acotado  $D \rightarrow f$  tiene valor máximo absoluto y asimismo tiene valor mínimo absoluto en puntos de  $D$ .

**Ejemplo:**  $z = f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$  .  $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 36\}$  .  $Ran(f) = [0; 6]$

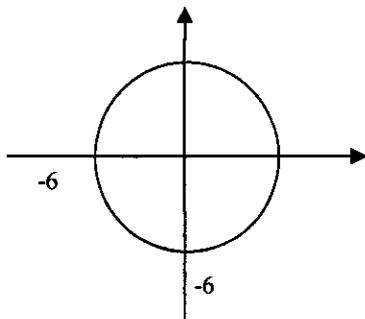
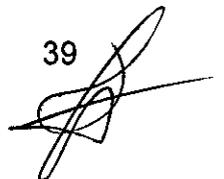


Fig. N° I .22 Disco cerrado, dominio de la función  $z = f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

Y como  $f$  es continua en el conjunto cerrado y acotado entonces  $f$  tiene valor máximo absoluto :  $f(0,0)=6$ . Y asimismo  $f$  tiene valor mínimo absoluto entonces  $0=f(t,s) / t^2+s^2=36$ . Se muestra la gráfica de  $f$ :



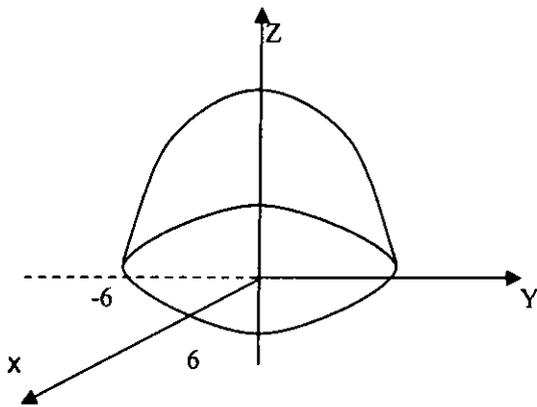


Fig N° 1.23 Grafica de la función que es acotada.

### 1.7.2 VALORES EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN REAL DE DOS VARIABLES.

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en la región  $D$ .

Diremos que  $f(a,b)$  es un valor máximo relativo si existe un disco abierto  $B((a,b), \delta) \subset D$ ; tal que:

$$f(a,b) \geq f(x,y); \forall (x,y) \in B((a,b), \delta) \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.970)}$$

**Definición:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función definida en la región  $D$ . Diremos que

$f(c,d)$  es un valor mínimo relativo si existe un disco abierto  $B((c,d), \epsilon) \subset D$  tal que

$$f(c,d) \leq f(x,y); \forall (x,y) \in B((c,d), \epsilon) \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.970)}$$

Interpretación geométrica:

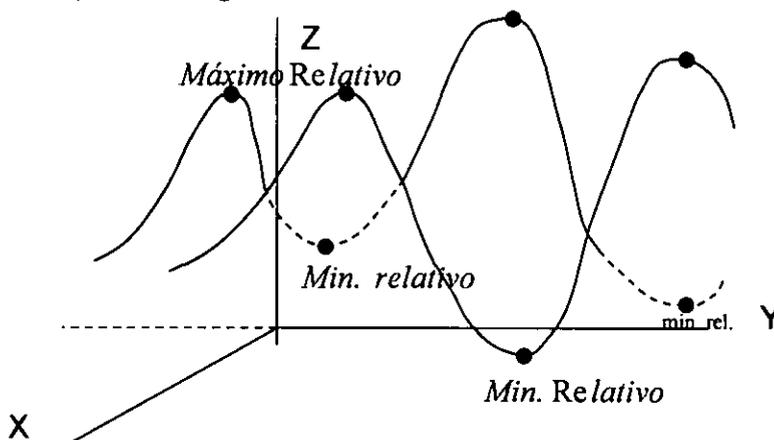
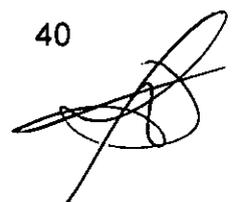


Fig. N° 1.24 Grafica de una función con valores extremos relativos.

### TEOREMA (Prueba de la primera derivada para valores extremos).

Si  $f(x,y)$  tiene un valor máximo o mínimo relativo (local) en un punto interior  $(a,b)$  de su dominio y si las primeras derivadas parciales existen ahí, entonces  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

### 1.7.3 PUNTO CRÍTICO

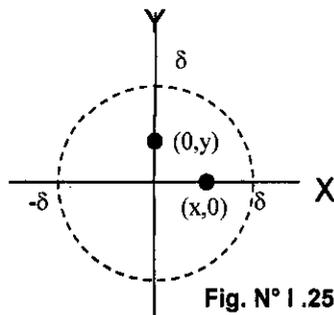


**Definición.-** Un punto interior  $(a;b)$  del dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  de una función  $f$  donde  $f_x, f_y$  son cero o donde una o ambas de  $f_x$  y  $f_y$  no existen, se denomina punto crítico de  $f$ . (Thomas y Finney,p.971)

### 1.7.4 PUNTO SILLA

**Definición.-** Sea una función  $f$  definida en una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  y asimismo sea  $(a,b)$  un punto crítico de  $f$ . Diremos que  $(a,b;f(a,b))$  es un punto silla de  $f$ , si para todo disco abierto  $B((a,b);e)$  existen puntos  $(x,y)$  de tal disco, tal que  $f(a,b) \geq f(x,y)$ , y asimismo existen puntos  $(x',y')$  de tal disco tal que  $f(a,b) \leq f(x',y')$ . ( Thomas y Finney, 1999,p.971)

**Ejemplo:** Sea  $z=f(x,y)=y^2-x^2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow (0;0)$  es un punto crítico de  $f$ , y su valor  $f(0,0)=0$ .



$$f(x,0) = -x^2 < 0 = f(0,0) \text{ "gana"}$$

$$f(0,y) = y^2 > 0 = f(0,0) \text{ "pierde"}$$

Fig. N° I .25 Gráfica de un disco con centro en  $(0;0)$ .

$\rightarrow (a,b,f(a,b)) = (0,0;f(0,0)) = (0,0,0)$  es un punto silla de la superficie  $z=f(x,y)=y^2-x^2$

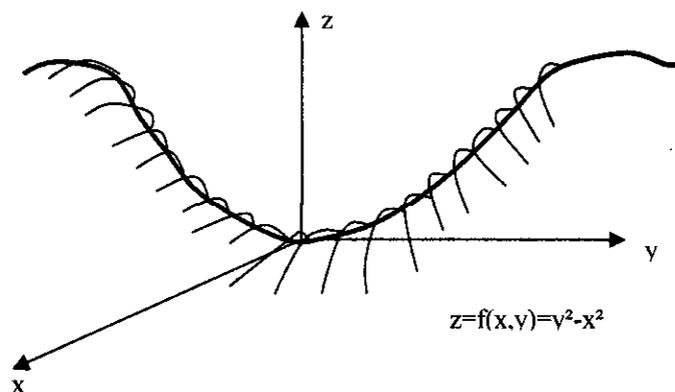
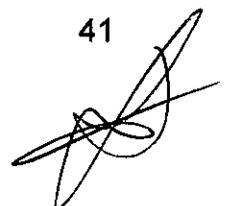


Fig. N° I .26 Gráfica de una función con punto silla.



### 1.7.5 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS

**Teorema:** Sea  $f(x,y)$  definida en la región  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$  sean continuas en un disco abierto  $B((a,b);\delta) \subset D$ , siendo  $(a,b)$  punto crítico de  $f$ , y asimismo definimos el discriminante de  $f$  en  $(a,b)$  a

$$\Delta = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b) - \left( \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(a,b) \right)^2 ; \text{ entonces}$$

$$1. \text{-Si } \Delta = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b) - \left( \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(a,b) \right)^2 > 0$$

y  $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) > 0 \rightarrow f(a,b)$  es un valor mínimo relativo.

2. Si  $\Delta = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b) - \left( \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(a,b) \right)^2 > 0$  y  $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) < 0 \rightarrow f(a,b)$  es un valor máximo relativo.

$$3. \text{Si } \Delta = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b) - \left( \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(a,b) \right)^2 < 0$$

$\rightarrow (a,b;f(a,b))$  es un punto silla de la superficie  $z=f(x,y)$

$$4. \text{Si } \Delta = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b) \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b) - \left( \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(a,b) \right)^2 = 0, \text{ no se puede precisar.}$$

### 1.8 EJEMPLOS DE APLICACION

**Problema1:** Determine los valores extremos locales y/o puntos silla si los hubiera para  $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y + 20$

Solucion:

Determinemos los puntos críticos

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 18x + 15 = 0 \rightarrow (x+1)(x+5) = 0 \leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y - 9 = 0 = 3(y^2 - 2y - 3) = 0 \leftrightarrow (y-3)(y+1) = 0 \leftrightarrow y = 3 \vee y = -1$

Puntos críticos:  $P_1 = (-1,3)$ ;  $P_2 = (-1,-1)$ ;  $P_3 = (-5,3)$ ;  $P_4 = (-5,-1)$ .

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2; f_{xx} = 6x+18; f_{yy} = 6y-6 \Rightarrow \Delta = f_{xx}f_{yy} = (6x+18)(6y-6)$$

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

1. Si  $P_1 = (-1,3)$

$$\Delta(P_1) = (12)(12) = 144 > 0$$

$$f_{xx}(-1,3) = (-6+18) = 12 > 0$$

→  $f_{(-1,3)}$  es un valor mínimo relativo.

2. Si  $P_2 = (-1,-1)$

$$\Delta(P_2) = (12)(-12) = -144$$

$(-1,-1; f(-1,-1))$  es un punto silla.

3.  $P_3 = (-5;3)$

$$\Delta(P_3) = (-12)(12) = -144 < 0$$

→  $(-5;3; f(-5,3))$  es un punto silla.

4.  $P_4 = (-5,-1)$

$$\Delta(P_4) = (-12)(-12) = 144$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(-5,-1) = -12 < 0 \rightarrow f(-5,-1) \text{ es un valor máximo relativo.}$$

**PROBLEMA 2** Una panadería produce dos clases de galletas; la primera la vende a S/ 3 y la segunda a S/2. Si el ingreso total generado por la venta de x millares de galletas a S/3 y de y millares de galletas a S/2 está dado por  $I(x,y) = 3x + 2y$ ; y el costo total en miles de soles, resultante de producir x millares de galletas de S/3 e y millares a S/2 está dado por

$C(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 6y + 7$ . Encontrar que cantidad de cada tipo de galleta debe ser producido y vendido para maximizar la utilidad.

**SOLUCIÓN:**

La función utilidad es

$$U(x,y) = I(x,y) - C(x,y)$$

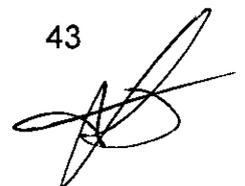
$$U(x,y) = 3x + 2y - (2x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 6y + 7)$$

$$U(x,y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 12x - 4y - 7$$

$$U_x = -4x + 2y + 12 = 0$$

$$U_y = -2y + 2x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = -12 \\ -2y + 2x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + y = -6 \\ -2y + 2x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$



Asimismo según el criterio de la segunda derivada

$$U_{xx} = -4; U_{yy} = -2; U_{xy} = 2$$

$$\Delta = U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2 = 4 > 0$$

de este modo  $U(4;2)=13$  ,es la máxima utilidad.

## 1.8.1 VALORES EXTREMOS CONDICIONADOS

### (Método de los multiplicadores de Lagrange)

**Maximizar o minimizar:**

Supongamos que  $f(x,y,z)$  y  $g(x,y,z)$  son diferenciables. Para encontrar los valores máximo y mínimo locales de  $f$  sujetos a la restricción  $g(x,y,z)=0$ . Encuentre los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\lambda$  que simultáneamente satisfacen las ecuaciones  $\nabla f = \lambda \nabla g$ ; y  $g(x,y,z)=0$  (Thomas & Finney, 1999)

; que equivale resolver a :

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = \lambda \frac{\delta g}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} = \lambda \frac{\delta g}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} = \lambda \frac{\delta g}{\delta z} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Para funciones de dos variables independientes; las ecuaciones apropiadas son  $\nabla f = \lambda \nabla g$ ;  $g(x,y) = 0$ , o equivalentemente, resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

**Problema :** Se quiere instalar un radio telescopio en un planeta recién descubierto donde el campo magnético es  $M(x,y,z)=6x-y^2+xz+60$ , Si se considera el centro del planeta con el origen de coordenadas. Determine en que posición se debe instalar para minimizar la interferencia.

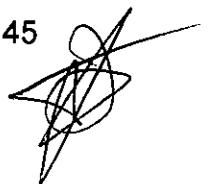
**Solución:**

Queremos

Minimizar  $M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$ ; sujeto a la condición  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

O sea minimizar  $M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$ , sujeta a  $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 36}_{g(x,y,z)} = 0$

Para ello hay que resolver



$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} & 6+z=\lambda 2x \\ \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} & -2y=\lambda 2y \\ \frac{\partial M}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} & x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ g(x; y; z) = 0 & \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36 \end{cases}$$

$$\rightarrow 6+z=2\lambda x \dots\dots\dots(1)$$

$$-y = \lambda y \dots\dots\dots (2)$$

$$x = \lambda 2z \dots\dots\dots (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{De (2)} \quad 0 = \lambda y + y = y(\lambda + 1)$$

$$\text{a) Si } y=0; \lambda = -1, \text{ en (3) } x = -2z$$

$$\text{En (1)} \quad 6+z = -2(-2z) = 4z$$

$$\rightarrow 6 = 3z$$

$$z = 2 \rightarrow x = -4$$

$$\text{En (4)}$$

$$16+y^2+4=36 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$P_1 = (-4, \pm 4, 2)$$

$$\text{b) Si } \lambda \neq -1, y = 0$$

$$\text{De (3)} \quad \lambda = \frac{x}{2z}$$

$$\text{De (1)} \quad \lambda = \frac{6+z}{2x}$$

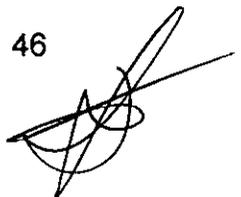
$$\frac{x}{2z} = \frac{z+6}{2x} \rightarrow x^2 = z^2 + 6z$$

$$\text{En (4)}$$

$$2z^2 + 6z - 36 = 0$$

$$z^2 + 3z - 18 = 0$$

$$\rightarrow (z+6)(z-3) = 0 \begin{cases} \nearrow z = -6 \\ \searrow z = 3 \end{cases}$$



$$x^2=0 \rightarrow x=0 ; \quad x^2=27 \rightarrow x = \pm 3\sqrt{3}$$

Así pues  $P_1=(-4, \pm 4, 2)$ ;  $P_2=(0, 0, -6)$ ;  $P_3(\pm 3\sqrt{3}, 0, 3)$  son los puntos donde habrá que evaluar  $f$  para saber el valor mínimo. Como  $f(-4, \pm 4, 2)=12$ ; es el valor mínimo, se puede instalar el radiotelescopio en cualquiera de los puntos  $(-4, \pm 4, 2)$ .

### PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Determine si existen los siguientes límites:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 - 3y^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^5 + y^2}$

2) Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Determine si  $f$  es continua en  $(0, 0)$

3) Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule las siguientes derivadas parciales  $D_1f(0, 0)$  y  $D_2f(0, 0)$ .

b) ¿ $f(x, y)$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ?

4) Considere una función  $f(x, y)$  tal que  $\nabla f = (5x^4 + 3x^2y^2 - e^{2xy} 2y; 2yx^3 - e^{2xy} 2x - 2y)$  ;

$f(0; 0)=39$ . La Temperatura en un punto  $(x, y)$  de una placa metálica rectangular con centro en el origen está dado por :  $T(x, y) = f(x, y) + y^2 + e^{2xy}$

a) Determinar la dirección unitaria en que una hormiga debe ir partiendo del punto  $(1; -1)$  de la placa para que se enfríe lo más rápidamente posible.

b) ¿Cuál es la rapidez (derivada direccional) de la hormiga en esa dirección de la parte a).

5) Sea  $w=f(x, y, z)=x^2 + \cos(x+y) - z^3$ . Hallar la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P_0=(1; -1; 1)$  y en la dirección de un vector ortogonal a la superficie de nivel de  $f$  que contiene a  $P_0$ .

6) Una caja rectangular descansa en el plano  $XY$ , con uno de sus vértices en el origen, el otro vértice opuesto está en el plano  $6x+4y+3z=24$ . Hallar el volumen máximo de la caja.



## CAPITULO II

### INTEGRALES MÚLTIPLES

#### 2.1 INTEGRAL DOBLE

**Definición.-** Diremos que una región  $D$  es acotada si existe una región rectangular  $\mathfrak{R} = [a,b] \times [c,d]$  tal que  $D \subset \mathfrak{R}$ . (Mitacc, 1999, p.231)

Se observa  
que  $D$  es  
acotada.

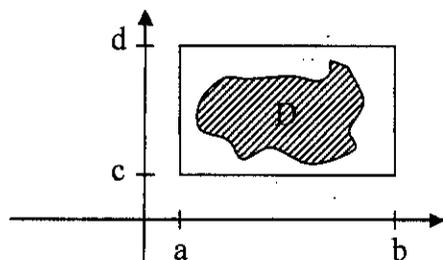


Fig. N° II .1 Gráfica de una región acotada en el plano.

**Integral Doble:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2$ , una función continua en la región  $D$  acotada.

La integral doble de  $f$  sobre  $D$  está dada por:

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_D f(x,y) dy dx = \iint_D f(x,y) dx dy; \text{ donde } dA: \text{diferencial de Área}$$

Integrales      Iteradas

**Observación 1:**

$$\text{Si } f(x,y) = 1; \forall (x,y) \in D \rightarrow \iint_D dA = \text{Área}(D)$$

**Observación 2:**

$$\text{Si } f(x,y) = 1; \forall (x,y) \in D$$

$$\rightarrow \iint_D f(x,y) dA = \text{Volumen}(U); \text{ donde } U \text{ es el sólido cuyo "techo" es } z = f(x,y)$$

y "piso" la región  $D$ .

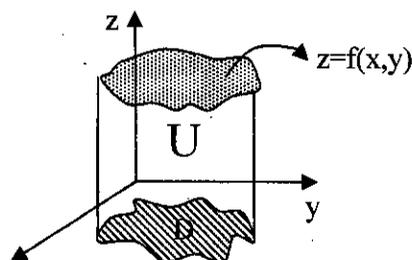


Fig. N° II .2 Gráfica del sólido  $U$  en el espacio.

**Ejemplo:** Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA, \text{ donde } D \text{ es la región limitada por las rectas } x+y=1; x=0; y=0$$

**Solución:** Reconocimiento de D

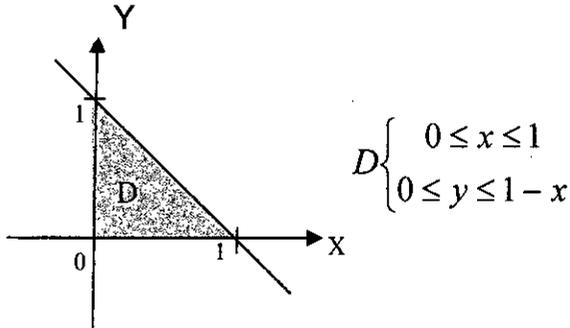


Fig. N° II.3 Gráfica de la región triangular de integración .

Reconocimiento del sólido

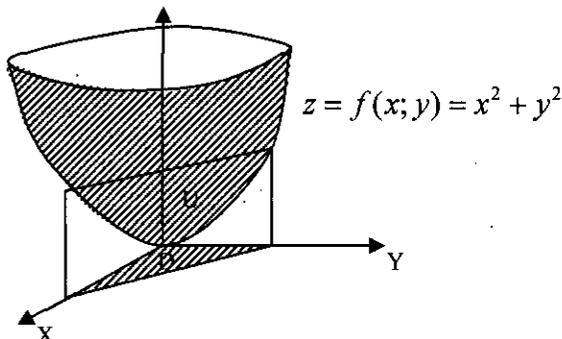


Fig. N° II.4 Gráfica del sólido U del que se obtendrá su volumen.

Así pues:

$$\text{Vol}(U) = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} (x^2 + y^2) dx dy$$

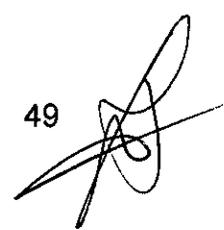
$$\text{Vol}(S) = \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[ x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] dx$$

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{3} \int_{x=0}^1 [3x^2 - 3x^3 + (1-x)^3] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 [3x^2 - 3x^3 - (x-1)^3] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 [3x^2 - 3x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (-4x + 6x^2 - 3x + 1) dx$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[ -x^4 + 2x^3 - \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \left[ -1 + 2 - \frac{3}{2} + 1 \right] = \frac{1}{3} \left[ 3 - \frac{5}{2} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6} \mu^3
\end{aligned}$$

## 2.2 CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES DOBLES

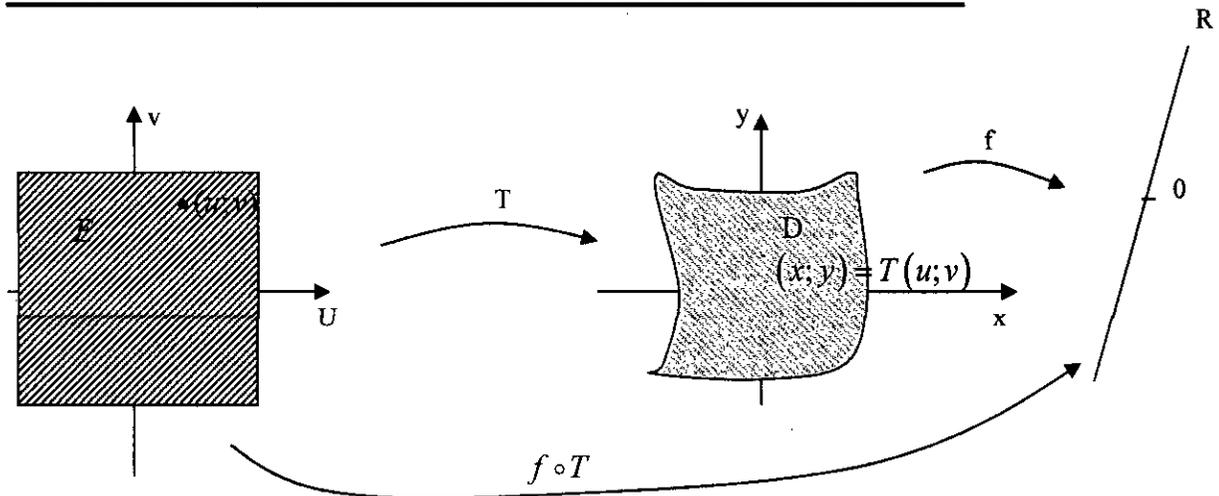


Fig. N° II.5 Gráfica del proceso de cambio de variable en integrales dobles.

En las integrales dobles hay regiones que no son fáciles de describir por lo cual surge la técnica de integral doble usando cambio de variable en la cual deben cumplirse ciertas condiciones. Para ello tenemos el siguiente teorema.

**Teorema:** Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua en la región acotada D. Asimismo considere la función (transformación):

$$T: E \rightarrow D$$

$$(u; v) \rightarrow T(u; v) = (x(u; v); y(u; v)); \text{ verificando los requisitos:}$$

1) T sea inyectiva.

2) T de clase  $C^1$   $\begin{cases} x_u & \text{sean continuas} \\ x_v & \text{en E} \\ y_u \\ y_v \end{cases}$

$$3) J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_E f(T(u, v)) |J(u, v)| dvdu = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dvdu$$

**Ejemplo:** Utilizando un cambio de variable adecuado, calcular  $\iint_D x dA$ ; donde D

es la región limitada por las curvas:  $x = -y$ ;  $x = 2y - y^2$ ;  $x = 2 - y^2 - 2y$ .

**Solución:**

$$x = 2y - y^2$$

$$-x = y^2 - 2y \rightarrow \begin{cases} \text{hacer } x = 0 \\ y = 0 \vee y = 2 \end{cases}$$

$$-x + 1 = (y - 1)^2 \rightarrow -(x - 1) = (y - 1)^2$$

Asimismo

$$-x = y^2 + 2y - 2$$

$$-x + 2 = y^2 + 2y \rightarrow -x + 3 = (y + 1)^2 \rightarrow -(x - 3) = (y + 1)^2$$

**Reconocimiento de D**

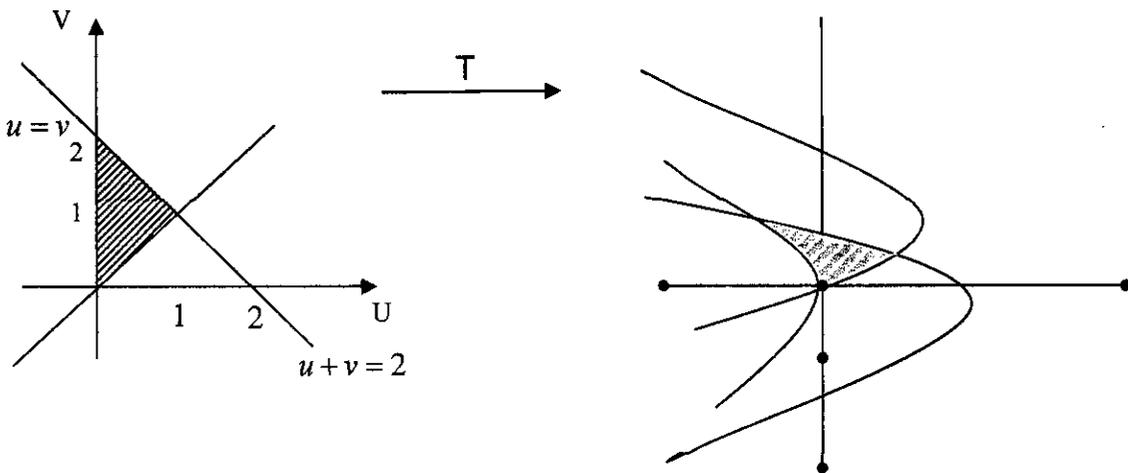
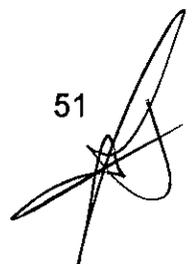


Fig. N° II .6 Gráfica del proceso de cambio de variable para el ejemplo.

Si consideramos  $x = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-2)}}{2}$

$$\Rightarrow y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} -1 + \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$



Ahora:

$$D \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ x + y^2 = 2y \\ x + y^2 = 2 - 2y \end{cases}$$

Hagamos el cambio de variable:  $u = x + y^2$ ;  $v = 2y$  ..... (\*)

$$E \begin{cases} u = 0 \\ u = v \\ u = 2 - v \end{cases} \Leftrightarrow E \begin{cases} u = 0 \\ u = v \\ u + v = 2 \end{cases}$$

Determinación de T:

Retomemos (\*):  $u = x + y^2$ ;  $v = 2y \Rightarrow y = v/2$

$$\Rightarrow u = x + \frac{v^2}{4} \Rightarrow x = u - \frac{v^2}{4} \quad \therefore T(u, v) = \left( u - \frac{v^2}{4}; \frac{v}{2} \right)$$

Así pues:

$$\iint_D x dA = \iint_E \left( u - \frac{v^2}{4} \right) |J(u, v)| dv du$$

Se considera:

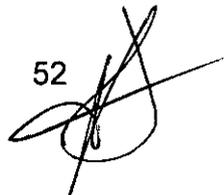
$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{v}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

concluyendo:

$$\iint_D x dA = \frac{1}{2} \iint_E \left( u - \frac{v^2}{4} \right) dv du = \frac{1}{2} \int_{u=0}^1 \int_{v=-u}^{2-u} \left( u - \frac{v^2}{4} \right) dv du = \frac{1}{48}$$

### 2.2.1 CASO PARTICULAR DE CAMBIO DE VARIABLE

**COORDENADAS POLARES:** Cuando la región de integración es una región circular o parte de ella conviene usar la técnica de cambio de variable usando coordenadas polares.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad J(r, \theta) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = r^2. \text{ Además: } \frac{y}{x} = \tan(\theta) \quad ; \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Así pues por el teorema de cambio de variable en integrales dobles:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_E f(r\cos\theta; r\sin\theta) r dr d\theta$$

**Ejemplo:** Calcular  $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx$

**Solución:**

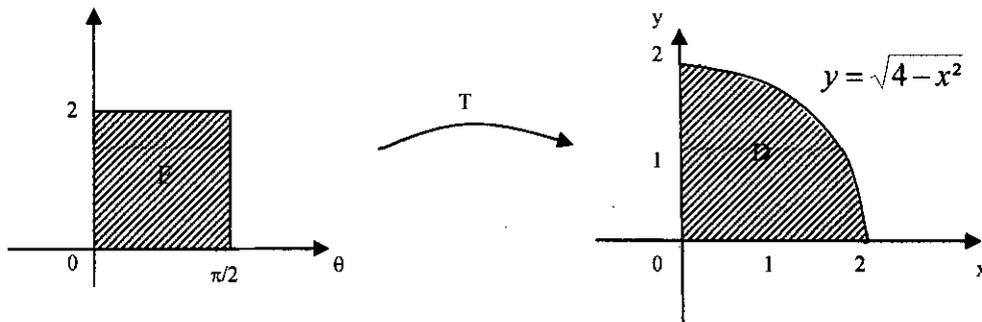


Fig. N° 11.7 Gráfica del proceso de cambio de variable en coordenadas polares donde  $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

observe que  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} > 0; \forall (x, y) \in D$

$$Vol(S) = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^2 e^{-r^2} r dr d\theta \rightarrow Vol(S) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-4}) \mu^3$$

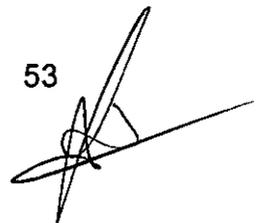
**PROBLEMA:** Calcular  $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ ; donde D es la región:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}$$

**Ejemplo:** Trace la región de integración y escriba una integral doble equivalente con el orden de integración invertido para :

a)  $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy dx$

b)  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy dx$



Solución (a):  $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy dx = \int_2^4 \int_0^{\frac{4-y}{2}} dx dy$

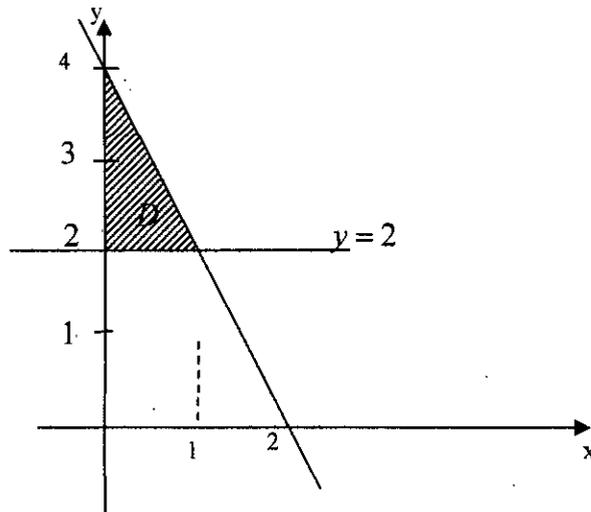


Fig. N° II .8 Gráfica del cambio de orden de integración para el caso a).

Area D:  $2 \leq y \leq 4-2x$ ; osea desde  $y=2$ , hasta  $y=4-2x$

Caso(b)  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=1-y}^{\sqrt{1-y}} dx dy$

$1-x \leq y \leq 1-x^2$ ; desde  $y=1-x$ ; hasta  $y=1-x^2$

$x+y=1$ , hasta  $x^2=1-y \rightarrow x^2=-(y-1)$

Hacer lo mismo para :  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y dx dy$

**Solución:**  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y dx dy = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} 3y dy dx$

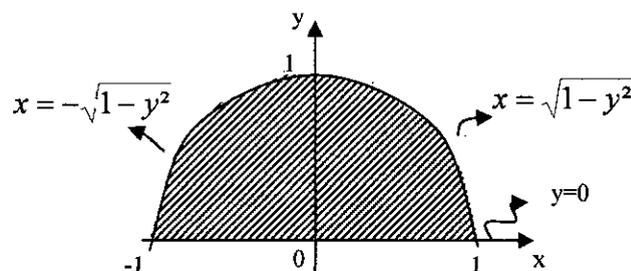


Fig. N° II .9 Gráfica del cambio de orden de integración para el caso b).

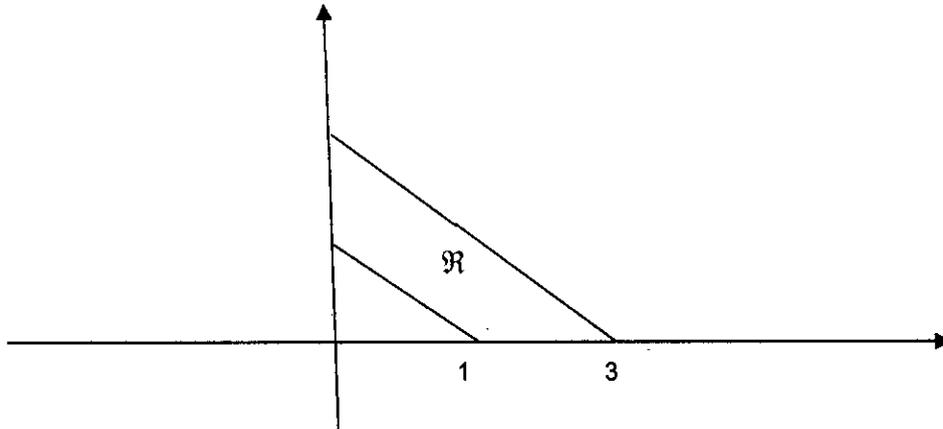
**Ejemplo:** Hallar el volumen de la región que se encuentra bajo el paraboloido

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; y arriba del trapecio encerrado por las rectas  $x+y=1$ ;  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $x+y=2$

en el plano XY.



**Solución:** Consideremos la región de integración



Cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (superficie). Formando el sólido S:

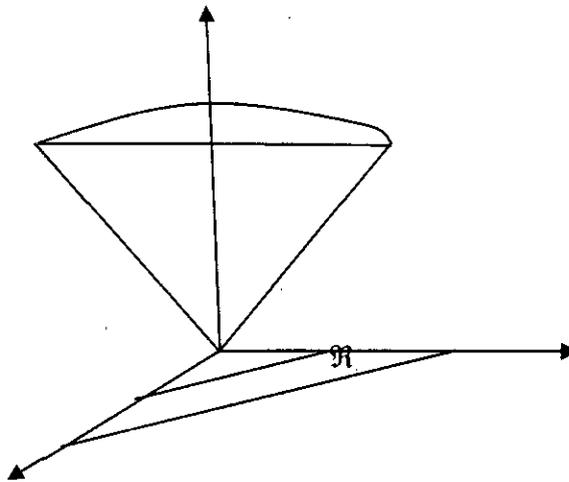


Fig. N° II .10 Gráfica del sólido formado debajo del cono.

Forma general:

$$Vol(S) = \iint_{\mathfrak{R}} (x^2 + y^2) dA$$

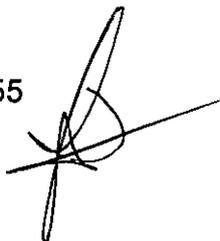
Forma iterada

$$Vol(S) = \int_0^1 \int_{y=1-x}^{3-x} (x^2 + y^2) dy dx + \int_1^3 \int_{y=0}^{3-x} (x^2 + y^2) dy dx$$

considerando dos subregiones que conforman  $\mathfrak{R}$ .

**Problema:** Determinar el volumen de la regio espacial en el primer octante acotado por los planos coordenados, la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = 4$ , y el plano de ecuación  $z^2 + y^2 = 3$ .

**Solución:**



Superficie cilíndrica:  $x^2 + y^2 = 4$  , plano  $z + y = 3$

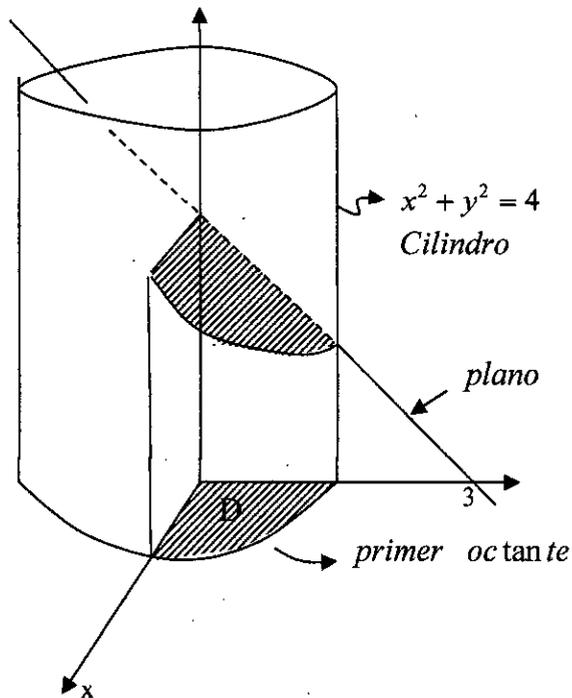
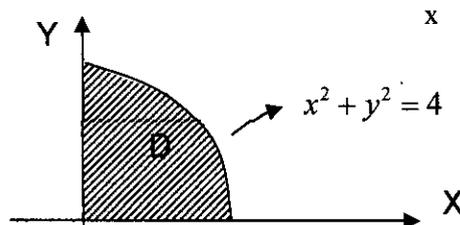


Fig. N° II.11 Gráfica del sólido formado debajo del plano y dentro del cilindro, Reconozcamos la región de integración

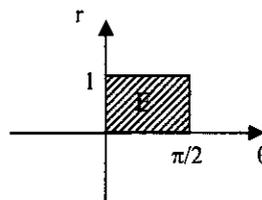
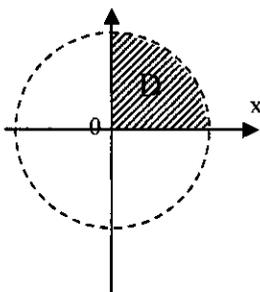


$$Vol(S) = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} (3-y) dy dx$$

**Ejemplos de cambio de variable a coordenadas polares.**

Ejercicio: En cada uno de los casos, cambie la integral cartesiana a una integral polar equivalente.

a)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \rightarrow \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 r^3 dr d\theta$



$$b) \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} \int_{r=0}^1 \frac{4r^2}{1+r^2} dr d\theta$$

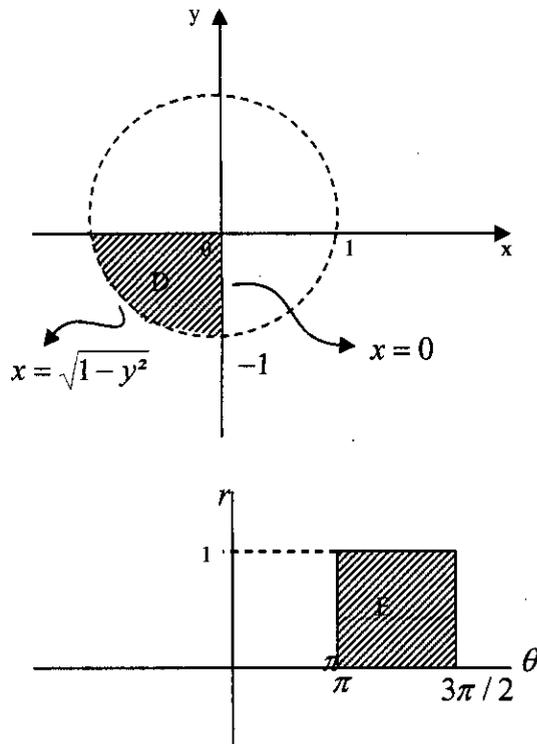


Fig. N° II.12 Gráfica del cambio de cartesianas a polares.

### PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Calcular cada una de las integrales dobles:

$$a) \int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3} dy dx$$

$$b) \int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \operatorname{sen}(x) dx dy$$

2) Calcule el volumen de la región U en el espacio que está arriba del plano  $z=y$ , debajo del plano  $z=2y$ ; y dentro del cilindro  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ .

3) Trazar la región sobre la que se está integrando en cada caso y luego calcule.

$$a) \int_0^{\frac{\theta}{2\pi}} \int_0^{\frac{\theta}{2\pi}} \int_0^{3+24r^2} dz r dr d\theta$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{\cos \theta} dz r dr d\theta$$

4) Problema: Calcular el volumen determinado por las superficies en cada caso:

a)  $y = 4 - x^2$ ;  $z = 4 - x^2$ , en el primer octante

b)  $z = x + y$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ , en el primer octante.

5) Halle el volumen del sólido U limitado por: los planos  $x=0$ ;  $y=0$ ; el paraboloides  $z = x^2 + y^2 + 10$ ; su plano tangente en el punto  $(1;1;12)$  y el plano  $x+2y=7$ .

6) Calcular el volumen de la región U, donde U es interior a la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4; z \geq 0 \text{ y exterior al cilindro } (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

7) Calcule  $\iint_D x^2 y^2 dA$ ; siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada

entre las hipérbolas  $xy = 1$ ;  $xy = 2$ ; y las líneas rectas  $y = x$ ;  $y = 4x$ .

8) La forma de una placa, ubicada en el primer cuadrante del plano XY, queda limitada por las parábolas:  $y^2 = 2x$ ;  $y^2 = 8x$ ; y las hipérbolas  $xy = 3$ ;  $xy = 9$ . Determine la masa de placa, si la densidad en cada punto  $(x; y)$  de ella está dada por  $\delta(x; y) = xy$ .

## 2.3 INTEGRALES TRIPLES

Definición.- Diremos que la región  $U$  del espacio es acotada, si existe un paralelepípedo rectangular  $T = [a; b] \times [c; d] \times [e; f]$ , tal que  $U \subset T$ .

(Mitacc, 1999, p.292)

### Integral Triple

Sea  $f(x, y, z)$  una función continua en una región  $U \subset \mathbb{R}^3$ , siendo  $U$  una región acotada en el espacio. La integral triple de  $f$  sobre  $U$  está dada por:

$$\iiint_U f(x, y, z) dV$$

Observación: Si  $f(x, y, z) = 1$  entonces  $\iiint_U f(x, y, z) dV = Vol(U)$

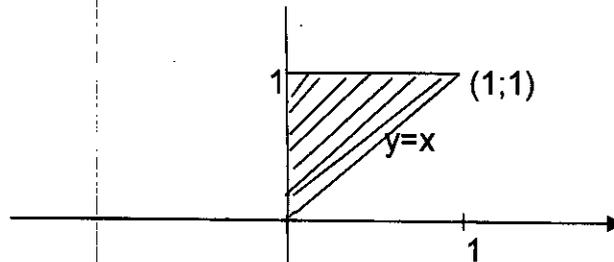
### INTEGRALES ITERADAS

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_U f(x, y, z) dz \underbrace{dy dx}_{\text{Piso}} = \iiint_U f(x, y, z) dz \underbrace{dx dy}_{\text{Piso}} \quad (\text{ok})$$

$$\iiint_U f(x, y, z) dy dz dx = \iiint_U f(x, y, z) dy dx dz = \iiint_U f(x, y, z) dx dz dy = \iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$$

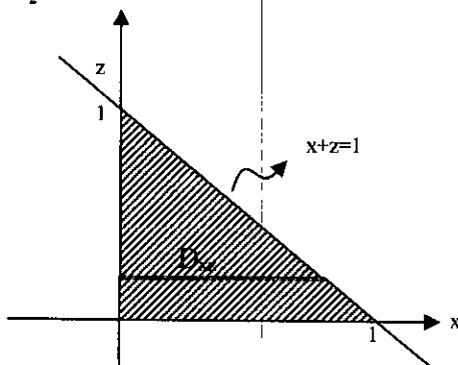
Ejemplo: Establezca los límites de integración para evaluar la integral triple de una función  $f(x, y, z)$  sobre el tetraedro  $U$  con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 1, 1)$ .

Solución: Proyección de  $U$  sobre el plano  $XY$



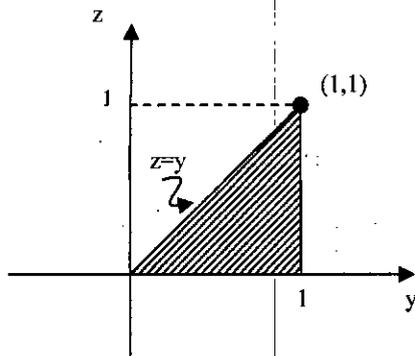
$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^y \int_{x=0}^{y-z} f(x, y, z) dx dz dy = \int_{z=0}^1 \int_{y=z}^1 \int_{x=0}^{y-z} f(x, y, z) dx dy dz$$

Proyección de  $U$  sobre el plano  $XZ$



$$\iiint_R f(x, y, z) dv = \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^{1-x} \int_{y=z+x}^1 f(x, y, z) dy dz dx = \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{1-z} \int_{y=x+z}^1 f(x, y, z) dy dx dz$$

Asimismo proyecto U sobre el plano ZY



**Ejemplo:** Escriba integrales triples iteradas diferentes para el volumen de la región U en el primer octante encerrada por el cilindro  $x^2+z^2=4$ , y el plano  $y=z$ .

**Solución**

Cilindro

$$x^2 + z^2 = 4$$

Referencial

$$x^2 + y^2 = 4$$

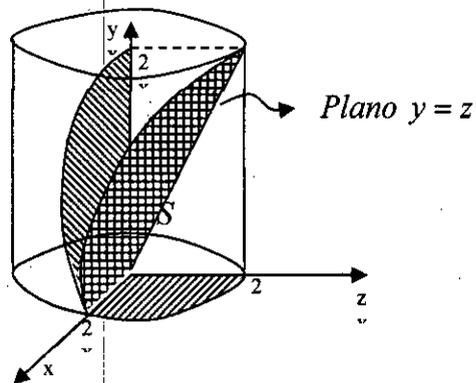
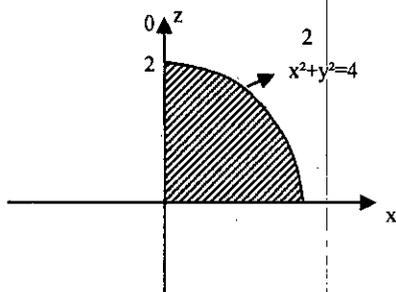


Fig. N° II .13 Gráfica del sólido formado dentro del cilindro y debajo del plano.

$$Vol(S) = \int_{x=0}^2 \int_{z=0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{y=0}^z \underbrace{dy}_{\text{Piso}} \underbrace{dz}_{\text{Piso}} \underbrace{dx}_{\text{Piso}} = \int_{z=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{y=0}^z \underbrace{dy}_{\text{Piso}} \underbrace{dx}_{\text{Piso}} \underbrace{dz}_{\text{Piso}}$$

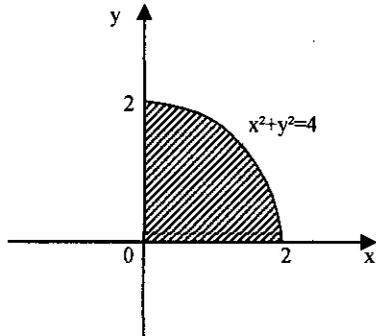
**Proyección sobre el plano XZ**



$$Vol(S) = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \underbrace{\int_{z=4}^{\sqrt{4-x^2}} dz}_{Piso} dy dx$$

$$= \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} \underbrace{\int_{z=y}^{\sqrt{4-x^2}} dz}_{Piso} dx dy$$

**Proyección sobre el plano XY**



$$Vol(S) = \int_{y=0}^2 \int_{z=y}^2 \underbrace{\int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} dx}_{piso} dz dy$$

$$= \int_{z=0}^2 \int_{y=0}^z \underbrace{\int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} dx}_{Piso} dy dz$$

## 2.4 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

**Teorema.-** Sea  $f(x,y,z)$  una función continua en una región acotada  $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^3$ . Sea asimismo una función  $T$  (llamada transformación) tal que:

$$T: E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u; v; w) \rightarrow T(u; v; w) = (x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w))$$

Cumpliendo los requisitos:

- 1)  $T$  sea inyectiva.
- 2)  $T$  sea de clase  $C^1$ : osea que  $x_u, x_v, x_w, y_u, y_v, y_w, z_u, z_v, z_w$

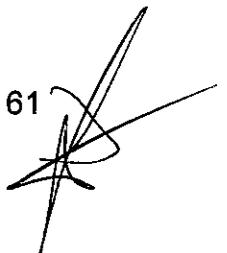
Sean continuas en  $E$ .

$$3) J(u; v; w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces:

$$\iiint_{\mathfrak{R}} f(x, y, z) dv = \iiint_E (f \circ T)(u, v, w) |J(u, v, w)| dw dv du$$

$$= \iiint_E f[x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w)] |J(u, v, w)| dw dv du$$



**Casos que nos van a interesar de preferencia:**

- a) Coordenadas cilíndricas      b) Coordenadas esféricas

**2.5 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS**

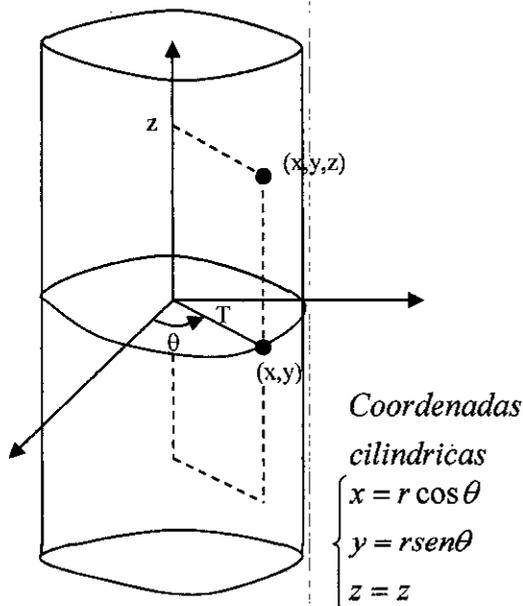
Cuando un cálculo en Física, Ingeniería o geometría implica un cilindro, un cono o una esfera, a menudo podemos simplificar nuestro trabajo si usamos coordenadas cilíndricas o esféricas. (Thomas y Finney, 1999, p.1039)

**2.5.1) Coordenadas cilíndricas.**

Las coordenadas cilíndricas son apropiadas para describir cilindros cuyos ejes coinciden con el eje Z y planos que contienen al eje Z o bien son perpendiculares a él.

$$\begin{cases} r = 4 & ; \text{cilindro, radio } 4 \\ \theta = \frac{\pi}{3} & ; \text{Plano que contiene al eje Z} \\ z = 2 & ; \text{Plano perpendicular al eje Z} \end{cases}$$

Consideremos el cilindro solido



Ahora el Jacobiano:

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \text{Sen} \theta & 0 \\ \text{Sen} \theta & r \text{Cos} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \text{Sen} \theta \\ \text{Sen} \theta & r \text{Cos} \theta \end{vmatrix} = r$$

Fig. N° II .14 Grafica que indica el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Así pues:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(r \text{Cos} \theta; r \text{Sen} \theta; z) r . dz . dr . d\theta$$

Si  $f(z, y, z) = 1, \forall (x; y; z) \in R \Rightarrow \iiint_R dV = \iiint_E r dz dr d\theta = Vol(R)$

**Ejemplo:** Identificar en cada caso la región sobre la que se está integrando en el espacio  $\theta r z$ , y luego en el sistema XYZ.

1)  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz r dr d\theta = Vol(R)$

Solución:  $r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$ , Desde  $z = r$  hasta  $z = \sqrt{2-r^2}$

Desde  $z = r$  hasta  $r^2 + z^2 = 2$

(plano) (cilindro)

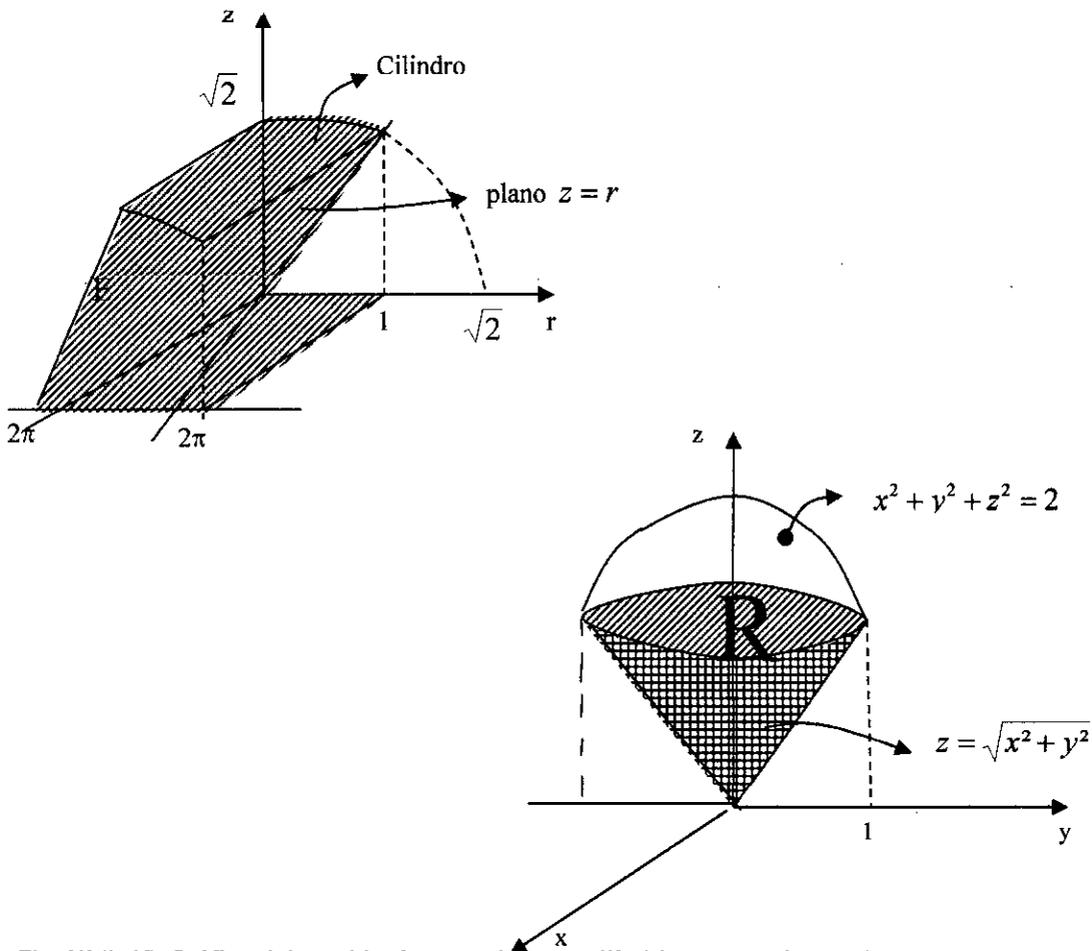


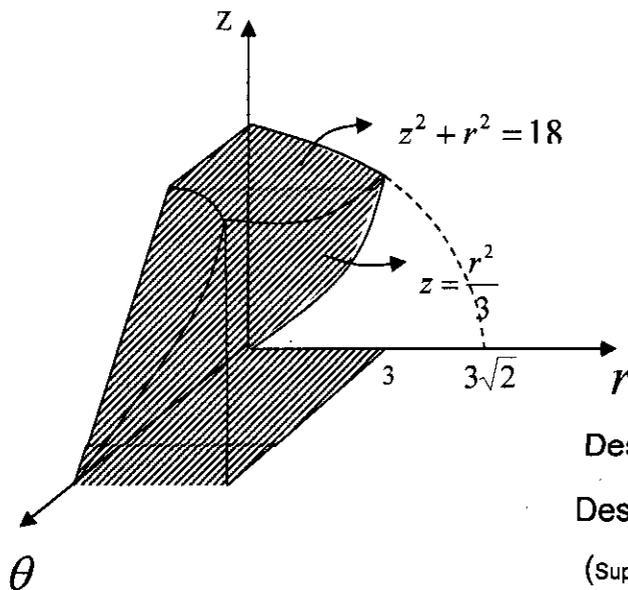
Fig. N° II .15 Gráfica del cambio de cartesianas a cilíndricas para el caso 1.

Desde  $z = r$  hasta  $z = \sqrt{2-r^2}$

Desde  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  hasta  $z = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

Desde  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  hasta  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

$$2) \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz r dr d\theta$$



Desde  $z = r^2/3$  hasta  $z = \sqrt{18-r^2}$

Desde  $z = r^2/3$  hasta  $z^2 + r^2 = 18$

(Superficie Cilindrica)

(Superficie Cilindrica)

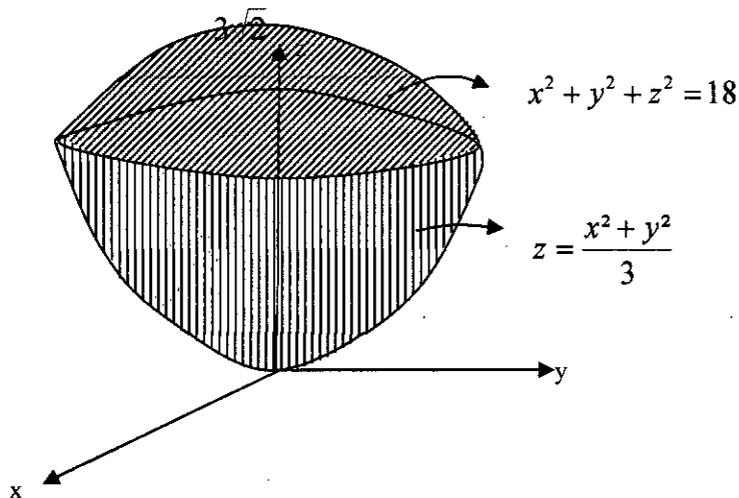


Fig. N° II .16 Gráfica del cambio de cartesianas a cilíndricas para el caso 2.

Desde  $z = r^2/3$  hasta  $z = \sqrt{18-r^2}$

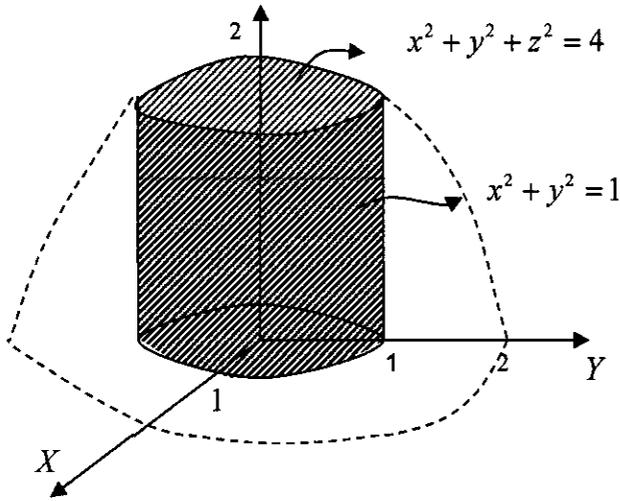
Desde  $z = \frac{(x^2 + y^2)}{3}$  hasta  $z = \sqrt{18-(x^2 + y^2)}$

Desde  $z = \frac{(x^2 + y^2)}{3}$  hasta  $x^2 + y^2 + z^2 = 18$

Ejemplo: Sea U la región limitada abajo por el plano  $z = 0$ , arriba por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ; y lateralmente por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Establezca las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de U, usando las siguientes órdenes de integración.

a)  $dzdrd\theta$

b)  $drdzd\theta$



$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta = Vol(R) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{3}} \int_{r=0}^1 r dr \underbrace{dz d\theta}_{\text{piso}} + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=\sqrt{3}}^2 \int_{r=0}^{\sqrt{4-z^2}} r dr \underbrace{dz d\theta}_{\text{piso}}$$

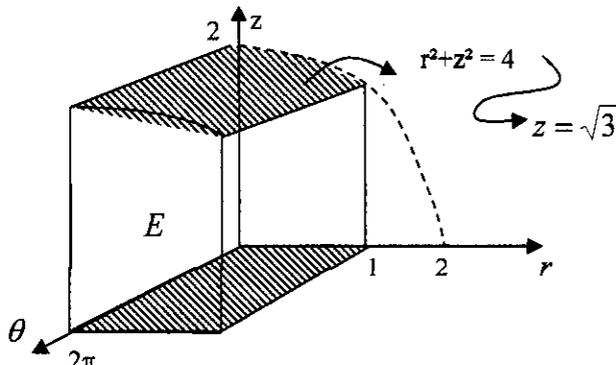
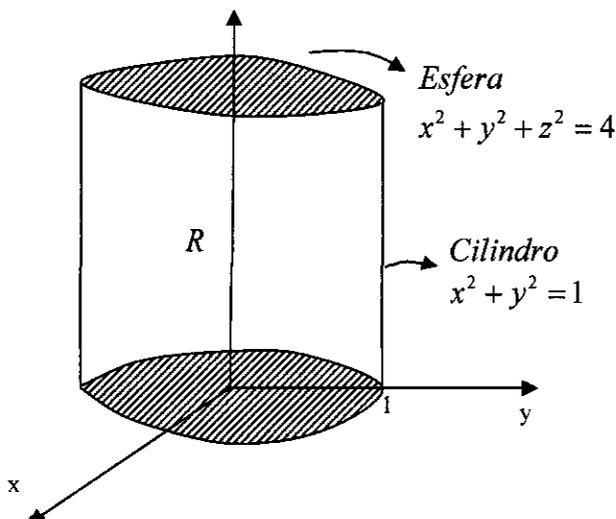
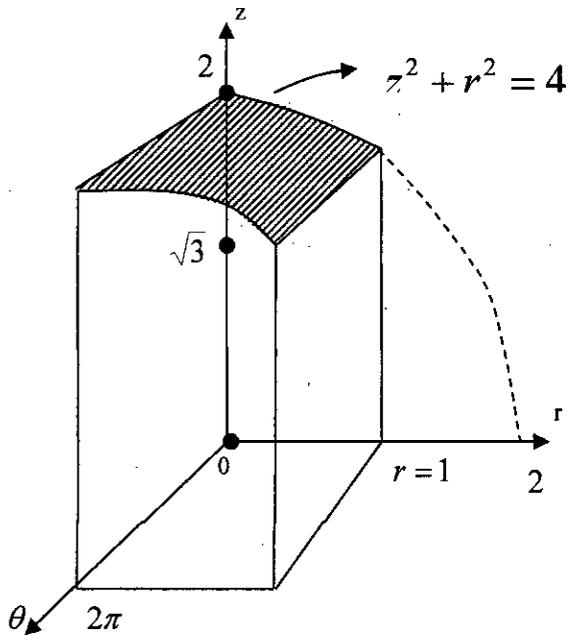


Fig. N° II .17 Gráfica del cambio de cartesianas a cilíndricas para el ejemplo.

Desde  $z = 0$  hasta  $z = \sqrt{4-r^2}$  . Plano  $\theta r : z^2 + r^2 = 4$

b)





$$Vol(R) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$$

En la tercera integral:

$$z = 0 \text{ fvg1 hasta } z = \sqrt{4-r^2}$$

osea  $z = 0$  hasta  $\underbrace{z^2 + r^2 = 4}_{\text{superficie cilndrica}}$

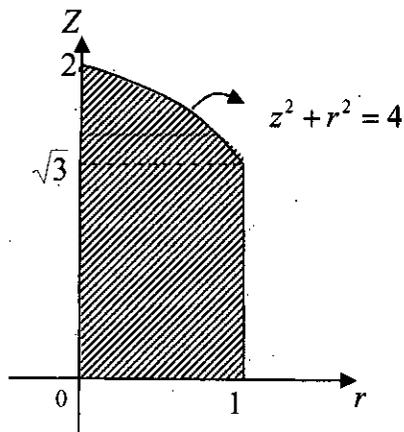
Utilizando otro orden de integraci3n:

$$Vol(R) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{3}} \int_{r=0}^1 r dr dz d\theta + \int_{z=\sqrt{3}}^2 \int_{r=0}^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta$$

Al reemplazar:  $r=1$  en  $z^2 + r^2 = 4 \rightarrow z = \sqrt{3}$

Utilizando otro orden de integraci3n:

$$Vol(R) = \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta}_{\text{piso}} dz dr$$



2.5.2. COORDENADAS ESFERICAS: Consideremos la esfera sòlida de radio

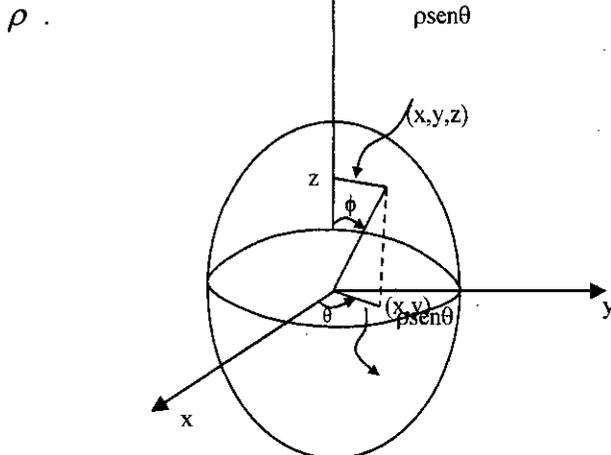


Fig. N° II .18 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas .

Coord.	{	$x = \rho \text{Sen} \phi \text{Cos} \theta$	}	Capacidades:
Esféricas		$y = \rho \text{Sen} \phi \text{Sen} \theta$		$0 \leq \theta \leq 2\pi$
		$z = \rho \text{Cos} \phi$		$0 \leq \phi \leq \pi$ (Rotativo)
				$0 \leq \rho$

$T(\rho, \phi, \theta) = [x(\rho, \phi, \theta), y(\rho, \phi, \theta), z(\rho, \phi, \theta)] = (\rho \text{Sen} \phi \text{Cos} \theta, \rho \text{Sen} \phi \text{Sen} \theta, \rho \text{Cos} \phi)$

Asimismo:

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{vmatrix} = \rho^2 \text{Sen} \phi$$

Finalmente:  $\iiint_R f(x, y, z) dv = \iiint_E \rho^2 \text{Sen} \phi d\rho d\phi d\theta$

**Ejemplo:** Evalúe las integrales en coordenadas esféricas. ¿Puede identificar la región sobre la que está integrando?

a)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (\rho \text{Cos} \phi) \rho^2 \text{Sen} \phi d\rho d\phi d\theta \neq \text{Vol}(R)$

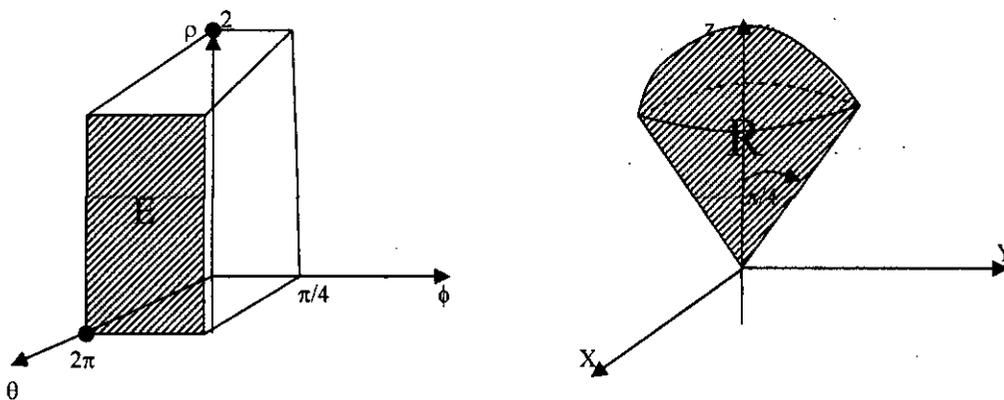


Fig. N° II .19 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso a).

$$b) \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\text{Sen}\phi} \rho^2 \text{Sen}\phi d\rho d\phi d\theta = \text{Vol}(R)$$

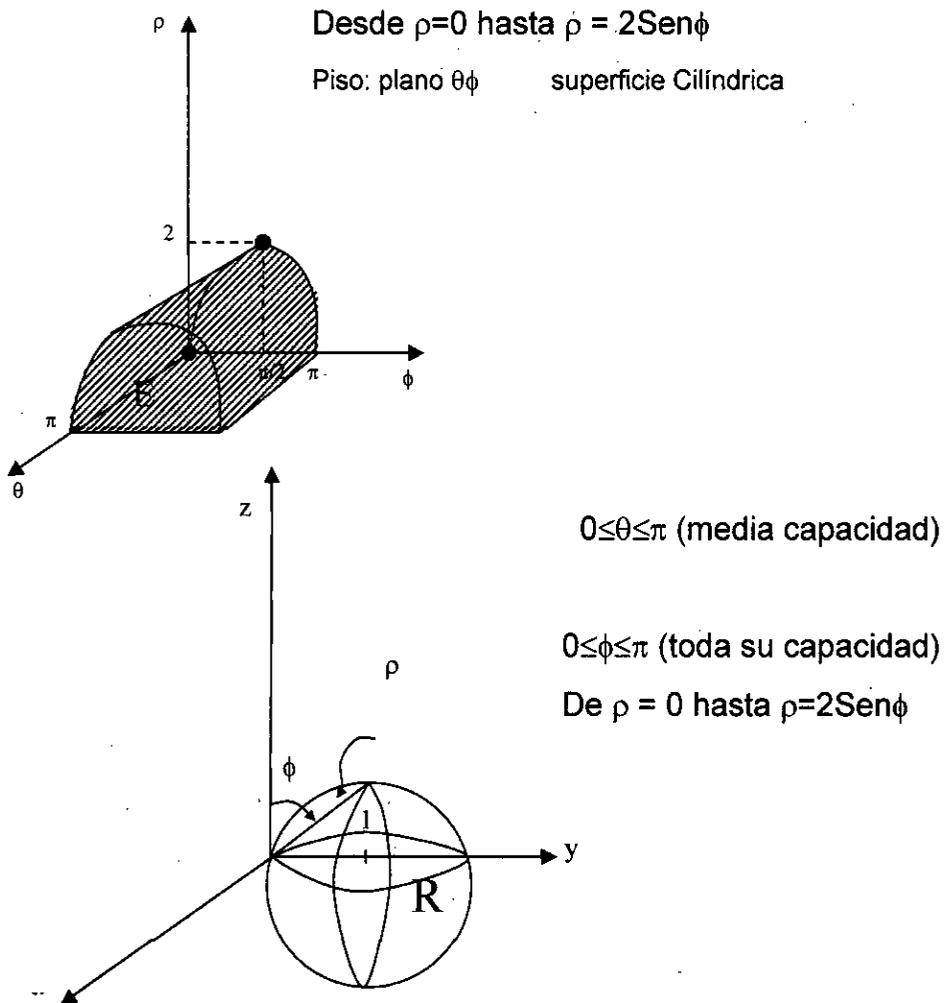
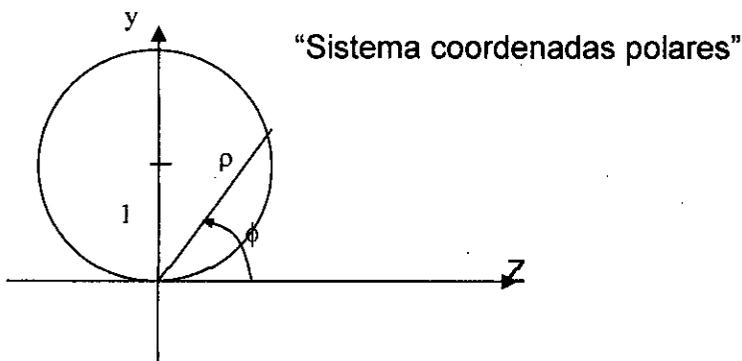


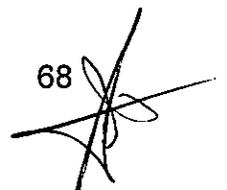
Fig. N° II .20 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso b).

**Figura Auxiliar:** Centremos nuestra atención en el plano ZY



$\rho = 2\text{Sen}\phi$ , será análogo a  $\rho=2\text{Sen}\theta \Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho\text{Sen}\theta \Leftrightarrow z^2+y^2 = 2y$

$$\begin{cases} z = \rho\text{Cos}\theta \\ y = \rho\text{Sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+y^2 - 2y = 0 \\ z^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$



$$c) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{1-\cos\phi}{2}} \rho^2 \text{Sen}\phi d\rho d\phi d\theta = \text{Vol}(R)$$

Figura referencial:

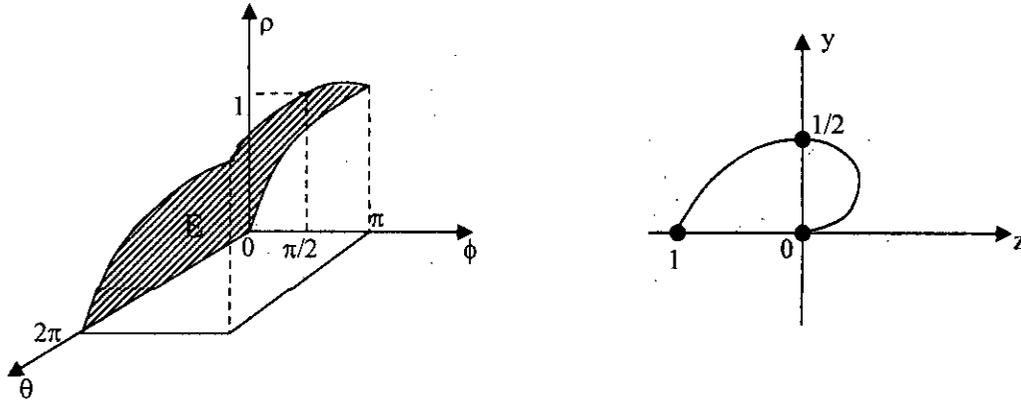
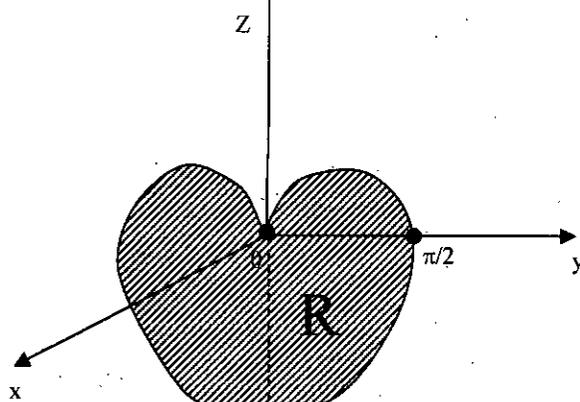


Fig. N° II .21 Gráfica del cambio de cartesianas a esféricas para el caso c).

Desde  $\rho=0$  hasta  $\rho = \frac{1-\cos\phi}{2}$

Plano  $\theta\phi$  superficie Cilíndrica



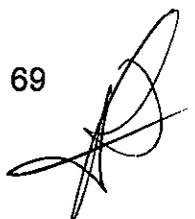
Desde  $\rho = 0$  hasta  $\rho = \frac{1-\cos\phi}{2}$

$$\phi = \theta \quad \rho = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Cuando  $\phi = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$0 \leq \phi \leq \pi$  Cuando  $\phi = \pi/2 \Rightarrow \rho = 1/2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$  Cuando  $\phi = \pi \Rightarrow \rho = 1$



## PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

1) Sea  $f(x,y)$  una función continua en una región acotada  $D$  y sea  $k$  constante, entonces:

$$\iint_D kf(x,y)dA = k \iint_D f(x,y)dA . \text{ Linealidad}$$

2) Considerese  $f(x,y)$  ,  $g(x,y)$  dos funciones reales de dos variables continuas en una región acotada  $D \subset \mathbb{R}^2$  se cumple que:

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)] dA = \iint_D f(x,y) dA \pm \iint_D g(x,y) dA .$$

2) Si  $f(x,y) \geq g(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in D$  (región acotada)  $\Rightarrow \iint_D f(x,y) dA \geq \iint_D g(x,y) dA$ .

**Caso particular:**  $f(x,y) \geq 0$ ;  $\forall (x,y) \in D \Rightarrow \text{Vol}(S) = \iint_D f(x,y) dA \geq 0$

Siendo  $S$  el sólido cuyo "techo" es  $z = f(x,y)$  y piso la región  $D$ .

4) Si  $D = D_1 \cup D_2$ , donde  $D_1$  y  $D_2$  son regiones planas que no se traslapan (osea que no se superponen) y siendo  $f(x,y)$  continua en  $D$ , entonces:

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$$

5) Si  $f$  es continua sobre la región cerrada y acotada  $D$ , entonces:

$m \text{ Área } (D) \leq \iint_D f(x,y) dA \leq M \text{ área } (D)$ ; donde  $m$  es el mínimo valor absoluto

del  $f$  en  $D$  y  $M$  es el máximo valor absoluto de  $f$  en  $D$ .

**Ejemplo:**  $z = f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ ;  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 36\}$

$$m = 0 , \quad M = 6 \Rightarrow 0 \leq \iint_D \sqrt{36 - x^2 - y^2} dA \leq 6 \text{ Área } (D)$$

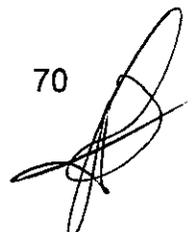
6) Si  $f(x,y)$  es continua en una región acotada  $D$  y asimismo  $|f(x,y)|$  también sea

$$\text{continua en } D \Rightarrow \left| \iint_D f(x,y) dA \right| \leq \iint_D |f(x,y)| dA$$

## PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

1) Si  $f(x,y,z)$  es continua en una región  $R$  acotada  $\subset \mathbb{R}^3$  y sea  $k$  constante

$$\text{entonces: } \iiint_R kf(x,y,z) dv = k \iiint_R f(x,y,z) dv$$



2) Si  $f(x; y; z)$  y  $g(x; y; z)$  son funciones reales de dos variables continuas en la región acotada  $U \subset \mathbb{R}^3$ , se cumple:

$$\iiint_R [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dv = \iiint_R f(x, y, z) dv \pm \iiint_R g(x, y, z) dv$$

3) Si  $f(x; y; z) \geq g(x; y; z)$ ,  $\forall (x; y; z) \in U \subset \mathbb{R}^3$ , siendo continuas entonces:

$$\iiint_R f(x, y, z) dv \geq \iiint_R g(x, y, z) dv$$

4) Si  $R=R_1 \cup R_2$ , donde  $R_1$  y  $R_2$  no se superpongan y siendo  $f$  continua en  $R$  acotada, entonces:  $\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

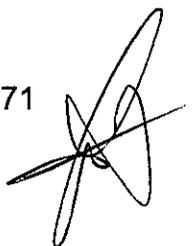
1) Calcule el volumen de la región  $U$  en el espacio que está arriba del plano  $z=y$ , debajo del plano  $z=2y$ ; y dentro del cilindro  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ .

2) Determine el volumen del sólido acotado superiormente por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  e inferiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ .

3) Encuentre los límites en coordenadas esféricas para la integral que calcula el volumen del sólido dado y luego evalúa la integral para: sólido entre la esfera  $\rho = \cos\phi$  y el hemisferio  $\rho=2, z \geq 0$ .

4) Calcular  $\iiint_U x\sqrt{x^2 + y^2} dV$ ; donde  $U$  es el sólido exterior al cilindro

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ ; y limitado por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x^2 + y^2 = z + 12$ , y la región espacial  $x + y \geq 0$ .



## CAPITULO III CAMPOS VECTORIALES

### 3.1 CAMPO VECTORIAL TRIDIMENSIONAL

Definición.-Un campo vectorial  $\vec{F}$  es una función que asigna a un punto de una región U en  $\mathbb{R}^3$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ , lo que se representa mediante:

$$\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z); N(x, y, z); P(x, y, z)) \quad (\text{Larson et al., 2006, p. 1054})$$

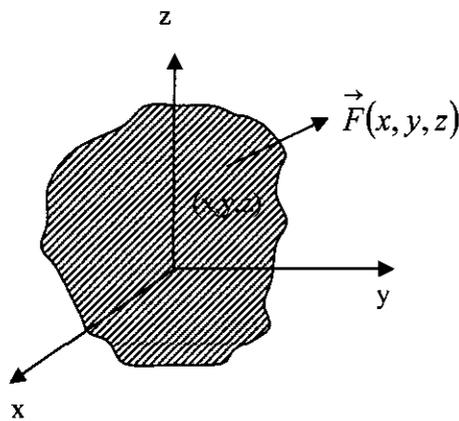


Fig. Nº III.1 Representación de un campo vectorial tridimensional

### 3.2 CAMPOS VECTORIALES CONTINUOS O DIFERENCIABLES

- 1)  $\vec{F}(x, y, z) = (M, N, P)$  será continua en R si M, N y P son continuas en R.
- 2)  $\vec{F}(x, y, z) = (M, N, P)$  será diferenciable en R si M, N, y P son diferenciables en R.

### CAMPO VECTORIAL BIDIMENSIONAL

Es aquel que se define mediante:

$$\vec{F}(x, y) = [M(x, y), N(x, y)]$$

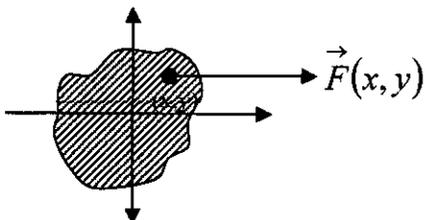


Fig. Nº III.2 Representación de un campo vectorial bidimensional

### 3.3 EJEMPLOS DE CAMPOS VECTORIALES

a) Campo vectorial bidimensional: El movimiento de una curva plana C

$$C: \vec{r}(t) = (g(t), h(t))$$

$\vec{r}'(t) = (g'(t), h'(t))$  es el que determina un campo vectorial bidimensional definido en cada punto de la curva "C".

b) CAMPO VECTORIAL GRAVITATORIO:

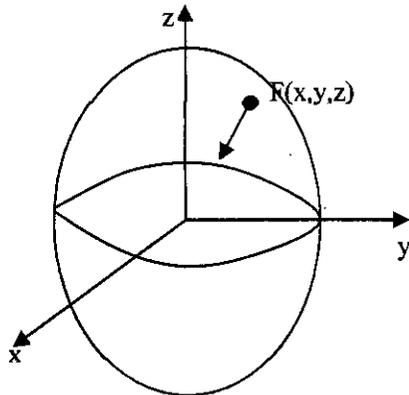


Fig. N° III.3 Representación de un campo vectorial gravitatorio.

Donde: 
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-mMG (x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

c) CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES DE UN FLUIDO

Si consideramos un volumen de agua en movimiento por un río o canal. Las flechas forman lo que se llama el campo vectorial de velocidades de un fluido

en movimiento: 
$$\vec{F}(x, y, z) = [M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)]$$

d) CAMPO VECTORIAL GRADIENTE

Considere una superficie S:  $F(x, y, z) = 0$ , siendo F diferenciable en alguna región

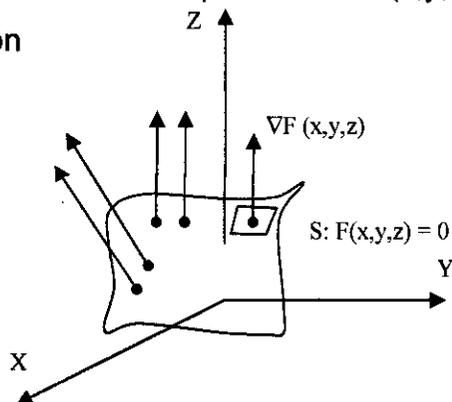


Fig. N° III.4 Representación de un campo vectorial gradiente.



Entonces el gradiente en cada punto de S formará un campo de vectores .

### INTEGRAL DE LÍNEA PARA CAMPOS VECTORIALES

Sea  $\vec{F}(x, y, z) = [M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)]$  un campo vectorial definido en una región R en el espacio. Sea asimismo una curva "C" contenida en R y parametrizada por  $\vec{r}(t) = (g(t), h(t), k(t))$ , donde  $a \leq t \leq b$ .

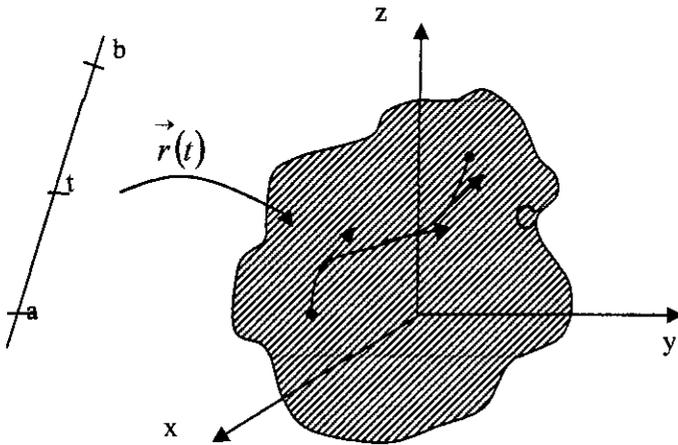


Fig. N° III.5 Representación de la integral de línea para campos vectoriales.

Llamamos integral de línea de  $\vec{F}(x; y; z) = (M; N; P)$  sobre una curva C a la expresión:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

La cual al detallarla nos permite decir:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt$$

### 3.4 TRABAJO REALIZADO POR UN CAMPO VECTORIAL

a) Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial de fuerzas entonces  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$  se llamará trabajo

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

b) Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial de velocidades de un fluido entonces  $\int_C \vec{F} \cdot T ds$  se

llamará flujo:

$$\text{Flujo} = \int_C \vec{F} \cdot T ds$$

### FORMAS ALTERNATIVAS DE NOTACION PARA LA INTEGRAL DE LINEA

1)  $\int_C \vec{F} \cdot T ds$  Forma conceptual

2)  $\int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$  Forma operativa

3)  $\int_C Mdx + Ndy + Pdz$  Forma diferencial

4)  $\int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}$  Forma abreviada

**PROBLEMA** : Evalúe la integral de línea  $\int_C (2x + y^2 - z) ds$ , donde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ; es tal como se muestra

**Solución:**

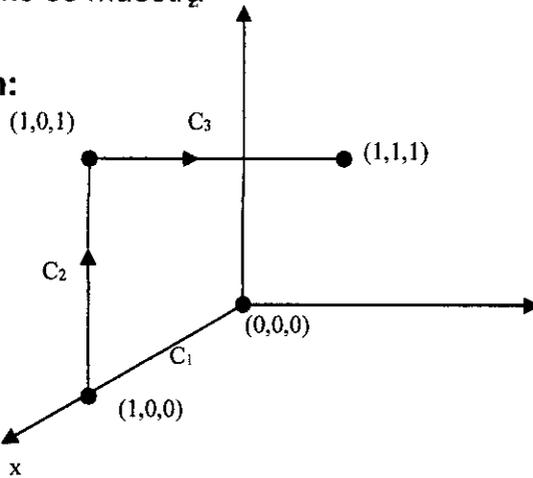


Fig. N° III.6 Representación de la trayectoria del problema.

$$\int_C (2x + y^2 - z) ds = \int_{C_1} (2x + y^2 - z) ds +$$

$$\int_{C_2} (2x + y^2 - z) ds + \int_{C_3} (2x + y^2 - z) ds$$

donde:

$$\begin{cases} C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0, 0); 0 \leq t \leq 1 \\ C_2 : \vec{r}_2(t) = (1, 0, t); 0 \leq t \leq 1 \\ C_3 : \vec{r}_3(t) = (1, t, 1); 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}_1(t) = (1, 0, 0); \|\vec{r}_1(t)\| = 1 \\ \vec{r}_2(t) = (0, 0, 1); \|\vec{r}_2(t)\| = 1 \\ \vec{r}_3(t) = (0, 1, 0); \|\vec{r}_3(t)\| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_C f(x, y, z) dS = \int_{C_1} f(x, y, z) dS + \int_{C_2} f(x, y, z) dS + \int_{C_3} f(x, y, z) dS$$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^1 f(\vec{r}_1(t)) dt + \int_{t=0}^1 f(\vec{r}_2(t)) dt + \int_{t=0}^1 f(\vec{r}_3(t)) dt$$

$$= \int_{t=0}^1 (2t) dt + \int_{t=0}^1 (2-t) dt + \int_{t=0}^1 (1+t^2) dt = \# = 23/6$$

**PROBLEMA:** Hallar el trabajo realizado por el campo  $\vec{F}(x, y, z) = (y+z; z+x; x+y)$  sobre la trayectoria  $C = C_1 \cup C_2$  de acuerdo a la figura.

**Solución**

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (t; t; 0)$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = (1; t; 1)$$

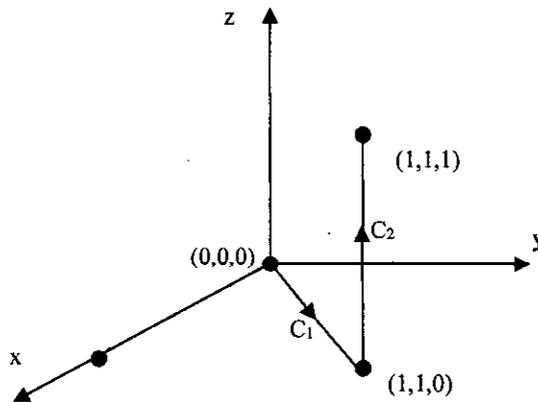


Fig. N° III.7 Representación de la trayectoria que une (0;0;0) con (1;1;1).

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \int_{C_3 \cup C_4} \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{T} dS + \int_{C_4} \vec{F} \cdot \vec{T} dS$$

$$= \int_{t=0}^1 \vec{F}(\vec{r}_3(t)) \cdot \vec{r}'_3(t) dt + \int_{t=0}^1 \vec{F}(\vec{r}_4(t)) \cdot \vec{r}'_4(t) dt$$

$$= \int_{t=0}^1 (t, t, 2t) \cdot (1, 1, 0) dt + \int_{t=0}^1 (t+1, 1+t, 2) \cdot (0, 0, 1) dt = \int_0^1 (2t) dt + \int_0^1 2 dt = 3$$

### 3.5 INTEGRAL DE FLUJO Y CIRCULACIÓN

Si  $\vec{F} = (M; N; P)$  es un campo vectorial de velocidades de un fluido entonces

$\int_C \vec{F} \cdot T ds$  se llamará flujo:

$$\text{Flujo} = \int_C \vec{F} \cdot T ds. \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.1071)}$$

Si la curva C es cerrada, la integral de línea recibe el nombre de circulación; es decir:

Circulación =  $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ , frecuentemente se tomara la curva cerrada en sentido

antihorario.

#### FORMAS ALTERNATIVAS

1)  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$  Forma conceptual

2)  $\int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$  Forma operativa

3)  $\int_C Mdx + Ndy + Pdz$  Forma diferencial

4)  $\int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}$ ; donde  $\vec{r}(t)$  es la parametrización de la curva que une los puntos A y B.

### 3.6 FLUJO A TRAVÉS DE UNA CURVA PLANA

Para encontrar la razón a la que un fluido  $\vec{F}$  entra o sale de una región  $\mathcal{R}$  encerrada por una curva suave "C" en el plano XY, calculamos la integral de línea sobre "C" de  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ ; que es la componente escalar del campo de velocidades del flujo en la dirección del vector normal que señala hacia afuera de la curva "C". (Thomas y Finney, 1999, p.1072)

**Definición.-** Si "C" es una curva suave cerrada en el dominio de un campo vectorial continuo  $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$  y si  $\vec{n}$  es el vector normal unitario



que señala hacia afuera sobre "C" ; el flujo de  $\vec{F}$  a través de "C" está dada por la siguiente integral de línea. ". (Thomas y Finney, 1999, p. 1072)

Flujo de  $\vec{F}$  a través de C =  $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds$  ..... (\*)

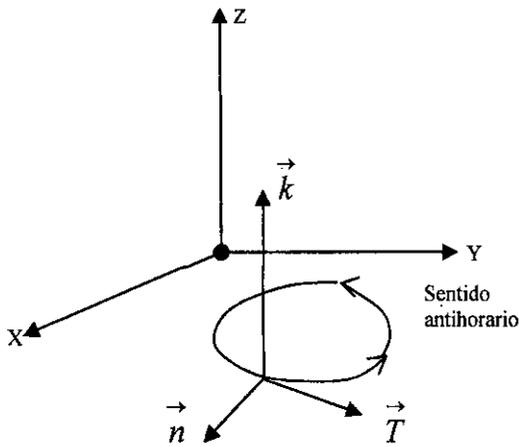


Fig.Nº III.8 Representación geométrica de la existencia de  $\vec{n}$  .

$C: \vec{r}(t) = (x(t); y(t)); a \leq t \leq b$

donde:  $\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$  ..... (\*)

Vamos a detallar (\*)

$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$

donde:  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{[x'(t), y'(t)]}{\frac{ds}{dt}}$

$\Rightarrow \vec{T}(t) = (x'(t); y'(t)) \frac{dt}{ds} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{ds} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$

Así pues:  $\vec{n} = \left( \frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; 0 \right) \times (0; 0; 1) \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$



$$\vec{n} = \vec{i} \left( \frac{dy}{ds} \right) - \vec{j} \left( \frac{dx}{ds} \right) + \vec{k}(0) \rightarrow \vec{n} = \left( \frac{dy}{ds}; -\frac{dx}{ds} \right)$$

Así tenemos:

$$\text{Flujo a través de } C = \oint_C (M; N) \cdot \left( \frac{dy}{ds}; -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$\text{Flujo a través de } C = \oint_C (Mdy - Ndx)$$

**PROBLEMA:** Hallar el flujo de  $\vec{F} = (x - y; x)$  a través de la curva cerrada

C:  $x^2 + y^2 = 1$ , en el plano XY

**Solución:**

$$C: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de } C = \oint_C Mdy - Ndx$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} (\cos t - \sin t) \cos t dt - \cos t (-\sin t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t) dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} [2\pi] = \pi \text{ (positivo)}$$

Como la respuesta es positiva, el flujo neto a través de "C" es hacia afuera.

Un flujo neto hacia adentro habría dado un flujo negativo.

### 3.7 CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

**Definición.-** Sea  $\vec{F}(x,y,z) = (M,N,P)$  un campo vectorial, definido sobre región U abierta del espacio. Asimismo consideremos dos puntos cualesquiera A y B en U; si el trabajo  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  es independiente de la trayectoria que une A y B, diremos que  $\vec{F}$  es conservativo en U. (Thomas y Finney, 1999, p.1077)

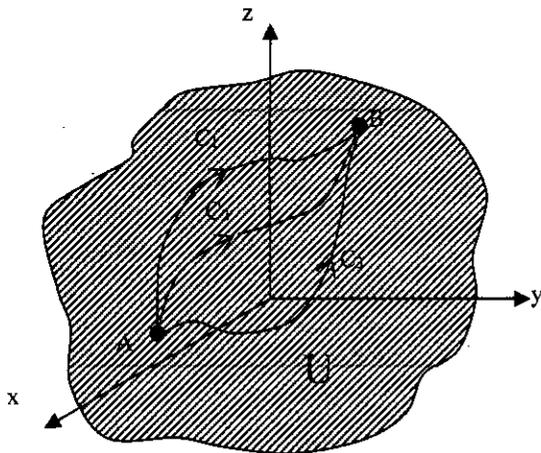


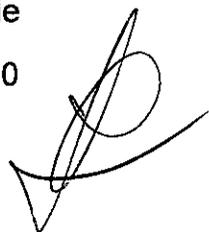
Fig. Nº III.9 Representación geométrica de la independencia de trayectoria .

**Definición.-** Sea  $\vec{F}(x,y,z) = (M;N;P)$  un campo vectorial definido en  $U \subset \mathbb{R}^3$ , si existe un campo escalar  $f(x,y,z)$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ , diremos que **f es una función potencial para  $\vec{F}$** . (Thomas y Finney, 1999, p.1077)

**Observación:** Un potencial eléctrico es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo eléctrico. Un potencial gravitatorio es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo gravitatorio, etcétera

#### **3.7.1 TEOREMA: (EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA)**

1) Sea  $\vec{F} = (M;N;P)$  un campo vectorial continuo en toda una región U abierta y conexa (lo que, en una región abierta, significa que todo punto puede



estar conectado a cualquier otro punto por medio de una curva suave que se encuentra en la región) en el espacio. Existe entonces una función diferenciable  $f$  en  $U$  tal que  $\nabla f = \vec{F} = (M; N; P)$  **si y solo si** para todos los puntos  $A$  y  $B$  en  $U$  el valor de  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  es independiente de la trayectoria que une  $A$  y  $B$  en  $U$  (osea que  $\vec{F}$  sea conservativo en  $U$ ).

2) Si la integral es independiente de la trayectoria de  $A$  a  $B$ , su valor es:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

### **TEOREMA**

Los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  en torno a toda curva cerrada en  $U$
- 2) El campo  $\vec{F}$  es conservativo sobre  $U$ .

### **3.7.2 DETERMINACIÓN DE POTENCIALES PARA CAMPOS CONSERVATIVOS**

**TEOREMA:** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial cuyas funciones componentes  $M, N$  y  $P$  tienen primeras derivadas parciales continuas en la región espacial  $U$ . Entonces

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } U \text{ si y solo si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}; \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

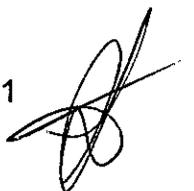
**Ejemplo:** Demuestre que:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz; xz - e^x \sin y; xy + z)$$

Es conservativo y luego encuentre una función potencial para él.

**Solución:**

$$\begin{cases} M = e^x \cos y + yz \\ N = xz - e^x \sin y \\ P = xy + z \end{cases}$$



$$1^\circ) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = x \\ \frac{\partial N}{\partial z} = x \end{cases} \quad 2^\circ) \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial z} = y \\ \frac{\partial P}{\partial x} = y \end{cases}$$

$$3^\circ) \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^{x \operatorname{Sen} y} \\ \frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \operatorname{Sen} y + z \end{cases} \quad \text{osea } \vec{F} \text{ es conservativo en todo } \mathbb{R}^3.$$

Ahora por el teorema fundamental de las integrales de línea existe una función

potencial  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$  osea:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (M, N, P)$$

$$1^\circ) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \operatorname{Cos} y + yz$$

Integrar parcial respecto a x

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{Cos} y + xyz + g(y, z) \quad \begin{matrix} \nearrow \\ h(z) \end{matrix}$$

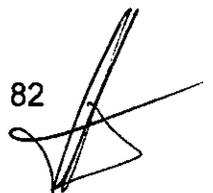
$$2^\circ) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = xz - e^x \operatorname{Sen} y$$

$$\Rightarrow -e^x \operatorname{Sen} y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{Sen} y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow g(y, z) = h(z)$$

$$3^\circ) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P = xy + z$$

$$xy + h'(z) = xy + z$$



$$\Rightarrow h'(z) = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + k$$

donde k es constante real.

Finalmente (función potencial)

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x, y, z) \Big|_A^B = f(B) - f(A) = W$$

**PROBLEMA:** Hallar la circulación de  $\vec{F} = (2x; 2z; 2y)$  alrededor de la trayectoria cerrada que consiste en las siguientes curvas:

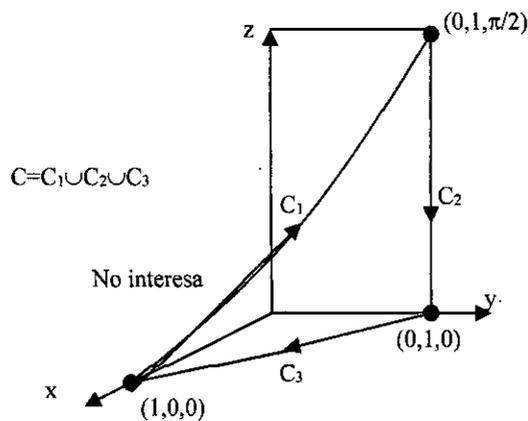


Fig.º III.10 Representación geométrica de la independencia de trayectoria para  $\vec{F} = (2x; 2z; 2y)$

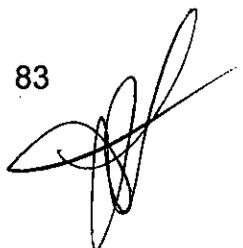
$$C_1: \vec{r}(t) = (\cos t; \sin t; t); 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$C_2: \vec{r}(t) = \vec{j} + \frac{\pi}{2}(1-t)\vec{k}; 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j}; 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \text{Circulación} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

**Verificación de que el campo vectorial es conservativo**

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial M}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial N}{\partial z} = 2$
$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial y} = 2$



Entonces por teorema anterior se verifica que efectivamente la integral de línea (circulación) es igual a cero.

### 3.7.3 FORMAS DIFERENCIALES EXACTAS

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \dots\dots\dots (*)$$

se llama la integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de la curva C.

Versiones equivalentes a (\*)

1)  $\int_{t=a}^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$  Forma operativa

2)  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  Forma abreviada

3)  $\int_C Mdx + Ndy + Pdz$  Forma diferencial

Pero si  $\vec{F}(x,y,z) = (M;N;P)$  es conservativo ya no interesa la trayectoria que una A y B, solo interesa conocer la función potencial f para  $\vec{F}$  (osea  $\nabla f = \vec{F}$ ) y de este modo al calcular.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x,y,z)|_A^B = f(B) - f(A)$$

Teniendo presente la notación (3) llamada forma diferencial; si  $\vec{F}$  es conservativo existe una función potencial f tal que  $\nabla f = \vec{F}$ , asimismo al tomar la diferencial a f tenemos:

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \text{ llamada diferencial total}$$

$$df(x,y,z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$= (M, N, P)(dx, dy, dz) \text{ pues } \nabla f = \vec{F},$$

$df(x,y,z) = Mdx + Ndy + Pdz$	forma diferencial exacta
-------------------------------	--------------------------



Luego:

$$\int_A^B df(x, y, z) = \int_A^B \underbrace{Mdx + Ndy + Pdz}_{\text{Forma diferencial exacta}} = f(x, y, z)|_A^B = f(B) - f(A)$$

Forma diferencial exacta

**PROBLEMA:** Demuestre que las formas diferenciales en las integrales siguientes son exactas y calcule el respectivo valor de cada integral

1)  $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x dx + 2y dy + 2z dz$

2)  $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz dx + xz dy + xy dz$

3)  $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy dx + (x^2 - z^2) dy - 2yz dz$

Veamos (2):

$$\vec{F} = (yz; xz; xy) = (M; N; P); \text{ Veamos si } \vec{F} \text{ es conservativo:}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$z = z ; y = y ; x = x$$

y basta conocer la función potencial  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}(x, y, z)$ .

1º)  $\frac{df}{dx} = yz$

$$f(x; y; z) = xyz + g(y; z)$$

(integrar parcialmente respecto a  $x$ )

2º)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$

3º)  $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$

$$f(x; y; z) = xyz + g(y; z)$$

Ahora por (2)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$

$$xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z)$$

Ahora:

$$f(x, y, z) = xyz + h(z)$$

Asimismo por (3)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \Rightarrow xy + h'(z) = xy \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = k; k : \text{cte. real}$$

Finalmente:  $f(x, y, z) = xyz + k$

$$\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} Mdx + Ndy + Pdz = f(x, y, z) \Big|_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} = 0 - 2 = -2$$

### **3.7.4 TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO**

- 1) Flujo – Divergencia
- 2) Circulación antihoraria – Rotacional

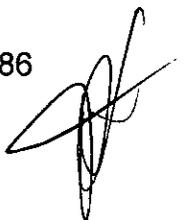
Llegamos ahora a un teorema que puede usarse para describir la relación entre la manera en que un fluido incompresible circula a lo largo o a través de la frontera de una región plana y la manera en que se mueve dentro de la región.

La conexión entre el comportamiento del fluido en su frontera y su comportamiento interno se hace posible por las nociones de divergencia y rotacional. La divergencia del campo de velocidades de un fluido mide la razón a la que este entra o sale de la región plana en cualquier punto dado. El rotacional mide la razón de rotación del fluido en cada punto. (Thomas y Finney, 1999, p. 1084)

### **DENSIDAD DE FLUJO EN UN PUNTO: DIVERGENCIA**

**Definición.-** Sea  $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$  un campo vectorial continuo en una región D del plano tal que M y N tengan primeras derivadas parciales continuas en D. Definimos la Divergencia (densidad de flujo) en el punto (x, y) de la región a la cantidad mediante:  $div \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$

(Thomas y Finney, 1999, p. 1085)



## INTERPRETACIÓN FÍSICA

Asumamos que  $\vec{F}(x, y) = (M, N)$  es el campo de velocidades de un fluido que actúa en una región plana



$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0) > 0$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_1, y_1) < 0$$

Fig. Nº III.11 Interpretación física de la divergencia.

## DENSIDAD DE LA CIRCULACION EN UN PUNTO: EL ROTACIONAL

**Definición:** Sea  $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$  un campo vectorial continuo en una región del plano D tal que M y N tengan primeras derivadas parciales continuas en D. Definimos el rotacional de  $\vec{F}$  en un punto de la región como:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (\text{Thomas y Finney, 1999, p.1087})$$

**Interpretación física:** Asumamos que  $\vec{F}(x, y) = (M, N)$  sea el campo de velocidades de un fluido que actúa en una región plana.

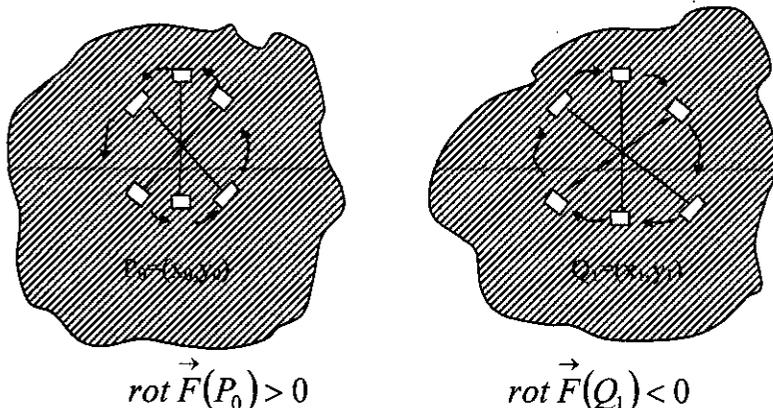


Fig. Nº III.12 Interpretación física del operador rotacional.

## TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

(Flujo – Divergencia)

Sea  $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$  un campo de velocidades de un fluido tal que M y N y sus primeras derivadas parciales continuas en una región D que contenga



a R y a su frontera sea C, se concluye que el flujo de  $\vec{F}$  hacia el exterior de la curva cerrada C coincide con la integral doble de la divergencia del campo  $\vec{F}$  sobre la región acotada R, es decir:

$$\text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de } C = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \text{div } \vec{F} dA$$

**TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO**  
(Circulación Antihoraria – Rotacional)

Sea  $\vec{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$  un campo de velocidades de un fluido tal que M y N y sus primeras derivadas parciales sean continuas en una región D que contenga a la región R y a su frontera C. La circulación antihoraria de  $\vec{F}$  a lo largo de C es igual a la integral doble del rotacional de  $\vec{F}$  sobre la región R; o sea:

$$\text{Circulación antihoraria} = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \text{rot } \vec{F} dA$$

**PROBLEMA:**

Use el teorema de Green para encontrar la circulación antihoraria y el flujo hacia el exterior (flujo a través de C) para el campo

$$\vec{F}(x; y) = \left( \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \ln(x^2 + y^2) \right), \text{ siendo C la frontera de la región definida por}$$

las desigualdades en coordenadas polares:  $1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq \pi$ .

**Solución:**

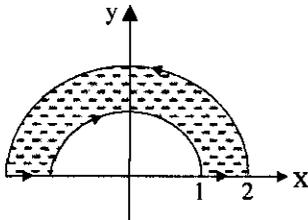


Fig. Nº III.13 Gráfica en el plano XY de la región en coordenadas polares.

**1º) Circulación Antihoraria:**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(N) - \frac{\partial}{\partial y}(M) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2 + y^2)) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

88

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x - x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Circulación Antihoraria} &= \oint_C Mdx + Ndy \\ &= \iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dA = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=1}^2 \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \cos \theta dr d\theta = \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = \text{Sen} \theta \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ \text{div} \vec{F} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Flujo hacia el exterior de } C &= \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{r \text{Sen} \theta}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \text{Sen} \theta dr d\theta = \int_0^{\pi} \text{Sen} \theta d\theta = -\text{Cos} \theta \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2 \end{aligned}$$

REITERANDO EL PROPOSITO DEL TEOREMA DE GREEN

$$\vec{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$$

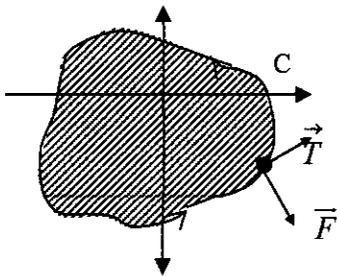


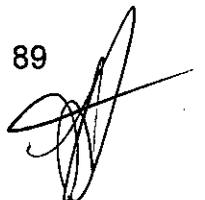
Fig. Nº III.14 Grafica de como actúa  $\vec{F}$  en la frontera C.

$$\vec{n} = \vec{T} \cdot \vec{k}$$

Flujo - Divergencia

$$\text{Flujo de } \vec{F} \text{ hacia el exterior de } C = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \text{div} \vec{F} \cdot dA$$

(Flujo a través de "C")



### Circulación – Rotacional

$$\text{Circulación Antihoraria} = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \text{rot } \vec{F} \cdot dA$$

### REGIONES SIMPLEMENTE Y MULTIPLEMENTE CONEXAS

#### A) REGIÓN SIMPLEMENTE CONEXA

Es aquella región plana que no tiene agujeros.

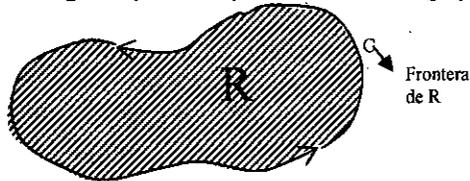


Fig. N° III.15 Grafica de una región simplemente conexa.

#### B) REGION MULTIPLEMENTE CONEXA

Es aquella región plana que tiene uno o más agujeros.

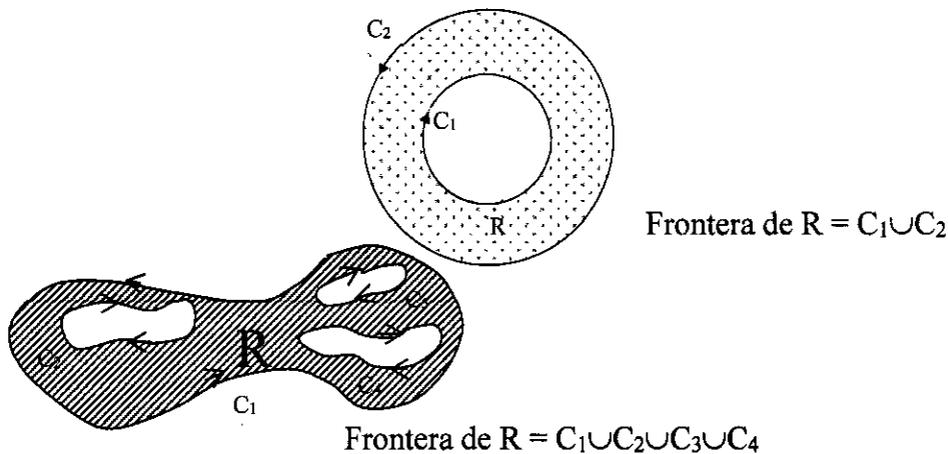


Fig. N° III.16 Gráficas de regiones múltiplemente conexas.

### CONVENCIÓN DEL RECORRIDO DE LA FRONTERA DE UNA REGIÓN MULTIPLEMENTE CONEXA

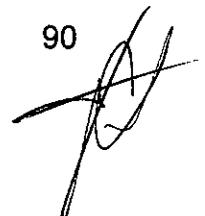
La convención es la siguiente:

“Si consideramos un observador que recorre la frontera de una región múltiplemente conexa, siempre debe tener la región R a su izquierda”.

(Thomas y Finney, 1999, p. 1092)

**PROBLEMA:** Verifique la forma del teorema de Green:

Circulación – rotacional, sobre el anillo R:  $h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$  siendo  $0 < h < 1$ , donde:



$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} M & N \\ -y & x \\ x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\text{Circulación} = \int_C Mdx + Ndy = \iint_R \text{rot } \vec{F} dA$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} Mdx + Ndy + \oint_{C_2} Mdx + Ndy = \iint_R \text{rot } \vec{F} dA$$

Veamos primero la integral de línea:

$$C_1: \vec{r}(\theta) = (\text{Cos } \theta, \text{Sen } \theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$C_2: \vec{\alpha}(\theta) = (h\text{Cos } \theta, -h\text{Sen } \theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{r}(\theta) = (\text{Cos } \theta; \text{Sen } \theta); \quad \vec{\alpha}(\theta) = (h\text{Cos } \theta; -h\text{Sen } \theta);$$

$$\int_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \int_{C_2} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{-\text{Sen } \theta}{1} (-\text{Sen } \theta) d\theta + \frac{\text{Cos } \theta}{1} \cdot \text{Cos } \theta \cdot d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{h\text{Sen } \theta}{h^2} (-h\text{Sen } \theta) d\theta + \frac{h\text{Cos } \theta}{h^2} (-h\text{Cos } \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} -(\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta) d\theta = 2\pi - 2\pi = 0$$

Por otro lado  $\text{rot } \vec{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$

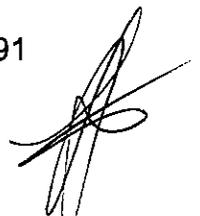
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 - y(2y)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_R \text{rot } \vec{F} dA = \iint_R 0 dA = 0 \quad (\text{Lqqd}).$$

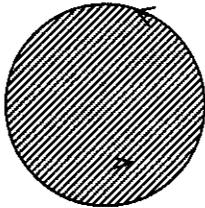
Ejemplo: Verifique el teorema de Green evaluando ambos lados de las ecuaciones para obtener el concepto de Flujo-Divergencia y para el campo



$\vec{F} = (-x^2y; xy^2)$ . Considere que los dominio de integración es el disco  $R: x^2+y^2 \leq a^2$ ; y su círculo frontera  $C: r = (a \cos t)i+(a \sin t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$  asimismo

**Solución:**

Verificación del Teorema de Green:



M N

$$\vec{F} = (-x^2y; xy^2)$$

$$C: \vec{r}(t) = (a \cos t; a \sin t)$$

x      y  
0 ≤ t ≤ 2π

**Flujo-Divergencia:** Flujo hacia el exterior =  $\oint_C Mdy - Ndx =$

$$\int_{t=0}^{2\pi} -a^2 \cos^2 t \cdot a \sin t \cdot a \cos dt - a \cos^2 t \cdot a \sin^2 t (-a \sin t) dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} (a^4 \cos^3 t \sin t - a^4 \sin^3 t \cos t) dt$$

**Por otro lado:**  $Div \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$

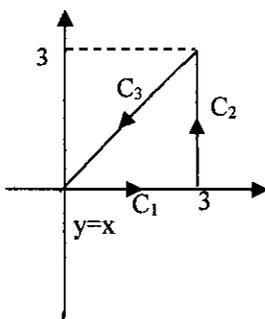
$$= -2xy + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \text{Flujo hacia el exterior} = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R div \vec{F} dA$$

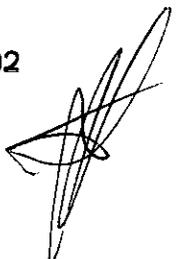
$$= \iint_R 0 dA = 0$$

**PROBLEMA:** Use el teorema de Green para encontrar la circulación antihoraria

y el flujo hacia el exterior para el campo  $\vec{F} = (x^2 + y^2; x^2 + y^2)$  y la curva C.



$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$



$$\text{Circulación Antihoraria} = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \text{rot } \vec{F}$$

$$C_1 \begin{cases} y=0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad C_2 \begin{cases} x=3 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad C_3 \begin{cases} y=x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

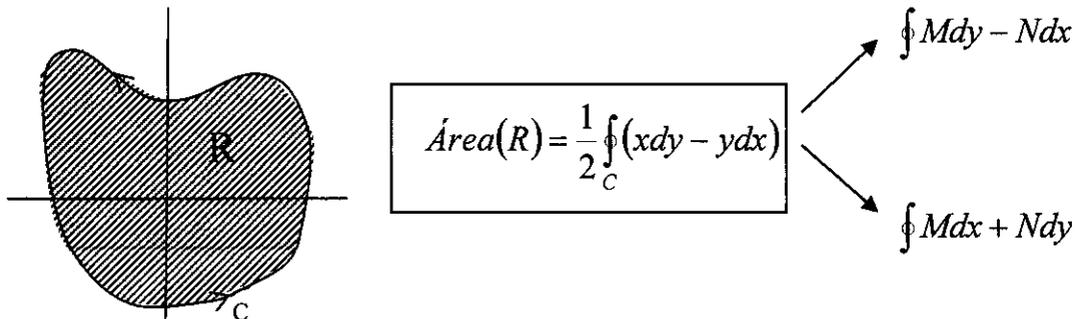
$$\begin{aligned} \text{Circulación Antihoraria} &= \int_{C_1} Mdx + Ndy + \int_{C_2} Mdx + Ndy + \int_{C_3} Mdx + Ndy \\ &= \int_{x=0}^3 (x^2)dx + \int_{y=0}^3 (9 + y^2)dy + \int_{x=3}^0 (2x^2)dx + (2x^2)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Circulación} &= \frac{x^2}{3} \Big|_0^3 + \left( 9y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 + \int_3^0 (4x^2)dx \\ &= 9 + (27 + 9) + \frac{4x^3}{3} \Big|_3^0 \\ &= 18 + 27 + \frac{4}{3}(0 - 27) = 9 \end{aligned}$$

**Rotacional:**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 2x - 2y = 2(x - y) \\ &= 2 \iint_R (x - y) dA = 2 \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^x (x - y) dy dx \\ &= 2 \int_{x=0}^3 \left[ xy - \frac{y^2}{2} \right] dx = 2 \int_{x=0}^3 \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9 \text{ Lqqd.} \end{aligned}$$

### CÁLCULO DE ÁREAS CON EL TEOREMA DE GREEN



$$\text{Así: } \oint_C (x dy - y dx) = \iint_R \text{div } \vec{F} dA = \iint_R 2 dA = 2 \iint_R dA = 2 \text{área}(R)$$

Se verifica usando la versión Flujo – Divergencia

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

**PROBLEMA:** Hallar el área de la elipse  $C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Solución:

$$C: \vec{r}(t) = (a \cos t; b \sin t) ; 0 \leq t \leq 2\pi \rightarrow \text{Área de } R = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} a \cos t (b \cos t) dt - b \sin t (-a \sin t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Evalúe  $\oint_C (1 + \tan x) dx + (x^2 + e^y) dy$  donde  $C$  es la frontera con orientación

positiva de la región limitada por la curva  $y = \sqrt{x}$  y las rectas  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

2) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -z \operatorname{sen}(xz) \mathbf{i} - z e^{yz} \mathbf{j} - (x \operatorname{sen}(xz) + y e^{yz}) \mathbf{k}$$

sobre una partícula que se mueve desde  $(1; 0; 0)$  en sentido antihorario (vista desde arriba) a lo largo del arco de circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , luego por el segmento recto que va de  $(0, 1, 0)$  a  $(1, 0, 4)$ .

3) Sean  $P_1$  y  $P_2$  puntos a distancias  $d_1$  y  $d_2$  del origen. Calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio

$$\vec{F}(x; y; z) = -G m M \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (G, m, M$$

constantes)\_al mover una partícula de  $P_1$  a  $P_2$ .

4) Calcular  $\oint_C \left( 80 e^{-\frac{x^2}{2}} - y^2 \right) dx + \left( 90 e^{-\frac{y^2}{2}} + x \right) dy$ ; alrededor de la curva

cerrada  $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ .

5) Evalúe la integral de Línea  $\oint_C (\cos y + y \cos x) dx + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y) dy + (xyz) dz$ ; a lo

largo del triángulo de vértices  $(4; 0; 2)$ ,  $(0; 0; 2)$  y  $(0; 2; 0)$ , recorrido en sentido antihorario visto desde arriba.



## CAPITULO IV: AREA DE SUPERFICIE E INTEGRAL DE SUPERFICIE.

### 4.1 DEFINICION DEL AREA DE SUPERFICIE

Sea la superficie  $S$  situada arriba de su región sombra  $R$ , la cual esta contenida en un plano debajo de  $S$ . La superficie está definida por ecuación  $f(x;y;z)=c$ .

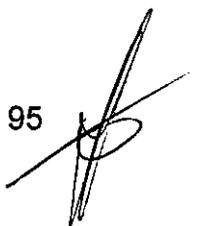
Si la superficie es suave ( $\nabla f$  es continua y nunca se anula sobre  $S$ ) podemos definir y calcular su área como una integral doble sobre  $R$ .

El primer paso para definir el área de  $S$  es subdividir la región  $R$  en rectángulos pequeños  $\Delta A_k$  como los que usaríamos si fuésemos a definir una integral sobre  $R$ . Directamente arriba de cada  $\Delta A_k$ , se encuentra una porción de superficie  $\Delta \sigma_k$  que podemos aproximar por una porción  $\Delta P_k$  del plano tangente. Específicamente, supongamos que  $\Delta P_k$  es una porción de plano que es tangente a la superficie en el punto  $T_k(x_k; y_k; z_k)$  directamente arriba de la esquina posterior  $C_k$  de  $\Delta A_k$ . Si el plano tangente es paralelo a  $R$ , entonces  $\Delta P_k$  será congruente con  $\Delta A_k$ . De otra manera será un paralelogramo cuya área es algo mayor que el área de  $\Delta A_k$ . Asimismo considere el vector gradiente  $\nabla f(x_k; y_k; z_k)$  en  $T_k$ , así como un vector unitario  $\vec{p}$  que es normal a  $R$ . También sea el ángulo  $\gamma_k$  entre  $\nabla f$  y  $\vec{p}$ . Los otros vectores en la figura,  $u_k$  y  $v_k$  se encuentran a lo largo de los bordes de la porción  $\Delta P_k$  en el plano tangente. Así  $u_k \times v_k$  y  $\nabla f$  son normales al plano tangente.

Ahora necesitamos el hecho de la geometría vectorial avanzada de que  $|(u_k \times v_k) \cdot \vec{p}|$  es el área de la proyección del paralelogramo determinado por  $u_k$  y  $v_k$  sobre cualquier plano cuya normal es  $\vec{p}$ . En nuestro caso, esto se traduce en el enunciado

$$|(u_k \times v_k) \cdot \vec{p}| = \Delta A_k$$

Ahora  $|u_k \times v_k|$  es el área de  $\Delta P_k$  (hecho estándar acerca de los productos cruz), por que la ecuación anterior se convierte en



$$|u_k \times v_k| |\vec{p}| \underbrace{|\cos(\text{angulo entre } u_k \times v_k \text{ y } \vec{p})|}_{\substack{\text{Igual que } |\cos \gamma_k| \text{ porque} \\ \nabla f \text{ y } u_k \times v_k \text{ son ambos} \\ \text{normales al plano tan gente}}} = \Delta A_k$$

$$\text{o } \Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k \quad \text{o } \Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

siempre que  $\cos \gamma_k \neq 0$ . Tendremos  $\cos \gamma_k \neq 0$  siempre y cuando  $\nabla f$  no sea paralela al plano base y  $\nabla f \cdot \vec{p} \neq 0$ .

Como las porciones  $\Delta P_k$  aproximan las porciones superficiales  $\Delta \sigma_k$  que juntas forman S, la suma

$$\sum \Delta \sigma_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

Se ve como una aproximación de lo que nos gustaría llamar área de superficie de S. También se ve que la aproximación podría mejorar si refinamos la subdivisión de R. De hecho las sumas en el lado derecho de la última ecuación son sumas aproximadas para la integral doble

$$\iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|} dA.$$

Por lo tanto, definimos el área de S como el valor de esa integral siempre que ella exista.

Formula practica: Para cualquier superficie  $f(x,y,z)=k$ , tenemos

$$|\nabla f \cdot \vec{p}| = \|\nabla f\| \|\vec{p}\| |\cos \gamma| \rightarrow \frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|}. \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.1096)}$$

## 4.2 SUPERFICIES SUAVES

Consideremos la superficie S dada por  $f(x, y, z) = c$ . En ese sentido, diremos que S es una superficie suave si se cumple:

$$1) \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ es continua en los puntos de S.}$$

$$2) \nabla f \neq (0; 0; 0), \text{ para todo punto de S.}$$



### 4.3 FORMULA PARA EL AREA DE UNA SUPERFICIE

Definimos el área de una superficie suave  $S: f(x,y,z)=c$ , mediante:

$$\text{Área}(S) = \iint_R \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

Donde  $\vec{p}$  es un vector normal unitario a la región R que se le denomina región "sombra" que proyecta S, considerando que  $\nabla f \cdot \vec{p} \neq 0$ .

#### Ejemplo 1:

Hallar el área de la superficie cortada del fondo del paraboloide  $x^2 + y^2 - z = 0$ , por el plano  $z = 4$ .

#### Solución:

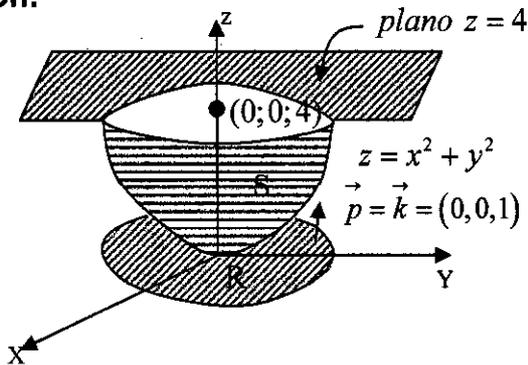
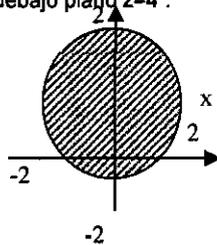


Fig. N° IV.1 Gráfica del paraboloide debajo plano  $z=4$ .

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\vec{p} = (0, 0, 1)$$



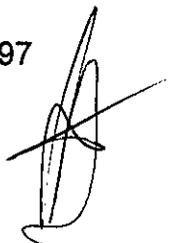
$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \Rightarrow \|\nabla f\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$R: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\text{Área}(S) = \iint_R \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}{|(-1)|} dA = \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dA = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 (\sqrt{4r^2 + 1}) r dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) u^2$$

**Ejemplo 2:** Hallar el área del casquete cortado del hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ;  $z \geq 0$ , por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$



**Solución:**

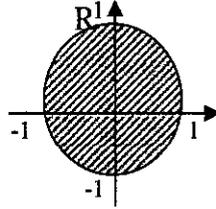
$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 2}$$

$$f(x, y, z) = c$$

$$\mathcal{R}: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\nabla f = (2x; 2y; 2z)$$

$$\Rightarrow \nabla f \cdot \vec{p} = 2z$$



$$\text{Asimismo: } \|\nabla f\| = \|(2x; 2y; 2z)\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Área(S)} &= \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{2-r^2}} = 2\pi(2-\sqrt{2})\mu^2 \end{aligned}$$

#### **4.4 INTEGRAL DE SUPERFICIE PARA FUNCIONES REALES DE TRES VARIABLES**

Si  $R$  es la región sombra de una superficie  $S$  definida por la ecuación  $f(x; y; z) = c$  y  $g$  es una función continua en los puntos de  $S$ , entonces la integral de  $g$  sobre  $S$  es la integral:

$$\text{Integral de } g \text{ sobre } S = \iint_R g(x, y, z) \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA = \iint_S g d\sigma$$

Donde  $\vec{p}$  es un vector normal unitario a  $R$  y  $\nabla f \cdot \vec{p} \neq 0$

Asimismo  $d\sigma = dS$  ;  $p$  es la diferencial de superficie y está dado por:

$$d\sigma = dS = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

**Propiedades:**

1) Sean  $g$  y  $h$  dos funciones continuas sobre  $S$  entonces:

$$\iint_S (g \pm h) d\sigma = \iint_S g d\sigma \pm \iint_S h d\sigma \quad \text{ó}$$

$$\iint_R (g(x, y, z) \pm h(x, y, z)) \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{\rho}|} dA =$$

$$\iint_R g(x, y, z) \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{\rho}|} dA \pm \iint_R h(x, y, z) \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{\rho}|} dA$$

2) Si la superficie S se subdivide por medio de curvas suaves en un número finito de porciones suaves no traslapadas (es decir, si S es suave por pedazos)

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n \rightarrow$$

$$\iint_S g d\sigma = \iint_{S_1} g d\sigma + \iint_{S_2} g d\sigma + \dots + \iint_{S_n} g d\sigma$$

**Ejemplo:**

Integre el campo escalar  $g(x, y, z) = xyz$  ; sobre la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos  $x=1, y=1, z=1$ .

**Solución:**

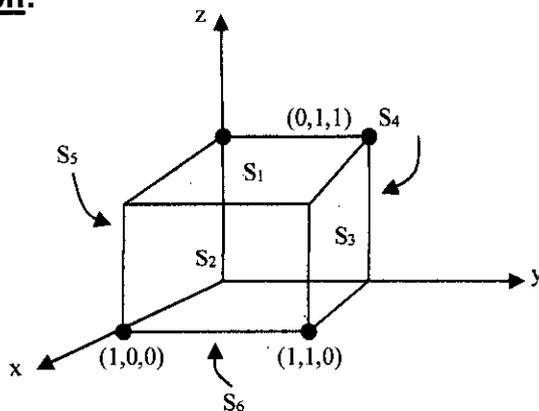


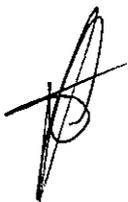
Fig. N° IV.2 Grafica de la superficie del cubo .

$$S_1: z = 1 \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{1} dydx$$

$$S_2: x = 1 \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{1} dzdy$$

$$S_3: y = 1 \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{1} dzdx$$

$$S_4: x = 0; S_5: y = 0; S_6: z = 0$$



$$\Rightarrow \iint_S g d\sigma = \iint_{S_1} g d\sigma + \iint_{S_2} g d\sigma + \iint_{S_3} g d\sigma + \iint_{S_4} g d\sigma + \iint_{S_5} g d\sigma + \iint_{S_6} g d\sigma$$

$$= \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^1 xy dy dx + \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 yz dy dz + \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 xz dz dx + \iint_{S_4} 0 d\sigma + \iint_{S_5} 0 d\sigma + \iint_{S_6} 0 d\sigma$$

$$\therefore \iint_S 0 d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{3}{4}$$

**Ejemplo:** Hallar el área de la porción del plano  $y+2z=2$ , dentro del cilindro  $x^2+y^2=1$

**Solución:**

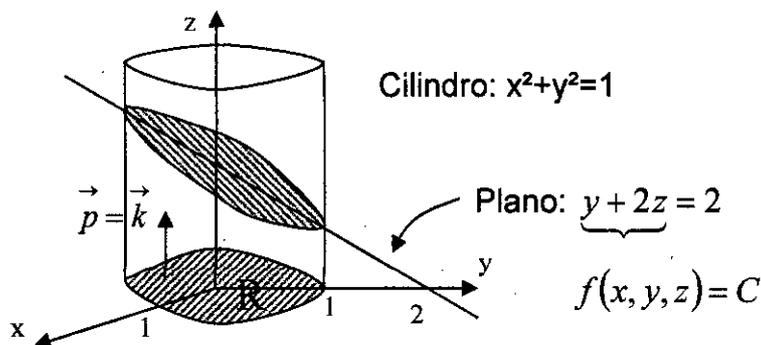


Fig. N° IV.3 Grafica de la superficie plana dentro del cilindro.

$$\text{Área (S)} = \iint_S d\sigma \text{ (forma abreviada)}$$

$$= \iint \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \text{ (forma detallada)}$$

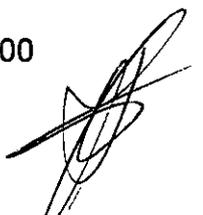
$$R: x^2+y^2 \leq 1$$

$$= \iint_R \frac{\sqrt{5}}{2} dA = \frac{\sqrt{5}}{2} \iint_R dA = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ área (R)} = \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \mu^2$$

**Ejemplo:** Hallar el área de la porción del cono  $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ , entre los planos  $z=2$ ;  $z=6$ .

**Solución:**

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2} : \text{(cono) Cuando } z = 2 = 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow x^2+y^2 = 1$$



Cuando  $z = 6 = 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 9$

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{5}$$

Asimismo:  $2\sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$

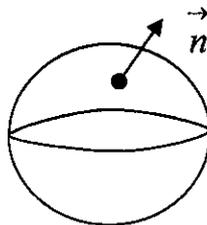
$$f(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f = \left( \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -1 \right) \rightarrow \nabla f \cdot \vec{k} = -1 \rightarrow d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{k}|} dA = \frac{\sqrt{5}}{|-1|} dA = \sqrt{5} dA$$

$$\therefore \text{Area}(S) = \iint_S d\sigma = \iint_S \sqrt{5} dA = \sqrt{5} \text{área}(R) = \sqrt{5}(8\pi) = 8\sqrt{5}\pi$$

### ORIENTACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Llamamos a una superficie suave  $S$ , **orientable**, si es posible definir un campo  $\vec{n}$  de vectores normales unitarios sobre  $S$  que varíe continuamente con la posición. Una vez que  $\vec{n}$  ha sido escogido, afirmamos que hemos dado orientación a la superficie  $S$  y denominamos a  $S$  con su campo normal  $\vec{n}$  una superficie con su orientación  $\vec{n}$ . Las superficies suaves (o suaves a trozos) cerradas en el espacio (superficies que encierran sólidos) son orientables. Se hace la convención que  $\vec{n}$  sobre tal superficie cerrada señale hacia afuera. (Larson et al., 2006, p. 1113).



En otros casos:

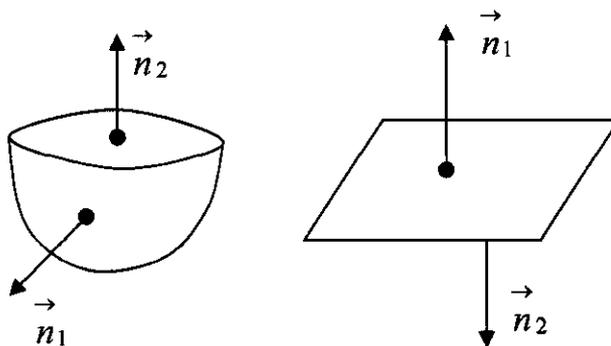


Fig. N° IV.4 Grafica de distintas orientaciones de superficie.

Por lo general dada una superficie  $S: f(x,y,z)=c$ , la orientación la dará cualquiera de los dos vectores unitarios:  $\vec{n} = \pm \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|}$  dependiendo si el problema

tratado considera la orientación hacia afuera o hacia adentro de la superficie.

#### 4.5 LA INTEGRAL DE SUPERFICIE PARA CAMPOS VECTORIALES. INTEGRAL DE SUPERFICIE PARA EL FLUJO

Considere que  $\vec{F}(x,y,z) = (M; N; P)$  tiene a M, N y P continuas sobre una superficie S que ya cuenta con una orientación  $\vec{n}$ , que es el vector normal unitario escogido sobre la superficie.

Denominamos a la integral de  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  sobre S, el flujo a través de S en la dirección positiva escogida lo que se representa como:

$\text{Flujo a través de S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$	(Thomas y Finney, 1999, p.1101)
---	---------------------------------

Si  $\vec{F}(x,y,z) = (M; N; P)$  es el campo de velocidades de un flujo de fluidos tridimensional, el flujo de  $\vec{F}$  a través de S es la razón neta a la que el fluido cruza S, en la dirección positiva escogida. (Thomas y Finney, 1999, p.1101).

Como generalmente  $S: f(x,y,z) = c$ ; la orientación estará dada por uno de los dos vectores  $\vec{n} = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ ; también hay casos especiales.

**Ejemplo:** Hallar el flujo de  $\vec{F} = (0; yz; z^2)$ , hacia el exterior a través de la superficie S cortada del cilindro  $y^2+z^2=1$ ;  $z \geq 0$  por los planos  $x=0$ ,  $x=1$ .

**Solución:**

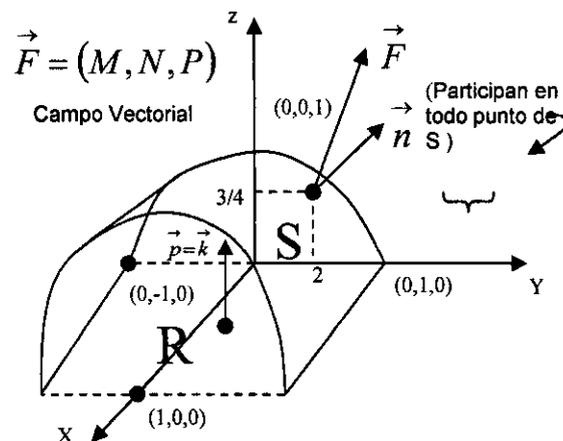


Fig. N° IV.5 Grafica de la superficie cilíndrica y su orientación.

$$\nabla f = (0; 2y; 2z)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{2(0, y, z)}{2\sqrt{y^2 + z^2}} = (0; y; z)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (0, yz, z^2) \cdot (0; y; z)$$

$$= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) = z$$

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA = \frac{2}{2z} dA = \frac{dA}{z}$$

donde  $\|\nabla f\| = \|(0; 2y; 2z)\|$

$$= 2\|(0, y, z)\| = 2\sqrt{y^2 + z^2} = 2$$

Además:

$$\nabla f \cdot \vec{p} = (0; 2y; 2z) \cdot (0; 0; 1) = 2z$$

Finalmente: Flujo a través de S =  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R z \frac{dA}{z} = \iint_R dA$

$$= \text{área}(R) = 2$$

**PARAMETRIZANDO:**

$$\begin{cases} x = x \\ y = \cos \theta \rightarrow \vec{r}(x; \theta) = (x; \cos \theta; \sin \theta) \\ z = \sin \theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq x \leq 1$$

$$\vec{r}_x = (1; 0; 0); \vec{r}_\theta = (0; -\sin \theta; \cos \theta)$$

$$\vec{n} = \pm (\vec{r}_x \times \vec{r}_\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \pm (0; -\cos \theta; -\sin \theta)$$

Pero elegimos el signo menos para dar la orientación pedida

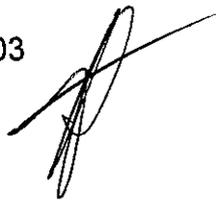
$$\vec{n} = (0; \cos \theta; \sin \theta)$$

Verificando

$$\theta = 0, x = 0 \rightarrow \vec{n} = \vec{j}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, x = 0 \rightarrow \vec{n} = \vec{k}$$

$$\theta = \pi, x = 0 \rightarrow \vec{n} = -\vec{j}$$



Finalmente:

$$\begin{aligned} \text{Flujo a través de la superficie} &= \int_0^{\pi} \int_0^1 (0; \cos \theta \operatorname{sen} \theta; \operatorname{sen}^2 \theta) \cdot (0; \cos \theta; \operatorname{sen} \theta) dx d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^1 (\cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^3 \theta) dx d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^1 \operatorname{sen} \theta dx d\theta = 2 \end{aligned}$$

#### 4.5.1 PROPIEDADES:

1) Sean  $\vec{F}$  y  $\vec{G}$  los campos vectoriales continuos en S:  $f(x,y,z)=c$ ; y sea  $\vec{n}$  la orientación elegida para S entonces:

$$\iint_S (\vec{F} \pm \vec{G}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \pm \iint_S \vec{G} \cdot \vec{n} d\sigma$$

2) Si  $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n$ , es una superficie suave a trozos, entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma_1 + \dots + \iint_{S_n} \vec{F} \cdot \vec{n}_n d\sigma_n$$

**Problema:** Hallar el flujo del campo  $\vec{F}=(-1;2;3)$  a través de S: superficie rectangular  $z=0$ ,  $0 \leq x \leq 2$   $0 \leq y \leq 3$ , donde  $\vec{n} = \vec{k}$  (orientación elegida o dirección).

**Solución:**

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (-1; 2; 3) \cdot (0, 0, 1) = 3$$

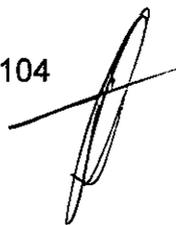
$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= 3 \iint_S d\sigma = 3 \text{ área (S)} = 3 \text{ área (R)} = 3(6) = 18 \end{aligned}$$

$$\text{Resumen: S: } f(x,y,z)=c; d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

donde  $\vec{p}$  normal unitario a la región sombra R.

$$\text{Area(S)} = \iint_S d\sigma = \iint_R \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

$$\text{Integral de g sobre S} = \iint_S g d\sigma = \iint_R g(x,y,z) \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$



## 4.5.2 PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES

Sea  $\vec{r}(u, v) = (f(u, v); g(u, v); h(u, v))$

Una función vectorial continua definida sobre una región  $\mathfrak{R}$  en el plano UV y uno a uno sobre el interior de  $\mathfrak{R}$ .

Llamamos el rango de  $\vec{r}(u, v)$  la superficie S definida o trazada por  $\vec{r}(u, v)$ , así pues  $\vec{r}(u, v) = (f(u, v); g(u, v); h(u, v))$  junto con el dominio  $\mathfrak{R}$  constituyen una parametrización de la superficie S. (Thomas y Finney, 1999, p.1106)

**Definición.-** Sea S una superficie parametrizada por:

$\vec{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ; donde  $\mathfrak{R}: a \leq u \leq b; c \leq v \leq d$

(Llamado dominio de parámetros)

Diremos que S es suave si:

1)  $\vec{r}_u = \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} \right)$ ;  $\vec{r}_v = \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} \right)$  son continuas en  $\mathfrak{R}$

2)  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq (0, 0, 0)$  , para todo punto  $(u, v) \in \mathfrak{R}$ . (Thomas y Finney, 1999, p.1106)

**Ejemplo1:** Hallar una parametrización de la porción del cono:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 0 \leq z \leq 1$$

**Solución:**

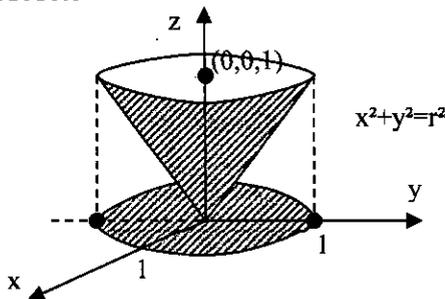


Fig. N° IV.6 Grafica de la porción de cono limitado por un plano.

$$\text{Coordenadas Cilíndricas} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



Al usarlo 
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases} \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$  donde  $0 \leq r \leq 1$  ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

**Ejemplo2:** Hallar una parametrización de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Solución:**

Coordenadas esféricas 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Al usarlo:

$$\begin{cases} x = a \sin \phi \cos \theta \\ y = a \sin \phi \sin \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$  ;  $0 \leq \phi \leq \pi$

$\vec{r}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$  ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ,  $0 \leq \phi \leq \pi$

**PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES (Resumen)**

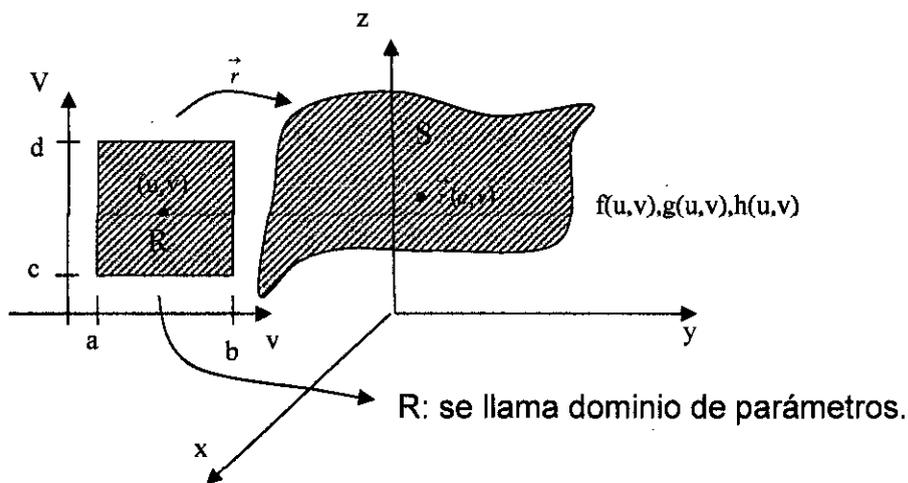


Fig. N° IV.7 Grafica del proceso de parametrización de una superficie.

S será suave si:

- 1)  $\vec{r}_u$  y  $\vec{r}_v$  sean continuas en R
- 2)  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq (0,0,0)$  en todo punto de R.

**Ejemplo 3:** Hallar una parametrización del cilindro  $x^2+(y-3)^2 = 9$ ,  $0 \leq z \leq 5$

**Solución:**

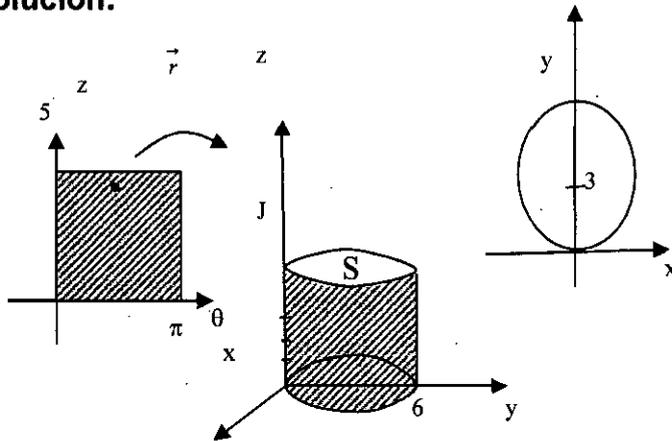


Fig. N° IV.8 Grafica del proceso de parametrización del cilindro

Coordenadas Cilíndricas  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$

Cilindro:  $x^2+(y-3)^2=9$   
 $x^2+y^2-6y+9=9$   
 $x^2+y^2 = 6y \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$$r^2 = 6r \sin \theta \Rightarrow \boxed{r = 6 \sin \theta}$$

S:  $\vec{r}(\theta, z) = (6 \sin \theta \cos \theta, 6 \sin \theta \sin \theta, z)$

Donde  $0 \leq \theta \leq \pi$  ;  $0 \leq z \leq 5$

### 4.5.3 ÁREA DE SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Sea S una superficie suave parametrizada por  $\vec{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  con dominio de parámetros:  $a \leq u \leq b$ ;  $c \leq v \leq d$ . El área de S está dada por:

$$\text{Área (S)} = \int_a^b \int_c^d \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dv \, du \quad (\text{Thomas y Finney, 1999, p.1108})$$

Donde llamamos diferencial de superficie (parametrizada) a  $d\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dv \, du$

**Ejemplo:** Hallar el área de la porción de superficie  $y+2z=2$ , dentro del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

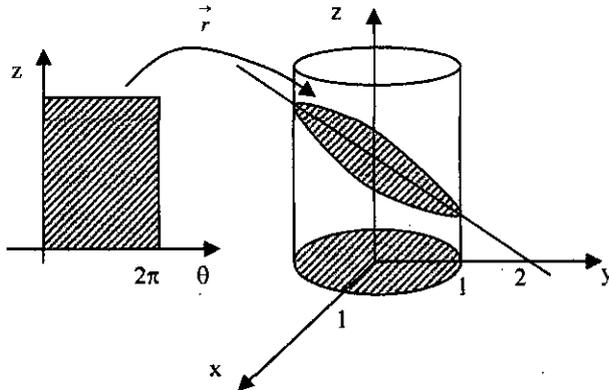


Fig. N° IV.9 Grafica de la parametrización de la porción del plano dentro del cilindro

Se está contenida en el plano:  $y+2z=2$

$$\text{Coord. Cilíndricas} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Al reemplazar en la ecuación del plano:

$$r \sin \theta + 2z = 2$$

$$\Rightarrow 2z = 2 - r \sin \theta \rightarrow z = \frac{2 - r \sin \theta}{2} = 1 - \frac{r \sin \theta}{2}$$

$$\text{Luego: } \vec{r}(\theta, r) = \left( r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - \frac{r \sin \theta}{2} \right)$$

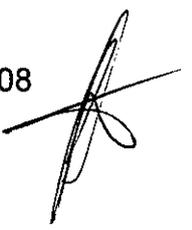
$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\vec{r}_\theta = \left( -r \sin \theta, r \cos \theta, -\frac{r \cos \theta}{2} \right); \quad \vec{r}_r = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{\sin \theta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_\theta \times \vec{r}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & -\frac{r \cos \theta}{2} \\ \cos \theta & \sin \theta & -\frac{\sin \theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \left( -\frac{r}{2} \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{r}{2} \sin \theta \cos \theta \right) = -\vec{j} \left( \frac{r}{2} \sin^2 \theta + \frac{r}{2} \cos^2 \theta \right) = \left( 0; \frac{r}{2}; -r \right)$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r\| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} r$$



$$\text{Finalmente: } \text{Área}(S) = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \mu^2$$

#### 4.5.4 INTEGRAL DE UNA FRVV SOBRE UNA SUPERFICIE PARAMETRIZADA

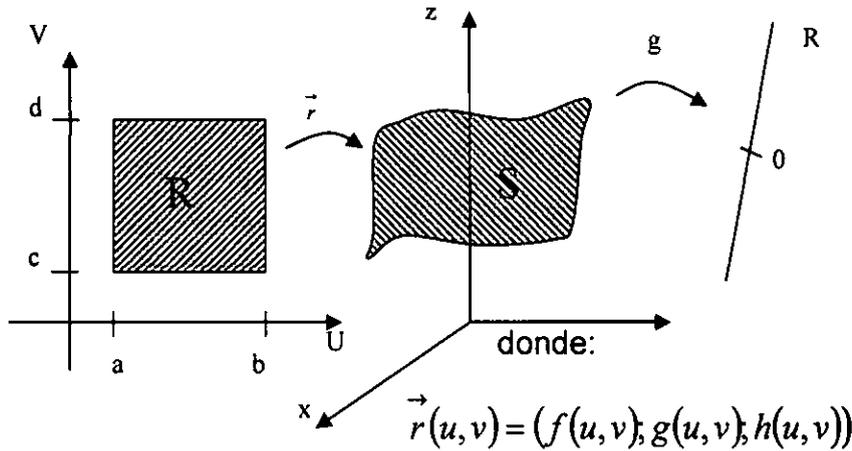


Fig. N° IV.10 Gráfica del proceso de integral de superficie para campo escalar.

$$\text{Integral de } g \text{ sobre } S = \iint_S g d\sigma = \int_a^b \int_c^d \underbrace{g(f(u, v), g(u, v), h(u, v))}_{\vec{r}(u, v)} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dv du$$

#### 4.5.5 INTEGRAL DE UN CAMPO VECTORIAL TRIDIMENSIONAL SOBRE UNA SUPERFICIE PARAMETRIZADA

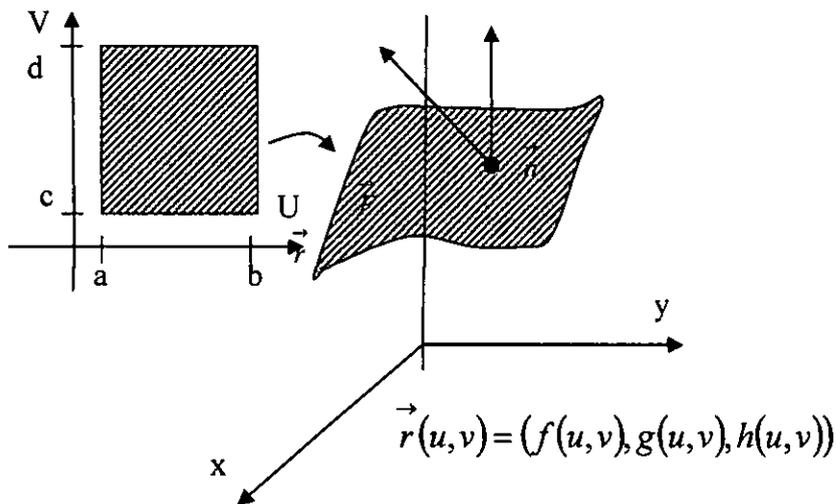
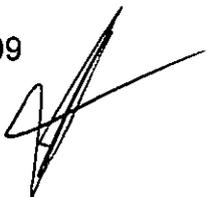


Fig. N° IV.11 Gráfica del proceso de integral de superficie para campos vectoriales.

El campo de vectores normales unitario  $\vec{n}$  de la superficie parametrizada S, mediante  $\vec{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  es:  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$  donde:  $a \leq u \leq b$ ;  $c \leq v \leq d$



**Comentario:** La manera de tomar  $\vec{n}$  dependerá de la condición del problema (generalmente el flujo será hacia afuera).

**FLUJO A TRAVES DE UNA SUPERFICIE**

Sea  $\vec{F}(x,y,z)=(M,N,P)$  un campo vectorial continuo en los puntos de una superficie suave  $S$  parametrizada por  $\vec{r}(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$  donde  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ ; orientada según el campo de vectores normales unitario  $\vec{n}$ . El

flujo a través de  $S$  está dado por: Flujo de  $\vec{F}$  a través de  $S = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$= \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dvdu = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dvdu$$

**EJEMPLO:** Determine el flujo de  $\vec{F} = (yz; x; -z^2)$  hacia el exterior a través del cilindro parabólico  $y = x^2$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq 4$ .

**Solución:**

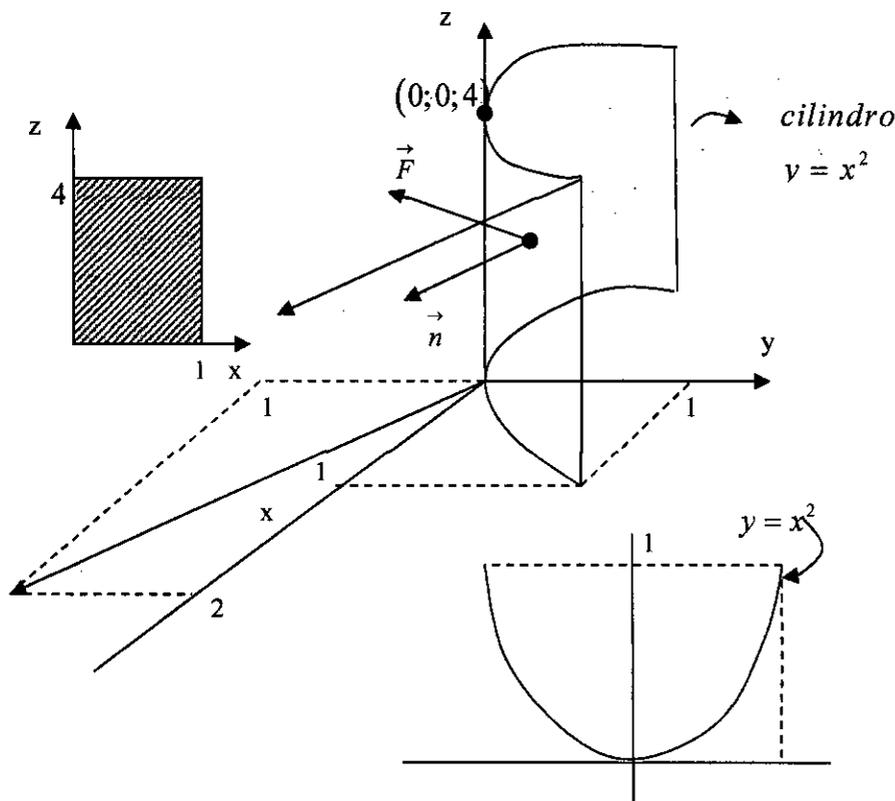


Fig. N° IV.12 Gráfica del proceso de integral de superficie para  $\vec{F} = (yz; x; -z^2)$

Parametrización de la parábola:  $\vec{\alpha}(x) = (x, x^2)$

$$\vec{r}(x, z) = (x; x^2; z); \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq z \leq 4$$

$$\vec{r}_x = (1, 2x, 0) \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_x \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2x) - \vec{j}(1) + \vec{k}(0) = (2x; -1; 0)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_z}{\|\vec{r}_x \times \vec{r}_z\|} = \frac{(2x; -1; 0)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Prueba con:  $x=1, z=4$

$$y=1$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{(2; -1; 0)}{\sqrt{5}}$$

Flujo de  $\vec{F}$  a través de  $S = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^4 \vec{F}(\vec{r}(x, z)) \cdot \frac{(2x, -1, 0)}{\sqrt{4x^2 + 1}} \underbrace{\sqrt{4x^2 + 1}}_{d\sigma = dS} dz dx$$

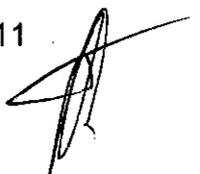
$$d\sigma = \|\vec{r}_x \times \vec{r}_z\| dz dx$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1} dz dx$$

$$\vec{F}(\vec{r}(x, z)) = (x^2 z; x; -z^2) \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(x, z)) \cdot (2x, -1, 0)$$

$$= (x^2 z; x; -z^2) \cdot (2x; -1; 0) = 2x^3 z - x$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Flujo de } F \text{ a través de } S &= \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^4 (2x^3 z - x) dz dx = \int_0^1 (x^3 z^2 - xz) \Big|_0^4 dx \\ &= \int_0^1 (16x^3 - 4x) dx = (4x^4 - 2x^2) \Big|_0^1 = 2 \end{aligned}$$



$S: \underbrace{x^2 - y = 0}_{f(x,y,z)}$  ;  $\vec{n} = \frac{(2x; -1; 0)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$  pues  $\nabla f = (2x; -1; 0)$  se verifica que  $\vec{n}$  apunta hacia

el exterior de S, por ejemplo verificar en los puntos  $(0;0;0)$ ,  $(0;0;4)$ ,  $(1;1;4)$ ,  $(1;1;0)$   
Asimismo la región sombra es la región rectangular  $\mathfrak{R}: 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 4$ , y el vector  $\vec{p} = \vec{i}$ , así pues

$$\text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de } S = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\mathfrak{R}} (yz; x; -z^2) \cdot \frac{(2x; -1; 0)}{\sqrt{4x^2 + 1}} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x} dA = 2$$

## 4.6 TEOREMA DE STOKES

El Teorema de Sir Gabriel Stokes tiene por finalidad la igualdad entre una integral sobre una superficie orientada S ;cuya orientación sea el campo de vectores normales unitario  $\vec{N}$ ; y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio , que viene a ser la frontera o el borde de S .

La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal  $\vec{N}$  .Es decir,si se imagina que se toma *el vector normal  $\vec{N}$  con la mano derecha , con el dedo pulgar apuntando en la dirección de  $\vec{N}$  , los demás dedos apuntarán en la *dirección positiva* de C .(Larson et al.,2006,p.1128)*

**Definición:** Sea  $\vec{F}(x; y; z) = (M; N; P)$  un campo vectorial continuo en una región U del espacio tal que sus componentes M, N y P tengan primeras derivadas parciales continua en la región  $\mathfrak{R}$  .

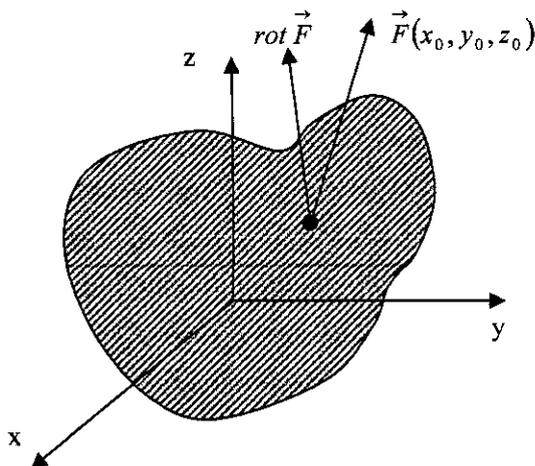
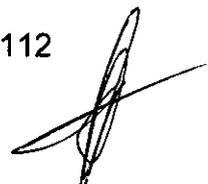


Fig. N° IV.13 Gráfica del proceso de como actúa el campo y la orientación.



Definimos el rotacional del campo  $\vec{F}$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  como:

$$\text{rot } \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \nabla \times \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.1114)}$$

en general:  $\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}}$  ..... (\*)

donde:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Detallando (\*)

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

**Propiedad:**  $\vec{F}(x, y, z)$  es conservativo en U si y solo si  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} = (0,0,0)$  en U.

**Observación:** Consideremos la superficie orientada  $S: f(x,y,z)=c$ ; cuya orientación sea dada por:

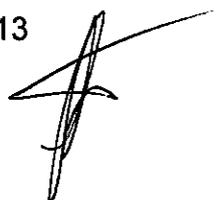
$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \text{ (hacia el exterior)}$$

**TEOREMA DE STOKES(Enunciado)**

La circulación de un campo  $\vec{F}(x, y, z) = (M; N; P)$  alrededor de la frontera C, de una superficie orientada S, en sentido antihorario respecto al campo  $\vec{N}$  normal unitario a la superficie; es igual a la integral de la componente normal del rotacional del campo  $\vec{F}$  sobre la superficie S; es decir:

$$\begin{aligned} \text{CIRCULACIÓN ANTIHORARIA} &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma \\ &= \oint_C Mdx + Ndy + Pdz = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \text{ (Integral rotacional)} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Evalúe el teorema de Stokes para el hemisferio  $S: x^2+y^2+z^2=9; z \geq 0$  su frontera  $C: x^2+y^2=9, z=0$  y el campo  $\vec{F} = (y; -x; 0)$ .



## Solución

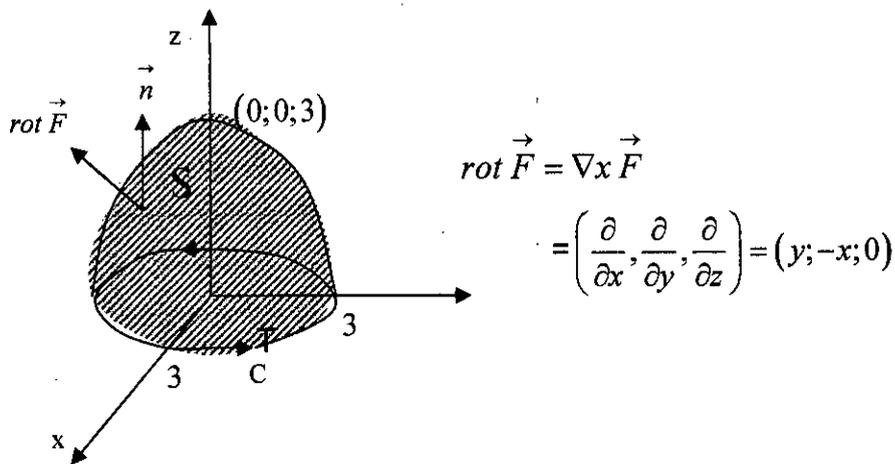


Fig. N° IV.14 Gráfica de la superficie para aplicar el teorema de Stokes

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(-1-1) = (0, 0, -2)$$

### 1) Circulación Antihoraria

$$\vec{F} = (y; -x; 0) \rightarrow C: \vec{r}(t) = (3\cos t; 3\sin t; 0); 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt \rightarrow d\vec{r} = (-3\sin t; 3\cos t; 0)dt \rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) = (3\sin t; -3\cos t; 0)$$

$$\text{Circulación Antihoraria} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} (-9\sin^2 t - 9\cos^2 t) dt = -18\pi$$

### 1) Integral Rotacional

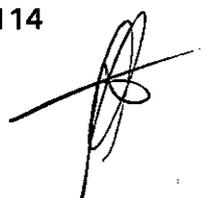
$$\text{rot } \vec{F} = (0, 0, -2) \quad \vec{P} = (0, 0, 1)$$

$$S: \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{f(x,y,z)} = 9 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, 2z) \rightarrow \|\nabla f\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2(3) = 6$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{6} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{3}(x, y, z)$$

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = (0, 0, -2) \cdot \frac{1}{3}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-2z) = -\frac{2}{3}z$$

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \vec{\rho}|} dA = \frac{6}{2z} dA = \frac{3}{z} dA$$



$$\Rightarrow \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R \left(-\frac{2}{3}z\right) \left(\frac{3}{z}\right) dA = -2 \iint_R dA = -2 \text{área}(R)$$

$$= -2(9\pi) = -18\pi \text{ Lqgd.}$$

**Observación:** Note que si dos superficies orientada  $S_1$  y  $S_2$  diferentes tienen la misma frontera  $C$ , entonces sus integrales rotacionales son iguales:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_2 d\sigma$$

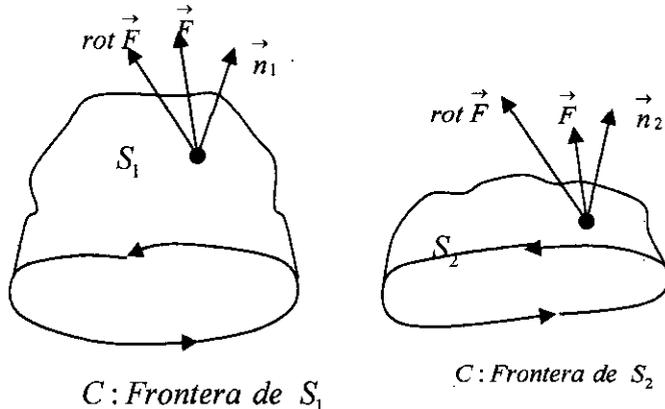


Fig. N° IV.15 Gráfica de dos superficies con la misma frontera.

**Definición:** Sea  $\vec{F}(x, y, z) = (M; N; P)$  un campo vectorial continuo en una región  $U$  del espacio tal que  $M, N, P$  tengan primeras derivadas parciales continuas en  $U$ . Definimos la **divergencia** del campo  $\vec{F}$  como:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (M; N; P) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \text{ (Thomas y Finney, 1999, p.1123)}$$

**Observación:** En el Teorema de Green

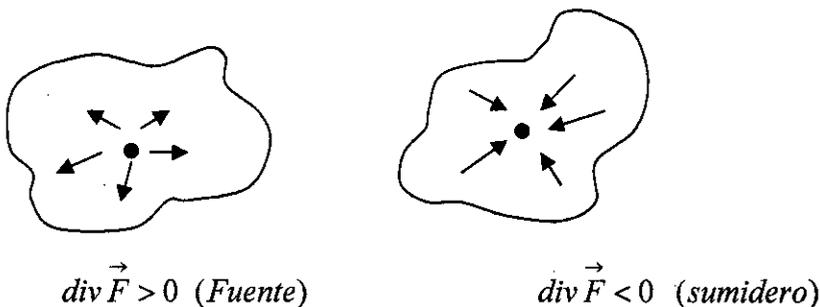
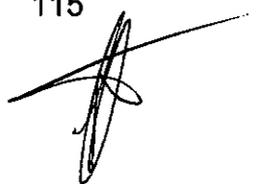


Fig. N° IV.16 Gráfica de la interpretación de la divergencia en el espacio.



En el espacio:

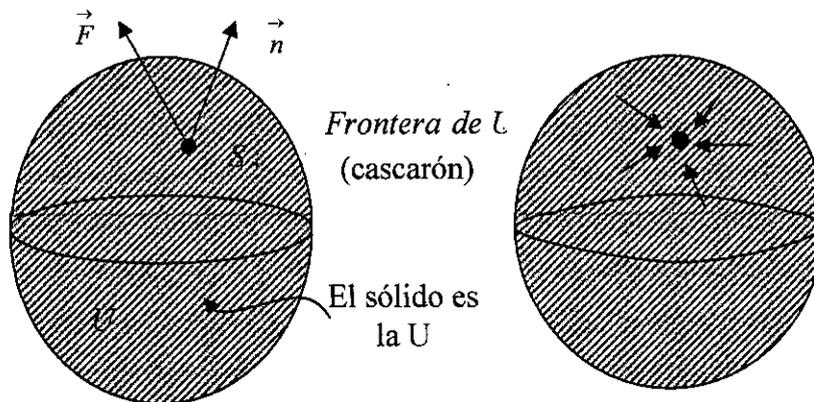


Fig. N° IV.17 Gráfica del campo vectorial aplicado a una superficie cerrada.

### 4.7 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA(Enunciado)

La integral del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (M, N, P)$ , sobre la superficie S cerrada y orientada en la dirección del vector normal unitario  $\vec{n}$  hacia afuera de S, coincide con la integral triple del operador:  $\text{div } \vec{F}$ , sobre la región U, encerrada por la superficie S. Es decir

$$\text{Flujo hacia afuera} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_U \nabla \cdot \vec{F} dV = \text{Integral de divergencia} \dots (*)$$

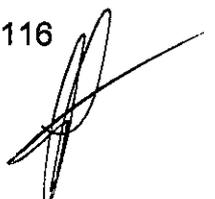
Ejemplo: Evalúe el Flujo hacia afuera y la integral de divergencia de la ecuación(\*) para el campo  $\vec{F}(x; y; z) = (x; y; z)$ , sobre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución:

1)Flujo hacia afuera:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{n} &= (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Flujo hacia afuera} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S a d\sigma \\ &= a \iint_S d\sigma = a \text{Área}(S) = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3 \end{aligned}$$



## 2)Integral de divergencia:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla_x \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Integral de divergencia} &= \iiint_U 3 dv = 3 \iiint_U dv = 3 \operatorname{Vol}(U) \\ &= 3 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

## 4.8 APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE: LEY DE GAUSS

En la teoría electromagnética el campo eléctrico debido a la carga  $q$  de un punto localizado en el origen es

$$E(x; y; z) = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi e_0} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3}$$

Donde  $e_0$  es una constante física,  $\vec{r}$  es el vector posición del punto  $(x; y; z)$  y

$$\rho = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \text{ En la expresión } E = \frac{q}{4\pi e_0} \frac{\vec{r}}{\rho^3}$$

El flujo de  $E$  hacia afuera a través de cualquier superficie cerrada  $S$  que encierra al origen (y donde se aplica el teorema de la divergencia) también es

$\frac{q}{e_0}$ . Para ver porque basta imaginar una esfera grande  $S_0$  con centro en el

origen y que encierre a la superficie  $S$ . Puesto que

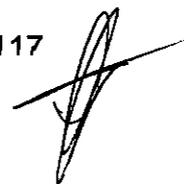
$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi e_0} \frac{\vec{r}}{\rho^3} = \frac{q}{4\pi e_0} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{\rho^3} = 0$$

Donde  $\rho > 0$ , la integral  $\nabla \cdot E$  sobre la región  $D$  entre  $S$  y  $S_0$  es cero. Por el

teorema de la Divergencia  $\iint_{\text{Frontera de } D} E \cdot n d\sigma = 0$

Y el flujo de  $E$  a través de  $S$  alejándose del origen es igual al flujo de  $E$  a través de  $S_0$  alejándose del origen que es  $\frac{q}{e_0}$ . Esta afirmación llamada LEY DE

GAUSS también se aplica a distribuciones de carga más generales. (Thomas y Finney, 1999, p.1128).



### Ejemplos de aplicación

1) Considere las dos cargas situadas en la Figura. ¿El flujo que atraviesa la esfera es el mismo en ambas situaciones? ¿El campo eléctrico en el mismo punto P es el mismo en ambas situaciones?



Fig. N° IV.18 Gráfica del flujo vectorial en cada superficie.

### Solucion:

Segun la Ley de Gauss, cuando tenemos una superficie cerrada, el flujo electrico solo depende de la carga encerrada en su interior

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Como la carga encerrada en el interior de las dos esferas es la misma ( $4\mu C$ ) en ambos tendremos la misma magnitud de flujo. Sin embargo, el campo eléctrico si depende de los vectores de la distribución de cargas por lo que será distinto en cada una de las situaciones

2) Cierta distribución de cargas que se encuentra en el interior de una esfera de 1m de radio, crea un campo eléctrico, perpendicular en todo momento a la superficie de la esfera, que viene dada por

$$E = \frac{1000}{r^2}$$

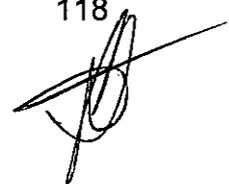
Siendo r la distancia a que nos encontramos del centro de la esfera. Calcular la carga que existe en el interior de la esfera, suponiendo que está en el vacío.

**Solución:** En la superficie de la esfera  $r=R$ ; y el campo eléctrico es

$$E = \frac{1000}{R^2}$$

Aplicando el Teorema de Gauss a la superficie esférica:

$$\phi = \int_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$\phi = E \int_S dS = \frac{1000}{R^2} 4\pi R^2 = 4000\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow Q = 4000\pi\epsilon_0$$

$$Q = 4000\pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12} = 1,11 \cdot 10^{-7} C \rightarrow Q = 0,11 \mu C$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1) Hallar el área de la superficie correspondiente a la porción del cono  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ; entre los planos  $z = 2$ ,  $z = 6$ .
- 2) Hallar el área de la porción del paraboloido  $x = 4 - y^2 - z^2$ , que se encuentra arriba del anillo  $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ , en el plano YZ.
- 3) Integre la función  $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$ , sobre el domo parabólico  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ .
- 4) Evalúe la integral de superficie  $\iint_S (x + y + z) dS$ , donde S es la superficie con ecuaciones paramétricas:  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = 2uv$ , con  $D: u^2 + v^2 \leq 4$
- 5) Use la integral de superficie en el Teorema de Stokes para calcular la circulación del campo  $\vec{F} = (2y; 3x; -z^2)$  alrededor de la curva C: El círculo  $x^2 + y^2 = 9$ , en el plano XY, en sentido antihorario visto desde arriba.
- 6) Evalúe la siguiente integral de línea

$$\oint_C (2x^2 + y^2 - z^2) dx + (2x^2 + z^2) dy + (2x^2 - y^2 - z^2) dz;$$

a lo largo de la curva simple cerrada C que resulta de la intersección del elipsoide:  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ ; y el plano:  $y + z = 1$ ; recorrida en sentido antihorario vista desde arriba.

- 7) Calcule el flujo de campo vectorial

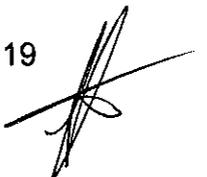
$$F(x, y, z) = e^{z^2} i + (2y + \operatorname{sen}(x^2 z)) j + (4z + \sqrt{x^2 + 9y^2}) k$$

a través de la superficie cerrada que es frontera del sólido Q ubicado al interior del cilindro:  $x^2 + y^2 = 4$ ; y al interior del elipsoide:  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$ .

- 8) Determine la integral del campo vectorial

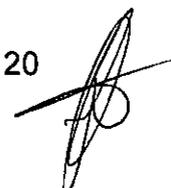
$$F(x, y, z) = (x y z + x y) i + \left[ \frac{1}{2} y^2 (1 - z) + e^x \right] j + (e^{x^2 + y^2}) k$$

a través de la superficie S que es el "cascaron" del sólido Q limitado por el cilindro:  $x^2 + y^2 = 4$ ; y los planos:  $z = y - 4$ ;  $z = 0$ .



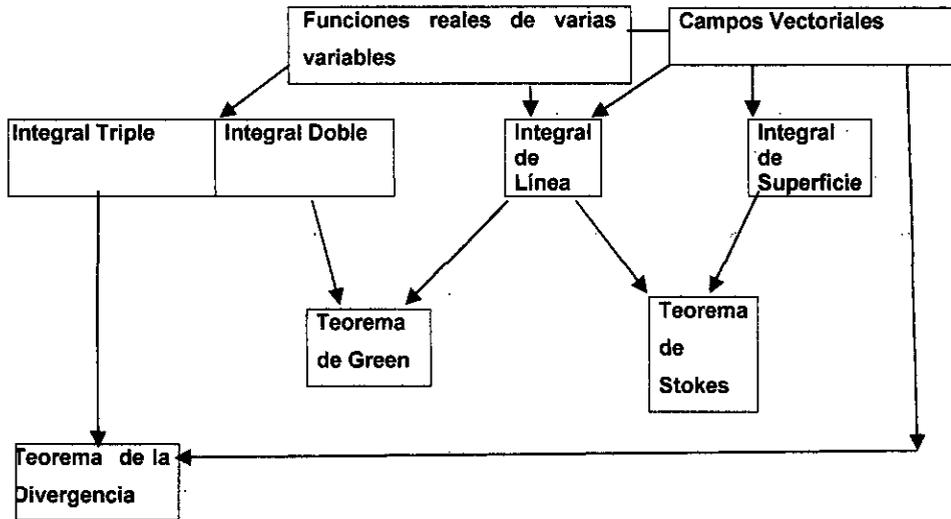
## V. REFERENCIALES

- **Larson R., Hostetler R., Edwards, B.**(2006) CÁLCULO . 8va. Edición. China: Mc Graw Hill Interamericana.
- **Leithold, L.** (1998). EL CÁLCULO. 7ma Edición. Estados Unidos: Oxford.
- **Marsden, J.; Tromba, A.** 1998. Cálculo Vectorial. 4ta Edición. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- **Piskunov, N.** (1983) CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, TOMO I y II. 6ta. Edición. Moscú. Editorial MIR..
- **Pita Ruíz, C.** (1995) CALCULO VECTORIAL. 1er Edición. México: Prentice – Hall Hispanoamericano, S.A.
- **Purcell, E.; Varberg, D.** (1995) CÁLCULO CON GEOMETRIA ANALITICA. 6ta Edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.
- **Seeley, R.** (1990). CÁLCULO DE UNA Y VARIAS VARIABLES. 2da. Edición. México: Trillas S.A.
- **Stein, S.; Barcellos, A.** (1994). CALCULO Y GEOMETRIA ANALITICA (Volumen 2), 5ta Edición. México: Mc Graw Hill..
- **Stewart, J.** (2004) CÁLCULO. 4ta Edición. México: Thomson Editores S. A.
- **Swokowski, E.** CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. 2da. Edición.. México: Grupo Editorial Iberoamericana. S.A.
- **THOMAS, G., FINNEY, R.**(1999) Cálculo Varias variables ,9na. Edición. México: Addison Wesley Longman , Iberoamericana.
- **Mitacc ,M.** (1999).CÁLCULO III .4ta Edición .Perú: Editorial THALES S.R.L.

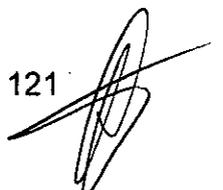


## VI. APÉNDICES

Apéndice 1: RELACIÓN ENTRE LOS CAPÍTULOS DESARROLLADOS Y LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO VECTORIAL :TEOREMA DE GREEN, TEOREMA DE STOKES Y TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.



Fuente: Elaboración propia.



## Apéndice 2: CONTENIDO TEÓRICO DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema Fundamental	¿Qué relaciona?	¿Qué conceptos usa?	Fórmula
Teorema de Green	Una integral de Línea sobre una línea cerrada C con una integral doble sobre una región acotada D cuya borde es C	Circulación antihoraria versus Integral doble del rotacional Flujo a través de una curva cerrada versus Integral doble de la divergencia.	$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_D \text{rot} \vec{F} dA$ $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \text{div} \vec{F} dA$
Teorema de Stokes	Una integral de Línea sobre una curva cerrada C con una integral de superficie sobre una superficie S cuya frontera es C.	Circulación antihoraria sobre una curva cerrada C, versus Integral de superficie sobre una superficie orientada S cuya frontera es C.	$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} dS$
Teorema de la Divergencia de Gauss.	Una integral de superficie sobre una superficie cerrada S con una integral Triple sobre una región $U \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es S	Flujo a través de una superficie cerrada y orientada S versus la integral triple sobre una región $U \subset \mathbb{R}^3$ , cuya frontera es S.	$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iiint_U \text{div} \vec{F} dV$

Fuente. Elaboración propia.



## VII. ANEXOS

Tabla 1 : Fórmulas de operadores vectoriales para gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciano.

	<b>Cartesianas (x; y; z)</b> i, j, k son vectores unitarios en las direcciones de crecimiento de x, y, z. F <sub>x</sub> , F <sub>y</sub> , F <sub>z</sub> son las componentes escalares de F(x; y; z) en esas direcciones.	<b>Cilíndricas (r; θ; z)</b> u <sub>r</sub> , u <sub>θ</sub> , k son vectores unitarios en las direcciones de crecimiento de r, θ y z. F <sub>r</sub> , F <sub>θ</sub> y F <sub>z</sub> son las componentes escalares de F(r; θ; z)	<b>Esféricas (ρ; φ; θ)</b> u <sub>ρ</sub> , u <sub>φ</sub> y u <sub>θ</sub> son vectores unitarios en las direcciones de crecimiento de ρ, φ y θ. F <sub>ρ</sub> , F <sub>φ</sub> y F <sub>θ</sub> son las componentes escalares de F(ρ; φ; θ) en esas direcciones.
Gradiente	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \bar{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \bar{u}_\phi + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{u}_\theta$
Divergencia	$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi \sin \phi) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$
Rotacional	$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \bar{u}_r & \bar{u}_\theta & \frac{1}{r} \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{u_\rho}{\rho^2 \sin \phi} & \frac{u_\phi}{\rho \sin \phi} & \frac{u_\theta}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & F_\phi & \rho \sin \phi F_\theta \end{vmatrix}$
Laplaciano	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Fuente: Thomas y Finney, 1999.

TABLA 2 FÓRMULAS PARA MASAS Y MOMENTOS DE PLACAS DELGADAS QUE CUBREN REGIONES DEL PLANO XY

Densidad	$\delta(x; y)$ es la densidad de una lámina plana que ocupa una región D en el plano (masa por unidad de área).
Masa	$M = \iint_D \delta(x; y) dA$
Primeros Momentos	$M_x = \iint_D y \delta(x; y) dA$ ; $M_y = \iint_D x \delta(x; y) dA$
Centro de Masa	$\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ ; $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$
Momentos de Inercia	Respecto al eje X: $I_x = \iint_D y^2 \delta(x; y) dA$ Respecto al eje Y: $I_y = \iint_D x^2 \delta(x; y) dA$ Respecto al origen $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x; y) dA$ (momento polar)
Radio de giro	Respecto al eje X: $R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$ ; Respecto al eje Y: $R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$ ; Respecto al origen: $R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$

Fuente: Thomas y Finney, 1999.



Tabla 3 Fórmulas de masas y momentos para objetos en el espacio

Densidad	$\delta(x; y; z)$ es la densidad de un objeto que ocupa una región U en el espacio(masa por unidad de volumen).
Masa	$M = \iiint_U \delta(x; y; z) dV$
Primeros Momentos respecto a los planos coordenados	$M_{yz} = \iiint_U x\delta(x; y; z) dV$ ; $M_{xz} = \iiint_U y\delta(x; y; z) dV$ ; $M_{xy} = \iiint_U z\delta(x; y; z) dV$
Centro de Masa	$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ ; $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}$ ; $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$
Momentos de Inercia(segundos momentos)	Respecto al eje X: $I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta(x; y; z) dV$ Respecto al eje Y: $I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta(x; y; z) dV$ Respecto al eje Z: $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta(x; y; z) dV$
Momento de Inercia respecto a una recta L	$I_L = \iiint_U r^2(x; y; z) \delta(x; y; z) dV$ ; $r(x; y; z)$ : distancia de los puntos (x,y,z) a la recta L.
Radio de giro respecto a una recta L	$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

Fuente: Thomas y Finney, 1999.

