UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

“LA ESTRUCTURA DE IDEAL EN UN C*-ALGEBRA DE GRAFO”

AUTOR: WILFREDO MENDOZA QUISPE

ESTUDIANTE DE APOYO: LINER SAMER ALBORNOS SANDOVAL

Callao, 2019

PERÚ

INDICE

INDICE DE GRÁFICOS

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La teoría de grafos con sus múltiples aplicaciones tiene sus fundamentos en las matemáticas discretas, y muy poco en la matemática abstracta, como el álgebra, topología, geometría, etc. Y en particular en la estructura algebraica de un ideal. Es así como en este trabajo se ha tenido como propósito estudiar e investigar la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo dirigido; resultado que ha sido posible al utilizar un método "Teorico – Constructivo", básica y fundamentalmente en la definición de conjunto hereditario y saturado, concluyéndose con una correspondencia biyectiva entre la familia de ideales cerrados y la familia de subconjuntos hereditarios y saturados.

ABSTRACT

The theory of graphs with their multiple applications has its foundations in discrete mathematics, and very little in abstract mathematics, such as algebra, topology, geometry, etc. And in particular in the algebraic structure of an ideal. This is how in this work we have had the purpose of studying and investigating the ideal structure in a C * - directed graph algebra; result that has been possible to use a "Theoretical - Constructive" method, basically and fundamentally in the definition of a hereditary and saturated set, concluding with a bijective correspondence between the family of closed ideals and the family of hereditary and saturated subsets.

INTRODUCCIÓN

Un ideal es una estructura algebraica muy especial, en particular es de gran utilidad en la construcción de una estructura cociente de los objetos algebraicos donde estos ideales son definidos (Anillos, Algebras, etc.), en este trabajo se ha estudiado e investigado la estructura de ideal en un C*-álgebra de un grafo dirigido G, el mismo que consiste en una cuaterna (G_0, G_1, r, s) donde G_0 es el conjunto formado por los denominados vértices y G_1 por las aristas (ejes), las aristas son obtenidas al juntar dos vértices arrojando de esta manera una orientación, y donde r, s son funciones que van de G_1 a G_0.

Las álgebras de grafos poseen una teoría atractiva en su estructura en lo cual propiedades algebraicas y topológicas del algebra están relacionadas a propiedades combinatorias de caminos en los grafos dirigidos.

Los resultados fundamentales que guardan mucha analogía son probados por Cuntz y Krieger, en particular los teoremas de Unicidad para algebras de grafos. Nosotros en este trabajo hacemos notar tal relación al estudiar la estructura de un ideal I en C*(G). En líneas generales presentamos aspectos y/o temas preliminares; seguido exponemos muy brevemente la definición de grafos para dar la estructura de un C*-algebra de un grafo G, la misma que es formalizada con la definición de una G- familia de Cuntz – Krieger, los teoremas de unicidad para algebras de grafos juegan un papel fundamental en el estudio de la estructura de ideal de la C*-algebra G del grafo G; el primer resultado (primer teorema de unicidad) da una condición sobre el grafo G, lo cual garantriza que C*(G) es simple, luego este resultado es necesario para mostrar que "C*(G) es simple si y solamente si cada ciclo en G tiene una entrada y G es cofinal"; Finalmente presentamos dos modelos particulares ilustrativos uno de C*.álgebra y otro de grafo estos son la C*-algebra de matrices "escalares complejas" y el otro es el denominado "Grafo de homotopía".

CAPITULO I
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la Realidad Problemática

La teoría de grafos como una rama de las matemáticas y ciencias de la computación; tiene sus fundamentos en las matemátricas discretas y aplicadas; sin embargo es una teoría que requiere de otros conceptos de diferentes áreas como álgebra, topología, análisis, etc., en particular el algebra es una rama que permite abordar un problema muy común que se presenta en la teoría de grafos siendo este el problema de isomorfismo de subgrafos; el cual consiste en encontrar un grafo fijo como subgrafo de un grafo dado; en este mismo contexto; se ha dotado a un grafo de una estructura de C*-algebra y lo que seh ha buscado en dicha estructura es una subestructura o estructura de ideal.

1.2. Formulación del Problema

¿Será posible determinar la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo?

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Determinar la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo.

1.3.2. Objetivo Específicos

- Investigar y estudiar la estructura algebraica de ideal en un C*-algebra de un grafo dirigido fila – finita.
- Garantizar que una C*-algebra de un grafo G sea simple

1.4. Limitantes de la Investigación

La naturaleza de la investigación que es netamente teórico más aún es abstracta está dentro de la estructura algebraica que es la de un ideal de un C* -algebra de grafo, no presentándose la posibilidad de que los limitantes de la investigación sea de carácter temporal ni espacial.

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Antecedentes Internacionales

La estructura de ideal de las algebras de grafos de Cuntz – Krieger fue analizado por Cuntz en su obra "A class of C* - algebras and Topological Markov chains II: Reducible chains and the Ext – funtor for C*-algebras (1981)", bajo una cierta hipótesis (adicional) sobre un algebra A. Mientras que la teoría de ideal para un algebra arbitrario finito A fue estudiado por: A. Huef and I. Raeburn en la obra "the ideal estructura of Cuntz – Krieger algebras. Ergodic Theory Dynam. Sys (1997).

2.1.2 Antecedentes Nacionales

Con respecto al estudio de las estructura de ideal en un C*-Algebra de grafo, no se ha encontrado muchos trabajos realizados en nuestro medio; sin embargo en la Tesis Intitutlada "K – Teoría de C*-algebras", (2014). El autor de ésta obra lo utiliza para sus objetivos sin hacer un análisis profundo sobre tal estructura.

2.2 Marco

2.2.1 Teórico

Se consideró un grafo dirigido G que consiste en una cuaterna (G_0, G_1, r, s); donde G_0 y G_1 son dos conjuntos a lo sumo numerables formado por elementos llamados vértices y lados (aristas ó ejes) respectivamente y donde r, s son dos funciones que van de G_1 en G_0; luego se representó el grafo G por operadores sobre un espacio de Hilbert H, donde los vértices son representados por proyecciones ortogonales y las aristas por isometrías parciales; con tales consideraciones se definió la denominada G – familia de Cuntz – Krieger sobre H, lo cual nos permitió definir una C*-algebra, y dentro de la cual se buscó estructurar un ideal, usando los teoremas de unicidad para algebras de grafos. A continuación presentamos el material bibliográfico utilizado en el marco teórico.

(1) Massey, W. Introducción a la Topología Algebraica. España – Barcelona. Editorial Reverté. 1972

(2) Munkres J. Topología. España. © Pearson Educacion, S.A. 2002.

(3) Spanier, E. Algebraic Topology. New York. E.H. Spanier.

(4) Raeburn, I. Graph Algebras. United States of América. Americal Mathematical Society. 2005.

(5) M. Rφrdam, An Introduction to K – teoría for C*-algebras, Cambridge university press (2000).

(6) J. Conway, A. Course in functional Analysis, Springer – Verlag (1990, 2dnd edition).

2.2.2 Conceptual

En un C*-algebra de un grafo dirigido G, se dotó la estructura de Ideal, resultado que se obtuvo usando los teorema de Unicidad para C*-algebras de grafos, estableciéndose luego una biyección entre las familias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ donde $\mathcal{F} = \{F \subseteq G_0 : F$ es saturado y hereditario$\}$ y $\mathcal{L} = \{I \subseteq C^*(G) : I$ es un ideal cerrado$\}$

2.2.3 Teórico – Conceptual

Un grafo dirigido G da lugar a un C* - algebra; el cual es denotado por C*(G), en ésta estructura "algebraica – toipológica" se estudió la estructura de ideal mediante los denominados conjuntos saturados y hereditarios.

2.3 Definición de Términos Básicos

Definición (2.3.1) (Acción de un grupo)

Sea (G, •) un grupo, E un conjunto no vació. Una acción de G en E es una aplicación.

$$* : G \, x \, E \longrightarrow E$$

Tal que a cada elemento: (g, x) $\in$ G x E asigna un único elemento $g_* x \in E$, verificando:

(i) $e * x = x$, para todo x $\in$ E, donde e es el elemento identidad del grupo G.

(ii) $(g_1 . g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$, para todo $g_1, g_2 \in G$, para todo x $\in$ E.

Nota.- 1.- En estas condiciones se dice que E es un G – conjunto.

2.- Por abuso de lenguaje, escribiremos en lugar del g * x y $g_1 . g_2$ simplemente como gx y $g_1 g_2$ respectivamente.

Ejemplo (2.3.1): Sea E un conjunto no vacío y $G = \{g : E \longrightarrow G \,/\, g - biyección\}$ la pareja $(G, 0)$ donde "0" es la composición de funciones. Considérese entonces la aplicación *: G x E $\longrightarrow E$, dada como $g * x = g(x)$, para todo $g \in G$, para todo x $\in$ E, entonces la aplicación "*" es una acción de G en E. En efecto

(i) $e * x = I_E * x = I_E(x) = x$

(ii) $(g_1 \circ g_2) * x = (g_1 \circ g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(g_2 * x) = g_1 * (g_2 * x)$ para todo $g_1, g_2 \in G$, para todo x $\in$ E.

Observación (2.3.1). • El grupo general lineal denotado y definido como: $GL_n(K) = \{A = (a_{ij})_{nxn} : A \text{ es invertible}\}$ es un modelo de ejemplo importante en la teoría de Grupos, cuyo origen está en el estudio de los operadores lineales inversibles en un K – espacio vectorial finito dimensional V (dim V < ∞).

- Escribamos V un K – espacio vectorial; n – dimensional (dim V = n) y GL(V) = $\{T : V \longrightarrow V \,/\, T - \textit{es un operador inversible}\}$ entonces (GL(V), 0) es un grupo, donde "0" denota la composición de operadores (aplicaciones); más aún GL(V) $\cong$ $GL_n(K)$ (isomorfos).

Definición (2.3.2).- Sean (G, •), un grupo, V un K – espacio vectorial finito dimensional, y supóngase que * : G x V $\longrightarrow$ V es una acción de G en V. Diremos que la acción "*" es compatible con las operaciones del espacio vectorial.

(V, +, K, •) si:

i) $g_*(v+w) = g*v + g*w,\ para\ todo;\ g \in G\ y\ v,\ w \in V$

ii) $g_*(t.v) = t(g*v),\ para\ todo;\ t \in K,\ v \in V,\ g \in G$

Definición (2.3.3).- Sean G y V como en la definición anterior (2.3.2). Diremos en tales condiciones que: la acción es G – lineal y que V es un G – espacio vectorial.

Proposición (2.3.1).- Sea E un G – conjunto. Entonces la acción de G en E induce un homomorfismo de grupos; de G en $S_E = \{f : E \longrightarrow E\ /\ f - biyección\}$.

Recíprocamente. Si $\rho : G \longrightarrow S_E$ es un homomorfismo de grupos; entonces "ρ" induce una acción de G sobre E.

Demostración: ($\Rightarrow$) $(S_E, 0)$ es un grupo, donde "o" denota la composición de funciones. Definamos la aplicación T: $G \longrightarrow S_E$ como T(g) : E$\longrightarrow E$ para cualquier g $\in$ G, donde T(g)(x):= g* x

Afirmación (1) T(g) es biyectiva. En efecto:

1. Sean x, y $\in$ E tal que T(g)(x) = T(g) (y) si y solo si g* x = g * y, entonces $g_*^{-1}(g*x) =\ g^{-1}*(g*y) \Leftrightarrow (g^{-1}.g)*x = (g^{-1}g)*y \Leftrightarrow$ e * x = e * y; por tanto x = y y en consecuencia T(g) es inyectiva.
2. Para cualquier z $\in$ E; consideremos $x = g^{-1} * z \in E$; asi T(g)(x) = $g * x$ = g * $(g^{-1} * z) = (gg^{-1}) * z = e * z = z$. Por tanto T(g) es suryectiva.

   Luego T(g) $\in$ S_E, puesto que T(g) es biyectiva.

Afirmaciones (2) : T: $G \longrightarrow S_E$ es un homomorfismo.

Sean g_1, g_2 dos elementos probaremos que $T(g_1 g_2) = T(g_1) \circ T(g_2)$. En efecto para x ∈ E, se tiene: $T(g_1 g_2)_{(x)} = (g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) =$

$T(g_1)(T(g_2)(x)) = [T(g_1) \circ T(g_2)](x)$; por tanto: $T(g_1 g_2) = T(g_1) \circ T(g_2)$

Recíprocamente.- Veamos que el homomorfismo $\rho : G \longrightarrow S_E$ induce una acción de G en E. Definamos la aplicación * : G x E $\longrightarrow E$ como * (g, x)= $g_* x := T(g)(x)$; donde T: $G \longrightarrow S_E$ es el homomorfismo obtenido en la primera parte.

Afirmación (3).- La aplicación * : G x E $\longrightarrow E$ dada por g* x = T(g)(x), para todo g ∈ G, x ∈ E es una acción. En efecto:

(i) e * x = T(e)(x) = $I_E(x) = x$

(ii) $(g_1 g_2) * x = T(g_1 g_2)(x) = (T(g_1) \circ T(g_2))(x) = T(g_1)(T(g_2)(x))$

$= T(g_1)(g_2 * x) = g_1 * (g_2 * x)$

Observación (2.3.2): De la proposición inmediata anterior (2.3.1), se puede afirmar que; dar una acción de G en E; es lo mismo que dar un homomorfismo $T : G \longrightarrow S_E$.

Corolario (2.3.1): Sean G un grupo y V un K – espacio vectorial; escríbase los conjuntos:

$A_c(G,V) = \{* : G \ x \ V \longrightarrow V \ / *$ es una acción G-lineal$\}$ y

$Hom(G, GL(V)) = \{\rho : G \longrightarrow GL(V) \ / \ \rho -$ es un homomorfismo$\}$

entonces hay una correspondencia biyectiva entre dichos conjuntos.

Demostración.- Para establecer dicha biyección definamos las aplicaciones: L : $A_C(G,V) \longrightarrow$ Hom (G, GL(V)) y J : Hom (G, GL(V)) $\longrightarrow A_c(G,V)$ como sigue:

(i) L : $A_C(G,V) \longrightarrow$ Hom (G, GL(V))

$$* \mapsto L(*) : G \longrightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto L(*)(g) : V \longrightarrow V$$

$$v \mapsto L(*)g(v) := g * v$$

(ii) J: Hom (G, GL(V)) $\longrightarrow A_c(G,V)$

$$\rho \mapsto J(\rho) : G \text{ x } V \longrightarrow V$$

$$(g,v) \mapsto J(\rho)(g,v) := \rho(g)(v)$$

De manera rutinaria se obtiene que:

$L \circ J = 1_{A_C(G,V)}$ y $J \circ L = 1_{Hom(G,GL(V))}$; en consecuencia el resultado

Definición (2.3.4).- [Representación] Sea V un K – espacio vectorial, y sea A una K – algebra. Una representación de A en V es un homomorfismo $\rho : A \longrightarrow GL(V)$, del K – algebra A en el grupo GL(v).

Definición (2.3.5) [Representaciones lineales]. Sea G un grupo y V un K – espacio vectorial. Una representación Lineal de G en V es un homomorfismo.

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

Observación (2.3.3).- El Corolario (2.3.1) nos dice que estudiar las representaciones lineales de un grupo G en un espacio vectorial V, equivale estudiar las acciones lineales de G en V.

Definición (2.3.6):- Sea G un grupo finito y V un $\mathbb{C}$ – espacio vectorial finito dimensional a la dimensión de V se denomina grado de la representación $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ y a V se le llama el **Espacio de la Representación**; en algunas ocasiones diremos que V es la representación de G.

Ejemplo (2.3.2).- Sea $G = \{\sigma : I_n \longrightarrow I_n \,/\, \sigma - biyección\} = S_n$ donde $I_n = \{1,2,....,n\}$ entonces la función $f : (S_n,\bullet) \longrightarrow (\{\pm 1\},\bullet)$ dada como:

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & si\ \sigma\ es\ par \\ -1, & si\ \sigma\ es\ impar \end{cases}$$

Es una representación de grado uno. Obsérvese que $\{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^*$

Nota.- A continuación presentamos algunos términos topológicos, como conexidad caminos, conexidad por caminos, etc.

Definición (2.3.7) (i) Dada un espacio topológico (X, τ). Una separación para X constituye una pareja E, F $\in \tau$ no vacíos tales que: $E \cup F = X$ y $E \cap F = \phi$

(ii) la negación de (i) es la definición de espacio Topológico conexo es decir un espacio topológico X es conexo si no existe una separación para X.

Definición (2.3.8).- Dado un espacio topológico (X, τ). y sea I = [0, 1], un camino en X es una función continua $\alpha : I \longrightarrow X$, si $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, entonces en estas condiciones se dice que α es un camino que va desde el punto inicial "a" hasta el punto final "b".

Intuitivamente un camino es una partícula que se mueve en un espacio, durante cierto intervalo de tiempo. Convenientemente se asume que el movimiento comienza en t = 0 y continua hasta finalizar, digamos en t = 1.

Definición (2.3.9).- Un espacio topológico X es conexo por caminos si dados x, y en X, si existe un camino $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Es decir cada par de puntos en X puede ser unidos por un camino.

Escribamos: C(I, X) = $\{\alpha : [0,1] \longrightarrow X \,/\, \alpha -$ es un camino$\}$ = X^I que también lo denotamos como X^I donde I = [0,1]. En el conjunto X^I.Consideremos la operación binaria (multiplicación) "."; es decir $\bullet : X^I \, x \, X^I \longrightarrow X^I$ tal que si $\alpha, \beta \in X^I$ entonces $\alpha \bullet \beta \in X^I$. Esta operación permite establecer la definición de multiplicación de caminos.

Definición (2.3.10) (Multiplicación de caminos)

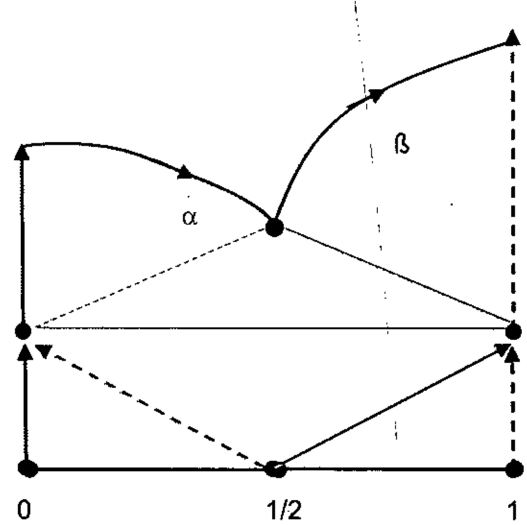
Dados α, ß dos elementos en X^I tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. Definamos el camino "Producto" α . β como:

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), \text{ si t } \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1), \text{ si t } \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \qquad \text{(II.1)}$$

A continuación mostramos una figura que describe la definición de multiplicación de caminos.

FIGURA N° 2.1

MULTIPLICACIÓN DE CAMINOS



Fuente : Gustavo N. Rubiano O. Fundamentos de Topología algebraica – 2007.

Observación (2.3.4).- El camino producto "α.ß" consiste en poner el camino "ß" seguido del camino "α"; de manera que para ahorrar tiempo en el recorrido cada uno de los caminos se recorre a doble velocidad como en la ecuación (II.1): α (2t) y ß (2t – 1).

Definición (2.3.11).- (i) Sea X un espacio topológico y sea x_0 un elemento fijo pero arbitrario en X. La pareja (X, x_0) se llama Espacio Puntillado (o espacio punteado).

(ii) Un lazo (camino cerrado, bucle) basado en x_0 es un camino $\alpha:[0,1]\longrightarrow X$ tal que $\alpha(0)=x_0=\alpha(1)$, esto es "α" comienza y termina en x_0.

Ejemplo (2.3.3).- Sean $\alpha,\beta:[0,1]\longrightarrow X$ dos lazos tales que $\alpha(1)=\beta(0)$. Entonces $\alpha.\beta$ es un lazo. En efecto la continuidad desde α.β resulta del hecho que α(2t) y α(2t-.1) están definidos sobre $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$ respectivamente y $\alpha(t)=\beta(t)$ para t = $\frac{1}{2}$. Ahora si $\alpha\ y\ \beta$ son lazos basados en x_0; entonces $\alpha(0)=x_0=\alpha(1)\ y\ \beta(0)=x_0=\beta(1)$, así $\alpha.\beta(0)=\alpha(2(0))=\alpha(0)=x_0$ y $\alpha\beta(1)=\beta(2(1)-1))=\beta(1)=x_0$. Y por tanto α . ß es un lazo.

Definición (2.3.12) (Algebras y álgebras Normadas)

(1) Sea K un cuerpo. Un álgebra A sobre K, es un K – espacio vectorial provisto de un producto "•" $(\bullet : A\ x\ A\longrightarrow A)$ tal que se cumple:

(i) (x y) z = x (y z)

(ii) x(y +z) = xy + xz, (x + y) z = xz + yz

(iii) $(\lambda\ x)y=\lambda(xy)$

Para x, y, z ∈ A elementos cualesquiera y para todo $\lambda\in K$.

- Ahora si existe un elemento 1 en A (1 = 1_A) tal que x . 1 = x = 1. x, para todo x en A. Se llama algebra unital (algebra con unidad o identidad).
- Si verifica x . y = y . x, para todo x, y en A se denomina Algebra Conmutativa.

(2) Sea E un K – espacio vectorial. Se dice que E es un espacio vectorial normado si existe una aplicación: $\|\bullet\|:E\longrightarrow[0,+\infty\rangle$ tal que:

(N_1) $\|x\|\geq 0$, para todo x ∈ E y $\|x\|=0$ si y solo si x = 0

(N_2) $\|\lambda.x\|=|\lambda|.\|x\|$, para todo x ∈ V, y para todo λ∈K

(N$_3$) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo x, y en E.

Notación.- La Pareja (V, $\|\bullet\|$) denotará el espacio vectorial normado o simplemente el espacio normado V.

(3) Sea A – un álgebra. Diremos que la pareja (A, $\|.\|$) es un álgebra normada Si A es un espacio vectorial normado verificándose además:

$\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$ .... (II.2)

Para todo x, y en A.

Nota.- La desigualdad (II.2) es conocida como la "Desigualdad multiplicativa".

Definición (2.3.13) (Algebra de Banach)

(1) Un espacio normado "E" es completo si cada sucesión de Cauchy en E converge a un elemento de E.

Nota.- i) Los espacios completos se llaman espacios de Banach

ii) En este trabajo, se considera solamente algebra sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$; salvo indicación expresa.

(2) Un álgebra de Banach, es un álgebra normada y completa con la norma del álgebra.

Observación (2.3.5).- La norma de un álgebra de Banach, la cual induce una topología se denomina **Topología Uniforme.**

Ejemplo (2.3.4).- Sea E un espacio de Banach complejo. Escribamos

B(E) = {f:E $\longrightarrow E\,/\,f$ es un operador lineal acotado} entonces B(E) es un álgebra de Banach unital con la estructura lineal usual y el operador norma.

Definición (2.3.14) : (C* - algebra)

(1) Un * - algebra de Banach; es un algebra de Banach, provisto de un operador *: A $\longrightarrow$ A, llamado involución, que cumple:

(i) (x*)* = x, para todo x $\in$ A

(ii) (xy)* = y* x*, para todo x, y $\in$ A

(iii) $(\lambda x+y)^* = \bar{\lambda} x^* + y^*$, para todo x, y $\in$ A, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

(iv) $\|x^*\| = \|x\|$, para todo x $\in$A.

(2) Un C* - algebra es un * - algebra de Banach A que cumple la condición llamada C*.

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \text{, para todo x } \in \text{A.}$$

Observación (2.3.6): (i) la condición C* asegura que en un C*- algebra A, la involución preserva la norma y por tanto es continua.

(ii) En un C* - algebra A, se cumple $\|x\| = \|x^*\|$.

En efecto.- Utilizando la desigualdad (II.2) se obtiene lo siguiente:

$\|x\|^2 = \|x^* x\| \le \|x^*\| \|x\|$, entonces $\|x\| \le \|x^*\|, \forall x \in A$. En particular $\|x^*\| \le \|x^{**}\| = \|x\|$. Luego $\|x\| = \|x^*\|$

Definición (2.3.15) (Sub C*-algebras)

Sea A un C*-algebra y sea B un subconjunto no vacio de A. Se dice que B es un sub – C* algebra de A; si B es un C*-álgebra con respecto a las operaciones dadas en A.

Observación (2.3.7).- Sea A un C*-algebra y E $\subseteq$ A. La sub C* - algebra de A generada por E y denotada por C*(E), es la sub C* - algebra más pequeña de A que contiene a E.

Proposición (2.3.2).- Sea A un C*-algebra, E $\subseteq A$ entonces C*(E) = $\bigcap_{E\subseteq B} B$, donde B es un sub C* - algebra de A conteniendo E. Es decir C*(E)es igual a la intersección de todos los sub C*-algebras de A que contienen a E.

Demostración.- Bastará considerar la familia

$\mathcal{F}$ = {B : B es un sub C* - algebra de A y E $\subseteq$ B}; de aquí C* (E) es un elemento de $\mathcal{F}$, y considerando que la intersección de sub C* - algebras es un Sub C* - algebra entonces la observación (2.3.7) se obtiene C* (E) $\subseteq \cap$ B y como la intersección de todos, los elementos de $\mathfrak{F}$ está contenido en uno de ellos, es decir : $\cap B \subseteq C^*(E)$.

Por tanto el resultado.

Observación (2.3.8) (i) Sea A un C*-algebra y E $\subseteq$ A. Entonces concretamente

$$C^*(E) = \langle \overline{W} \rangle$$

Donde $W = \bigcup_{n\geq 1} W_n$ y $W_n = \{x_1 .....x_n : x_j \in E \cup E^*\}$ para n $\in$ N, con E* = {x* : x$\in$E}

ii) Si E = {x_1, ..., x_n}; entonces C*(E) = $C^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ahora si $E = \{x\}$, entonces $C^*(E) = C^*(x)$.

Definición (2.3.16) (* - homomorfismos): Sean A, B dos C*-algebras. Una aplicación $\varphi : A \longrightarrow B$ es un * - Homomorfismo si verifica las condiciones:

(i) $\varphi(\lambda.x + y) = \lambda.\varphi(x) + \varphi(y)$, para todo x, y en A, y para todo λ en $\mathbb{C}$

(ii) $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$, para todo x, y en A

(iii) $\varphi(x^*) = \varphi^*(x)$, para todo x en A.

(♦) Si A y B son C*-algebras con elemento unital 1_A y 1_B respectivamente, y $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo tal que $\varphi(1_A) = 1_B$ entonces $\varphi -$ es denominado unital.

Observación (2.3.9).- (Adjuntando un elemento unital)

(i) Cuando un álgebra A no posee elemento unital entonces el álgebra $\tilde{A} = A \, x \, \mathbb{C} = A \oplus \mathbb{C}$ es un álgebra unital donde $1_{\tilde{A}} = (0,1)$. más aún A es un subalgebra de $\tilde{A}$; donde las operaciones y la norma en $\tilde{A}$ están dados como:

- $(x, \lambda) + (y, \alpha) = (x + y, \lambda + \alpha)$
- $\lambda . (x, y) = (\lambda \; x, \lambda y)$.
- $(x, \lambda). (y, \alpha) = (xy + \alpha x + \lambda y, \lambda\alpha)$
- $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$

Proposición (2.3.3): Sea A un * - algebra, las aplicaciones $i : A \longrightarrow \tilde{A}$ y $\pi : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas como: i(x) = (x, 0) y π(x, λ) = λ son * - homomorfismos más aun i – es inyectivo y π - es suryectivo.

Demostración: Es inmediato y rutinario.

Observación (2.3.10).- (i) Del ejemplo (2.3.4)

El espacio B(E) = $\{ f : E \longrightarrow E \,/\, f - \text{es lineal y acotado} \}$ es un algebra de Banach, para E espacio de Banach donde $\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|f(x)\|$

(ii) Sea A un C*-algebra. Para cada elemento a ∈ A definamos $f_a : A \longrightarrow A$ como $f_a(x) = ax$ el cual es un operador lineal más aún es continuo. Ahora definamos la aplicación

$$T : \tilde{A} \longrightarrow B(A)$$

Como $T((a, \lambda)) = f_a + \lambda . I_A \left(I_A : A \longrightarrow A, \text{ aplicación identidad} \right)$

Afirmación (1) T – es un homomorfismo. Más aún T es inyectivo si y solo si A no tiene elemento unital.

En efecto.- Si A no tiene elemento unital; y asumamos que (a, λ) ∈ Nuc (T) $\Leftrightarrow T(a, \lambda) = 0 \Leftrightarrow (f_a + \lambda 1_A)(x) = 0, x \in A \Leftrightarrow ax + \lambda x = 0$. Ahora si λ ≠ 0 entonces el elemento $\left(-\frac{a}{\lambda} \right)$ es unital a izquierda y también a derecha; la cual es una contradicción por tanto λ =0 y asi ax = 0, para cualquier x en A, en particular para x = a* de donde aa* = 0 ⇔ $0 = \|aa^*\| = \|a\|^2 \Rightarrow a = 0$ por tanto (a,λ)=0 y asi Nuc(T) = {0} i.e. T – inyectivo.

Ahora supongamos que A tiene elemento unital 1_A entonces la pareja $(1_A, -1) \in Nuc(T)$ (pues $T(1_A, -1) = f_{1_A} + (-1)I_A = I_A - I_A = 0$ es decir Nuc (T) ≠ {0} y por tanto el resultado.

Afirmación (2) $\|a\| = \|f_a\|$ para a ∈A

En efecto: 1°) $\|f_a\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|f_a(x)\| \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|a\|\|x\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|a\| = \|a\| \Rightarrow \|f_a\| \le \|a\|$

2°) $\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|f_a(a^*)\| \le \|f_a\|\|a^*\| = \|f_a\|\|a\| \Rightarrow \|a\| \le \|f_a\|$, luego $\|a\| = \|f_a\|$

Observación (2.3.11). De la afirmación inmediata anterior se infiere:

i) Si A es un C*-algebra si elemento unital definimos una norma sobre A, llevando la norma de B(A). Es decir $\|(a,\lambda)\|_{\tilde{A}} = \|f_a + \lambda I_A\|$ ....(II.3)

ii) Si A posee elemento unital, entonces $\tilde{A}$ es un * - algebra isomorfica a la suma directa de las C* - algebras A y $\mathbb{C}$. Es decir: $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$. En efecto bastara definir la aplicación $\rho : \tilde{A} \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}$ como $\rho(a,\lambda) = (a + \lambda 1_A, \lambda)$, y nuevamente la norma en $\tilde{A}$ se define vía este isomorfismo.

Proposición (2.3.4).- Si A es un C*-algebra cualesquiera, entonces $\tilde{A}$ es un C*-algebra unital con la norma $\|\bullet\|_{\tilde{A}}$, dada en la igualdad (II.3)

Demostración.- Sean x = (a, λ), y = (b, ß) en $\tilde{A}$

(1) Veamos que $\|\bullet\|_{\tilde{A}}$, es una norma:

(N1) $\|x\|_{\tilde{A}} = \|f_a + \lambda I_A\|_{B(A)} \ge 0$. Ahora $\|x\|_{\tilde{A}} = 0$ si y solo si $\|f_a + \lambda I_A\|_{B(A)} = 0 \Leftrightarrow$ $f_a + \lambda I_A = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \wedge a = 0$

Pues observar la demostración de la afirmación (1) correspondiente a la observación (2.3.10)

(N2) $\|z.x\|_{\tilde{A}} = \|(za, z\lambda)\|_{\tilde{A}} = \|f_{za} + z\lambda I_A\| = \|z.f_a + z\lambda I_A\| = \|z\|\|f_a + \lambda.I_A\| = |z|.\|x\|_{\tilde{A}}$

(N3) $\|x+y\|_{\tilde{A}} = \|(a+b, \lambda+\beta)\|_{\tilde{A}} = \|f_{a+b} + (\lambda+\beta)I_A\|_{B(A)}$

$= \|(f_a + f_b) + (\lambda I_A + \beta I_A)\|_{B(A)} = \|(f_a + \lambda I_A) + (f_b + \beta I_A)\|_{B(A)}$

$\le \|f_a + \lambda I_a\|_{B(A)} + \|f_b + \beta I_a\|_{B(A)} = \|x\|_{\tilde{A}} + \|y\|_{\tilde{A}}$

(2) Ahora veamos: $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. En efecto:

$$\|xy\|_{\tilde{A}} = \|(ab+\beta a+\lambda b, \lambda\beta)\|_{\tilde{A}} = \|f_{ab+\beta a+\lambda b} + \lambda\beta.I_A\|_{B(A)}$$

$$= \|f_a(f_b) + \beta f_a + \lambda f_b + \lambda\beta I_A\|_{\beta(A)} = \|f_a(f_b + \beta I_A) + \lambda(f_b + \beta I_A)\|$$

$$= \|(f_a + \lambda I_A)\circ(f_b + \beta.I_A)\|_{\beta(A)} \leq \|f_a + \lambda I_A\|_{B(A)}\|f_b + \beta I_A\|_{B(A)} = \|x\|_{\tilde{A}}.\|y\|_{\tilde{A}}$$

(3) Ahora veamos la condición C*: En el caso no unital definimos la involución sobre $T(\tilde{A})$ (donde $T((0,\lambda) = f_a + \lambda.I_A)$ previamente observemos:

$$(f_a + \lambda I_A)^* := f_{a^*} + \lambda I_A \qquad \text{(II.4)}$$

Con esta definición $T(\tilde{A})$ es una * - algebra de Banach solo falta ver que se satisface la condición C*. Sea $\varepsilon > 0$ y sea ξ : $A \longrightarrow A$ es un operador; de modo que existe t ∈ A con $\|t\| \leq 1$ tal que

$$\|\xi\|^2 = \|f_a + \lambda.I_A\|^2 \leq \sup_{\|t\|\leq 1}\|(f_a + \lambda I_A)_{(t)}\|^2$$

$$\leq \|(f_a + \lambda I_A)_{(t)}\|^2 + \varepsilon = \|f_a(t) + \lambda t\|^2 + \varepsilon = \|at + \lambda t\|^2 + \varepsilon$$

$$= \|(at + \lambda t)^*(at + \lambda t)\| + \varepsilon = \|(t^*a^* + \bar{\lambda}t^*)(at + \lambda t)\| + \varepsilon$$

$$= \|t^*(f_{a^*} + \bar{\lambda}I_A)(f_a + \lambda I_A)_{(t)}\| + \varepsilon$$

$$\leq \|t^*\|.\|(f_a + \bar{\lambda}I_A)(f_a + \lambda I_A)_{(t)}\| + \varepsilon$$

$$\leq \|t^*\|.\|(f_a + \bar{\lambda}I_A)(f_a + \lambda I_A)\|\|t\| + \varepsilon$$

$$\leq \|(f_a + \bar{\lambda}I_A)(f_a + \lambda I_A)\| + \varepsilon = \|\xi^*.\xi\| + \varepsilon$$

Entonces: $\|\xi\|^2 \leq \|\xi^*.\xi\| + \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$.

De aquí $\|\xi\|^2 \leq \|\xi^*.\xi\|$. De otro lado como B(A) es un algebra normada entonces $\|\xi^*.\xi\| \leq \|\xi^*\|.\|\xi\|$. También tenemos: $\|\xi^*\|^2 = \|\xi^*\|\|\xi^*\| = \|\xi\|\|\xi^*\|$ (pues $\|\xi\| = \|\xi^*\|$), Luego $\|\xi^*.\xi\| \leq \|\xi^*\|.\|\xi\| = \|\xi\|^2 \leq \|\xi^*.\xi\|$. Por tanto $\|\xi^*.\xi\| = \|\xi\|^2$

Definición (2.3.17) (Ideales y cocientes)

Sea A un C*-algebra y sea J $\subseteq$ A se dice que J es un ideal de A si J es Cerrado, verificándose además que $AJ \subseteq J$ y $JA \subseteq J$

Observación (2.3.12).- De la definición (2.3.17) es inmediato ver que: J = J*, para cualquier ideal J de un C*-algebra A. Por consiguiente J también es un sub C*-algebra de A.

Ahora si A es un C*-algebra y J $\subseteq$ A un ideal. El cociente $\frac{A}{J} = \{a + J : a \in A\}$ es un C*-algebra donde $\|a + J\| := \inf\{\|a + x\| : x \in J\}$.

Claramente J = Nuc (π), para $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{J}$. Además

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo de C*-algebras entonces $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, para todo a $\in$ A. También se verifica que: φ es inyectivo si y solo φ es una isometría.

Definición (2.3.18) (Proyecciones e isometrías parciales)

Un elemento p de un C*-algebra A es una proyección si $p^2 = p = p^*$

Observación (2.3.13): Si $\pi : A \longrightarrow B(H)$ es una representación de A sobre H (H un espacio de Hilbert H entonces $\pi(P)$ es la proyección ortogonal de H sobre π (P) (H).

(ii) Un operador T$\in$B(H) tal que $T^2 = T = T^*$ es la proyección ortogonal de H sobre el subespacio cerrado T(H).

(iii) Si $M \subseteq H$ es un subespacio cerrado; donde H es Hilbert, la proyección ortogonal de H sobre M es un operador lineal acotado P : H $\longrightarrow H$ tal que p(x) $\in$ M y (x – p(x)) es ortogonal en M para cada x $\in$ H.

Teorema (2.3.1): Sea H un espacio de Hilbert y supóngase que T y L son proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados de H. Entonces son equivalentes los enunciados siguientes:

(i) T(H) $\subseteq$ L(H)

(ii) LT = T = TL

(iii) (L – T) es una proyección.

(iv) T ≤ L [En el sentido que $\langle T(x)x\rangle \leq \langle L(x),x\rangle \forall h \in H$]

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii): Para cualquier x $\in$ H, se tiene T(x) $\in$ T(H)$\subseteq$ L(H), de aquí L(T(x)) = T(x) $\Leftrightarrow$ LT = T. Ahora de esta última igualdad tomemos adjunto: (LT)* = T* $\Leftrightarrow$ T* L* = T* entonces TL = T. Por tanto el resultado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $(L - T)^2 = L - LT - TL + T^2 = L - T - T + T = L - T$

También (L – T)* = L* - T* = L – T.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Por definición cada proyección es un operador positivo [pues $T^2 = T$]; entonces (L – T) es un operador positivo [por hipótesis (iii)] entonces L = T + (L - T) ≥ T; pues T es también positivo.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Supóngase que x $\in$ T(H), asi x = T(x), entonces la hipótesis: T ≤ L implica que: $\|L(x)\|^2 = \langle L(x),L(x)\rangle = \langle L^*(L(x)),x\rangle = \langle L(x),x\rangle \geq \langle T(x),x\rangle$ = $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$. De otro lado:

$\|x\|^2 = \|L(x)+(x-L(x)\|^2 = \|L(x)+(1-L(x)\|^2 =$ $\|L(x)\|^2 + \|(1-L(x)\|^2$ (pues: L es ortogonal a (1 – L))

Luego: $\|x\|^2 = \|L(x)\|^2 + \|(1-L)(x)\|^2 \geq \|x\|^2 + \|(1-L)(x)\|^2$; entonces $\|(1-L)(x)\|^2 \leq 0$ por tanto: (1 – L) (x) = 0 esto muestra x = L(x) $\in$ L(H) y en consecuencia T(H) $\subseteq$ L (H).

Teorema (2.3.2).- Sea H un espacio de Hilbert, y supóngase que T y L son proyecciones ortogonales (es decir TL = 0 = LT) sobre subespacios cerrados de H. Son equivalentes los enunciados siguientes:

(i) T (H) $\perp$ L (H)

(ii) LT = 0 = TL

(iii) (T + L) es una proyección

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): L(x) $\in$ L(H), para x $\in$ H y como L(H) $\perp$ T(H), entonces TL(x) = 0, tomando adjunta LT = 0.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $(T + L)^2 = T^2 + LT + TL + L^2 = T^2 + 0 + 0 + L^2 = T + L$.

También : $(T + L)^* = T^* + L^* = T + L$, por tanto (T + L) es una proyección.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Como (T + L) es una proyección entonces $(T + L)^2 = (T + L) \Leftrightarrow T^2 + TL + LT + L^2 = T + L \Rightarrow TL = - LT$; lo cual implica que: $(TL)(TL) = (TL)^2 = (LT)^2 = (LT)(LT)$. De otro lado también tenemos:

$- TL = - T^2 L^2 = T(-TL)L = T(LT)L = (TL)(TL) = (-LT)(-LT) = (LT)(LT) = L(TL)T = L(-LT)T = - L^2 T^2 = -LT = TL$. Es decir: TL = -TL esto muestra TL = 0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Para mostrar que T(H) $\perp$ L(H). Bastará calcular $\langle T(x), L(x)\rangle = \langle L^*T(x), x\rangle = \langle LT(x), y\rangle = 0$ para cada x, y $\in$ H.

Observación: (2.3.14). Todas y cada una de las afirmaciones de los Teoremas (2.3.1) y (2.3.2) excepto las primeras tienen sentido (se cumplen) en cualquier C*-algebra A, y estos resultados en tales algebras son preservados por cualquier representación de A como operadores acotados en un espacio Hilbert.

Proposición (2.3.5).- Sea A un C*-algebra supóngase que $\{p_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ son proyecciones en A. Entonces $\sum_{j=1}^{n} p_j = p$ es una proyección si y solo si $p_j p_k = 0$ para j $\neq$ k. En tal caso se dice que las proyecciones son mutuamente ortogonales dos a dos.

Demostración : (1°) Si $p_j p_k = 0,\ j \neq k$ probemos $p^2 = p = p^*$

Procediendo por inducción sobre "n". Veamos para n = 2

- $p^2 = (p_1 + p_2)^2 = p^2 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_2^2 = p_1 + p_2 = p$
- $p^* = (p_1 + p_2)^* = p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2$. Por tanto p es una proyección.

Supongamos que el resultado es valido para n = h. Es decir si $p=\sum_{j=1}^{h} p_j$ entonces se cumple $p^2=(p_1+......+p_h)^2=p_1+p_2+....+p_h=p$ y $p^*=(p_1+......+p_h)^*=$ $p_1^*+....+p_h^*=p_1+......+p_h=p$. Ahora veamos para el caso: n = h +1. Es decir si $p=\sum_{j=1}^{h+1} p_j=\sum_{j=1}^{h} p_j+p_{h+1}$; entonces llamando q = $\sum_{j=1}^{h} p_j$ asi p = q + p_{h+1} ; entonces por la hipótesis inductiva y por el caso _(n=2) se tiene que p = $q+p_{h+1}$ es una proyección y por tanto el resultado.

(2°) Si $p=\sum_{j=1}^{n} p_j$ es una proyección probemos: $p_j p_k=0$, j$\neq k$: Procediendo por inducción sobre "n" i.e. veamos para n = 2: aplicando el teorema (2.3.2) [equivalencia (ii) y (iii)]se tiene $p_1 p_2=0=p_2 p_1$. Ahora supongamos que se cumple para n = h es decir si $\sum_{j=1}^{h} p_j=p$ es una proyección, entonces $p_j p_k=0$, para j $\neq$ k.

P_j – es positivo, entonces $(p_1+p_2+...+p_n)+p_{n+1}\geq p_{n+1}$. Por teorema (2.3.1) (las equivalencias (iii) y (iv) implican que $\sum_{j=1}^{h} p_j=\sum_{j=1}^{h+1} p_j-p_{n+1}$ es una proyección entonces por hipótesis inductiva implica que las proyecciones $\{p_j\}_{j=1,.....,n}$ son mutuamente ortogonales (i.e. $p_j p_k=0, j\neq k$). Así para $j\leq h$ se tiene: $0\leq p_{h+1}p_j p_{h+1}\leq p_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{h} p_j\right)p_{h+1}=0$ entonces $p_{h+1}p_j=0$ y en consecuencia $\{p_j\}_{j=1.....h+1}$ son mutuamente ortogonales.

Definición (2.3.19).- Sea H un espacio de Hilbert y S : H $\longrightarrow H$ un operador. Se dice que S es una isometría parcial si la restricción de S al $[Nuc(s)]^{\perp}$ es una isometría. Es decir: El operador S : H $\longrightarrow H$ es una isometría parcial si

$\|s(x)\| = \|x\|$, para todo x $\in$ $[Nuc(s)]^{\perp}$. Equivalentemente para H_1, H_2 subespacios cerrados de H, el operador $S: H_1 \longrightarrow H_2$ es una isometría parcial con espacio inicial H_1 y espacio final H_2, si S(H$_1$) = H$_2$. S es un isomorfismo isométrico, y $H_1^{\perp} \subseteq Nuc(s)$ (Ver: José Angel Canavati Ayub; Introducción al Análisis funcional; Pág. 90).

Teorema (2.3.3).- Sea H un espacio de Hilbert y $S \in B(H)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) S es una isometría parcial.

(ii) S*S es una proyección

(iii) SS*S = S

(iv) SS* es una proyección

(v) S*SS* = S*

Demostración.- • Las afirmaciones (iii) y (v) se obtienen tomando adjunto uno del otro. Ahora Aplicando la equivalencia : "(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" a S* produce la equivalencia: "(iv) $\Leftrightarrow$ (v)".

En consecuencia solo mostraremos las implicaciones siguientes:

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv).

Veamos (i) $\Rightarrow$ (ii): Mostremos que S*S es la proyección ortogonal "p" sobre $[Nuc(S)]^{\perp}$. La identidad de polarización:

$4\langle T(x), y\rangle = \sum_{x=0}^{3} k^n \left\langle T\left(x + k^n y\right), x + k^n y\right\rangle$ muestra que es suficiente para probar $\left\langle \left(S*S - p\right)(x), x\right\rangle = \square$, para todo x $\in$ H. En efecto: Si x $\in \left(Nuc(S)\right)^{\perp}$, entonces $\langle S*S(x), x\rangle = \langle S(x), S(x)\rangle = \|S(x)\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle p(x), x\rangle$ si y solo si $\left\langle \left(S*S - p\right)(x), x\right\rangle = 0$, para todo $x \in [Nuc(s)]^{\perp}$

Ahora tanto S*S y p tienen rango en $[Nuc(s)]^{\perp}$ y son cero en Nuc(S), así para cada x $\in$ H tenemos $\langle (S*S-p)(x),x\rangle = \langle p(S*S-p)p(x),x\rangle = \langle (S*S-p)p(x),p(x)\rangle$

Así tenemos: $\langle (S*S-p)(x),x\rangle = 0$, para todo x $\in$ H.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por hipótesis S*S es una proyección entonces se tiene:

$$\|S-SS*S\|^2 = \|(S-SS*S)*(S-SS*S)\| = \left\|S*S-2(S*S)^2+(S*S)^3\right\| = 0$$

Por tanto SS*S=S

(iii)$\Rightarrow$ (i): Notemos que S*S es la proyección sobre $[Nuc(s)]^{\perp}$

Ahora recordar que la proyección p sobre un subespacio cerrado M es el único operador tal que p(x) $\in$ M y (x – p(x)) $\perp$ m, $\forall m \in M, \forall x \in H$.

Sea x $\in$ H. Para z $\in$ Nuc(S), se tiene que :

$\langle S*S(x),z\rangle = \langle S(x),S(z)\rangle = 0$ entonces $S*S(x) \in [Nuc(s)]^{\perp}$.

La igualdad (S – SS*S)(x) = 0 implica que (x – S*S(x)) $\in$ Nuc(S), y de aquí se tiene:

(x-S*S(x)) es ortogonal a $[Nuc(S)]^{\perp}$. Asi S*S es la proyección sobre $[Nuc(S)]^{\perp}$.

Ahora para x $\in$ $[Nuc(S)]^{\perp}$ tenemos:

$\|S(x)\|^2 = \langle S(x),S(x)\rangle = \langle S*S(x),x\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$, Por tanto S es una isometría parcial.

Finalmente el hecho que S*S sea proyección sobre $[Nuc(s)]^{\perp}$, se establece el proceso de la demostración de (iii) $\Rightarrow$ (i). Así trivialmente obtenemos que SS*(H) $\subseteq$ S(H), y de (iii) se infiere que S(H) = SS*S(H) $\subseteq$ SS*(H).

Observación (2.3.15) (1).- Las afirmaciones, (ii), (iii), (iv) y (v) del Teorema (2.3.3) dan sentido en un C*-algebra abstracta y aun son equivalentes, porque siempre se puede representar fielmente una C*-algebra sobre un espacio de Hilbert (caracterización de C*-algebras).

Un elemento S de un C*-algebra A lo cual satisface S = SS*S o uno de las condiciones equivalentes es llamado una isometría parcial en A. Si S es una isometría parcial en A, llamaremos a S*S la proyección inicial de S, y a: SS* la proyección final de S.

Ejemplo (2.3.5) Escribiendo $Mn(\mathbb{C})=\left\{A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}:a_{ij}\in\mathbb{C},i,j=1,....,n\right\}$ =

{T: $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ / T es un operador lineal acotado}; entonces $Mn(\mathbb{C})$ es un C*-algebra. En efecto: basta definir la involución *: Mn $(\mathbb{C}) \longrightarrow Mn(\mathbb{C})$ como $\left(a_{ij}\right)^{*}_{nxn}=\left(\overline{a}_{ji}\right)_{nxn}$, donde $\overline{a}_{ji}$ denota el número complejo conjugado de cada a_{ji}

Observación (2.3.16).- (1) Para un elemento $\left(\delta_{ij}\right)_{nxn}\in Mn(\mathbb{C})$; donde $1\le i,j\le n$, definamos

$$\left(\delta_{ij}\right)_{rt}=\begin{cases}1, si\ r\ =i\ y\ t\ =j\\ 0,\ en\ otro\ caso\end{cases}$$

Entonces cada elemento $\alpha=\left(a_{ij}\right)$ puede escribirse como la combinación lineal siguiente:

$$\alpha=\sum_{i,j}a_{ij}\delta_{ij}$$

(2) Escribiendo $H=\left\{\delta_{ij}:1\le i,j\le n\right\}$; entonces es un espacio vectorial base para el espacio $Mn(C)$. Más aún se verifica:

$$\left(\delta_{ij}\right)*=\delta_{ij}\ \text{ y }\ \delta_{ij}\delta_{rt}=\begin{cases}\delta_{it}, si\ j\ =\ r\\ 0,\ en\ otro\ caso\end{cases} \qquad \text{(II.5)}$$

Definición (2.3.20).- Un algebra A es simple si no posee ideales diferentes de (0) y A.

Proposición (2.3.6).- El álgebra $Mn(C)$ es simple sobre $\mathbb{C}$.

Demostración.- Sea I un ideal de $Mn(C)$ no nulo (i.e : I = (0)) entonces existe $\alpha = (a_{ij})_{nxn} \neq 0$, de donde $a_{ij} \neq 0$, para algún i, j = 1, 2, ..., n. De las relaciones (II.5) vemos que:

$\delta_{ij} = a_{ij}^{-1}(\delta_{ii}\alpha.S_{jj}) \in I$; también $\delta_{rt} = \delta_{ri}\delta_{ij}\delta_{jt} \in I$; para cualquier r, t$\in \mathbb{N}$ y en consecuencia $Mn(\mathbb{C}) = Span\langle\delta_{n}\rangle \subseteq I$ y por lo tanto $Mn(\mathbb{C}) = I$

Teorema (2.3.4).- Sea A un C*-algebra y sea $E = \{e_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\} \subseteq A$ tal que

$$e_{ij}^{*} = e_{ji} \text{ y } e_{ij}e_{rt} = \begin{cases} e_{it}, si\, j = r \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(II.6)}$$

Si $e_{ij} \neq 0$, para algún par i, j = 1, 2,...,n, entonces todos son diferentes de cero; más aún existe un *-monomorfismo $\varphi : Mn(\mathbb{C}) \longrightarrow B$ tal que $\varphi(\delta_{ij}) = e_{ij}$ para todo i, j = 1, 2,...., n.

Demostración.-(1°) Que todos los elementos sean diferente de cero, sabiendo que $e_{ij} \neq 0$ para algún i, j = 1, ..., n resulta de la definición establecida en (II.6). Puesto que si $e_{ij} \neq 0$, entonces la igualdad:

$$e_{ij} = e_{ir}e_{rt}e_{tj}$$

Implica que $e_{rt} \neq 0$, para todo t, r = 1, 2, ..., n

(2°) Por la definición de los δ_{ij} se tiene que estos son linealmente independientes, asi se puede definir $\varphi : Mn(\mathbb{C}) \longrightarrow B$ como sigue:

$$\varphi(a_{ij}) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}e_{ij}$$

Entonces de las ecuaciones siguientes:

- $\delta_{ij}^{*} = \delta_{ji}$ y $\delta_{ij}\delta_{rt} = \begin{cases} \delta_{it}, \; si\, j = r \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$

- $e_{ij}^{*} = e_{ji}$ y $e_{ij}e_{rt} = \begin{cases} e_{it}, si\ j = r \\ 0,\ en\ otro\ caso \end{cases}$

Y considerando $\alpha = (a_{ij}), \beta = (b_{ij})$ en Mn($\mathbb{C}$) y z$\in \mathbb{C}$. Se tiene:

a) $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{1\le i,j\le n} (a_{ij}+b_{ij})e_{ij}$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}e_{ij} + \sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}e_{ij} = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$$

b) $\varphi(z.\alpha) = \varphi(za_{ij}) = \sum_{1\le i,j\le n} (za_{ij})e_{ij} = z.\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}e_{ij} = z.\varphi(\alpha)$

c) Sean $\alpha = (a_{ij}), \beta = (b_{rt})$ en $\mathrm{Mn}(\mathbb{C})$ entonces:

$$\varphi(\alpha).\varphi(\beta) = \varphi(a_{ij}).\varphi(b_{rt}) = \left(\left[\sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}\right]\left[\sum_{r,t} b_{rt}e_{rt}\right]\right)$$

$$= \sum_{i,j}\left(\sum_{r,t}(a_{ij}b_{rt}e_{ij}e_{rt})\right) = \left(\sum_{i,t}(a_{ij}b_{jt}e_{it})\right)$$

$$= \varphi\left[(a_{ij})(b_{rt})\right] = \varphi(\alpha.\beta)$$

$\therefore \varphi(\alpha.\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$

d) Sea $\alpha = (a_{ij})\ en\ Mn(\mathbb{C})$, entonces

$$\varphi(\alpha^*) = \varphi((a_{ij})^*) = \varphi((\overline{a}_{ji})) = \sum_{1\le i,j\le n} \overline{a}_{ji}e_{ji}$$

De otro lado:

$$\varphi(\alpha)^* = \varphi((a_{ij}))^* = \left[\sum_{1\le i,j\le n} \overline{a}_{ji}e_{ji}\right]^* = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ji}^{*}e_{ij}^{*}$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} a_{ji}^{*}e_{ji} = \sum_{1\le i,j\le n} \overline{a}_{ji}e_{ji} \text{ luego : } \varphi(\alpha^*) = (\varphi(\alpha))^*$$

Por tanto φ es un * - homomorfismo; y como en Mn($\mathbb{C}$) no existen ideales diferentes a (0) y $\mathrm{Mn}(\mathbb{C})$ y como φ es no cero entonces φ es inyectivo.

Proposición (2.3.7):[Suma Directa de C*-algebras]

Sean A, B dos C*-algebras. Escribamos el conjunto siguiente:

$A\oplus B:=\{(a,b)$ tal que $a\in A, b\in B\}$

Entonces $A\oplus B$ es un C*-algebra, llamada Suma Directa de A y B.

En efecto.- Bastará definir la aplicación multiplicación "•" como sigue: Sean (a, b), (a',b') dos elementos en $A\oplus B$ entonces (a, b)• $(a',b')=(aa',bb')$; así como también (a, b)* = (a*, b*) y $\|(a,b)\| = \max\{\|a\|,\|b\|\}$.

Afirmación: (1) $A\oplus B$ es un espacio normado.

(i) $\|(a,b)\| = \max\{\|a\|,\|b\|\}\geq 0$, ahora: $\|(a,b)\|=0 \Leftrightarrow \max\{\|a\|,\|b\|\}=0$

$\Leftrightarrow \|a\|=0$ y $\|b\|=0$, por tanto (a, b) = 0.

(ii) $\|\lambda.(a,b)\| = \|(\lambda a,\lambda b)\| = \max\{\|\lambda a\|,\|\lambda b\|\} = \max\{(\lambda\|a\|,\lambda\|b\|)\}$

$=|\lambda|\max\{\|a\|,\|b\|\} = \|\lambda\|\|(a,b)\|$

(iii) $\|(a,b)+(a',b')\| = \|(a+a',b+b')\| = \max\{\|a+a'\|,\|b+b'\|\}$

$\leq \max\{\|a\|+\|a'\|,\|b\|+\|b'\|\}$ .... (II.7)

De otro lado:

$\|a\|+\|a'\|\leq \max\{\|a\|,\|b\|\}+\max\{\|a'\|,\|b'\|\}$

$\|b\|+\|b'\|\leq \max\{\|a\|,\|b\|\}+\max\{\|a'\|,\|b'\|\}$

Entonces:

$\max\{\|a\|+\|a'\|,\|b\|+\|b'\|\}\leq \max\{\|a\|,\|b\|\}+\max\{\|a'\|,\|b'\|\}$ (II.8)

De (II.7) y (II.8) obtenemos:

$\|(a,b)+(a',b')\|\leq \|(a,b)\|+\|(a',b')\|$.

Afirmación (2).- $A\oplus B$ es un algebra normada

En efecto.- Sean (a, b), (a',b') dos elementos en $A\oplus B$: $\|(a,b)(a',b')\| = \|(aa',bb')\|$

$=\max\{\|aa'\|,\|bb'\|\}\leq \max\{\|a\|\|a'\|,\|b\|\|b'\|\}$ .... (II.9)

De otro lado

$$\|a\|\cdot\|a'\| \le \max\{\|a\|,\|b\|\}\cdot\max\{\|a'\|,\|b'\|\}$$

$$\|b\|\cdot\|b'\| \le \max\{\|a\|,\|b\|\}\cdot\max\{\|a'\|,\|b'\|\}$$

Entonces:

$$\max\{\|a\|\|a'\|,\|b\|\|b'\|\} \le \left[\max\{\|a\|,\|b\|\}\right].\left[\max\{\|a'\|,\|b'\|\}\right] \qquad \text{(II.10)}$$

De (II.9) y (II.10) se obtiene:

$$\|(a,b)\cdot(a',b')\| \le \left[\max\{\|a\|,\|b\|\}\right].\left[\max\{\|a'\|,\|b'\|\}\right]$$

$$= \|(a,b)\|\cdot\|(a',b')\|.$$

Afirmación (3): $A\oplus B$ es un algebra de Banach.

Puesto que A y B lo son

Afirmación 4.- $A\oplus B$ es un * - algebra

Donde $(a,b)^* = (a^*,b^*)$. En efecto:

i) ((a,b)*)* = (a*,b*) = (a**,b**)=(a,b)

ii) ((a,b).(c.d))* =((ac, bd))* = ((ac)*, (bd)*)

= (c*a*, d*b*) = (c*,d*) . (a*,b*) = (c,d)* (a.b)*

iii) $(\lambda(a,b)+(c,d))^* = ((\lambda a+c,\lambda b+d))^*=(\bar{\lambda}a^*+c^*,\bar{\lambda}b^*+d^*)$

$$= \left(\bar{\lambda}a^*,\bar{\lambda}b^*\right)+(c^*,d^*) = \bar{\lambda}(a^*,b^*)+(c^*,d^*) = \bar{\lambda}(a,b)^*+(c,d)^*$$

iv) $\|(a,b)^*\| = \|(a^*,b^*)\| = \max\{\|a^*\|,\|b^*\|\} = \max\{\|a\|,\|b\|\} = \|(a,b)\|$

Finalmente veamos que: $\|(a,b)^*(a,b)\| = \|(a,b)\|^2$. En efecto

$$\|(a,b)^*(a,b)\| \le \|(a,b)^*\|.\|(a,b)\| = \|(a,b)\|^2 \qquad \text{(II.11)}$$

$\|(a,b)\|^2 \le \|(a^*,b^*)(a,b)\|$ ....

(II.12)

De (I.11) y (I.12)

$\|(a,b)\|^2 = \|(a,b)^*(a,b)\|$. Por tanto $A\oplus$ B es un C*-álgebra.

Observación (2.3.17).- $A \oplus B$, puede observarse claramente que el conjunto de copias $\{(a,0)\}_{a\in A}$ y $\{(0,b)\}_{b\in B}$ son ortogonales: Esto es (a,0) (0,b) = 0, para todo $a \in A \; y \; b \; \in B$

Teorema (2.3.5): **(i)** Sea E un C*-algebra y A, B dos C* subalgebras de E tal que ab=0, para todo a ∈ A y para todo b ∈ B; entonces $span\langle A\cup B\rangle$ es un C*-subalgebra de E; más aún $A\oplus B$ y $span\langle A\cup B\rangle$ son isomorfas.

(ii) Si $f: A\oplus B \longrightarrow E$ es un *-homomorfismo; donde A, B son C*-subalgebras de E, tal que $a \mapsto f(a,0) \;\; y \;\; b\mapsto f(0,b)$ son inyectivos entonces f es inyectivo.

Demostración : (i) Definamos la aplicación $\varphi: A\oplus B \longrightarrow Span(A\cup B)$ como $\varphi((a,b)) = a+b$

Afirmación: φ es un * - homomorfismo.

- $\varphi(\lambda(a,b)+(c,d)) = \varphi((\lambda a+c, \lambda b+d)) = \lambda(a+b)+(c+d) = \lambda\varphi(a,b)+\varphi(c,d)$
- $\varphi((a,b).(c.d)) = \varphi((ac,bd)) = ac+bd = \varphi(a,b).\varphi(c,d)$ puesto que ba = (a*b*)*=0 y asi ad = 0 = bc).
- $\varphi((a,b)^*) = \varphi((a^*,b^*)) = a^*+b^* = (a+b)^* = \varphi(a,b)^*$
- Entonces ésta afirmación implica que rang(φ) es un C*-algebra y asi φ es suryectiva.

Ahora veamos que: φ es inyectiva.

Sean (a, b) ∈ A ⊕ B tal que $\varphi(a,b)=0 \Leftrightarrow$ a+b = ⇔ a = -b ⇔ a. a* = - b. a* = 0

Tomando norma: $\|a.a^*\| = 0 \Leftrightarrow \|a\|^2 = 0 \Rightarrow a = 0$; análogamente b = 0 por tanto (a,b) =0 y en consecuencia $\varphi-$ inyectiva, luego $A\oplus B$ y $span\langle A\cup B\rangle$ son isomorfos.

(ii) Sea (a, b) ∈ $A\oplus B$ tal que f(a,b)=0⇔ f(a,b)*f(a,b)=0⇔ f(a*a,b*b)=0⇔ f(a*a,0) + f(0,b*b)=0, (#); pero 0 ≤ f(a*a,0)≤ f(a*a,b*b) entonces de (#) f(a*a,0)=0 y f(0,b*b)=0 de aquí a*a=0 y b*b =0 [Pues $a \mapsto f(a,0)$ y $b \mapsto f(0,b)$ son inyectivas]. Luego a = 0 = b; así f es inyectiva.

Teorema (2.3.6).- Sea A un C*-algebra; y supóngase que existen C*-subalgebras A_n de A tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ [se dice que: A = $\lim\limits_{\rightarrow} A_n$]. Si para cada n $\in \mathbb{N}$ tenemos homorfismos inyectivos $\varphi_n : A_n \longrightarrow B$, donde B es un C*-algebra y tal que $\varphi_{n+1|_{A_{n+1}}} = \varphi_n$ para todo n, entonces existe un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $\varphi\big|_{A_n} = \varphi_n$ para todo n $\in \mathbb{N}$.

Demostración: Definamos una aplicación $f : \bigcup_{n\geq 1} A_n \longrightarrow B$ tal que $f_{|A_n} = \varphi_n$ claramente "f" está bien definida, puesto que los homomorfismos inyectivos $\varphi_n : A_n \longrightarrow B$ verifican $\varphi_{n+1|_{A_{n+1}}} = \varphi_n$; entonces "f" es un homomorfismo, más aún $f\big|_{A_n}$ es inyectivo entre C*-algebras; pues φ_n son homomorfismos inyectivos. Asi "f" es isométrico en el subespacio denso $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ de A; pues sea $x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ entonces x $\in$ A_n , para algún $n \in \mathbb{N}$; de donde se tiene $\|f(x)\| = \|\varphi_n(x)\| = \|x\|$; y asi extendemos a una isometría $\varphi : \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = A \longrightarrow B$. Ahora como las operaciones C*-algebras son continuas entonces esta extensión "φ" es un homomorfismo de C*-algebras, y por tanto se tiene que φ es isométrico, y así φ es inyectiva.

CAPÍTULO III
HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

- Dotar de una estructura de ideal en un C*-algebra de un grafo G
- La variable independiente es la estructura de un grafo G = (G_0, G_1, r, s) donde G_0 es un conjunto de"vértices", G_1 es un conjunto de arista y r, s son funciones, mientras que la variable dependiente es un ideal I en C*(G) (C*-algebra de grafo G).

3.2 Operacionalización de Hipótesis

La Operacionalización de hipótesis no es posible; en tanto que es un trabajo netamente analítico.

3.3 Operacionalización de Variables

VARIABLE	DIMENSIÓN	INDICADORES
Independiente La estructura de un grafo "G"	Conjunto de grafos	El conjunto de vértices, E_0 y el conjunto de aristas E_1
Dependiente El Ideal en un C*-algebra de grafo C*(G)	Familia de algebras de grafos.	Las G-familias de Cuntz – Krieger {S,P} que consiste en los conjuntos $\{P_v : v \in E_0\}$ $\{S_e : c \in E_1\}$ de proyecciones e isometrías parciales respectivamente.

CAPITULO IV
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Tipo y Diseño de la Investigación

La investigación es de tipo analítico, enmarcada en una investigación básica teórica; con un diseño constructivo en la determinación de la estructura de ideal en un C*(G). (C*-algebra del grafo G).

4.2 Población y Muestra

- La Investigación realizada tiene como población a la colección de ideal con sus respectiva estructura algebraica, dentro de la dimensión de la familia C*-algebras de grafos.
- La muestra que se considera para la determinación y descripción de los ideales de C*(G) (C*-algebra de grafo), son las C*-algebras que poseen ideales propios es decir para C*-algebras no simples.

4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental.

El trabajo realizado ha requerido de ciertas teorías, como son: la teoría de grafos dirigidos, proyecciones e isometrías parciales; algebras; C*-algebras, e ideales; todos ellos han conducido al desarrollo y obtención del resultado.

4.4 Técnicas e Instrumentos para la Recolección de la Información de Campo.

Información de campo, no existe por la naturaleza de la investigación realizada, debido que es un trabajo netamente teórico y por tanto técnicas e instrumentos para la recolección de dicha información también no existe.

4.5 Análisis y Procesamiento de Datos

La teoría de grafos tiene su origen, con el problema de los puentes de Konigsberg, el cual consistía en: Encontrar un camino que recorriera los siete puentes del rio de Priegel en la ciudad de Kognisberg (Actualmente Kalingrado), de manera que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Este trabajo fue titulado: La solución de un problema relativo a la Geometría de la posición. En 1736, es considerado el primer resultado de la Teoría de Grafos resuelto por: **Leonard Euler**. También es considerado como uno de los primeros resultados topológicos en geometría, ilustrando de esta manera: la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología.

Nota.- A continuación presentamos algunas definiciones y conceptos extraidas de la Página Web. Fundamentos Teoría de la Computación.
blogspot.com/2015/08/teoriadegrafos

La teoría de Grafos (4.5.1) Se entiende como una rama de las matemáticas y las ciencias de la computación que estudia las propiedades de los grafos. Estos grafos son estructuras que constan de dos conjuntos:

{Conjunto de vértices: ó Nodos o puntos}

{Conjunto de aristas ó Líneas o lados}

Algunos tipos de grafos (4.5.2.) los diversidad de grafos que existen son múltiples, a continuación mencionaremos algunos de ellos:

Grafo simple.- Es aquel que posee una y sólo una arista uniendo dos vértices cualesquiera.

Multigrafo.- Son los grafos que entre dos vértices poseen más de un eje o arista.

Grafo dirigido.- Es el grafo que se ha dado una orientación a cada arista en su estructura, gráficamente se representan por flechas y/o curvas, partiendo de un vértice (origen) y llegando a otro (extremo).

Grafo no dirigido.- Son grafos, que no poseen orientación en todas y cada una de sus aristas.

Grafo infinito.- Un grafo es infinito cuando los conjuntos de vértices y aristas que lo conforman son de cardinal no finito.

Nota.- Para nuestro objetivo, nosotros consideramos solamente grafos dirigidos, que formalmente está definido como se establece a continuación.

Definición (4.5.3) Un grafo dirigido "G" es una cuaterna denotada por G= (G_0, G_1, r, s) donde G_0 y G_1 representan dos conjuntos contables; mientras que **r y** s son dos funciones de G_1 *en* G_0. Muchas veces al grafo dirigido $G = (G_0, G_1, r, s)$; simplemente lo escribiremos como "G".

Observación (4.5.1) (i) Los elementos de los conjuntos G_0 *y* G_1 son denominados: vértices y aristas (ejes) de G respectivamente.

(ii) Para cada elemento $e \in G_1$ se tienen los elementos; s(e) y r(e) en G_1, llamados origen y rango (extremo) de e respectivamente.

(iii) Si s(e) = v_1 y r(e) = v_2, entonces se dirá que v_1 emite e, y que v_2 recibe "e"; o simplemente que "e" es una arista de v_1 a v_2.

(iv) Las funciones r, s : $G_1 \longrightarrow G_0$ correspondientes al grafo G = (G_0, G_1, r, s) se pueden representar como $r_G = r$ y $S_G = s$; y de esta manera escribiremos la cuaterna definida en (4.5.3) como:

$$(G_0, G_1, r, s) = G = (G_0, G_1, r_G, s_G)$$

Definición (4.5.4): Un grafo dirigido (G_0, G_1, r, s) es llamado: Grafo dirigido fila – finita si para todo v $\in G_0$; el conjunto $r^{-1}_{(v)} = \{e \in G_1; r(e) = v\}$ es finito.

Ejemplo (4.5.1) : El dibujo siguiente corresponde a un grafo que no es fila – finita.

GRÁFICO N° 4.1

GRAFO INFINITO (A)

$$\begin{tikzcd} \cdots\cdots \arrow[r] & v_{-2} \arrow[r, "e_{-2}"] & v_{-1} \arrow[r, "e_{-1}"] & v_0 \arrow[r] \arrow[r, bend left] & v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_2 \arrow[r, "e_2"] & v_3 \arrow[r] & \cdots\cdots \end{tikzcd}$$

Fuente : Elaboración propia – 2018

Que también podríamos representar como :

GRÁFICO N° 4.2

GRAFO INFINITO (B)

$$\cdots\cdots \longrightarrow v_{-2} \xrightarrow{e_{-2}} v_{-1} \xrightarrow{e_{-1}} v_0 \xrightarrow{\infty} v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \longrightarrow \cdots\cdots$$

Fuente : Elaboración propia – 2018

Escribiendo $X = \infty$, el cual denota que entre los vértices v_0 y v_1 hay infinitas aristas, entonces $G = (G_0, G_1, r, s)$, donde $G_0 = \{v_k : k \in \mathbb{Z}\}$, $G_1 = \{e_k : k \in \mathbb{Z} - \{0\}\} \cup \{\infty\}$ = $\{e_k : k \in \mathbb{Z} \cup \{0\} \cup \{X\}\}$

Observación (4.5.2).-

(i) Si $r(e) = v = s(e)$; para $e \in G_1$ y $v \in G_0$; se dice que e es un lazo basado en "v".

(ii) Un vértice que no recibe eje alguno, se denomina fuente o nacimiento. Y un vértice que no emite ejes es llamado Sink.

(iii) Dos grafos G = (G_0, G_1, r_G, s_G) y H = (H_0, H_1, r_H, s_H) son isomorfos si y solamente si existen biyecciones

$$f_0 : G_0 \longrightarrow H_0 \qquad \text{y} \qquad f_1 : G_1 \longrightarrow H_1$$

Tal que : $\quad r_H \circ f_1 = f_0 \circ r_G.$

Es decir G y H son grafos isomorficos si y solamente el siguiente cuadrado es conmutativo.

FIGURA N° 4.1

CUADRO CONMUTATIVO PARA ISOMORFISMOS DE GRAFOS

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r_H"'] & H_1 \arrow[d, "r_H"] \\
G_0 \arrow[r, "f_0"] & H_0
\end{tikzcd}$$

Fuente: Elaboración Propia - 2018

Ejemplo (4.5.2).- Consideremos el grafo siguiente

GRÁFICO N° 4.3

GRAFO CON UN SOLO LAZO

$$\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "e_1"] \arrow[rr, bend right, "e_3"'] & v_2 \arrow[r, "e_2"] & v_3
\end{tikzcd}.$$

Fuente: Elaboración propia – 2018.

Así tenemos $G = (G_0, G_1, r, s)$

Donde: $G_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $G_1 = \{e, e_1, e_2, e_3\}$. Además

$r(e) = v_1 = s(e) = s(e_1) = s(e_3)$, $r(e_2) = v_3 = r(e_3)$. y $s(e_2) = v_2 = r(e_1)$

Ejemplo (4.5.3):

Sea $G=(G_0,G_1,r,s)$, donde $G_0=\{v_1,v_2\}$, $G_1=\{e_1,e,e_2\}$, además $r(e_1)=v_1=s(e_1)=s(e)$ y $s(e)=v_2=r(e_2)=s(e_2)=s(e_2)$, entonces el dibujo correspondiente a G esta dado como:

GRÁFICO N° 4.4

GRAFO CON DOS LAZOS

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[loop left, "e_1"] \arrow[r, "e"] & v_2 \arrow[loop right, "e_2"] \end{tikzcd}$$

Fuente : Elaboración propia - 2018

Ejemplo (4.5.4): El dibujo siguiente:

GRÁFICO N° 4.5

GRAFO INFINITO CON CICLO

$$\begin{tikzcd} \cdots\cdots v_{n+1} \arrow[r, "e_{n+1}"] & v_n \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & v_5 \arrow[r, "e_5"] & v_4 \arrow[r, "e_4"] & v_3 \arrow[r, "e_3"] & v_2 \arrow[r, "e_2"] & v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_0 \arrow[lllll, bend right, "e_0"'] \end{tikzcd}$$

Fuente : Elaboración propia - 2018

Corresponde al grafo $G=\{G_0,G_1,r,s\}$; donde $G_0=\{v_k : k=0,1,....\}$, $G_1=\{e_j : j=0,1,....\}$, $r(e_{n+1})=s(e_n)=v_5$, para n = 0, 1, 2, ...

Además $s(e_0)=v_0$ y $r(e_0)=v_s$. Obsérvese en este caso que G es un grafo infinito, pues G_0 y G_1 lo son.

Observación (4.5.3).- Sea $G=(G_0,G_1,r,s)$ un grafo dirigido Fila – Finita. La expresión "fila – finita" refiere y/o corresponde a la matriz de vértices denotada por M_G del grafo G la cual es: $G_0\ x\ G_0$; y es definida por:

$$M_G(v,w)=\#\{e\in G_1 : r(e)=v, s(e)=w\}$$

Nota.- Generalmente M_G es conocido con el nombre de: MAtriz adyacente de G.

El grafo G es fila – finita si y solo si cada fila : $\{M_G(v,w): w \in G_0\}$ de M_G tiene suma finita.

Son muchas las maneras de asociar un álgebra a un grafo; siendo la más común; la propiamente: Algebra De Grafo, y a partir de ésta algebra se consigue, las álgebras de Bergman las algebras de caminos de cohn, las algebras de caminos de Leavitt. Ahora si al Algebra de Grafo, adicionamos la estructura de C*-álgebra obtenemos la denominada: C*-Algebra De Grafo; la cual es parte del estudio del presente trabajo y donde estructuramos los denominados ideales.

Nota.- Buscaremos representar un grafo dirigido por operadores en un espacio de Hilbert: Los vértices serán representados por proyecciones ortogonales y los ejes por isometrías parciales. A continuación definiremos la denominada **Familia de Cuntz – Krieger,** la misma que nos permitirá definir un álgebra de grafo. Esta definición y otras; así como también proposiciones que presentamos a continuación, han sido considerados de Iaim Raeburn. "Graph Algebras" (capítulo uno).

Definición (4.5.5).—(G – Familia de Cuntz Krieger)

Sea G un grafo dirigido y H un espacio de Hilbert. Una G – familia de Cuntz – Krieger en H; consiste de dos colecciones sobre H: $\{P_v : v \in G_0\}$ y $\{S_e : e \in G_1\}$ de proyecciones mutuamente ortogonales e isometrías parciales respectivamente tal que:

$(CK-1)$ $P_{s(e)} = S_e^* S_e$, para todo $e \in G_1$

$(CK-2)$ $P_{r(e)} = \sum_{e \in G_1, r(e)=v} S_e S_e^*$ si $r^{-1}(v) \neq \phi$

Nota.- La G – familia de Cuntz – Krieger en H dado en la definición (4.5.5); también se suele describir diciendo que es una G - familia de Cuntz – Krieger {S,P} sobre H.

Observación (4.5.4).-

1. Decir que las proyecciones P_v son mutuamente ortogonales $\left(P_v \perp P_w, v \neq w\right)$ significa que $P_v(H)$ son subespacios de H $\left(P_v(H) \subseteq H\right)$ mutuamente ortogonales.
2. La igualdad ("CK-1") dice que S_e es una isometría parcial con espacio inicial $P_{s(e)}(H)$. Mientras que de (CK-2). Se tiene que el rango proyección $S_e S_e^*$ de S_e es acotada por $P_v = P_{r(e)}$ y así: $S_e(H) \subseteq P_{r(e)}(H)$. de donde $S_e : P_{s(e)} \longrightarrow L \subseteq P_{r(e)}(H)$, y por consiguiente la aplicación $S_e : P_{s(e)} \longrightarrow L \subseteq P_{r(e)}(H)$ es una isometría, para L – subespacio cerrado. Expresando esto algebraicamente obtenemos:

$$S_e = P_{r(e)} S_e = S_e P_{s(e)} \quad \text{..............................} \quad \text{(IV.1)}$$

3. La igualdad (CK-2) también implica que las isometrías parciales asociadas a la arista "e" con $r(e) = v$ tienen rangos mutuamente ortogonales con $\left\langle P_v(H)\right\rangle$ así $P_v(H) = \bigoplus_{\substack{e \in G_1 \\ r(e)=v}} S_e(H)$ en el sentido que la aplicación $\left(h_e\right) \mapsto \sum_{e \in G} h_e$ es un isomorfismo, de $\oplus S_e(H)$ sobre $P_v\left(H\right)$.

Definición (4.5.6).- La C*-álgebra generada (sobre $\mathbb{C}$) por la familia de Cuntz – Krieger {S,P} es un álgebra de grafo. La cual denotaremos por C*(S,P), o $\left\{C^*(Se, Pv)\right\}(e, v) \in G_1 \; x \; G_0$ o simplemente como C*(G); donde G = (G_0, G_1, r, s) es un grafo.

Observación (4.5.5) (i) El algebra C*(S,P) es incrustado en un ambiente de un C*-algebra A, desde que C* (S,P) no es naturalmente dotado de una norma, se "presta" en tal situación de A.

(ii) La definición (4.5.5) no excluye la asociación de varias CK – Familias para el mismo grafo.

Definición (4.5.7).- Un camino "μ" es una secuencia de aristas (ejes): $u_1.....u_n$ $(i.e: \mu = \mu_1.....\mu_n)$ tal que $S(\mu_j) = r(\mu_{j+1})$. El dibujo correspondiente para el camino "μ" es:

GRAFICO N° 4.6

GRAFO DEL CAMINO "μ"

$$\begin{tikzcd} v_n \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[rrrrr, bend right, "\mu"'] & v_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] & .... \arrow[r, "u_3"] & v_3 \arrow[r, "u_2"] & v_2 \arrow[r, "u_1"] & v_1 \end{tikzcd}$$

Fuente: Elaboración propia - 2018

Si $u = u_1u_2.....u_n$ es un camino. Entonces "n" es la longitud de μ que se denota y define como: long (μ) = n = $|\mu|$. Además S(μ_n) = S(μ) : = S$(\mu_{(n)})$ y $r(\mu) = r(\mu_1)$.

Observación (4.5.6).- Sea $G = (G_0, G_1, r, s)$ un grafo. Para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ escribamos $G_{(n)} = \{\mu : \mu$ es un camino y $|\mu| = n\}$

Así consideramos los vértices como caminos de longitud cero y en consecuencia se tiene el conjunto $G_0 = \{v : r(v) = v = s(v)\}$

Notación: G* = $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_{(n)}$. Para cada elemento $\mu \in \prod_{j=1}^{n} G_{(j)}$; escribamos

(μ = $u_1u_2.....u_n$).

Nota.- A continuación daremos la definición de grafo simple en términos de caminos y ciclos.

Definición (4.5.8): Un grafo $G = (G_0, G_1, r, s)$ simple, es un **Grafo sin ciclo alguno**; es decir, para cada vértice $v \in G_0$ no existe camino alguno que empieza y termina en v.

Ahora nuestro propósito es determinar y/o definir la operación de "multiplicación" en C* (S, P) y así buscar; como expresar elementos arbitrarios en C* (S, P). Para lo cual iniciamos con algunos lemas y proposiciones.

Proposición (4.5.1): Sea G un grafo fila finita y $\{S,P\}$ una G – familia de Cuntz – Krieger en un C*-algebra A. Entonces se cumple:

(i) Las proyecciones $\{S_e S_e^*\}_{e\in G_1}$ son mutuamente ortogonales.

(ii) Si $e \neq f$ entonces $S_e^* S_f = 0$

(iii) Si $S(e) \neq r(f)$, entonces $S_e S_f = 0$

(iv) Si $S(e) \neq S(f)$, entonces $S_e S_f^* = 0$

Demostración:

(i) 1er. Caso: Si r(e) = r(f); entonces por definición (4.5.5); parte: (CK$_2$) se tiene: $P_{r(e)} = P_v = \sum_{e\in G, r(e)=v} S_e S_e^*$ y también $P_{r(f)} = P_v = \sum_{f\in G, r(f)=v} S_f S_f^*$. Y como P_v es una proyección entonces por proposición (1.5) $S_e S_e^*$ y $S_f S_f^*$ son mutuamente ortogonales.

2do. Caso: si r(e) ≠ r(f): recordando que $S_e = P_{r(e)} S_e = S_e P_{s(e)}$; entonces se tiene

$$\left(S_e S_e^*\right)\left(S_f S_f^*\right) = \left(S_e S_e^* P_{r(e)}\right)\left(\mathrm{P}_{r(f)} S_{(f)} S_{(f)}^*\right) = \left(S_e S_e^*\right) o \left(S_f S_f^*\right) = 0$$

(ii) Por hipótesis y la parte (i) : $S_e S_e^* \perp S_f S_f^*$ es decir: $\left(S_e S_e^* S_f S_f^* = 0\right)$ Por teorema(2.3.3) parte (iii) se tiene $S_e^* = S_e^* S_e S_e^*$ y $S_f = S_f S_f^* S_f$, entonces

$$S_e S_f^* = \left(S_e^* S_e S_e^*\right)\left(S_f S_f^* S_f\right) = S_e^* \left(S_e S_e^* . S_f S_f^*\right) S_f = S_e^* 0 S_f^* = \square$$

(iii) Como $S(e) \neq r(f)$ entonces $P_{s(e)} \perp P_{r(f)}$ *i.e.* $\left(P_{s(e)} . P_{r(e)} = 0\right)$, También de (IV.1) $\left[S_e = P_{r(e)} S_e = S_e P_{s(e)}\right]$, entonces $S_e S_f = \left(S_e P_{s(e)}\right) . \left(P_{r(e)} S_f\right) = S_e \left(P_{s(e)} P_{r(e)}\right) S_f = 0$

(iv) Como $S_{(e)} \neq S_{(f)}$ entonces $P_{s(e)} \perp P_{s(f)} \left(P_{s(e)}.P_{s(f)} = 0\right)$ nuevamente de (IV.1) obtenemos.

$$S_e S_f^* = \left(S_e P_{s(e)}\right).\left(S_f.P_{s(f)}\right)^* = S_e P_{s(e)} P_{s(f)}^* S_f^* = S_e\left(P_{s(e)} P_{s(f)}\right) S_f^* = 0$$

Proposición(4.5.2).- Para $u \in \prod_{j=1}^{n} G_{(1)}$ (i.e $u = u_1 x......x u_n = u_1 u_2......u_n$ donde u_j son caminos de longitud uno). Escribamos $S_\mu = S_{\mu_1} S_{\mu_2}.....S_{u_n}$. Y para $v \in G_0$ definamos $S_v := P_v$, entonces $S_u = 0$ y $S_u^* S_u = P_{s(\mu)}$

En efecto:

1) $S_\mu^* S_\mu = \left(S_{u_1}.......S_{u_n}\right)^* \left(S_{u_1}.......S_{u_n}\right)$

$$= \left(S_{u_n}^*.......S_{u_1}^*\right)\left(S_{u_1}.......S_{u_n}\right)$$

$$= S_{u_n}^*.......S_{u_2}^*\left(S_{u_1}^* S_{u_1}\right) S_{u_2} S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......S_{u_2}^*\left(P_{s(u_1)}\right) S_{u_2}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......S_{u_2}^*\left(P_{r(u_2)}\right) S_{u_2}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......\left(S_{u_2}^* P_{r(u_2)}\right) S_{u_2}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......S_{u_3}^*\left(S_{u_2}^* S_{u_2}\right) S_{u_3}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......\left[S_{u_3}^*\left(P_{r(u_2)}\right) S_{u_3}\right].......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......\left(S_{u_3}^* P_{r(u_3)}\right) S_{u_3}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......S_{u_4}^*\left(S_{u_3}^* S_{u_3}\right) S_{u_4}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......\left[S_{u_4}^*\left(P_{r(u_3)}\right) S_{u_4}\right].......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......\left(S_{u_4}^* S_{u_4}\right) S_{u_5}.......S_{u_n}$$

$$= S_{u_n}^*.......P_{r(u_4)}.......S_{u_n}$$

$\vdots$

$\vdots$

$= S^*_{u_n} P_{s(u_{n-1})} S_{u_n}$

$= S^*_{u_n} P_{r(u_n)} S_{u_n}$

$= S^*_{u_n} S_{u_n}$

$= P_{s(u_n)}$

$= P_{s(u)}$

Luego $S^*_\mu S_\mu = P_{s(\mu)}$

2) De la proposición inmediata anterior (4.5.1) parte (iii); y como $S_{(uj)} = r(u_i), \forall i \neq j$ entonces $S_{u_j} S_{u_i} = 0; \forall i \neq j,$ y como también $S_\mu = S_{u_1} S_{u_2} ....S_{u_n}$, entonces $S_\mu = 0$

Observación (4.5.7).- Para un elemento $\mu \in G^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{(n)}$; se tiene que $S_\mu : H \longrightarrow P_{r(\mu)}(H)$ es una isometría parcial con proyección inicial $P_{s(u)}$ y por tanto $P_{r(\mu)} S_\mu S^*_\mu = S_\mu S^*_\mu$.

Proposición (4.5.3).- Sean G un grafo fila – finita y $\{S, P\}$ una G – familia de Cuntz – Krieger en un C*-algebra A. Para $\mu, \vee$ en G* se cumple:

(i) Si $\mu \neq \vee$ entonces $\{S_\mu S^*_\mu\}_{\mu \in G^*}$ y $\{S_\vee S^*_\vee\}_{\vee \in G^*}$ son mutuamente ortogonales para $|\mu| = |\vee|$

(ii) $S^*_\mu S_\vee = \begin{cases} S^*_{w}, \; si \; \mu \; = \; \vee w \, para \; algún \; w \; \in G^* \\ S_z, \; si \; \vee \; = \; \mu z \; para \; algún \; z \; \in G^* \\ o, \; en \; otro \; caso \end{cases}$

Demostración: (i) Mostraremos que $(S^*_\mu S_\mu)\,(S^*_\vee S_\vee)=0$. Ahora considerando $\mu = \mu_1 \mu_2 .....\mu_n$ y $\vee = \vee_1 \vee_2 ......\vee_n$. Además elijamos el menor entero positivo j tal que $u_j \neq v_j$; entonces de la proposición (4.5.2) para $u_1 u_2 .....u_{j-1}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
S_{\mu}^{*}S_{u} &= \left(S_{u_1}S_{u_2}.......S_{u_{j-1}}S_{u_j}.......S_{u_n}\right)*\left(S_{v_1}S_{v_2}......S_{v_{j-1}}S_{v_j}.......S_{v_n}\right)\\
&=\left(S_{u_n}^{*}.....S_{u_j}^{*}\right)\left(S_{u_{j-1}}^{*}.....S_{u_1}^{*}\right)\left(S_{v_1}S_{v_2}.....S_{v_{j-1}}\right)\left(S_{v_j}.......S_{v_n}\right)\\
&= S_{u_n}^{*}.....S_{u_j}^{*}\left[\left(S_{u_{j-1}}^{*}.....S_{u_1}^{*}\right)\left(S_{v_1}S_{v_2}.....S_{v_{j-1}}\right)\right]S_{v_j}.......S_{v_n}\\
&= S_{u_n}^{*}.....S_{u_j}^{*}.P_{s(u_{j-1})}.S_{v_j}.......S_{v_n}\\
&= S_{u_n}^{*}.....S_{u_{j-1}}^{*}\left(S_{u_j}^{*}P_{s(u_{j-1})}\right)S_{v_j}.......S_{v_n}\\
&= S_{u_n}^{*}.....S_{u_{j-1}}^{*}S_{u_j}^{*}P_{r(u_j)}S_{v_j}.......S_{v_n}\\
&= S_{u_n}^{*}.....S_{u_j}^{*}S_{v_j}.......S_{v_n}
\end{aligned}
$$

Por la proposición (4.5.1) parte (ii) obtenemos $S_{u_j}^{*}S_{v_j}=0$; puesto que $u_j \neq v_j$. Por tanto $\left(S_{\mu}^{*}S_{\mu}\right)\left(S_{\vee}^{*}S_{\vee}\right)=0$

ii) Veamos para el caso; $S_{\mu}^{*}S_{\vee}\neq 0$.

Primero asumamos que $|\vee|\leq|\mu|$: Elijamos un elemento λ tal que: $\mu=\lambda w$ con $|\lambda|=|v|$ entonces $S_{u}^{*}S_{\vee}=S_{\lambda w}^{*}S_{\vee}=S_{w}^{*}\left(S_{\lambda}^{*}S_{\vee}\right)$.

a) Si $\lambda=\vee$: entonces $S_{\mu}^{*}S_{\vee}=S_{\lambda}^{*}S_{w}S_{\vee}=S_{w}^{*}S_{\lambda}^{*}S_{\vee}$ $=$ $S_{w}^{*}S_{\vee}^{*}S_{\vee}=S_{w}^{*}P_{s(\vee)}=$

$S_{w}^{*}\circ P_{r(w)}=S_{w}^{*}$

b) Si $\lambda\neq\vee$; elijamos el menor entero positivo tal $\lambda_j\neq v_j$; entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
S_{\lambda}^{*}S_{\vee} &=\left(S_{\lambda_1}......S_{\lambda_n}\right)*\left(S_{v_1}.......S_{v_n}\right)\\
&=\left(S_{\lambda_n}^{*}......S_{\lambda_j}^{*}S_{\lambda_{j-1}}^{*}....S_{\lambda_2}^{*}S_{\lambda_1}^{*}\right)\left(S_{v_1}S_{v_2}......S_{v_n}\right)\\
&=\left(S_{\lambda_n}^{*}......S_{\lambda_j}^{*}\right)\left(S_{\lambda_{j-1}}^{*}....S_{\lambda_1}^{*}S_{v_1}S_{v_2}......S_{v_{j-1}}\right)\left(S_{v_j}......S_{v_n}\right)\\
&=S_{\lambda_n}^{*}......S_{\lambda_j}^{*}P_r\left(\lambda_j\right)S_{v_j}......S_{v_n}\\
&=S_{\lambda_n}^{*}......S_{\lambda_j}^{*}.S_{v_j}......S_{v_n}
\end{aligned}
$$

Nuevamente por proposición (4.5.1) parte (ii) obtenemos $S_{\lambda_j}^{*}S_{\vee_j}=0$; puesto que $\lambda_j\neq\vee_j$ y así $S_{\lambda_n}^{*}.........S_{\lambda_j}^{*}S_{\vee_j}.............S_{\vee_n}=0$ en consecuencia $S_{\lambda}^{*}S_{v}=0$

Segundo asumamos que: $|u| \leq |\vee|$: Elijamos nuevamente un elemento λ, tal que $\vee = \lambda z$ con $|\lambda| = |u_{;}|$ entonces $S_{\mu}^{*}S_{\vee} = S_{\mu}^{*}(S_{\lambda z}) = S_{\mu}^{*}(S_{\lambda}S_{z}) = (S_{\mu}^{*}S_{\lambda})S_{z}$

A. Si $u = \lambda$: Entonces de la igualdad $S_{u}^{*}S_{u} = P_{s(u)}$ se tiene que :

$$S_{\mu}^{*}S_{\vee} = (S_{\mu}^{*}S_{\lambda})S_{z} = (S_{\mu}^{*}S_{\mu})S_{z} = P_{s(\mu)}S_{z} = P_{r(z)}S_{z} = S_{z}$$

Proposición (4.5.4)

(i) Si $S_{\mu} \neq 0$; entonces $u \in G^{*} = \bigcup_{n\geq 0} G_{(n)}$ y donde

$$G_{(n)} = \{\mu : \mu \text{ } es \text{ } un \text{ } camino \text{ } de \text{ } longitud \text{ } "n"\}$$

(ii) S_{u} es una isometría parcial

Demostración: (i) Usando el contra reciproco es decir: Si $\mu \notin G^{*}$. Probaremos que $S_{\mu} = 0$. En efecto:

a) Supongamos que $\mu \in G^{*}$; es decir $\mu \notin G_{(n)}$, para todo n ≥ 0. (Recuerde que un camino $\mu = \mu_{1}......\mu_{n}$ con $u_{j} \in G_{1}$ es tal que $S(\mu_{j}) = r(U_{j+1})$ entonces de lo anterior se infiere que podemos elegir "j" tal que $r(u_{j+1}) \neq S(u_{j})$, entonces $Su_{j+1}Su_{j} = Su_{j+1}Ps_{(u_{j+1})}.\Pr_{(u_{j})}S_{u_{j}} = 0$; puesto que las proyecciones son mutuamente ortogonales entonces $S_{\mu} = S_{\mu_{1}}......S_{\mu_{j}}S_{\mu_{j+1}}......S_{\mu_{n}} = 0$ y por tanto resultado.

b) Si $u \notin G^{*}$ entonces por (i) $S_{\mu} = 0$; por consiguiente $S_{u}^{*}S_{u} = 0$ es una proyección.

- En otro caso: Si $\mu \in G^{*}$; (i.e. : $\mu = \mu_{1}\mu_{2}......\mu_{n}$). Veamos que $S_{\mu}^{*}S_{\mu}$ es una proyección. En efecto: $S_{u}^{*}S_{u} = P_{s(u)}$ (Por proposición (4.5.2)); la cual efectivamente es una proyección.

Proposición (4.5.5).- Sea G un grafo fila – finita y $\{S,P\}$ es una G-familia de Cuntz – Krieger en un C*-algebra A y sean $u,v \in G^*$. Entonces

(i) Si $S_\mu S_\vee \neq 0$, entonces µc es un camino en G_j $S_\mu S_\vee = S_{\mu\vee}$ y $S_\mu^* S_\vee^* = S_{\vee\mu}^*$

(ii) Si $S_\mu S_\vee^* \neq 0$, entonces $S(\mu) = S(\vee)$

Demostración

i) Sean $\mu = \mu_1\mu_2......\mu_n$, $\vee = \vee_1\vee_2......\vee_n$, entonces

- $\mu\vee = (\mu_1.....\mu_n)(\vee_1.....\vee_n)$; claramente u∨ es un camino.
- $S_\mu S_\vee = S_{\mu_1}S_{\mu_2}......S_{\mu_n}S_{\vee_1}.......S_{\vee_n} = S_{(\mu_1.......\mu_n)(\vee_1.......\vee_n)} = S_{\mu\vee}$
- $S_\mu^* S_\vee^* = (S_{\mu_1}......S_{\mu_n})^*(S_{\vee_1}.......S_{\vee_n})^* = S_{\mu n}^*..........S_{\mu_1}^* S_{\vee n}^*.........S_{\vee_1}^*$ (IV.2)

$S_{\vee\mu}^* = (S_{\vee_1\vee_2}.........{}_{\vee_n}{}_{\cdot\mu_1}.........{}_{\mu_n})^* = (S_{\vee_1}S_{\vee_2}........S_{\vee_n}S_{\mu_1}........S_{\mu_n})^*$

$= S_{un}^*..........S_{u_1}^* . S_{vn}^*.........S_{v_1}^*$ .... (IV.3)

De (IV.2) y (IV.3) se obtiene $S_\mu^* S_\vee^* = S_{\vee\mu}^*$

(ii) Para esta parte ver proposición (4.5.1), ítem (iv), y proceder de manera análoga.

Proposición (4.5.6).- Sean G un grafo fila – finita, A un C*-algebra y {s, p} una familia de Cuntz – Krieger en A. Para µ, v, λ, γ ∈ G* se tiene la siguiente relación.

$$\left(S_u S_v^*\right)\left(S_\lambda S_\gamma^*\right) = \begin{cases} S_u S_{\gamma v'}, Si\ v = \alpha v'\ para\ algún\ v' \in G^* \\ S_{\mu\lambda'} S_\gamma^*, Si\ \lambda = v\lambda'\ para\ algún\ \lambda' \in G^* \\ 0, \quad en\ otro\ caso. \end{cases} \qquad (IV.4)$$

Demostración.- Usando asociatividad se tiene :

$\left(S_u S_v^*\right)\left(S_\lambda S_\gamma^*\right) = S_u\left(S_v^* S_\lambda\right)S_\gamma^*$. Ahora hagamos uso de las proposiciones (4.5.3) parte (ii); y de (4.5.5) parte (i). Obteniéndose:

$$S_u\left(S_v^*S_\lambda\right)S_r^* = \begin{cases} S_u(S_{v'}^*)S_\gamma^*, \; si \; v \; = \; \alpha v' \; para \; algún \; v' \in G^* \\ S_u(S_{\lambda'})S_\gamma^*, \; si \; \lambda \; = \; v\lambda' \; para \; algún \; \lambda' \in G^* \\ 0 \; , en \; otro \; caso. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_\mu(S_{\vee'}^*S_\gamma^*), \; si \; \vee \; = \; \alpha \vee' \; para \; algún \; \vee' \in G^* \\ (S_\mu S_{\lambda'})S_\gamma^*, \; si \; \lambda \; = \; \vee\lambda' \; para \; algún \; \vee' \in G^* \\ 0 \; , en \; otro \; caso. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_\mu(S_\gamma S_{\vee'}), \; si \; \vee \; = \; \alpha \vee' \; para \; algún \; \vee' \in G^* \\ S_{\mu\lambda'}.S_\gamma^*, \; si \; \lambda \; = \; \vee\lambda' \; para \; algún \; \lambda' \in G^* \\ 0 \; , en \; otro \; caso. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_\mu S_{\gamma\vee'}^*, \; si \; \vee \; = \; \alpha \vee' \; para \; algún \; \vee' \in G^* \\ S_{\mu\lambda'}S_\gamma^*, \; si \; \lambda \; = \; \vee\lambda' \; para \; algún \; \lambda' \in G^* \\ 0 \; , en \; otro \; caso. \end{cases}$$

Observación (4.5.8): En la proposición (4.5.6) la igualdad (IV.4) muestra que las expresiones $\left(S_\mu S_\vee^*\right)\left(S_\lambda S_\gamma^*\right)$ son de la forma $S_w^* S_z$ para algunos caminos w y z en G^*.

Teorema (4.5.1): Sean G un grafo fila finita y {S P} una G – familia de Cuntz Krieger, entonces:

$$C^*(S,P) = \left\langle \overline{S_u S_v^* : S_{(u)} = S_{(v)}; \; con \; \mu, \; v \; \in G^*} \right\rangle$$

Demostración: De la definición (4.5.6) se obtiene que:

$C^*(S,P) = \left\{C^*\left(S_e, p_v\right)\right\}_{(e,v)\in G_1 \times G_0}$ es un C*-álgebra [generada por la familia de Cuntz – Krieger], la cual es desarrollada o está incrustada en un ambiente de un C*-álgebra. Ahora de la proposición (4.5.6) (igualdad IV.4) vemos que $L = \left\langle \overline{S_\mu S_\vee^* : S_{(\mu)} = S_{(\vee)}, con \; \mu, \vee \in G^*} \right\rangle$ es cerrado respecto a la operación de multiplicación; y asi L es un subalgebra de C* (S, P); también se tiene

$\left(S_u S_v^*\right)^* = S_v S_u^*$ [i.e. es decir es cerrado bajo la involución "*"] de donde "L" es un * - subalgebra. Asi su cerradura $\overline{L}$ es un C*-subalgebra de C* (S, P), y como este "L" contiene los generadores $S_e = S_e S_{s(e)}^*$ y $P_v = S_v S_v^*$ y en consecuencia $\overline{L}$ es todo C*(S, P). Esto es:

$$C^*(S,P) = \overline{L} = \left\langle \overline{S_u S_v : S_{(u)} = S_{(v)};\ \text{para } \mu,\ v\ \in G^*} \right\rangle$$

Proposición (4.5.7): Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo dirigido finito sin ciclos, y supóngase que: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son los orígenes en G. Entonces C*(S,P) es isomorfo a la suma directa de las algebras matriciales $M_k(\mathbb{C})$, para k = 1, 2, …., n; donde $k = \left|S^{-1}(u_k)\right| = card(S^{-1}(u_k))$ y donde $S^{-1}(u_k) = \{\mu \in G^* : S(\mu) = u_k\}$ para cada G – familia de Cuntz –Krieger {S, P} en lo cual $p_v \neq 0$.

Demostración.- De la igualdad (IV. 2) se tendría que :

$C^*(S,P) = \left\langle S_\mu S_\vee^* : s(\mu) = s(\vee) = u_k \ para\ a\lg\acute{u}n\ k \right\rangle$

y $A_k := \left\langle S_u S_\vee^* : S(\mu) = S(\vee) = u_k \right\rangle \cong M_K(\mathbb{C})$ donde $k = \left|S^{-1}(u_k)\right|$, para μ∈ $S^{-1}(u_k)$ y λ∈S $S^{-1}(\mu_r)$ para algún r ≠ k, μ no puede extender λ y recíprocamente entonces $A_k A = 0$, y C* (S, P) $\cong \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$; (pues $\langle A \cup B \rangle \cong A \oplus B$ donde A y B son C*-subalgebras de algún C*-algebra E, tal que ab = 0, para todo a ∈ A y b ∈ B).

Categoría del algebra de grafo (4.5.9).- El Estudio de esta categoría cuyos objetos son los grafos y los morfismos son las aplicaciones entre grafos (Ver: la observación (4.5.2) parte (iii); se realiza mediante la denominada "Construcción universal". Previamente examinaremos el aspecto funtorial de la construcción de un álgebra de grafo. De este modo analizamos las aplicaciones siguientes:

$\{grafos\} \xrightarrow{C^*} \{C^* - \acute{a}\lg ebra\} \xrightarrow{Ki} \{Grupos\ Abelianos\}, i = 0,1$

Como observamos que existe una ambigüedad en nuestra elección para un álgebra de grafo lo cual primero necesitamos resolver. Nótese que en este caso no estudiaremos los funtores k_i, i = 1, 2 (Ver tesis: "K – teoría de C* - algebras").

Observación (4.5.9).- Los ejemplos Álgebra Multimatricial, Álgebra Matricial Múltiple y Álgebra de lazos, son modelos que infieren que; a condición de dos familias Cuntz – Krieger son no triviales en el sentido que para vértices apropiados "v" las proyecciones p_v son no cero. En este sentido la familias Cuntz – Krieger generan C* - álgebras isomorficas esto verdaderamente es un fenómeno general. Para estudiarlo introducimos una C*-álgebra la cual es universal para C* - álgebras generadas por G – familias Cuntz – Krieger, y analizamos las representaciones de estas C*-álgebras.

Para construir la C*-álgebra universal generado por una G familia Cuntz – Krieger. Simulamos el comportamiento del conjunto que abarcan o contienen $\{s_u s_v^*\}$. En la siguiente proposición los símbolos $d_{\mu,\vee}$ son una formalidad, pero todos finitos muchos coeficientes $z_{\mu,\vee} \in \mathbb{C}$ son cero en cada suma, y las operaciones de espacio vectorial sobre las sumas formales son definidos por:

$$a\left(\sum w_{\mu,\vee} d_{\mu,\vee}\right) + b\left(\sum z_{\mu,\vee} d_{\mu,\vee}\right) = \sum\left(a w_{\mu,\vee} + b z_{\mu,\vee}\right) d_{\mu,\vee} \qquad (IV.5)$$

Los elementos $d_{\alpha,\beta}$ serán obtenidos poniendo $z_{\alpha,\beta} = 1$ y $z_{\mu,\vee} = 0$ en otro caso, entonces claramente los $d_{\alpha,\beta}$ forman una base para V.

Proposición (4.5.8). Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo dirigido fila – finita. Entonces el espacio vectorial E de las combinaciones lineales formales.

$$E = \left\{\sum z_{\mu,\vee} d_{\mu,\vee} : u, \vee \in E^*, s(\mu) = s(\vee)\right\}$$

Es un *-álgebra con las definiciones.

$$\left(d_{\mu,\vee}\right)^* = d_{\vee,\mu} \qquad \text{y}$$

$$d_{\mu,\vee} \odot d_{\alpha,\beta} = \begin{cases} d_{\mu\alpha',\beta}, & si\ \alpha = \vee\alpha' \\ d_{\mu,\beta\vee'}, & si\ v = \alpha\vee' \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \qquad \text{(IV.6)}$$

Prueba.- De (IV.5) y (IV.6) vemos claramente que (V, $\odot$) es una álgebra; salvo la asociatividad. Para que la pareja (V, *) sea un * - álgebra donde

$$* : V \longrightarrow V$$

$$d_{\mu,\vee} \mapsto d_{\vee,\mu} = d^*_{\mu,\vee}$$

Falta ver entonces que el producto $\odot$ sea asociativo y compatible con la operación involución "*".

1. $\left(d_{\mu,\vee} \odot d_{\alpha,\beta}\right)^* = d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\vee}$

2. $\left(d_{\mu,\vee} \odot d_{\alpha,\beta}\right) \odot d_{x,y} = d_{\mu,\vee} \odot \left(d_{\alpha,\beta} \odot d_{x,y}\right)$

Vamos (1).

$$\left(d_{\mu,\vee} \odot d_{\alpha,\beta}\right)^* = \left[\begin{cases} d_{\mu\alpha',\beta}, & \alpha = \vee\alpha' \\ d_{\mu,\beta\vee'}, & \vee = \alpha\vee' \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}\right] \qquad \text{(IV.7)}$$

$$= \begin{cases} d_{\beta,\mu\alpha}, & \alpha = v\alpha' \\ d_{\beta\vee',\mu}, & \vee = \alpha v' \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De otro lado

$$d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\vee} = d_{\beta,\alpha} \odot d_{\vee,\mu} = \begin{cases} d_{\beta v',\mu}, & si\ \vee = \alpha\vee' \\ d_{\beta,\mu\alpha'}, & si\ \alpha = \vee\alpha' \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \qquad \text{(IV.8)}$$

Comparando (IV.7) con (IV.8) tenemos $\left(d_{\mu,\vee} \odot d_{\alpha,\beta}\right)^* = d^*_{\alpha,\beta} \odot d^*_{\mu,\vee}$

(2) Análogamente la asociatividad desarrollando y comparando ambos miembros.

Observación (4.5.10): Sea H un espacio de Hilbert, y G = (G_0, G_1, r, s) un grafo. Para cada G – familia de Cuntz – Krieger {S, P} sobre H, los operadores $\{S_\mu S_\nu^*\}$ satisfacen las relaciones impuestas sobre los símbolos $\{d_{\mu,\nu}\}$ y de aquí existe una representación que lo denotaremos por: $\pi_{S,P}$ de E en H es decir: $\pi_{S,P} : E \longrightarrow B(H)$ es un homomorfismo entre algebras, donde $\pi_{S,P}(d_{\mu,\nu}) = S_\mu S_\nu^*$.

Como P es una proyección y satisface $\|p\| = \|p * p\| = \|p\|^2$ entonces $\|p\| = 1$, y así también $\|\delta\|^2 = \|\delta * \delta\| = 1$, para cada isometría parcial $\delta \neq 0$, de donde entonces se tiene:

$$\left\|\pi_{S,P}\left(\sum z_{\mu,\nu} d_{\mu,\nu}\right)\right\| = \left\|\sum z_{\mu,\nu} \pi_{S,P}\left(d_{\mu,\nu}\right)\right\| \leq \sum |z_{\mu,\nu}| \left\|S_\mu S_\nu^*\right\| = \sum |Z_{\mu,\nu}|$$

De aquí se sigue que

$$\|x\|_1 := Sup\left\{\left\|\pi_{S,P}(x)\right\| : \{S, P\} \textit{ es una G - familia de Cuntz - Krieger}\right\}$$

Es finito para cada y $\in$ E, y $\|\bullet\|_1$ es una seminorma (i.e. E es un algebra seminormada) que satisface $\|x * x\|_1 = \|x\|_1^2$.

Observación (4.5.11): Sea el conjunto $J = \left\{x \in E : \|x\|_1 = 0\right\}$; claramente J es un ideal de E, más aún es un * - ideal. Entonces el cociente $E_0 = \dfrac{E}{J}$ es un * - algebra con norma $\|\bullet\|_0$ definido como $\|y + J\| = \inf\left\{\|y + j\|_1 : j \in J\right\}$

Es una C*-norma, en consecuencia la clasura de E_0 (i.e. la completación E_0) es un C*-algebra, y así se extiende únicamente a una representación de la completación E_0, para cada $\pi_{S,P}$ la cual es $\|\bullet\|_0$ continua.

Teorema (4.5.2).- Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo dirigido fila finita. Entonces existe un C*-álgebra C*(G) generado por una G – familia de Cuntz – Krieger {S, P} tal que si {T, Q} es otra G – familia de Cuntz – Krieger en un C* - algebra A, entonces existe un homomorfismo $\pi_{T,Q}: C^*(G) \longrightarrow A$ satisfaciendo $\pi_{T,Q}(S_e) = T_e$ y $\pi_{T,Q}(P_v) = Q_v$ para cada (e, v) $\in$ G_1 x G_0.

Demostración.- Considerando C*(G) = $\overline{E}_0$, y se comprueba que : $S_e := de, s(e)$, $p_v := dv, v$ forma una G - familia de Cuntz – Krieger los cuales son los generadores para E_0. Escribiendo $\pi_{T,Q}$ elijamos una representación fiel $\rho: A \longrightarrow B(H)$, y considerando $\pi_{T,Q} = \rho_0^{-1}\pi_{\rho(T),\rho(Q)}$ se tiene el resultado.

Nota.- La C*-algebra C*(G) descrita líneas arriba (Teorema (4.5.2)) es denominada la C*-algebra del grafo G o el algebra de Cuntz – Krieger de G, que generalmente es descrita como un Algebra de grafo. En este trabajo {S,P} siempre representará la familia Universal lo cual genera C*(G).

Proposición (4.5.9): Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo dirigido fila finita y sea E un C*-álgebra generado por una G – familia de Cuntz – Krieger {M, N} tal que para cada G . familia de Cuntz – Krieger {T, Q} es un C*-algebra A, existe un homomorfismo $\gamma_{T,Q}: E \longrightarrow A$ verificando $\gamma_{T,Q}(M_e) = T_e$ y $\gamma_{T,Q}(N_v) = Q_v$, para cada (e, v) $\in G_1 \; x \; G_0$; entonces C*(G) y E son isomorfos, es decir existe un Isomorfismo $\psi: C^*(G) \longrightarrow E$ tal que $\psi(S_e) = M_e$ y $\psi: C^*(G) \longrightarrow E$ tal que $\psi(s_e) = M_e$ y $\psi(P_v) = N_v$, para cada (e,v) $\in$ G_1 x G_0.

Demostración: Tomemos o consideremos $\psi := \pi_{M,N}$ el cual es sobre puesto que la imagen de $\pi_{M,N}$ es una C*-algebra conteniendo $\{M_e, N_v\}$ y en consecuencia $\psi(C^*(G)) = E$. Puesto que $\gamma_{T,Q} \circ \pi_{M,N}$ es la identidad sobre {S,P} y a su vez es la identidad en todo C*(G), de donde entonces se tiene que $\psi_{(x)} = 0$ implica $\pi_{M,N}(x) = 0$, entonces $x = \gamma_{S,P}(M_{M,N}(x)) = 0$, y por tanto ψ es inyectiva; en consecuencia C*(G) $\cong E$.

Nota. A continuación presentamos algunas proposiciones y Teoremas de Unicidad para Algebra de Grafo lo que serán utilizados en el estudio de nuestro resultado.

Estructura del Centro del C*-algebra C*(G) (4.5.10)

La propiedad universal en un C*-álgebra de un grafo "G", permite mostrar que un C*-algebra A es isomorfico al C*-algebra C*(G) [C*-álgebra de Cuntz krieger de grafo G]. Encontrando una "G – familia Cuntz – Krieger" {T, Q} la cual genera A y posee la propiedad universal. Cuyo resultado ha sido mostrado y demostrado en la proposición (4.5.9). En este capítulo discutiremos las "proposiciones – Teorema" y sus implicaciones que, luego demostraremos detalladamente. El primer resultado de estos teoremas de unicidad, afirma que el C*-algebra C*(G) es caracterizada por la existencia de una acción especial de la circunferencia unitaria $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, el cual es un grupo topológico bajo la multiplicación; en general, una acción de un grupo localmente compacto G en un C*-algebra "A" es un homomorfismo de grupos de G en Aut(A) (es decir $\varphi:G\longrightarrow Aut(A), \text{hom}\,omorfismo)$ tal que $\varphi(x)=\tau_x(a)$ es continuo para cada elemento fijo a ∈ A. La construcción de la acción particular ρ establecida en el Teorema mostrado a continuación es llamada "Acción medida"(Acción medible) de S^1 en $C^*(G)$.

Teorema: (4.5.3) Sea $G=(G_0,G_1,r,s)$ un grafo dirigido fila – finita entonces existe una acción $\rho:S^1\longrightarrow C^*(G)$ tal que $\rho_z(s_e)=z.s_e$ para cada $e\in G^1$ y $\rho_z(p_v)=p_v$ para cada $(e,v)\in G_1\ x\ G_0$ y para cada $z\in S^1$ fijo.

Demostración.- (1°) Sea z ∈ S^1 un elemento fijo y sea B un C* - algebra.

Entonces $\{zs,p\}=\{zs_e,p_v\}$ es una G-familia de Cuntz – Krieger lo cual genera C*(G). Ahora si {T, Q} es una G – familia de Cuntz – Krieger en B entonces $\{\overline{z}\ T,Q\}$. Tambien lo es y así se tiene:

$\prod_{\bar{z}T,Q}(zs_e) = z.\prod_{\bar{z}T,Q}(s_e) = z(\bar{z}T_e) = |z|^2.Te = Te,$ donde $\prod_{\bar{z}T,Q}$ es una *-representación.

Así poniendo $\delta_{T,Q} := \prod_{\bar{z}T,Q}$, se tiene que la pareja $[(C^*(G), \{zs, p\}]$ posee la propiedad descrita en la proposición (4.5.9). De aquí existe un isomorfismo $\rho_z : C^*(G) \longrightarrow C^*(G)$ tal que $\rho_z(S_e) = z.s_e$ y $\rho_z(p_v) = p_v$. Para $w \in S^1$, se tiene a los isomorfismos $\rho_z \circ \rho_w$ y $\rho_{z.w}$ sobre los generadores, es decir $\rho_z \circ p(w)(a) = \rho_{zw}(a)$ para $a \in C^*(G)$, y de aquí en todo el C*(G). Así $\rho : S^1 \longrightarrow Aut(G)$ es un homomorfismo.

(2º) Ahora veamos la continuidad; de "ρ"; para lo cual fijemos $z \in S^1, a \in C^*(G)$ y ε>0. Seleccionemos $c := \sum \alpha_{\mu.v} s_\mu s_v^*$ tal que $\|a-c\| < \varepsilon/3$.

Nótese que $\rho_z(s_\mu) = z^{|\mu|} s_\mu$. De esta manera, la multiplicación escalar es continua, y así se tiene:

$\rho : S^1 \longrightarrow Aut(C^*(G));$ *para* $\rho_{(w)} = \rho_w$ con w en S^1

Tal que $\rho_w(c) = \sum \alpha_{\mu,v} w^{|\mu|-|v|} s_\mu s_v^*$; y de aquí existe δ > 0 tal que $|w-z| < \delta$, entonces $\|\rho_w(c) - \rho_z(c)\| < \varepsilon/3$. Por tanto los automorfismos de C*-algebras preservan la norma, obteniéndose $\|\rho_z(a-c)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Así para $|w-z| < \delta$ obtenemos.

$$\|\rho_w(a) - \rho_z(a)\| = \|\rho_w(a) - \rho_w(c) + \rho_w(c) - \rho_z(c) + \rho_z(c) - \rho_z(a)\|$$

$$\leq \|\rho_w(a-c)\| + \|\rho_w(c) - \rho_z(c)\| + \|\rho_z(a-c)\| < 3\left(\varepsilon/3\right) = \varepsilon$$

Por tanto "ρ_w" es continua y en consecuencia el resultado.

Nota.- Previamente a la demostración de los Teoremas de unicidad (En C*-algebra de grafos) analizaremos el álgebra "punto – fijo". Escribamos

$C_\rho^*(G) := \{a \in C^*(G) : \rho_z(a) = a,$ para todo z $\in$ S$^1\}$

Para la acción $\rho : S^1 \longrightarrow Aut(C^*(G))$, lo cual es denominado usualmente el "Centro de C*(G)", $\left(C_\rho^*(G) \subset C^*(G)\right)$.

Observación (4.5.12).-De la definición de $C_\rho^*(G)$ es fácil ver que el centro $C_\rho^*(G)$ es un *-subalgebra de C*(G). Más aún la continuidad de "ρ" implica que $C_\rho^*(G)$ es un C*-subalgebra como $\rho_z\left(s_\mu s_\nu^*\right) = z^{|\mu|-|\nu|} s_\mu s_\vee^*$ claramente se ve que una palabra $s_\mu s_\vee^*$ es fijada por la acción si y solo si $|\mu| = |\nu|$. Así se tiene $\left\langle s_\mu s_\vee^* : s(\mu) = s(\vee) \text{ y } |\mu| = |\vee| \right\rangle$, lo cual está contenido en $C_\gamma^*(G)$.

Para una función continua $f : s^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, escribamos

$$\int_{S^1} f(z)dz := \int_0^1 f\left(e^{2\pi ti}\right)dt$$

Nota.- La demostración de la proposición (4.5.10) siguiente esta basado en la prueba realizado en el Texto Graph Algebra de Iain Raeburn (Pág. 25)

Proposición (4.5.10).- Sea $f : S^1 \longrightarrow A$ una aplicación continua, donde A es un C*-algebra. Entonces existe un único elemento $\int_{S^1} f(z)dz$ en A tal que, para cada representación π de A en un espacio de Hilbert H con h, k ∈H, se obtiene:

$$\left(\pi\left(\int_{S^1} f(z)dz\right), k\right) = \int_{S^1} \pi\left(f(z)h, k\right)dz.$$

Además tenemos:

(i) $\quad b\left(\int_{S^1} f(z)dz\right) = \int_{S^1} bf(z)dz$, para b ∈ A

(ii) $\quad \left\|\int_{S^1} f(z)dz\right\| \le \int_{S^1} \|f(z)\| dz$

(iii) $\quad \psi\left(\int_{S^1} f(z)dz\right) = \int_{S^1} \psi\left(f(z)\right)dz$, para cada homomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$

(iv) Para $\int_{S^1} f(wz)dz = \int_{S^1} f(z)dz$ para $w \in S^1$

Demostración: Primera Parte

Elijamos una representación fiel $\rho : A \longrightarrow B(H)$.

De donde $(h,k) \mapsto \int_{S^1} \left(\rho\left(f(z)\right)h,k\right)dz$ es una forma sesquilineal acotada en H y así hay un operador acotado T en H tal que:

$$\left(Th,k\right) = \int_{S^1} \rho\left(f(z)h,k\right)dz \text{ para todo h, k} \in \text{H}$$

Para ε > 0. Podemos usar una partición de la unidad, y así vemos que existe un número finito de elementos $f_i \in C(S^1)$ y $a_j \in A$ tal que $\left\| \sum_i f_i(z)a_i - f(z) \right\| < \varepsilon$ para todo $z \in S^1$, y entonces $\left\| T - \sum_j \left(\int_{S^1} f_j(z)dz \right) \rho\left(a_i\right) \right\| < \varepsilon$

En primer lugar esto prueba que S^1 pertenece a la C*-subalgebra $\rho\left(A\right)$ de B(H), y en consecuencia definimos, $\int_{S^1} f(z)dz$ para que sea ser $\rho^{-1}\left(s^1\right)$. En segundo lugar se tiene que:

$\left\| \int_{S^1} f(z)dz - \sum_i \left(\int_{S^1} f_i(z)dz \right) a_i \right\| < \varepsilon$; de donde si π es cualquier otra representación de A, entonces

$$\left| \left(\pi\left(\int_{S^1} f(z)dz \right) h,k \right) - \int_{S^1} \left(\pi\left(f(z)h,k\right)dz \right) \right| \leq 2\varepsilon \|h\| . \|k\| \qquad \text{(IV.9)}$$

Para todo h, k ∈ H. Por tanto el "ε" en (III.1) es arbitrario, esto implica la igualdad requerida siguiente

$$\left(\pi\left(\int_{S^1} f(z)dz \right) h,K \right) = \int_{S^1} \left(\pi\left(f(z)h,k\right)dz \right) \qquad \text{(IV.10)}$$

Segunda parte: • Para la verificación de las propiedades aplicamos una representación fiel "π" a ambos lados de las igualdades y usando (IV.10) obtenemos las dos primeras propiedades (i) y (ii).

• Para la tercera propiedad (iii), tomamos una representación fiel "ρ" de B y aplicamos nuevamente la igualdad (IV.10) con π = ρ∘ϕ, donde $\phi : A \longrightarrow B$ es cualquier homomorfismo. Finalmente para la propiedad (iv) usaremos una vez más la igualdad (IV.10). Para reducir a las integrales de funciones $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, y escribiendo w = $e^{2\pi\theta i}$, obtenemos $\int_{S^1} g(wz)dz = \int_0^1 g(e^{2\pi(\theta+t)i})dt = \int_\theta^{1+\theta} g\left(e^{2\pi i t}\right)dt =$

$$\int_\theta^1 g\left(e^{2\pi i t}\right)dt = \int_{S^1} f(z)dz$$

Proposición (4.5.11).- Considérese una acción α de S^1 en un C*-algebra A, y una aplicación $\phi : A \longrightarrow A$ como: $\phi(a) = \int_{S^1} \alpha_z(a)dz$. Entonces $\phi(a) \in A^\alpha$ para cada a ∈ A, y $\phi(a) = a$ para cada $a \in A^\alpha$. La aplicación $\phi : A \longrightarrow A^\alpha$ es lineal y decreciente en norma, además es fiel en el sentido que si $a \neq 0 \Rightarrow \phi(a^* a) \neq 0$.

Demostración.- Para a ∈ A y w ∈ S^1 , las partes (iii) y (iv) de la proposición inmediata anterior implican que.

$$\alpha_w(\phi(a)) = \int_{S^1} \alpha_w(\alpha_z(a))dz = \int_{S^1} \alpha_{wz}(a)dz = \int_{S^1} \alpha_z(a)dz = \phi(a), \in A^\alpha$$

Ahora si $a \in A^\alpha$, nuevamente por la proposición inmediata anterior (4.5.10) parte (i) implica que $\phi(a) = \left(\int_{S^1} 1.dz\right)a = a$. La linealidad de ϕ se sigue de una aplicación de la igualdad (IV.10), puesto que los automorfismos de C*-algebras preservan norma, entonces de la parte (ii) de la proposición (4.5.10) anterior se obtiene:

$$\|\phi(a)\| = \left\|\int_{S^1} \alpha_z(a)dz\right\| \leq \int_{S^1} \|\alpha_z(a)\|dz = \int_{S^1} \|a\|dz = \|a\|$$

Para probar la última afirmación, supóngase que $\phi(a^*a)=0$, y elijase una representación fiel π de A en H. entonces para h ∈ H, se tiene:

$$0=\left(\pi\left(\phi\left(a^*a\right)\right)h,h\right)=\int_{S^1}\left(\pi\left(\alpha_z(a^*a)\right)h,h\right)dz=\int_{S^1}\left\|\Pi\left(\alpha_z(a)\right)h\right\|^2dz. \qquad \text{(IV.11)}$$

Claramente la aplicación $z\mapsto\left\|\pi\left(\alpha_z(a)\right)h\right\|^2$ es continua no negativa entonces de (IV.11) se tiene que la función es idénticamente nula. En particular, este es cero cuando z = 1, y así deducimos que $\pi(a)h=0$ para todo h, puesto que π es representación fiel; esto implica que a = 0.

Nota.- Para lo sucesivo ϕ denotará la aplicación lineal $\phi: C^*(G)\longrightarrow C^*_\rho(G)$ obtenida en la proposición antes establecida.

Proposición (4.5.12): Sea $F\subset G^*$ finito y para cada elección de escalares $C_{\mu,\vee}$, *tenemos*

- $$\phi\left(\sum_{u,v\in Fs}C_{\mu,\vee}S_\mu S^*_\vee\right)=\sum_{(u,v\in F:|u|=|v_1|}C_{\mu,\vee}S_\mu S^*_\vee \qquad \text{(V.12) y}$$
- $$C^*_\rho(G)=\overline{Span}\left\{S_\mu S^*_\vee : s(\mu)=s(\vee) \text{ y } |\mu|=|\vee_1|\right\} \qquad \text{(IV.13)}$$

Demostración.- Obsérvese que el lado derecho de (IV.13) está contenido en $C^*_\rho(G)$, para $\mu,\vee\in G^*$ con S(μ) = S(∨), por la propiedad: "$b\left(\int_{S^1}f(z)dz\right)=\int_{S^1}bf(z)dz$ para z ∈ A", y se tiene que:

$$\phi\left(S_\mu S^*_\vee\right)=\int_{S^1}z^{|\mu|-|\vee|}s_\mu s^*_\vee dz=\left(\int_{S^1}z^{|\mu|-|\vee|}dz\right)s_\mu s^*_\vee=\begin{cases}s_\mu s^*_\vee, si\,|\mu|=|\vee|\\ 0, \text{ otro caso}\end{cases}$$

Por la linealidad de "ϕ" se tiene (IV.12) y como ϕ es continua entonces de esta misma relación se tiene que $\phi\left(C^*(G)\right)=\left\langle S_\mu S^*_\vee : S_{(\mu)}=S_{(\vee)},|\mu|=|\vee|\right\rangle$

También por proposición inmediata anterior se tiene: ϕ(a)=a, para a ∈ $C^*_\rho(G)$, esto implica que el lado derecho de (IV.13) contiene $C^*_\rho(G)$.

Observación (4.5.13).- Estructura del Centro o corazón de $C_p^*(G)$.

En efecto: Para k $\in \mathbb{N}$ escribamos:

$$\mathcal{F}_k = \left\langle \overline{S_u S_v^* : |u| = |v| = k, s(u) = s(v)} \right\rangle$$

Si μ, $\vee$, α y β son caminos todos de longitud "k", entonces μ y α no pueden extenderse uno al otro sin ser igual; y usando el resultado siguiente:

"Si G es un grafo "fila – finita y {s, p} una G – familia Cuntz – Krieger en un C*-algebra B. para μ, v, α, $\beta \in$ G*. Entonces se tiene:

$$\left(S_\mu S_\vee^*\right)\left(S_\alpha S_\beta^*\right) = \begin{cases} S_{\mu\alpha'} S_\beta^*, \alpha = \vee\alpha' \\ S_\mu S_{\beta\vee'}^*, \vee = \alpha\vee' \\ 0, \text{ otro caso} \end{cases} \qquad \text{(IV.14)}$$

$$\left(S_\mu S_\vee^*\right)\left(S_\alpha S_\beta^*\right) = \begin{cases} S_\mu S_\beta^*, si \ \vee \ = \ \alpha \\ 0, \text{ otro caso} \end{cases}$$

La cual implica que el conjunto

$M_{\mu,\vee} = \left\{ S_\mu S_\vee^* : |\mu| = |\vee| = k, s(\vee) = s(\vee) = \vee \right\}$ es una familia de matrices unitarias, para cada vértice v $\in G_0$. Entonces de aquí obtenemos que:

$$\mathcal{F}_{k(\vee)} \triangleq \left\langle S_\mu S_\vee^* : |\mu| = |\vee| = k, s(\mu) = s(\vee) = \vee \right\rangle$$

Es isomorfico al C*-algebra de operadores compactos sobre el l^2 espacio esto es:

$\mathcal{F}_{k(\vee)} \cong k\left(l^2(E^k \cap S^{-1}(v)\right)$, donde: $E^* \cap S^{-1}(v) = \left\{ \mu \in E^* : s(\mu) = v \right\}$.

(2) De la igualdad

$$\left(S_\mu S_\vee^*\right)\left(S_\alpha S_\beta^*\right) = \begin{cases} S_\mu S_\beta^*, si \ \vee = \alpha \\ 0, \ otro \ caso \end{cases}$$

Se tiene que $\mathcal{F}_{k(v)} \mathcal{F}_{k(w)} = 0$, cuando v $\neq w$. Y por ende también se obtiene

$\mathcal{F}_k \cong \bigoplus_{v \in G_0} \mathcal{F}_{k(v)} \cong \bigoplus_{v \in G_0} K(l^2(E^k \cap S^{-1}(v))$. Finalmente cuando el grafo G no contiene orígenes, y para u, v $\in E^* \cap S^{-1}(v)$, entonces la relación Cuntz – Krieger en "v" implica que:

$S_\mu S_\vee^* = S_\mu P_\vee S_\vee^* = \sum_{r(e)=\vee} S_\mu S_e S_e^* S_\vee^* = \sum_{r(e)=\vee} S_{\mu e} S_{\vee e}^*$, y en consecuencia:

$\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$, y así obtenemos que:

$$C_\rho^*(G) = \overline{\bigcup_k \mathcal{F}_k} = \overline{\bigcup_k \left(\bigoplus_{v \in G_0} \mathcal{F}_k(\vee) \right)}$$

Nota.- Para el caso general de un grafo dirigido "G" fila, escribamos para k $\in \mathbb{N}$ el conjunto $G_\leq^k$ dado como:

$G_\leq^k \triangleq \{\mu \in G^* : |\mu| \leq k \ y \ s(\mu) \ es \ un \ origen\}$

Observación (4.5.14).- Si v y α son caminos en $G_\leq^k$ y v es más corto que α, entonces s(v) es un origen y asi α no puede extenderse a v; así la igualdad (IV.14) para α, ß, μ, v en $G_\leq^k$ implica que

$\mathcal{F}_{k(v)} \triangleq \overline{\left\langle S_u S_v^* : u, v \in G_{\leq k}, s(u) = s(v) = v \right\rangle}$ es isomorfo a K (l² $\left(G_\leq^k \cap S_{(v)}^{-1}\right)$ y también:

$\mathcal{F}_{k(v)} \triangleq \overline{\left\langle S_u S_v^* : u, v \in G_\leq^k \right\rangle}$ es la suma directa de los $\mathcal{F}_{\leq k(v)}$.

Ahora si "v" no es un origen, entonces la relación Cuntz – Krieger muestra que $\mathcal{F}_{\leq k}(v) = \mathcal{F}_{k(v)} \subset \mathcal{F}_{k+1} \subset \mathcal{F}_{\leq k+1}$; mientras que si "v" es un origen entonces $G_\leq^k \cap S^{-1}(v) \subset G_\leq^{k+1} \cap S^{-1}(v)$ y $\mathcal{F}_{\leq k}(v) \subset \mathcal{F}_{\leq k+1}(v)$. Así $\mathcal{F}_{\leq k} \subset \mathcal{F}_{\leq k+1}$ y

$$C_\rho^*(G) \subseteq \overline{U\mathcal{F}_{\leq k}} = \overline{\bigcup_k \left(\bigoplus_{v \in G^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v) \right)} \qquad \text{(IV.15)}$$

Proposición (4.5.13): Sea (T, Q) una G – familia de Cuntz – Krieger en un C*-algebra B tal que $Q_v \neq 0$ para todo v ∈ G₀, entonces $\prod_{T,Q}$ es isométrico en $C_\rho^*(G)$.

Demostración.- Recordando $G_\leq^k = \{\mu \in G^* : |\mu| \leq k, S(\mu) \text{ origen}\}$ y donde $G^* = \bigcup_{n \geq 0} G^n$ con $G^n = \{\mu = \mu_1, ..., \mu_n : S(\mu_i) = r(\mu_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1\}$ ahora para cada μ $\in G_\leq^k$, se tiene $T_\mu^* T_\mu = Q_{s(\mu)}$, asi cada matriz unitaria $S_\mu S_\vee^*$ en cada $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ tiene imagen no cero $T_\mu T_\vee^*$ bajo $\pi_{T.Q}$. Por lo tanto $\pi_{T.Q}$ es inyectiva en cada $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$, y de aquí también en la suma directa $\underset{v}{\oplus}\mathcal{F}_{\leq k}(v)=\mathcal{F}_{\leq k}$. Como $\mathcal{F}_{\leq k}$ es un C*-algebra, entonces cada homomorfismo inyectivo en $\mathcal{F}_{\leq k}$ es isométrico. Asi $\pi_{T,Q}$ es isométrico en la unión $\bigcup_k\left(\underset{v\in G^0}{\oplus}\mathcal{F}_{\leq k}(v)\right)$en consecuencia por (IV.15) se tiene el resultado.

Observación (4.5.15).- Si G tiene orígenes entonces $C^*_\rho(G)\subseteq\overline{\bigcup_k \mathcal{F}_{\leq k}}$. En efecto.- Para μ, ν en $G^k_{\leq}$ con $|u|\neq|v|$ se tiene que $S_\mu S^*_\nu$ serán elementos de $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$. Ahora como nuestro objetivo es la descripción de $C^*_\rho(G)$ (corazón de C*(G)), es necesario introducir las subalgebras siguientes $\mathcal{F}_{k,l}(v)\triangleq\left\langle\overline{S_u S^*_v:\mu,v\in G^{\leq k},|\mu|=|v|e,s(\mu)=s(v)=v}\right\rangle$ entonces $H_k(v)\triangleq$ $\mathcal{F}_{\leq k}(v)\cap C^*_\rho(G)$ es la suma directa de las subalgebras $\mathcal{F}_{k,l}(v)$ para 1 ≤ k y $C^*_\rho(G)$ es la cerradura de la unión $\bigcup_{k\geq 1}\left(\underset{v}{\oplus}H_k(v)\right)$.

Teorema: [Primer Teorema de Unicidad para Algebra de Grafos] (4.5.4.)
Sea G un grafo dirigido fila – finita, y supóngase que {T, Q} es una G-familia cuntz – krieger en un C*-algebra B tal que $Q_v\neq 0$. Si existe una acción continua $\beta:s^1\longrightarrow Aut(B)$ tal que $\beta_z(Te)=zTe$ y $\beta_z(Q_v)=Q_v$ para cada $(e,v)\in G_1\ x\ G_0$ entonces $\pi_{T,Q}:C^*(G)\longrightarrow C^*(T,Q)$ es un isomorfismo.

Demostración.- De la proposición (4.5.10) Item (iii) y (ii) y al considerar $\phi(a)=\int_{s^1}\gamma_z(a)dz$ en A se tiene $\left\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\right\|=\left\|\pi_{T,Q}\left(\int_{s^1}\gamma_z(a)d_z\right)\right\|=\left\|\pi_{T,Q}\left(\int_{s^1}\gamma_z(a)d_z\right)\right\|$

$\leq\int_{s^1}\left\|\pi_{T,Q}(\gamma_z(a))\right\|dz=\int_{s^1}\left\|\beta_z(\pi_{T,Q}(a))\right\|dz.$

Desde que los automorfismos de C*-algebras preservan y como $\|\phi(a)\|\leq\int_{s^1}\|a\|dz=\|a\|$ entonces se tiene que:

$$\left\|\pi_{T.Q}\left(\phi(a)\right)\right\| \leq \int_{S^1} \left\|\pi_{T.Q}(a)\right\| dz = \left\|\pi_{T.Q}(a)\right\| \tag{IV.16}$$

Ahora considerando ambos miembros de la desigualdad (IV.16) se tiene:

$\pi_{T.Q}(a)=0 \Leftrightarrow \pi_{T.Q}(aa^*)=0;$ entonces por (IV.16): $\pi_{T.Q}(\phi(a^*a))=0,$

asi $\phi(a^*a)=0,$ puesto que $\pi_{T.Q}$ es fiel en el centro $C_\rho^*(G),$ y en consecuencia por proposición (4.5.4) se tiene que a = 0, por tanto $\pi_{T.Q}$ es inyectivo.

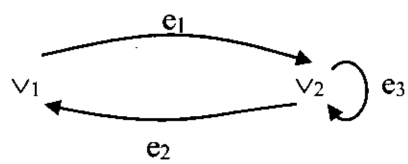
Ahora de otro lado, como la imagen de cualquier *-homomorfismo entre C*-algebras es un C*-álgebra y puesto que

$\mathrm{Im}\left(\pi_{T.Q}\right)=\pi_{T.Q}\left(C^*(G')\right)$ es generado por $\left\{\pi_{T.Q}(s),\pi_{T.Q}(p)\right\}=\{T,Q\}$ entonces $\mathrm{Im}\left(\pi_{T.Q}\right)$ es C*(T,Q) y por tanto $\pi_{T.Q}$ es suryectiva.

Aplicación.- En el siguiente grafo dirigido G

GRÁFICO N° 4.7

GRAFO CON ENTRADAS EN CADA CICLO



Fuente: Elaboración propia - 2018

Se tiene que : $e_1e_2,\ e_2e_1\ y\ e_3$ son ciclos; y cada ciclo tiene una entrada, por ejemplo e_3 es una entrada para e_1e_2. Ahora $e_2e_3e_1\ y\ e_1e_2e_1e_2$ son caminos cerrados pero no son ciclos; puesto que ambos caminos llegan a v_2 dos veces.

Hay ciclos que no tienen entradas; por ejemplo en el grafo siguiente $\overline{G}$

GRÁFICO N° 4.8

GRAFO CON CICLOS "CON - SIN" ENTRADAS

$$e_1 \circlearrowleft v_1 \xrightarrow{f} v_2 \circlearrowright e_2$$

Fuente: Elaboración proia

El ciclo (lazo) e_1 no tiene entrada.

Observación (4.5.16).- En el primer Teorema de Unicidad para álgebra de grafos se observa que no tiene hipótesis o condiciones sobre el grafo, y de aquí es muy provechoso para demostrar afirmaciones acerca de álgebra de grafos. Para una amplia clase de grafos, aún se puede mejorar. Recordemos que un ciclo en un grafo dirigido G es un camino $\mu = \mu_1\mu_2.....\mu_n$ con $n \geq 1, s(\mu_n) = r(\mu_1)$ y $s(\mu_i) \neq s(u_j)$ para i ≠ j. Una arista e es una entrada para cada ciclo μ si existe "i" tal que r(e) = r(μi) y $e \neq u_i$. El segundo teorema de unicidad para algebra de grafos estípula que cada ciclo tiene una entrada, toda familia no trivial de Cuntz Krieger generan C*-algebras isomorficas.

Proposición (4.5.14).- Sea G un grafo que no tiene orígenes (vértices de partida), y que cada ciclo en G tiene una entrada (arista que llega a un vértice). Entonces para cada elemento $v \in G_0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe un camino $\alpha \in G^* = \bigcup_{n\geq 0} G^n$ tal que

$r(\alpha) = v, |\alpha| \geq n$ y $\alpha_k \neq \alpha_{|\alpha|}$ para k < $|\alpha|$

Demostración.- Si existiera un camino $\alpha \in G^*$ con $r(\alpha) = v$ y no vértices repetidos, entonces se tiene el resultado.

De otro lado, cada camino de longitud "n" lo cual termina en "v" conteniendo un camino retornable. Elijamos un camino corto "α" tal que r(α) = v supóngase que existe un ciclo γ basado en S(α). Entonces γ tiene una entrada e, y para muchas repeticiones suficientemente de "γ". Entonces $\alpha = \lambda.\gamma.\gamma......\gamma - \gamma' e$ posee las condiciones requeridas para el resultado, donde γ' es el segmento de γ obtenido al unir r(e) o s(γ).

Teorema (4.5.5) (Segundo teorema de unicidad para algebra de Grafos)

Sea G un grafo dirigido fila – finita, en la cual cada ciclo tiene una entrada. Si {T, Q} es una G – familia de Cuntz – Krieger en un C*-álgebra B tal que $Q_v \neq 0$ para cada v $\in G_0$. Entonces las *C*-algebras* B y C* (G) son isomorfas mediante la aplicación $\pi_{T,Q}$ es decir el homomorfismo $\pi_{T,Q} : C^*(G) \longrightarrow B$ es un isomorfismo de C*(G) sobre C*(T, Q).

Nota.- La demostración del teorema (4.5.5) lo realizaremos luego de observar y demostrar algunos resultados previos.

Proposición (4.5.15).- Sea G un grafo dirigido fila finita, en el cual cada ciclo tiene una entrada. Si {S, P} y {T, Q} son dos G – familias finitas Cuntz - Krieger en un espacio de Hilbert "H" tal que $P_v \neq 0 \neq Q_v$ para todo $v \in G_0$, entonces $C^*(S,P)$ y C*(T, Q) son isomorfos es decir existe un isomorfismo $\varphi : C^*(S,P) \longrightarrow C^*(T,Q)$ tal que $\varphi(s_e) = T_e$ para cada $e \in G_1$ y $\varphi(p_v) = Q_v$ para cada v $\in G_0$.

Demostración.- Por el teorema (4.5.5) se tiene los isomorfismos

$\pi_{S,P} : C^*(G) \longrightarrow C^*(S,P)$ y $\pi_{T,Q} : C^*(G) \longrightarrow C^*(T,Q)$, más aún $\pi_{S,P}$ y $\pi_{T,Q}$ son representaciones fieles de C*(G). Ahora se puede considerar $\pi^{-1}_{s,p}$: $C^*(S,P) \longrightarrow C^*(G)$, y en consecuencia la composición $C^*(S,P) \xrightarrow{\pi^{-1}_{s,p}} C^*(G) \xrightarrow{\pi_{T,Q}} C^*(T,Q)$ es un isomorfismo, considerando $\varphi = \pi_{T,Q} \circ \pi^{-1}_{s,p}$ se tiene el resultado.

Observación (4.5.17).- Sea G un grafo dirigido fila – finita que no posee ningún origen (punto de partida), y defínase el grafo dual de G denotado por $\tilde{G}$, del modo siguiente: $\tilde{G}_0 = G_1, G_1 = G_0, r_{\tilde{G}}(ef) = e$ y $s_{\tilde{G}}(ef) = f$. Entonces $\tilde{G}$ es fila finita y C*($\tilde{G}$) $\cong$ C*(G)

Nota.-

1. Si A es un C*-algebra, la cual no tiene identidad similar como C*(G) cuando G_0 es infinito, existen varios caminos de "Incrustación" en un C*-algebra "grande" con identidad.
2. Escribamos:

   $M(A)=\{(L,R): aL(b)=R(a).b; para\ L,R: A \longrightarrow A\ aplicaciones\}$ es llamada "Algebra Multiplicativa", la cual es un C* - algebra; donde R y L son automáticamente lineales y acotadas; más aún : $\|(L,R)\|=\|L\|=\|R\|$, $(L_1,R_1)(L_2,R_2)=(L_1\circ L_2, R_2\circ R_1)$ y $(L,R)^*=(R^\#,L^\#)$ para $R^\#(a)=R(a^*)^*$

Proposición (4.5.16).- Sea G un grafo fila – finita, y sea V un conjunto no finito de vértices en G; entonces existe una proyección P_V en el algebra multiplicativa M (C*(G)) tal que

$$P_v S_\mu S_v = \begin{cases} S_u S_v^* & si\ r(\mu)\in V \\ 0 & si\ r(u)\ \in\ V^c \end{cases}$$

Demostración.-

- Sabemos que el espacio generado por $\{S_u S_v^*\}$ es un subespacio de C*(G) y al multiplicar a izquierda por una multiplicador resulta ser continua y lineal, por consiguiente a lo más existe un multiplicador P_v satisfaciendo la igualdad requerida.
- Ahora seleccionemos $V=\{v_1,v_2,...\}$, de donde el multiplicador que definiremos es independiente de esta elección.

Para $k\in\mathbb{N}$, definamos $P_k=\sum_{j=1}^{k} P_{v_j}$. Entonces

$$P_k S_\mu S_v^* = \begin{cases} S_u S_v^* & , si\ r(\mu)=v_j\ , para\ a\lg\acute{u}n\ j\ \le\ k \\ 0 & , en\ otro\ caso \end{cases}$$

De aquí para $a \in A_0 := \langle S_u S_v^* : S(\mu) = S(v) \rangle$, la sucesión $\{P_k a : k \in \mathbb{N}\}$ es constante, las aplicaciones: L, R: $A_0 \longrightarrow A$ definida como $L(a) = \lim_{k\to\infty} p_k a$ y R(a) = $\lim_{k\to\infty} a.P_k$ como cada P_k es una proyección, entonces de aquí son unitarios; y así, L y R son continuas; y así extendemos a funciones lineales de C*(G) = $\overline{A_0}$ en si misma, para un argumento (Radio) de $\varepsilon/3$ muestra que $L(b) = \lim_{k\to\infty} P_k b,$ para todo $b \in C^*(G)$.

Asi para a, b $\in$ $C^*(G)$ se tiene:

$$aL(b) = a\left(\lim_{k\to\infty} P_k b\right) = \lim_{k\to\infty} a\left(P_k b\right) = \lim_{k\to\infty}\left(aP_k\right)b = R(a)b;$$

Y $P_v := (L, R)$ es un multiplicador de C*(G), para cada $S_u S_v^*, r(u) \in V$ si y solo si r(μ) = v_k para algún k, y de aquí, si y solamente si $P_k S_\mu S_v^* = S_\mu S_v^*$ para k – suficientemente grande; de esta manera Pv satisface la igualdad buscada, puesto que $P_M P_K = P_M$ para $k \geq M$; asi se tiene:

$$P_V(P_v b) = \lim M P_M (\lim k.p_k b) = \lim_M \left(\lim k P_M P_K b\right) = \lim M P_M b = P_v b$$

Es decir $P_V^2 = P_V$; fácilmente se verifica también que: $P_V^* = P_V$; y por tanto P_V es una proyección.

Proposición (4.5.17).- Supóngase que G es un grafo dirigido fila – finita y $\tilde{G}$ el grafo dirigido fila – finita, obtenido al adicionar una cabeza a cada origen de G y una cola a cada sink (final). Escríbase por $\{s, p\}$ y $\{t, q\}$ las familias canónicas de Cuntz – Krieger generando C*(G) y C*($\tilde{G}$), respectivamente y sea q_G la proyección en M(C*(G)) obteniéndose al aplicar el lema anterior al subconjunto G_0 y $\tilde{G}_0$, por consiguiente $q_G C^*(\tilde{G}) q_G$ es una esquina saturada (vértice),

♦ **Ahora demostremos "el segundo Teorema de unicidad para álgebra de grafos".** En efecto. Si representamos B en un espacio de Hilbert, entonces se puede asumir que {T, Q} es una G – familia de "Cuntz – Krieger" de operadores sobre un espacio de Hilbert H. Con el propósito de evitar complicaciones en su notación, reduciremos al caso donde G no tiene orígenes.

Sea G^+ el grafo obtenido, al adicionar una cabeza a cada origen de G como en la proposición (4.5.17). Entonces ampliando H, encontraremos una G^+ - familia de Cuntz – Krieger {S, P} tal que $S_e = T_e$ y $P_v = Q_v$, con $(e,v) \in G_1 \; x \; G_0$ (para cada origen w, adiciona la suma directa $\overset{\infty}{\underset{j=1}{\oplus}} H_{j,w}$ de copias $H_{j,w}$ para $P_w H$, y tomando la isometría parcial s_{ej} asociada a la arista e_j sobre la cabeza a la aplicación identidad de $H_{j,w}$sobre $H_{j-1,w}$; donde $H_{0,w}$ es el espacio origen $P_w H$) de donde $p_v \neq 0$ para cada $v \in G_0$. Asi si conocemos el teorema para G^+, y en consecuencia $\pi_{s,p}$ es fiel en C*(G$^+$), y así también lo es $\pi_{T,Q}$; lo cual es la composición de $\pi_{S,P} : C^*(G) \longrightarrow C^*(S,P)$ y la inyección "ρ" obtenida en (4.5.17).

Asi podemos suponer que G no tiene orígenes y ahora observando el primer Teorema de unicidad bastará mostrar que $\left\|\pi_{T,Q}(\phi(x))\right\| \leq \left\|\pi_{T,Q}(x)\right\|$ para todo x ∈ C*(G). Por la continuidad es suficiente considerar $x = \sum_{(u,v)F} C_{uv} S_u S_v^*$, donde F es un conjunto finito de parejas (μ,v) con s(μ) = s(v). Ahora el propósito la estrategia es encontrar una proyección "Q" la cual verifica $\left\|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\right\| \leq \left\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\right\|$ y $QT_\mu T_\vee^* Q =$□ , cuando (u, v) ∈ F y $|u| \neq |v|$.

Sea M = max $\{|\mu|,|\vee| : (\mu,\vee) \in F\}$, y como el grafo G no tiene orígenes, podemos suponer aplicando las relaciones de Cuntz – Krieger y cambiando F que M = min $\{|M|,|v|\}$ para cada pareja (μ, v) con Cμ,v ≠ 0. En particular si $C_{\mu,v} \neq 0$ y $|\mu| = |v|$, entonces $|\mu| = |\vee| = m$. Ahora usando la igualdad siguiente:

$$\phi\left(\sum_{\mu,v\in F} C_{\mu,\vee} S_\mu S_\vee^*\right) = \sum_{\substack{\mu,\vee\in F \\ |\mu|=|v|}} C_{\mu,\vee} S_\mu S_\vee^*$$

Se deduce que $\phi(a) \in \mathcal{F}_m = \overline{\langle S_u S_v^* : |u| = |v| = m \rangle}$. Puesto que $\mathcal{F}_m$ es la suma directa

$\bigoplus_{v \in G_0} \mathcal{F}_m(v)$ C* - algebraica entonces existe un vértice v $\in G_0$ tal que

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{\substack{\mu, v \in F \\ \{|\mu| = |v|, S(\mu) = S(v) = v\}}} C_{\mu,v} S_\mu S_\vee^* \right\|$$

Escribiendo

$$b_v := \sum_{\substack{\mu, v \in F \\ \{|\mu| = |\vee|, S(\mu) = S(v) = \vee\}}} C_{\mu,\vee} S_\mu S_\vee^*$$

Sea Ω el conjunto de caminos lo cual produce cualquier de los dos como μ o como v para algún (μ, v) ∈ F satisfaciendo $|u| = |v| \; y \; s(\mu) = s(v) = v$. Observe que $\overline{\langle S_\mu S_v^* : \mu, v \in \Omega \rangle}$ es un algebra matricial finito dimensional contenido b_v .

Ahora para el vértice "v" satisfaciendo la igualdad:

$$\|\phi(x)\| = \left\| \sum_{\{(\mu,v) \in F, |\mu| = |v| s(\mu) = s(\vee)\}} C_{\mu,v} S_\mu S_\vee^* \right\|, \text{ y n>max}\{|\mu|, |\vee| : (\mu, \vee) \in F\},$$

elegimos $\alpha \in G^* = \bigcup_{n \geq 0} G^n$ como en la proposición (4.5.17), de donde afirmamos que:

$$Q := \sum_{\gamma \in \Omega} T_{\gamma\alpha} T_{\gamma\alpha}^*$$

Satisfacen las igualdades:

$$\begin{aligned} &\|Q \pi_{T,Q}(\phi_{(a)}) Q\| = \|\pi_{T,Q}(\phi_{(a)})\| \; y \\ &Q T_\mu T_\vee^* Q = 0, \; cuando \; (\mu, \vee) \in F \; y |u| = |\vee| \end{aligned} \qquad \text{(IV. 17)}$$

Supóngase que (μ, ∨) ∈F satisface $|\mu| = |\vee| \; y \; r \in \Omega$. Entonces $T_{\gamma\alpha}^* T_\mu \neq 0$ si y solo si $\gamma = \mu$, y de aquí:

$$QT_\mu T_\gamma^* Q = \begin{cases} \left(T_{\mu\alpha} T_{\mu\alpha}^* T_\mu\right)\left(T_\vee^* T_{\vee\alpha} T_{\vee\alpha}^*\right), si\ \mu, \vee \in \Omega \\ 0,\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T_{\mu\alpha}\left(T_\alpha^* T_\alpha\right) T_{\vee\alpha}^*, si\ \mu, \vee \in \Omega \\ 0,\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T_{\mu\alpha} T_{\vee\alpha}^*, si\ \mu, \vee \in \Omega \\ 0,\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para $\gamma \in \Omega,$ la proyección inicial $Q_s(\gamma\alpha)$ de $T_{\gamma\alpha} = 0$ y de aquí también se tiene que la proyección final : $T_{\gamma\alpha} T_{\gamma\alpha}^* \neq 0.$ Así el conjunto. $\left\{QT_\mu T_\vee^* Q : \mu, \vee \in \Omega\right\}$. Es una colección de matrices unitarios y la aplicación: $b \mapsto Q\pi_{T,Q}(b)Q$ es una representación fiel del algebra de matrices.

$$\left\langle S_u S_v^* : \mu, \nu \in \Omega \right\rangle$$

Como las representaciones fiel de C*-algebras son isométricas, esto implica en particular que:

$$\left\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\right\| = \left\|(\phi(a))\right\| = \left\|b_v\right\| = \left\|Q\pi_{T,Q}(b_v)Q\right\| = \left\|Q\pi_{T,Q}(\phi(x))Q\right\|$$

Y así mostramos que la igualdad siguiente:

$$\left\|Q\pi_{T,Q}(\phi(x))Q\right\| = \left\|\pi_{T,Q}(\phi(x))\right\|$$

Se verifica.

Ahora supongamos que (μ, ∨) ∈ F satisface $|\mu| \neq |\vee|$. Cualquiera de los dos: μ o ∨ tiene longitud igual a "k", digamos: $|u| = m.$ Como hecho líneas arriba; entonces se tiene que:

$T_{\gamma\alpha}^* T_\mu \neq 0$ si y solo si γ = μ. Asi:

$$QT_\mu T_\vee^* Q = \sum_{\gamma\in\Omega} T_{\mu\gamma} T_{\mu\gamma}^* T_\mu T_\vee^* T_{\gamma\alpha} T_{\gamma\alpha}^* = \sum_{\gamma\in\Omega} T_{\mu\alpha}\left(T_{\mu\gamma}^* T_{\gamma\alpha}\right) T_{\gamma\alpha}^*$$

Para $T^*_{\mu\alpha}T_{\gamma\alpha} \neq \phi, \mu\lambda$ debe extenderse a γα lo cual es imposible puesto que 0 < $|\nu| - |\gamma| < |\alpha|$ y α es no retornable. Asi $QT_\mu T^*_\nu Q = 0,$ y nosotros tenemos verificado la igualdad:

$QT_u T^*_v Q = 0$ cuando (μ, ν) ∈ F y $|\mu| \neq |\nu|$.

Ahora usaremos (IV.17) para calcular la siguiente relación.

$$\left\|\pi_{T,Q}(\phi(x))\right\| = \left\|Q\pi_{T,Q}(\phi(x))Q\right\| = \left\|Q\left(\sum_{\{(u,v)\in F | |u|=|v|\}} C_{\mu,\nu}T_\mu T^*_\nu\right)Q\right\| =$$

$$\left\|Q\left(\sum_{(u,v)\in F} C_{u,v}T_u T^*_v\right)Q\right\| \leq \left\|\sum_{(u,v)\in F} C_{u,v}T_u T^*_v\right\| = \left\|\Pi_{T,Q}(a)\right\|$$

Recordando: $\pi_{T,Q}(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_{T,Q}(x^* x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Luego este cálculo se sigue de esta implicación, y así se obtiene la demostración.

CAPITULO V

RESULTADOS

5.1 Resultados Descriptivos

En este trabajo se ha investigado la estructura de ideal de los C*-algebras de grafos filas – finitas, más específicamente se hecho la descripción de ideales I de los C*(G) (C*(G); es la denominada C*-algebra de grafo "G"), cuando dicha C*-algebra posee ideales propios. Por cuestiones didácticas se ha convenido considerar y/o trabajar con ideales bilateros (ideales a izquierda y derecha simultáneamente). Muy brevemente a continuación bosquejamos lo que realizaremos, supongamos que I es un ideal del C*-algebra C*(G), y consideremos el conjunto de vértices de G denotado y definido como H(I):= {v $\in G_0$: $P_v \in I$ }, la idea es que el ideal I sea determinado por el conjunto H(I). A continuación se expone tal resultado, luego de algunas definciones, proposiciones; etc.

Básica y fundamentalmente se ha usado los teoremas (proposiciones) de unicidad de la denominada familia de Cuntz – Krieger.

Como el propósito de este trabajo es analizar e investigar **la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo "G",** buscamos una relación entre la **estructura de un grafo** con los ideales de los C*-álgebras generados, Y por lo tanto la estructura cociente de los mismos.

Iniciamos recordando y estableciendo las definiciones siguientes:

Definición: (Grafo dirigido fila – finita) (5.1.1.)

i) Un grafo dirigido "G" es una cuaterna (G_0, G_1, r, s) donde G_0 *y* G_1 son conjuntos numerables formados por los denominados vértices y ejes respectivamente; mientras que s, r son funciones que van de G_1 a G_0 cuyas imágenes son llamados origen y extremo de un eje respectivamente.

ii) Un grafo dirigido fila – finita es un grafo dirigido G tal que el conjunto $r^{-1}(v)$ sea finito, para todo $v \in G_0$. esto es, el conjunto $\left(r^{-1}(v) = \{e \in G_1 : r(e) = v\}\right)$ sea de cardinal.

Nota.- Nosotros estudiaremos grafos dirigido fila – finita; y simplemente nos referiremos como grafo.

Definición (Preorden) (5.1.2). Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo; y sean v, w dos elementos cualesquiera en G_0. Diremos que v y w están "preordenados" $(v \le w)$ si existe un elemento $\mu \in G^* = \bigcup_{n \ge 0} G^n$ tal que s (μ) = w y r (μ) = v.

Notación: $G^{\infty} = \{\text{conjunto de caminos infinitos}\}$

$$= \{\mu = \mu_1\mu_2.....\mu_n........ \ tal \ que \ u_j \in G_1, n \in \mathbb{N}\}$$

$G_{\le}^{\infty} = G^{\infty} \cup$ {μ tal que μ es camino finito iniciándose de un origen}

Observación (5.1.1).- La relación "≤" dada en la definición anterior es transitiva; en el sentido siguiente: si w ≤ v y v ≤ μ, entonces w ≤ u; también es reflexiva. Esto es v ≤ v; puesto que se puede tomar μ en el camino v de longitud cero.

Definición (Cofinalidad) (5.1.3) Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo, se dice que G es cofinal si para cada elemento $\mu \in G_{\le}^{\infty}$ y para cada v ∈ G_0 existe un vértice w sobre μ tal que v ≤ w.

Definición (Grafo transitivo) (5.1.4)

Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo dirigido diremos que G transitivo si para cada par de elementos v, w en G_0, se tiene que: $v \le w$ y w ≤ v.

Teorema (5.1.1).- El álgebra de grafo C*(G) es un algebra simple; donde G es un grafo cofinal y donde cada ciclo tiene una entrada. .

Demostración.- Considérese el álgebra de grafo C*(S, P). Puesto que cada ideal "I" es el núcleo de una representación $\pi : C^*(S,P) \longrightarrow A \subseteq B(H)$ (observe que π es posible encontrarlo por el Teorema de G el fand – Naimark; más aún π es una representación fiel, esto es suficiente para mostrar que cada representación no nula π es inyectiva y para probar que $C^*(S,P)$ es única. Para esto primero probaremos que $p_v \neq 0$ para todo $v \in G_0$. En efecto supongamos que {s, p} es una G – familia de Cuntz – Krieger tal que $\pi = \pi_{sp} \neq 0$. Si todas las proyecciones vértices p_v son cero, entonces la relación $s_e^* s_e = p_{s(e)}$ implica que $s_e = 0$ $\left(pues\ \|s_e\|^2 = \|s_e^* s_e\| = \|P_{s(e)}\| = 0 \right)$. Nosotros queremos ver que todas las proyecciones vértices son diferente de cero.

Sea $\mu \in G_0$. Si el vértice "v" para el cual $p_v \neq 0$ no es un origen (punto de partida), la relación de Cuntz – Krieger en el vértice "v" implica que existe arista $e \in G_1$ tal que $r(e) = v$ y $S_e S_e^* \neq 0$. Entonces $P_{s(e)} = S_e^* S_e \neq 0$, y si s(e) no es un origen, repetimos el procedimiento en s(e). Estos procesos termina en un origen o produce un camino infinito; cualquiera de las dos maneras, formamos un camino $\mu \in G_{\leq}^{\infty}$ tal que r(μ) = v y $P_x \neq 0$ para cada vértice "x" en μ. Como G es cofinal, existe $\alpha \in G^*$ tal que r(α) = μ y s (α) es un vértice en μ. Pero ahora $S_\alpha^* S_\alpha = P_{s(\alpha)} \neq 0$, así $S_\alpha^* S_\alpha \neq 0$; y como $p_u S_\alpha S_\alpha^* = S_\alpha S_\alpha^*$, entonces $P_u \neq 0$. De aquí podemos decir que todas las proyecciones son no cero (implicando todas las isometrías parciales son también no nulas). Finalmente el teorema de unicidad de Cuntz – Krieger implica que $\Pi_{S,P} = \Pi$ es inyectiva.

Ejemplo (Matrices con Estructura de Álgebra) (5.1.1)

Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos escribamos:

$M_n(\mathbb{C}) = \left\{ L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \,/\, L - lineal \right\}$

Afirmación: Mn $(\mathbb{C})$ es un C*-algebra; en efecto.- Mn $(\mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial con la multiplicación usual de matrices. Dotamos este espacio con el operador norma $\|L\| = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}$ con relación al producto interno canonico sobre $\mathbb{C}^n$; mientras que la involución $* : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ está dada como $A^* = \overline{A^t}$ (conjugación compleja y transposición).

Observación (5.1.2) (1) Las proyecciones en Mn $(\mathbb{C})$ son las matrices con unos sobre la diagonal y cero en otro lugar.

2) Consideremos una base $\{b_{ij} : i, j = 1, 2, ..., n\}$ para Mn $(\mathbb{C})$ donde b_{ij} es una matriz cuadrada en Mn $(\mathbb{C})$ con un "1" (uno) sobre (i, j) y ceros en otro lugar, nótese que b_{ij} es una isometría parcial, para todos los pares: i, j : $b_{ij}b_{ij}^* = b_{ij}b_{ji} = b_{ii}$ y $b_{ij}^*b_{ij} = b_{ji}b_{ij} = b_{jj}$

3) De (2) consideremos: $gen(\{b_{1j} : j = 1, 2, ..., n\}) = A_n$, la cual es un *-algebra formada por isometrías parciales y de aquí se sigue que $Mn(\mathbb{C}) = \langle A_n \rangle$ obsérvese que hay diversos caminos para obtener y/o construir A_n. Muchas veces $\langle A_n \rangle$ también puede escribirse como Span $\langle A_n \rangle$

4) Ahora si G es un grafo, formado por un conjunto de isometrías parciales "Q" y un conjunto de proyecciones P, tal que $C^*(S,P) \cong M_n(\mathbb{C})$, entonces por definición G tiene un número finito de aristas (ejes). En general Un grafo correspondiente a Mn $(\mathbb{C})$ posee n – diferentes isometrías parciales emanando de algún origen. Como cada proyección en Mn $(\mathbb{C})$ es de la forma $b_{ij}b_{ij}^*$ cada vértice en el grafo recibe por lo menos un eje, lo cual hace al grafo conexo. Ciertamente, el grafo no tiene ciclos debido al número finito de isometrías parciales.

Definición (Estructura de Algebra Multimatricial) (5.1.5)

Sea $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}x......x\mathbb{N}$ (n-veces) y $m \in \mathbb{N}^n$. Una estructura de Algebra Multimatricial en "$\mathbb{C}$" se denota y define como:

$$M(\tilde{m}) = \underset{j=1}{\pi} Mn_{(j)}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{j=1}^{n} M_{m(j)}(\mathbb{C})$$

Llamado también: Forma de Jordan

Proposición (5.1.1).- Sea G un grafo finito sin ciclos y sea $\{u_1,....,u_n\}$ la colección de orígenes. Entonces C*(S,P) $\cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{k_i}(\mathbb{C})$, donde $k_i = \#\{s^{-1}(u_i)\}$

Demostración.- Escribamos $A_i = \langle S\mu S_v^* : S(\mu) = S(v) = v_i \rangle$ entonces siguiendo el mismo razonamiento de la observación anterior parte (4) vemos que $A_i \cong M_{k_i}$. Sea $i \neq j$ y $S_u S_v^*$ tal que S(μ) = S(v) = u_i; y $S_\alpha S_\beta^*$ con $S(\alpha) = S(\beta) = u_j$. Entonces $S_\mu S_v^* S_\alpha S_\beta^* = 0$, a menos que v extienda a α o α extienda a v. Pero entonces ellos no accionan un origen, lo cual no es imposible. Por consiguiente $A_i A_j = 0$, y en consecuencia vemos que $\langle A_i \cup A_j \rangle \cong A_i \oplus A_j$

Ejemplo {Generalización del álgebra de Matrices} (5.1.2)

La generalización del álgebra de matrices a espacios infinitos dimensionales (pero numerables) son los denominados **operadores compactos, escribamos H** un espacio Hilbert y sea $B_0(H) = \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\} = B_0$; el cual es un ideal algebraico cerrado de B(H) y de esta manera es un C*-algebra. Ahora como un álgebra de grafo, $B_0(H)$'es ascendente entonces el grafo siguiente $........v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow w$ (V.1) genera $B_0(H)$.

Observación [Las algebras "An"] (5.1.3)

Sea $\mathcal{B} = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de H y definamos la aplicación $\rho : HxH \longrightarrow B(H)$ como $\rho(T_i, T_j)(h) := T_{ij}(h) = (h, T_j)T_i$. Claramente este es un operador de rango finito, de aquí

$A_n = \langle T_{ij} : i, j = 1, 2, ..., n \rangle \subseteq B_0(H)$ para cada n $\in \mathbb{N}$.

Identidades de los elementos T_{ij}

(1) $T_{ij}(T_{kr}(h)) = T_{ij}(h, T_r)T_k = (h, T_r)(T_k, T_j)T_i = \delta_{jk}(h, T_r)T_i = \delta_{jk}T_{ir}(h)$

(2) $(h', T_{ij}h) = (h', (h, T_j)T_i) = (T_j, h)(T_i, h') = ((T_i, h')T_j, h) = (T_{ij}h', h)$

(3) De (1) y (2) podemos construir un isomorfismo $f : A_n \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ dado e identificado con $f(T_{ij}) = a_{ij}$; donde $\{b_{ij} : i, j = 1, 2, .., n\}$ es una base elegida para el espacio $M_n(\mathbb{C})$

(4) Usando resultados correspondientes el álgebra de matrices podemos concluir que el álgebra generado por el grafo dado en (V.1.) es igual a: $\overline{\langle b_{ij} : i, j \in \mathbb{N} \rangle} = \overline{\langle T_{ij} : i, j \in \mathbb{N} \rangle}$

Puesto que cada elemento en $B_0(H) = B_0$, es el límite de alguna secuencia de operadores de rango finito, y asi $\langle T_{ij} : i, j \in \mathbb{N} \rangle$ contiene cada operador de rango finito, en consecuencia podemos concluir que $\overline{\langle T_{ij} : i, j \in \mathbb{N} \rangle} = B_0$.

Proposición (5.1.2): [Las álgebras de matrices y B_0 son simples]

Demostración:

1) De la observación (5.1.2) parte (4) y de la definición de B_0 se tiene que los grafos de estas C*- algebras $(Mn(\mathbb{C})$ y $B_0)$ no tienen ciclos; entonces por el Teorema (5.1.1) bastará mostrar que tales grafos de $Mn(\mathbb{C})$ y B_0 sean cofinales.

Con relación a B_0 ; $G_{\leq}^{\infty}$ consiste de todos los caminos extendiendo desde - ∞ hasta un vértice arbitrario [Ver : (V.1) del ejemplo (5.1.2) Pág. 89].

Elijamos un camino μ finalizando en w y un vértice arbitrario $v_i \in G_0$. Si v_i está a la derecha de w, existe un camino empezando en v y finalizando en u_i justamente será siguiendo las flechas conectando estos dos vértices. Asi B_0 es simple.

2) El álgebra de matrices no tienen caminos infinitos, asi $G_{\leq}^{\infty}$ son todos los caminos empezando en el origen u. Para un vértice arbitrario w, existe un camino empezando en u y finalizando en w; lo cual muestra que el grafo es cofinal.

Observación [Las estructuras de álgebras multimatricales no son simples] (5.1.4)

Estas álgebras poseen múltiples orígenes, lo cual directamente implica que no existe un camino, pues ellos tienen múltiples caminos de donde se tiene que no hay caminos para conectar caminos desde un origen hasta otro origen, las C*-algebras simples son aquellas que no poseen ideales triviales. Iniciamos esta última parte haciendo una descripción de los ideales de C*(G), cuando C*(G) es no simple. Convencionalmente cuando hablemos de ideales en C*-algebras, significará ideales "I" bilateros cerrados $\left(\overline{I} = I\right)$ a menos que se indique otro caso.

NOTA:

1) A continuación expondremos el resultado descriptivo propuesto, y lo realizaremos mediante proposiciones que lo enunciamos preliminarmente como sigue:

   (a) Dado un ideal no trivial I en un C*-algebra de grafo C*(G), entonces I determina un subgrafo $\tilde{G}$ de G $\left(\tilde{G} \subseteq G\right)$. El Ideal I significará ideal bilatero cerrado (i.e: $\overline{I} = I$); a menos que se indique lo contrario.

(b) El recíproco del resultado obtenido en (a) es válido cuando el grafo G no posee ciclos.

Descripción de los ideales en C*(G) (5.1.6)

Consideremos un grafo G y por ende *Un* C*-algebra de grafo C*(G). Y supóngase I un ideal en C*(G); y escribamos:

$$H(I) := \{v \in G_0 : P_v \in I\}$$

El objetivo es que el ideal I sea determinado por el conjunto H(I).

Lema (5.1.1): $G - H(I) := \{G_0 - H(I), S^{-1}(G_0 - H(I)); s, r\}$ es un grafo.

En efecto.- Recordemos que s y r son funciones de G_1 en G_0, de donde

$$S^{-1}(G_0 - H(I)) = \{e \in G_1 : s(e) \in G_0 - H(I)\} = \{e \in G_1 : s(e) \in G_0, P_{s(e)} \notin I\}$$

Ahora veamos que $G - H(I)$ es un grafo; para lo cual consideremos la aplicación cociente $q : C^*(G) \longrightarrow \dfrac{C^*(G)}{I}$, así para cada $\xi \in I$ se tiene $q(\xi) = 0$ es decir q(I) = 0, entonces para cualquier elemento $v \in H(I)$ se tiene $q(P_v) \neq 0$ y por tanto $\{q(p_v) : v \notin H(I)\}$ es un conjunto de proyecciones no nulas. De modo que si s(e)$\notin H(I)$ entonces $q(p_{s(e)}) \neq 0$ si y solo si $q(s_e^* s_e) \neq 0$ si y solo si $q(s_e)^* . q(s_e) \neq 0$.

De otro lado por la condición de "Cuntz – Krieger" (CK–2) se tiene: $q(p_{r(e)}) = q\left(\sum_{r(e)=v} s_e s_e^* \right) = q(s_e) q(s_e)^* + \delta$, de aquí $q(p_{r(e)}) \geq q(s_e) q(s_e)^* \neq 0$, lo cual muestra que $q(p_{r(e)}) \neq 0$, por tanto r(e) $\in$ $H(I)$. Ahora si $s(e) \in H(I)$ entonces $p_{s(e)} \in I$ y por tanto $q(p_{s(e)}) = 0$, y en consecuencia $G - H(I)$ es un grafo.

Afirmación.- El conjunto $\mathcal{F}=\{q(s_e),q(p_v):s(e)\notin H(I),v\notin H(I)\}$ es una familia que genera el álgebra de grafos de G - $H(I)$, donde para cada v $\in G_0$, $p_v\neq 0$.

En efecto.- Para lo cual bastará observar el proceso de la demostración del lema (5.1.1). Ahora si cada ciclo en el grafo $G-H(I)$ tiene una entrada; entonces por el teorema de unicidad de álgebra de grafos, obtenemos que: $G^*(G-H(I))$ y $\frac{C^*(G)}{I}$ son isomorfos. $\left(C^*(G-H(I))\cong\frac{C^*(S,P)}{I}\right)$

Nota.- Necesitamos identificar los subconjuntos H de G_0 lo cual surge como H(I), y encontramos una condición verificable sobre G, lo cual asegura que cada ciclo en cada G – H tiene una entrada.

ii) La definición propia de $H(I)$ representando un ideal es que $H(I)$ es en cierto sentido una parte aislada del grafo.

Definición (5.1.7) [Subconjunto saturado y Hereditario de Vértices]

Un subconjunto H de G_0, es **hereditario** si w $\in$ H y w $\leq$ v, entonces v $\in$ H. Y diremos que H es **saturado** si $r^{-1}(v)\neq\phi$ y $\{s(e):r(e)=v\}\subset H$, entonces v $\in$ H

Proposición (5.1.3).- Sean G un grafo y supóngase que I es un ideal no trivial $[I\neq 0]$ en el álgebra de grafo C*(G) = C*(S, P) entonces $\{v\in G_0:P_v\in I\}=H(I)$ es **hereditario** y **saturado**.

Demostración.-

- Veamos que $H(I)$ es hereditario. Sea $w\in H(I)$ tal que $w\leq v$; por la definición de Pre orden existe $\mu\in G^*=\bigcup_{n\geq 0}G^n$ con s(μ) = v y r(μ)= w. Como $w\in H(I)$ entonces $P_w\in I$; y asi $S_\mu=P_{r(\mu)}S_\mu=P_wS_\mu\in I$ entonces $P_v=S_\mu^*S_\mu\in I$ y por tanto $v\in H(I)$, es decir $H(I)$ es hereditario.

- Ahora $H(I)$ es saturado: Para $v \in G_0$ supóngase que $r^{-1}(v) \neq \phi$ y $\{s(e): r(e) = v\} \subset H(I)$; entonces para cada $e \in G_1$ con $r(e) = v$ se tiene, $S_e = S_e P_{s(e)} \in I$, y como v no es un origen, entonces por la condición (CK – 2) se tiene que $P_v = \sum_{r(e)=v} S_e S_e^* \in I$ por tanto $v \in H(I)$ y en consecuencia $H(I)$ es saturado.

Nota.- El recíproco de la proposición (5.1.3) es válido para grafos que no poseen ciclos. Resultado que presentamos a continuación.

Observación previa (5.1.5).- Sea G un grafo sin ciclos, $H \subseteq G_0$ un subconjunto saturado y hereditario. Definamos una relación "~" en C*(G)= C*(S, P), como sigue. En primer lugar escribamos $I(H) = \left\{ \sum_{z \in \mathbb{C}} z.p_v : v \in H \right\}$. Ahora $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I(H)$

Nótese que I(H) es el conjunto de combinaciones lineales de los elementos p_v , sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Afirmación.- La relación "~" es de equivalencia.

En efecto:

- La reflexividad y simetría se cumplen de considerar respectivamente que elemento neutro "0" esta en $I(H)$; y que el opuesto de todo elemento en $I(H)$ también se encuentra en $I(H)$
- Transitividad: Si a ~ b y b ~ c entonces a – b ∈ I(H) y b – c ∈ I(H); de donde existen ξ, ξ' ∈ $I(H)$ tal que a – b = ξ y b – c = ξ', entonces a – c = ξ + ξ' ∈ I(H) ⇔ a ~ c.

Como "~" es una relación de equivalencia en C*(G) se tiene entonces el conjunto cociente $\frac{C^*(G)}{\sim}$ lo cual denotamos como $\frac{C^*(G)}{I(H)}$; y así $\frac{C^*(G)}{I(H)}$ es una C*-algebra

Asi podemos considerar la siguiente aplicación canónica al cociente

$q: C^*(G) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{\sim}$ tal que q (a) = [a]

Observe que: $Nuc(q) = \{a \in C^*(G) = C^*(s,p) : q(a) = [0]\}$

$$= \{a \in C^*(G) : [a] = [0]\} = \{a \in C^*(G) : a \sim \square\}$$
$$= \{a \in C^*(G) : a + \xi = 0, \text{ para algún } \xi \in I(H)\}$$
$$= \{a \in C^*(G) : a = -\xi, \xi \in I(H)\} = I(H)$$

Afirmación: El conjunto $H(I)$ es hereditario y saturado, donde I es ideal en C*(G)

En efecto.- Recordemos que $H(I) = \{v \in G_0 : p_v \in I\}$

- Si w $\in$ H(I) y $w \leq v$ entonces w $\in G_0$ con $p_w \in I$ y además existe $u \in G^* = \bigcup_{n \geq 0} G^n$ tal que S(μ) = v y r(μ) = w donde μ = $\mu_1\mu_2........\mu_n$ también S(μ_1) = r (u_{i+1}) , r(μ) = r(μ_1) y s(μ) = $s(\mu) = s(\mu_{(\mu)})$ entonces $P_v = P_s(\mu) = S_\mu^* S_\mu \in I$, así $v \in H(I)$ por tanto H(I) es saturado.

Afirmación: $\frac{C^*(S,P)}{\sim} = \frac{C^*(G)}{\sim}$ es un C*-algebra

En efecto.- Bastará recordar la C*-algebra cociente donde la norma $\|a + I\| = \inf\{\|a + x\| : x \in I\}$ luego $q: C^*(G) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{\sim}$ es un *-homomomorfismo, y como Nuc(q) = $I(H)$ entonces $I(H)$ es un ideal en C*(G). Más aún la aplicación "q" es suryectiva.

Proposición (5.1.4).- Sea G un grafo sin ciclos. Si H $\subseteq G_0$ es un subconjunto hereditario y saturado entonces existe un ideal I determinado por H.

Demostración: Tenemos que la aplicación $q: C^*(G) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I(H)}$ es suryectiva, de donde para cualquier elemento $a \in C^*(G) = C^*(S,P)$. También se tiene que

$a^* \in C^*(G)$. Asi $q(a^*) = \{a^* + \xi \text{ tal que } \xi \in \mathrm{I(H)}\}$. $I(H)$ es cerrado bajo la involución, de donde entonces $q^*_{(a)} = \{(a^* + \xi)^* = a + \xi \text{ tal que } \xi' = \xi^* \in \mathrm{I(H)}\}$

Observamos a continuación las igualdades:

i) $q(a_1).q(a_2) = \{(a_1 + \xi_1).(a_2 + \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in I(H)\}$

$$= \{a_1 a_2 + (a_1\xi_2 + \xi_1 a_2 + \xi_1\xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in I(H)\}$$
$$= \{a_1 a_2 + x : x = a_1\xi_2 + \xi_1 a_2 + \xi_1\xi_2 \in I(H)\}$$

Llámese $a_1 - \xi_1 = b_1$ y $a_2 - \xi_2 = b_2$; asi $b_1, b_2 \in C^*(G)$

(ii) $q(a_1 a_2) = \{a_1 a_2 + \xi : \xi \in I(H)\}$.

Ahora asumiendo que: $p_v \in I$ si y solo si $p_v \in H(I)$. Puesto que la multiplicación sobre un C*-algebra es continua en cada argumento tenemos:

$$p_v b_2 = p_v\left(\sum_{n\geq 1} S_{u_n} S^*_{v_n}\right) = \sum_{n\geq 1} p_v . S_{u_n} S^*_{v_n}$$

Asumiendo que S_{u_n} es una proyección, entonces $P_v S_{u_n} = P_v$ o $P_v S_{u_n} = 0$

- En el primer caso analicemos $p_v S^*_{v_n}$

Si nuevamente $S^*_{v_n}$ es una proyección entonces $P_v S_{u_n} S^*_{v_n} = P_v S^*_{v_n} \in I(H)$. De otra manera para cada $e \in G_1$, con r(e) = v se tiene; $P_v S^*_{v_n} = \left(P_{r(e)} S_e\right) S^*_{v_n} = P_{r(e)} S_e S^*_{v_n}$. Si este no es nulo, entonces s(e) = $s(v_n)$

Afirmación $I(H) = \langle S_\alpha S^*_\beta : S(\alpha) = S(\beta) \in H \rangle$ es un ideal algebraico en C*(G) = C*(S, P).

En efecto.- Sea S_α un elemento en $I(H)$. La operación de multiplicación "•" en cualquier C*-algebra es continua en ambos argumentos. Recordar que: C*(S, P) = $\left\langle \overline{S_u S^*_v : S(\mu) = S(v), \mu, v \in G^*} \right\rangle$. Ahora si a $\in$ $C^*(S,P)$; entonces

$S_\alpha S_\beta^* a = S_\alpha S_\beta^* \left(\sum_{n\geq 1} S_{u_n} S_{v_n}^* \right) = \sum_{n\geq 1} S_\alpha S_\beta^* S_{u_n} S_{v_n}^*$; esto permite estudiar la multiplicación de generadores de $I(H)$ con los de C*(S, P) = C*(G).

(♦) Para $S_\alpha \in I$ (1°) asumamos que $S_\alpha S_\mu \neq 0$, entonces $S(\alpha) = r(\mu)$. Esto significa v ≤ s (μ) de donde $S_\mu \in I(H)$ (puesto que H es hereditario).

2° Si $S_\alpha S_v^* \neq 0$ entonces S(α) = S(μ). Si v está en H entonces finaliza el resultado. En otro caso consideremos k ∈ ℕ suficientemente grande tal que cualquiera de los dos $r(v_k)$ o $s(v_k) \notin H$. La saturación de H implica que: Si $r(v_k) \notin H$ entonces $S(v_k) \notin H$. Si $S_\alpha S_\beta^* S_\mu S_v^* \neq 0$ entonces existe un camino ß′ con ß = μß′ o μ′ con μ= ßμ′

Del primer caso, se observa que ß ≤ β', puesto que H es hereditario, ß′ es un camino en H y $S_\alpha S_{\beta'}^* \in I(H)$. Ahora responderemos la interrogante: está o no $s_v s_{\beta'} \in I(H)$.

Si v es un camino en H el resultado se concluye. En otro caso, elijamos k ∈ ℕ mínimo tal que cualquiera de los dos: $s(v_k) \notin H$ o $\mathrm{r}(v_k) \notin H$. Porque H es saturado; si $s(v_k)$ ∉ H entonces $r(v_k) \notin H$. Usando tal resultado tenemos:

$S_v S_{\beta'} = S_{v_1} S_{v_2} \ldots\ldots S_{v_{k-1}} S_{v_k} \ldots\ldots S_{\beta'} = S_{v_1} \ldots\ldots S_{v_{k-1}} P_{s(v_{k-1})} \mathrm{P}_{r(v_k)} S_{v_k} \ldots\ldots S_{\beta'}$.

$P_{s(v_{k-1})} \in I(H)$ y definitivamente $P_{r(v_k)} \notin I(H)$. Así esta expresión es nula, lo cual es una contradicción. Siguiendo todo el razonamiento de manera recíproca es decir, de donde iniciamos nosotros concluimos:

$S_\alpha S_\beta^* S_\mu S_v^* \in I(H)$ si existe algún ß′ con ß = μß′.

El caso en el cual existe algún μ' con μ = ßμ′ produce el mismo resultado, lo cual muestra que $I(H)$ es un ideal algebraico a derecha; de manera análoga se muestra que $I(H)$ es un ideal a izquierda. Además afirmamos que si $1 \in \overline{I}(H)$, está aproximado por un número de elementos I_n en $I(H)$ entonces por la continuidad de la operación multiplicación se tiene.

$\sum_{k=1}^{n} I_k \sum_{j\geq 1}^{n} S\mu_j S_{v_j}^* = \sum_{j\geq 1}^{n}\sum_{k=1}^{n} I_k S\mu_j S_{v_j}^*$, de donde $\sum_{k=1}^{n} I_k \sum_{j\geq 1}^{n} S\mu_j S_{v_j}^* = \sum_{k,j\geq 1} I_k S\mu_j S_{v_j}^* \in I$;

análogamente para la multiplicación a izquierda. Es decir: Si $I \in \overline{I}(H)$ es aproximado por un número de elementos de $I_n \in I_H$, entonces:

$\sum_{j\geq 1}^{n} S\mu_j S_{v_j}^* \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{j\geq 1}^{n}\sum_{k=1}^{n} S\mu_j . S_{v_j}^* I_k$, de aquí $\sum_{j\geq 1}^{n} S\mu_j S_{v_j}^* \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{j,k\geq 1} S\mu_j S_{v_j}^* I_k$. Por tanto I es un ideal.

5.2 Resultados Inferenciales

El resultado principal del trabajo (la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo) ha permitido **inferir** un resultado que consiste en establecer una **correspondencia biunívoca** entre dos familias de conjuntos. Esto es hay una biyección entre la familia de conjuntos saturados y hereditarios; con la familia de ideales cerrados del C*-algebra C*(G). Para obtener tal resultado inferencial empezamos introduciendo ciertas hipótesis sobre un grafo G. esto es:

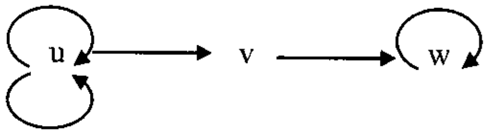
Se dice que un grafo G = (G_0, G_1, r, s) satisface la **condición "K"** si para cada elemento $v \in G_0$, o bien no hay un ciclo basado en v, o existen dos caminos diferentes μ, ν tal que S(μ) = v = r (μ), S(ν)= v = r(ν), $r(\mu_j) \neq v$ para j < $|\mu|$ y $r(v_j) \neq v$ con j < $|v|$, donde μ= $\mu_1\mu_2....\mu_n$ para algún n y $\vee = \vee_1 \vee_2 ......\vee_m$; para algún "m".

Observación (5.2.1).- Sea G = (G_0, G_1, r, s) un grafo que satisface la condición (K) formilada líneas arriba; entonces cada ciclo de G posee una entrada; el recíproco es falso.

Ejemplo (5.2.1).- En los siguientes "dibujos" mostramos gráficamente lo que significaría la observación (5.2.1).

GRÁFICO N° 5.1

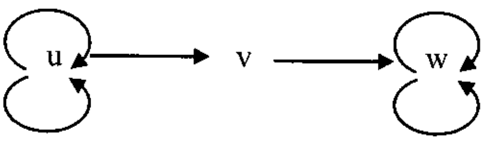
GRAFO QUE NO SATISFACE LA CONDICIÓN "K"



Fuente: Iain Raeuburn Graph agebras - 2005

GRÁFICO N° 5.2

GRAFO QUE SATISFACE LA CONDICIÓN "K"



Fuente: Iain Raeuburn Graph agebras - 2005

Proposición (5.2.1). Sea G un grafo, entonces G. Satisface la condición K si y solamente si para cada subconjunto saturado y hereditario H de G_0, cada ciclo en G − H:= $\{G_0 - H, S^{-1}(G_0 - H); r, s\}$ tiene una entrada.

Demostración : [Ver [5], página 36].

Nota.- El resultado inferencial obtenido, lo establecemos en la proposición siguiente:

Proposición (5.2.2).- Para cualquier grafo "G" que satisface la condición (K) existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{J} = \{H \subset G_0 : H$ es saturado y hereditario$\}$ y $\mathcal{L} = \{I \subset C^*(G) : I$ es un ideal cerrado$\}$

Demostración (1°) Para H $\subset G_0$, consideremos $I(H)$ el ideal generado por $\{P_v : v \in H\}$. Ahora sea $I \subset C^*(G)$ un ideal, entonces de la proposición (5.1.3) se tiene que $H = H(I)$ es saturado y hereditario. Afirmamos que $I = I(H)$. En efecto como todos los generadores de $I(H)$ están por definición en I, entonces claramente $I(H) \subseteq I(\xi_0)$.

De otro lado consideremos las aplicaciones cocientes siguientes:

$$q_I : C^*(G) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I},$$

$$q_{I(H)} : C^*(G) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I(H)}, \text{ y}$$

$$q_{\frac{I}{I(H)}} : \frac{C^*(G)}{I(H)} \longrightarrow \frac{C^*(G)\big/ I(H)}{I\big/ I(H)} \cong \frac{C^*(G)}{I}$$

La última aplicación $q_{\frac{I}{I(H)}}$ se puede escribir como:

$$q_{\frac{I}{I(H)}} : \frac{C^*(G)}{I(H)} \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I} \cong \frac{C^*(G)\big/ I(H)}{I\big/ I(H)}$$

Observe que: $q_I(\xi) = \xi + I$, $q_{I(H)}(\xi) = \xi + I(H)$ y $q_{\frac{I}{I(H)}}(\xi + I(H)) = \xi + I$; son las proyecciones canónicas al cociente las cuales están bien definidas, más aún de estas igualdades se verifica que $q_I = q_{\frac{I}{I(H)}} \circ q_{I(H)}$. Puesto que q_I y q_{I_H} desaparecen exactamente los mismos vértices proyección P_v y por ende exactamente las mismas isometrías parciales S_e, los conjuntos siguientes $\{q_I(s_e), q_I(p_v)\}$ y $\{q_{I(H)}(s_e), q_{I(H)}(p_v)\}$ son (G – H) – familias de Cuntz – Krieger generados por los respectivos cocientes antes dados.

Sean las aplicaciones $\rho_1 : C^*(G-H) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I(H)}$ y $\rho_2 : C^*(G-H) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I}$, los cuales son homomorfismos suryectivos. Entonces $\rho_2 : C^*(G-H) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I}$, y $q_{\frac{I}{I(H)}} \circ \rho_1 : C^*(G-H) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I(H)}$ son homomorfismos, los cuales están sobre los generadores de C*(G – H) y de aquí $\rho_2 = q_{\frac{I}{I(H)}} \circ \rho_1$. Por la proposición (52.1), podemos aplicar el Teorema de unicidad de Cuntz – Krieger al grafo G – H y asi obtendremos que $\rho_2 : C^*(G-H) \longrightarrow \frac{C^*(G)}{I}$, es inyectiva. Como ρ_1 es suryectiva y $\rho_2 = q_{\frac{I}{I_H}} \circ \rho_1$ entonces para $\xi + I_H$ y $\xi' + I_H$ en $\frac{C^*(G)}{I(H)}$ tal que $q_{\frac{I}{I(H)}}\left(\xi + I(H)\right) = q_{\frac{I}{I(H)}}\left(\xi' + I(H)\right)$ y siendo $\xi + I(H) = \rho_1(\xi)$ para $\xi \in C^*(G-H)$ se tiene $q_{\frac{I}{I(H)}}(\rho_1(\xi)) = q_{\frac{I}{I(H)}}(\rho_1(\xi'))$ si y solo si $\rho_2(\xi) = \rho_2(\xi')$ de donde $\xi = \xi'$ y por tanto $\xi + I(H) = \xi' + I(H)$; y así $q_{\frac{I}{I(H)}}$ es inyectiva. Y asi deducimos que $I = I(H)$; y a su vez $\frac{C^*(G)}{I(H)} \cong C^*(G-H)$.

(2°) Ahora consideremos la aplicación

$T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$ dado como T(H) = $I(H)$ la cual claramente está bien definida, más aún para cualquier elemento I (ideal cerrado) de $\mathcal{L}$ seleccionemos $H \subset G_0$ y asi se tiene $I(H) = gen\{p_v : v \in H\}$ por tanto T es suryectiva.

Ahora veamos que T es inyectiva . Para lo cual mostraremos que si H es saturado y hereditario, entonces $H = \{v : p_v \in I(H)\}$. Veamos: sea $v \in H$ entonces $p_v \in I(H)$ por tanto $v \in \{v : p_v \in I(H)\}$ es decir $H \subseteq \{v : p_v \in I(H)\}$, para obtener otro contenido. Consideremos la (G – H) – familia canónica {t, q} la cual genera la C*-algebra C*(G-H). Afirmamos que cuando definimos $t_e = 0$ para s(e)$\in$ H y $q_v = 0$ para v $\in$ H; entonces la familia {t, q} llega convertirse en una G – familia de Cuntz – Krieger.

En efecto cuando s(e)$\in$ H, entonces por (CK – 2), se tiene $t_e^* t_e = 0 = q_{s(e)}$ y las relaciones en v $\in$ H, se satisfacen trivialmente porque la condición de ser H hereditario implica que cada eje e con r(e) = v se tiene s(e)$\in$H y de aquí $t_e = 0$.

Si v no es un origen en (G – H), los nuevos ejes con r(e) = v todos tienen $t_e t_e^* = 0$, asi la relación en v está sin alteración.

Si v es un origen en (G-H), todos los ejes "e" en G con r(e)= v tienen su origen s(e) en H (i.e. s(e) $\in$ H), a menos que si v es un origen en G y como H es saturado, entonces v $\in$ H; así v es un origen en G, y sin embargo no existe una relación de Cuntz – Krieger en v. Así {t, q} es una G – familia de Cuntz – Krieger como lo habíamos afirmado.

Ahora por la propiedad universal de C*(G) se tiene un homomorfismo $\pi_{t,q} : C^*(G) \longrightarrow C^*(G-H)$ como $\pi_{t,q}(p_v) = 0$ para v$\in$ H entonces claramente $I(H) \subseteq Nuc(\pi_{t,q})$, y si v $\notin$ H entonces $q_v \neq 0$ $\pi_{t,q}(p_v) \neq 0 \Rightarrow p_v \notin Nuc(\pi_{t,q})$ entonces $p_v \notin I(H)$, de aquí $I(H) \subseteq H$ es decir: $\{v : p_v \in I(H)\} \subset H$. Asi $H = \{v : p_v \in I(H)\}$ y por tanto la aplicación $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que T(H) = $I(H)$ es inyectiva.

5.3 Otro tipo de Resultados de Acuerdo a la Naturaleza del Problema y la Hipótesis.

En esta sección presentamos dos modelos de aplicación de C*-algebras y otro de grafo uno basado en la naturaleza de las matrices escalares complejos, y otro en la homotopía entre aplicaciones continuas

I. C*-Algebra de Matrices Escalares Complejas

Empezamos considerando el conjunto H formado por las matrices cuadradas con entradas en $\mathbb{C}$ (donde $\mathbb{C}$ denota el campo de los números complejos) con diagonal un complejo arbitrario $z \in \mathbb{C}$ y el resto de entradas todos ceros; es decir H es el conjunto formado por las matrices identidad multiplicada por un complejo $z \in \mathbb{C}$. Escribiremos:

$$H = \left\{ E = \left(e_{ij}\right)_{nxn} : e_{ij} = z \in \mathbb{C}, i = j \;\; y \;\; e_{ij} = 0, \forall i \neq j \right\}$$

Obsérvese: que si $E = \left(e_{ij}\right)_{nxn} \in H$. Entonces $E = \lambda I_n$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Afirmación (1).- El conjunto H con las operaciones usuales de suma (+) de matrices y multiplicación (.) de un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ por una matriz E $\in$ H es un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial.

En efecto.- La demostración y/o justificación de esta afirmación es rutinario.

Afirmación: (2) El conjunto H con la operación de multiplicación (.) usual de matrices se obtiene que H es un álgebra sobre $\mathbb{C}$; más aún es conmutativa con identidad.

En efecto: Sean E_1, E_2 y E_3 tres elementos en H; por propiedades básicas de matrices se verifica:

(i) $(E_1 E_2).E_3 = E_1.(E_2.E_3)$

(ii) $E_1.(E_2 + E_3) = E_1.E_2 + E_1 E_3$

(iii) $(E_1 + E_2).E_3 = E_1.E_3 + E_2.E_3$

(iv) Considerando $E_1 = zI_n, z \in \mathbb{C}$, $E_2 = wI_n, w \in \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$(\lambda E_1) E_2 = (\lambda z I_n).(wI_n) = (\lambda z) w.I_n = \lambda(zwI_n) = \lambda(zI_n.wI_n) = \lambda.(E_1.E_2)$$

Además

(v) $E_1.E_2 = (zI_n)(wI_n) = zwI_n = wzI_n = (wI_n).(zI_n) = E_2.E_1$

(vi) Considerando $1_H = I_n$, el cual claramente es un elemento de H es inmediato ver que: $E_1.1_H = E_1$. Por tanto H es un algebra conmutativa con identidad.

Afirmación (3).- El álgebra H es normada.

En efecto.- Definamos la aplicación $\|.\|: H \longrightarrow [0,+\infty\rangle$ como $\|E\| = \|z.I_n\| = |z|$ para todo E = z. I_n en H donde $|z|$ denota el módulo del complejo $z \in \mathbb{C}$. Ahora verifiquemos las condiciones para que H sea algebra normada.

(N1) $\|E\| = |z| \geq 0$, para todo $E = zI_n$ en H.

(N2) $\|E\| = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow E = 0$

(N3) Sean $E = z.I_n$, F = w. I_n dos elementos cualesquiera en H.

$$\|E+F\| = \|z.I_n + w.I_n\| = \|(z+w).I_n\| = |z+w|$$
$$\leq (|z|+|w|) = |z|+|w| = \|E\| + \|F\|$$
$$\therefore \|E+F\| \leq \|E\| + \|F\|$$

(N4) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $E = z.I_n$ en H.

$$\|\lambda.E\| = \|\lambda.(zI_n)\| = \|\lambda z.I_n\| = |\lambda z| = |\lambda||z| = |\lambda|\|E\|$$
$$\therefore \|\lambda.E\| = |\lambda|\|E\|$$

(N5) Ahora verifiquemos la desigualdad multiplicativa es decir:

$\|EF\| \leq \|E\|.\|F\|$, para todo E = zI_n, $F = wI_n$ en H. Pues:

$$\|EF\| = \|(zI_n)(wI_n)\| = \|zwI_n\| = \|zw\| = |z|.|w| = (|z|).(|w|) = \|E\|.\|F\|$$

$$\therefore \|EF\| = \|E\|.\|F\|$$

Afirmación (4): El álgebra normada H es un algebra de Banach.

En efecto.- Por las afirmaciones anteriores solo falta ver que H sea completo es decir cada sucesión de Cauchy en H converge a un elemento de H. Pues sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en H, con $E_K = z_k I_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 = \lim_{k,r\to\infty} \|E_k - E_r\| = \lim_{k,r\to\infty} \|z_k I_n - z_r I_n\| = \lim_{k,r\to\infty} \|(z_k - z_r) I_n\|$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k,r\to\infty} \|z_k - z_r\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k,r\to\infty} \|z_k - z_r\| = 0$$

$\Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_k - z_r| < \varepsilon$, para todo k, r $\geq N$; de aquí observamos que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$; pero $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, entonces $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{C}$; es decir existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_k \longrightarrow z$; ahora considerando $E = zI_n \in H$ se tiene que : $E_k \longrightarrow E$ es decir la sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en H y en consecuencia H es completo y en par consiguiente es un algebra de Banach.

Afirmación (5).- El álgebra de Banach H es un "*-álgebra", más aún es un C*-algebra.

En efecto.- Primero mostraremos que H es un *-álgebra, para lo cual definamos un operador * : H $\longrightarrow H$ como $E^* = \overline{E}^t$, para todo E en H; donde $\overline{E}$ denota la conjugada de E y $\overline{E}^t$ la matriz transpuesta.

Ahora para E, F en H y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene:

(i) $\quad (E^*)^* = (\overline{E}^t)^* = \overline{(\overline{E}^t)}^t = (\overline{\overline{E}})^t = \left((\overline{\overline{E}})^t\right)^t = E$

(ii) $\quad (EF)^* = (\overline{EF})^t = (\overline{E}.\overline{F})^t = \overline{F}^t.\overline{E}^t = F^*.E^*$

(iii) $\quad (\lambda E + F)^* = (\overline{\lambda E + F})^t = (\overline{\lambda E} + \overline{F})^t = (\overline{\lambda}\overline{E} + \overline{F})^t$

$\quad = \overline{\lambda}.\overline{E}^t + \overline{F}^t = \overline{\lambda} E^* + F^*$

Nótese que : $\overline{\lambda E} = \overline{\lambda.(z.I_n)} = \overline{\lambda z.I_n} = \overline{\lambda z.I_n} = \overline{\lambda}\left(\overline{z} I_n\right) = \overline{\lambda}\left(z.\overline{I}_n\right) = \overline{\lambda}.\overline{E}$

Por tanto H es un * - algebra.

Finalmente comprobamos la "condición C*" esto es:

$$\|E^*.E\| = \|\overline{E}'.E\| = \left\|\left(\overline{z.I_n}\right)'.(z.I_n)'\right\| = \left\|\left(\overline{z}.I_n'\right)(z.I_n)\right\| = \|\overline{z}.zI_n\| = |\overline{z}.z| = |\overline{z}|.|z| = \|E\|^2$$

Para todo elemento $E = zJ_n$ en H. Luego $\|E^*E\| = \|E\|^2$

II. "Grafo de Homotopía"

Los conceptos preliminares así como muchas de las definiciones, lemas, proposiciones, ejemplos, etc., que presentaremos se puede encontrar en [7]; aunque no con la misma nomenclatura y/o notaciones, las mismas que han sido cambiadas por cuestiones didácticas.

Definiciones, ejemplos y proposiciones preliminares

(i) Sea X un conjunto, y $\mathbb{C}-$ el cuerpo de los números complejos escribamos el conjunto L(X) definido como:

L(X)={f: X $\longrightarrow \mathbb{C}$ / f es una aplicación valuada y acotada}

Afirmación (1).- L(X) es un álgebra de Banach, más aún es unital. En efecto bastará considerar las operaciones definidas puntualmente, es decir; para todo x $\in$ X, f, g en L(x) y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene:

* $(f+g)(x) = f(x) + g(x); (f \circ g)(x) = f(x).g(x),$
* $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x).$

Mientras que para ser espacio normado será considerado la norma del supremo; esto es:

$$\|f\|_{L(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

donde $|f(x)|$ denota el módulo del número complejo f(x). Nótese también

1 : X $\longrightarrow \mathbb{C}$ dado como $1(x) = 1,$ para todo x $\in$ X es la identidad de L(X).

(ii) Sea X un espacio topológico. Escribamos el conjunto $C_*(X,\mathbb{C})$ definido como: $C_*(X,\mathbb{C})=\{f\in L(X): f \text{ es continua}\}$. Es inmediato verificar que $C_*(X,\mathbb{C})$es un subalgebra cerrado de L(X); más aún es $C_*(X,\mathbb{C})$es un álgebra de Banach unital.

(iii) Sea X un espacio topológico. Denótese

$\mathrm{C(X,\ \mathbb{C})}=\{f: X \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, f$ es aplicación continua$\}$. Observese que si X es un espacio topológico compacto, entonces $\mathrm{C(X,}\mathbb{C})=C_*(X,\mathbb{C})$

(iv) Sean X, Y dos espacios topológicos cualesquiera entonces; De (iii) escribiremos:

$\mathrm{C(X,}\ Y)=\{f: X \longrightarrow Y \,/\, f$ es aplicación continua$\}$

(v) Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto. Una aplicación continua $\mathrm{f}: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que se anula en el infinito; si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x\in\Omega: |f(x)|\geq\varepsilon\}$ es compacto.

Escribamos:

$C_0(\Omega)=\{f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}/ f \text{ se anula en el infinito}\}$

(vi) El espacio $C_0(\Omega)$ es un C*-algebra, para lo cual la involución

$*: C_0(\Omega) \longrightarrow C_0(\Omega)$ está dada como $f^*=\overline{f}$ es decir: $f^*_{(x)}=\overline{f(x)}$.

(vii) Sean X, Y dos espacios topológicos, $f,g\in C(X,Y)$, y sea I = [0,1].

Diremos que: f es homotópico a g; si existe "una aplicación" continua $H: X \times \mathrm{I} \longrightarrow Y$ tal que H(x,0) = f(x) y H(x,1) = g(x).

Nota.- En el contexto de la definición anterior, se dice que las aplicaciones f y g son llamadas **Homotopas**; y se denota como H : $f \simeq g$ o, simplemente $f \simeq g$

(viii) Toda aplicación "f" es homotópica asi mismo esto es: $f \simeq f$, para cualquier elemento f$\in C(X,Y)$. En efecto: Bastará considerar la aplicación

$H : X \times I \longrightarrow X$, dada como H(x, t) = f(x) para todo x ∈ X, y para todo t ∈ I = [0,1].

(ix) Sean Y ≤ $\mathbb{R}^n$ (un subespacio de $\mathbb{R}^n$), X un espacio topológico arbitrario y sean f, g ∈ C(X, Y). Entonces f ≃ g.

En efecto: Para lo cual definamos la aplicación H : X x I $\longrightarrow Y$, dada como: H (x, t) = f(x) + t (g(x) – f(x)). Para la continuidad de H (Ver [7]). También se tiene H(x, 0) = f(x) y H(x, 1) = g(x), y por tanto $f \simeq g$.

(x) La relación de homotopía, es una relación de equivalencia en C(X, Y).

En efecto: a) Reflexiva como en (ix) $f \simeq f$; ya se probó, en (viii).

b) Simétrica: si $f \simeq g$; existe H : X x I $\longrightarrow$ Y aplicación continua tal que F(x, 0) = f(x) y F(x,1) = g(x). Ahora veamos que g ≃ f, para esto definamos G : X x I $\longrightarrow Y$ como G(x, t) = H (x, 1 – t), x ∈ X, t ∈ I. G(x, 0) = H(x, 1) = g(x) y G (x, 1) = H(x, 0) = f(x). Por tanto g ≃ f .

c) Transitiva: Si f ≃ g y g ≃ h probaremos que f ≃ h.

- Como f ≃ g; existe H: X x I $\longrightarrow Y$, aplicación continua tal que : H(x, 0) = f(x) y H(x, 1) = g(x).
- También g ≃ h; existe G : X x I $\longrightarrow$ Y aplicación continua tal que G(x, 0) = g(x) y G(x, 1) = h (x).
- Ahora definamos la aplicación L : X x I $\longrightarrow$ Y como:

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x,2t), t \in [0,1/2] \\ G(x,2t-1), t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Claramente "L" es continua (pues, H y G la son); además L(x, 0) = H(x, 0) = f(x) y L(x, 1) = G(x, 1) = h(x), luego f ≃ h.

Observación (5.3.1).- Sean f, g $\in C(X, Y)$. Y H: f $\simeq$ g (Homotopía) es decir H: X x I $\longrightarrow$ Y es una aplicación continua tal que H(x, 0) = f(x) y H(x, 1) = g(x), para todo x $\in$ X.

Esto es: Una Homotopía H es una familia de aplicaciones continuas $H_t\left(H=\{H_t\}_{t\in I}\right)$ a un parámetro que es continua, H: I $\longrightarrow C(X,Y)$

Asi $t \mapsto H(t)=H_t : X \longrightarrow Y$ tal que $H_t(x)=H(x,t)$

2) De la parte anterior, claramente se observa que una homotopía H : f $\simeq$ g; es un camino en el espacio de las aplicaciones.

A continuación estudiaremos y detallamos el denominado: **Grafo de homotopía**

Sean v, w dos aplicaciones en $C(X,\mathbb{C})"="C\left(X,\mathbb{R}^2\right)$ tales que v y w son homotópicas (v $\simeq$ w); entonces v y w generan un grafo dirigido G.

En efecto (1°) Consideremos el conjunto denotado y definido como:

$\underset{\sim}{G}=\{G_0,G_1,r,s\}$. Con $G_0=\{v,w\}$, donde v y w son los vértices $G_1=\{LH,G,HG,GH,J\}$, y donde los elementos de G_1 aristas son las homotopías (caminos) descritos como sigue:

(i) Como $v \simeq w$ entonces existe una aplicación continua H : X x I $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que H(X, 0) = v(x), y H(x,) = w(x). Recuerde además que cualquier homotopía puede ser visto como un camino; de donde H : I $\longrightarrow C(X,\mathbb{R}^2)$; tal que $H_{(t)}=H_t : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, para todo $t\in I$ y $H_t(x)=H_{(x,t)}$

(ii) Ahora definamos G : X x I $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ como G(x, t) = H(x,1-t), la cual claramente es una homotopía verificando G(x, 0), H(x, 1) = w(x) y G(x, 1) = H(x, 0) = v(X). Observe que G : I $\longrightarrow C(X,\mathbb{R}^2)$; es tal que $G(t)=G_t : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, para todo t $\in I$ y $G_t(x)=G(x,t)$

(iii) Las aplicaciones L, J : X x I $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ se establecen como L(x, t) = v(x) y J(x) = w(x); las cuales son aplicaciones continuas (pues v y w lo son) más aún L(x, 0) = v(x) = L(x, 1) y J(x, 0) = w(x) = J(x, 1) y por tanto son L, J son homotopías.

(iv) Las aplicaciones HG, GH : I $\longrightarrow C(X,\mathbb{R}^2)$ se definen como:

$$HG(t)=\begin{cases} H(2t), t\in[0,1/2] \\ G(2z-1), t\in[1/2,1]\end{cases} \text{ y } GH(t)=\begin{cases} G(2t), t\in[0,1/2] \\ H(2t-1), t\in[1/2,1]\end{cases}$$

Las cuales son continuas (Pues H y G lo son).

- Además HG(0) = H(0) = H_0, HG(1)= G(1) = G_1 entonces $H_0(x)=H(x,0)=v(x)$, $G_1(x)=G(x,1)=v(x)$
- De otro lado GH(0) = G(0) = G_0, GH(1)= H(1) = H_1 entonces $G_0(x)=G(x,0)=w(x)$, $H_1(x)=H(x,1)=w(x)$

Por tanto HG, GH : I $\longrightarrow C(X,\mathbb{R}^2)$ si y solo si HG, GH: X x I $\longrightarrow \mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ son homotopías.

(2°) Las funciones r, s: $G_1 \longrightarrow G_0$, verifican

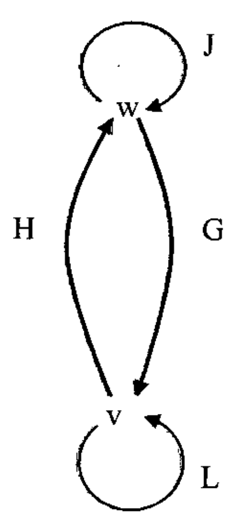
r(H) = w = r(J) = s(J) = r(GH) = s(GH)

s(H) = v = r(L) = s(L) = r(HG) = s(HG)

(3°) El dibujo siguiente:

GRÁFICO N° 5.3

GRAFO DE HOMOTOPÍA



Fuente: Elaboración propia – 2018

Correspondiente al conjunto "$\tilde{G}$" muestra que es un grafo dirigido fila finita, que lo denominaremos **"Grafo de Homotopía".**

CAPITULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de La Hipótesis

No es posible; por ser un trabajo analítico.

6.2 Contrastación de la Hipótesis con Estudios Similares

William S. Massey, en su libro **"Introducción a la topología algebraica"**, en el capítulo 6 página 187 a 207 estudia los espacios recubridores y la estructura algebraica del grupo fundamental de un grafo basado en propiedades topológicas. También James R. Munkres en su librio intitulado "Topología" – 2ª Edición, en el capítulo 14 aplica la teoría de espacios recubridores a ciertos espacios topológicos denominados "Grafos Lineales"; con el propósito de reducir un problema de álgebra a uno de topología. Nosotros a diferencia o a contraste de estos autores, estudiamos la estructura algebraica de ideal en un C*-algebra de un grafo G resultado que se obtiene basado en la definición de la denominada familia de Cuntz – Krieger.

6.3 Responsabilidad Ética

No es posible de tal responsabilidad, por tratarse de un resultado analítico en un contexto matemático.

CONCLUSIONES

- El estudio de la estructura de ideal de un C*-algebra de un grafo finito G, ha sido posible debido a los Teoremas de unicidad para algebras de grafos.

- Si en un grafo G = (G_0, G_1, r, s) cada ciclo tiene un camino retornable, entonces hay una biyección entre la colección de subconjuntos hereditarios y saturados con la colección de ideales bilateros de C*(G).

- Se establece y formula los isomorfismos:

  - $\dfrac{C^*(G)}{I} \cong C^*\left(\dfrac{G}{I}\right)$

  - C*(H) $\cong P_H I P_H$ tal que $p_H s_\mu s_\nu^* = s_\mu s_\nu^*$ siempre que r(μ) ≠ 0 en H, donde $p_H I p_H = \{p_v I p_v : v \in H, p_v - proyección\}$

RECOMENDACIONES

- El estudio realizado de la estructura de ideal en un C*-algebra de grafo G finito G, se recomienda generalizarlo para grafos arbitrarios no finitos.

- Buscar e investigar aplicaciones de las C*-algebras de grafos la dualidad no abeliana.

- Hacer un estudio de las algebras de Cuntz – Pimsner para C*(G).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍAS

(1) James R. Munkres, Topología, 2ª Edición © by Printice Hall, Inc. 2000. España.

(2) Felipe Zaldivar. Introducción a la Teoría de Grupos, 1ª Edición © Universidad Autonoma Metropolitana – UNAM. Inc. 2006 – México.

(3) Gerald J. Murphy. C*-algebras and Operator Theory 1ª. Edición © by Academic press. 1990. United States of América.

(4) William S. Massey. Introducción a la topología Algebraica. 1ª Edición © Editorial Reverte S.A., 1972. España.

(5) Iain Raeburn. Graph Algebras 1ª. Edición © by the American Mathematical society, 2005. United States of America.

(6) José Angel Canavati Ayub. Introduccion al análisis Funcional, primera edición © Fondo de Cutura Economica 1989 –México.

(7) Gustavo N. Rubiano O. Fundamentos de Topología Algebraica. Primera Edición © pro – offset editorial S.A., 2007 – Bogotá.

(8) Reinchard Diestel. Graph Theory 1ª. Edition © Springer Verlag Heidelberg 2005 New York.

(9) Edwin H, Spanier. Algebraic Topology 1ª. Edición © Graw Hill, Company, 1966 – New York.

(10) Paul R., Halmos, A. Hilbert Space problema Book. 1ª. Edición © Springer – Verlag. 1982. New York.

(11) Massey, W. Introducción a la Topología Algebraica. España – Barcelona. Editorial Reverté. 1972

(12) Munkres J. Topología. España. © Pearson Educacion, S.A. 2002.

(13) Spanier, E. Algebraic Topology. New York: E.H. Spanier.

(14) Raeburn, I. Graph Algebras. United States of América. Americal Mathematical Society. 2005.

(15) M. Rordam, An Introduction to k – teoria for C*-algebras, Cambridge university press (2000).

(16) J. Conway, A. Course in functional Analysis, Springer – Verlag (1990, 2dnd edition).

(17) J. Cuntz A. Class of C*-algebras and Topological Markov chains II. Reducible chains and the Ext – funtor for C*-algebras, Invent. Math, 25-40. 1981.

(18) W. Mendoza. K. Teoría de C*-Algebras. UNMSM (Tesis) 2014. Perú.

(19) Fundamentos Teoría de la Computación. blogspot.com/2015/08/teoriadegrafos.

ANEXOS

Anexos necesarios de acuerdo a la naturaleza del problema.

1. **Relación de equivalencia.-** Sea A un conjunto de relación $R \subseteq A\ x\ A$ es de equivalencia si verifica:

   (i) **Reflexiva**: aRa, para todo a $\in$ A

   (ii) **Simétrica**: si aRb, entonces bRa, para todo a, b $\in$ A

   (iii) **Transitiva**: si aRb y bRc entonces aRc, para a, b, c $\in$ A

2. **Algunas notaciones**

- Sea K = (Conjunto de números reales y $\mathbb{C}$ conjunto de números complejos). El conjunto de matrices de orden m x n con entradas en K; se denota como: $M_{mxn}(K) \circ K^{mxn}$. es decir:

  $M_{mxn}(K) = \left\{ A = \left(a_{ij}\right)_{mxn} : a_{ij} \in K, i = 1, \ldots., m\ y\ j\ =\ 1, \ldots.., n \right\}$

- Usando resultados de algebra lineal obtenemos el isomorfismo siguiente:

  $M_{mxn}(K) \cong \left\{ L : V \longrightarrow W\ /\ L \text{ es lineal} \right\}$, donde $\dim_K(V)=n$ y $\dim_K(W)= m$.

- Span $\{A_n\}$; denota el espacio generado por los objetos A_n, para n $\in$ □

Definición (Álgebra).- Un álgebra E es un K – espacio vectorial, provisto de una operación multiplicativa "." Tal que para x, y, z en E cuaquiera y $\lambda \in$ E se cumple las condiciones siguientes:

(i) (x. y) . z = x . (y . z).

(ii) x. (y + z) = xy + x. z

(iii) (x + y) . z = x . z + y . z

(iv) (λ . x). y = λ . (xy)

Si además verifica: x . y = y . x; se dice que E es un álgebra conmutativa (abeliana) y si existe 1_E en E ta que: $x.1_E = 1_E.x = x, \forall x \in E$; se dice ue E el posee identidad.

Definición (Subalgebra).- Sea E un algebra y FCE (subconjunto). Se dice que F es un subalgebra de E si es un subespacio vectorial de E cerrado bajo la operación multiplicativa.

Definición (Ideal).- Sea E un algebra y $J \subseteq E$ (subconjunto). Se dice que J es un ideal a izquierda de E si AJ = $\{aj : a \in A, j \in J\} \subseteq J$; análogamente J es un ideal a derecha de E si JA = {ja: j∈J, a ∈ A) ⊆ J, y se dice que J es ideal bilatero si es ideal a izquierda y derecha.

Definición (Homomorfismos entre álgebras)

Sean E, F dos algebras ambas sobre un cuerpo K y $\varphi : E \longrightarrow F$ una aplicación. Se dice que φ es un homomorfismo si verifica:

(i) $\varphi(x+y) = \varphi_{(x)} + \varphi_{(y)}, \forall x, y \in E$

(ii) $\varphi(\lambda.x) = \lambda\varphi_{(x)}, \forall \lambda \in K, \forall x \in E$

(iii) $\varphi(x,y) = \varphi_{(x)}.\varphi_{(y)}, \forall x, y \in E$

Ejemplos clásicos de homomorfismos

- Sea E un algebra y J un ideal.

  i: J $\longrightarrow E$ tal que i(x) = x, $\forall x \in J$ entonces i es un homomorfismo; llamado homomorfismo inclusión.

- La aplicación $\pi : E \longrightarrow \frac{E}{J}$ dado como π(x)=x+J, para todo x ∈ E, es un homomorfismo, llamado proyección canónica al cociente.