UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DEL TEXTO

"TEXTO: PROBABILIDADES EN INGENIERÍA, CON SOFTWARE APROPIADO"

AUTOR: ADÁN ALMIRCAR, TEJADA CABANILLAS

(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de diciembre 2016 al 31 de noviembre de 2018)
(Resolución de aprobación N° 1068-2016-R)

Callao, 2018
PERÚ

Dedicatoria

En primer lugar, a Dios por permitirme culminar
esta etapa en mi vida y reconfortarme en este
momento de desasosiego e incertidumbre
durante la trayectoria de mi formación profesional.
En segundo lugar, esta Investigación lo dedico con todo
Amor a mi esposa María Soledad, a mis hijas
Gabriela, Maira y a mi hijo Jesús por aceptar
mi ausencia en reuniones familiares y
confiar en mi capacidad para terminar este
proceso formativo, por alentarme día a día
y su infinito amor incondicional porque
a ellos les debo todo lo que soy.
Los amo, gracias por todo.

Agradecimiento

A mi estimado Asesor:

- Dr. Ing. Juan Herber, Grados Gamarra

Por sus interminables consejos en la ejecución de este Proyecto, las aportaciones y recomendaciones que hizo posible que hoy llegue a culminar esta meta.

Mi más sincero agradecimiento, mi gran admiración por su tiempo dedicado a este trabajo de investigación.

Un saludo cordial y que Dios lo bendiga siempre.

A mis maestros:

- Dr. Ing. Ciro, Terán Dianderas
- Dr. Ing. Fernando, Oyanguren Ramírez
- Dr. Ing. Santiago Linder, Rubiños Jiménez
- Mg. Ing. Franco, Veliz Lizárraga

Por ser guías durante todo el proceso, por estar cuando los he necesitado y darme su apoyo y consejo académico.

A mis amigos:

- Mg. Ing. Jorge Elías, Moscoso Sánchez
- Mg. Lic. Hugo Florencio, Llacza Robles
- Sra. Eliana, Ochoa Cruzado
- Sra. Liseth
- Sra. Cristina
- Sra. Milagros

I. ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

II. INTRODUCCIÓN

Este texto contendrá todo el material del curso de Probabilidades con muchas aplicaciones desarrolladas basadas en ternas propuestos de casos reales dentro de las áreas de Ingeniería.

Sera un aporte para que los estudiantes aprecien el uso de un instrumento computacional moderno y flexible que en forma integradora puede ser usado como soporte común para todos los cursos de probabilidad y Estadística, incluyendo Álgebra Lineal. Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.

El desarrollo del presente informe de texto consta de una segregación de Capítulo I: Probabilidades, Capítulo II: Modelos aleatorios, Capítulo III: Espacio muestral, Capítulo IV: Sucesos, Capítulo V: Teoría combinatoria, Capítulo VI: Probabilidad, Capitulo VII: Teoremas , Capítulo VIII: Probabilidad condicional, Capítulo IX: Sucesos mutuamente excluyentes, Capítulo X: Sucesos independientes, Capitulo XI: Partición, Capítulo XII: Probabilidad Total, Capítulo XIII: Probabilidad de Bayes, Capítulo XIV: Variables aleatorias, Capítulo XV: Distribuciones discretas de probabilidad y Capítulo XVI: Distribuciones continúas de probabilidad, pero unos están inmersos en otros de tal manera que se ha resumido en seis capítulos, según se indica:

En el capítulo I se detalla la terminología probabilística, conceptos fundamentales y tipos de probabilidades

En el capítulo II se detalla todo lo que concierne a variables aleatorias.

En el capítulo III se detalla a los diferentes tipos de variables aleatorias

En el capítulo IV se da a conocer sobre las variables aleatorias discretas

En el capítulo V se da a conocer sobre las variables aleatorias continuas.

En el capítulo VI se detalla la distribución de probabilidades continua.

Además, nos hemos apoyado en algunos programas para mejor presentación.

III. CUERPO EL TEXTO

CAPITULO I:

"Probabilidades"

1. Probabilidades

1.1. Definición

El deseo del ser humano por conocer con certeza los eventos que sucederán en el futuro hizo que se produjera la definición de probabilidad, desarrollado diferentes enfoques para tener un concepto de la probabilidad y determinar sus valores.

La real Academia española la define como "una casualidad, un caso fortuito, y afirma que la expresión «al azar» significa sin orden".

Pierre-Simon Laplace afirmó: "Es notable que una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar haya llegado a ser el objeto más importante del conocimiento humano"[1].

Según Amanda Dure, "Antes de la mitad del siglo XVII, el término 'probable' (en latín probable) significaba aprobable, y se aplicaba en ese sentido, unívocamente, a la opinión y a la acción. Una acción u opinión probable era una que las personas sensatas emprenderían o mantendrían, en las circunstancias."

Ejemplo 1

Una caja contiene diez fusibles. Ocho de ellos están tasados en 10 amperes (A) y los otros dos están tasados en 15 A. Se seleccionan dos fusibles aleatoriamente.

[1] **Pierre Laplace** fue un matemático, astrónomo y físico francés cuya obra es reconocida en la actualidad por la importancia de sus aportaciones a la ciencia en campos muy diversos. **Pierre Simon Laplace** nació el 23 de Marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge (Francia).24 sept. 2016

Espacio muestral:

$$\Omega = \{(10,10),(10,15),(15,10),(15,15)\}$$

¿Cuál es la probabilidad de que el primer fusible esté tasado en 15 A?

P(el primer fusible esté tasado en 15 A) =

$$\frac{C_1^2 * C_1^8 + C_1^2 * C_1^1}{C_2^{10}} = 0,2$$

¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible esté tasado en 10 A?

P (el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible esté tasado en 10 A)

$$\frac{C_1^8 * C_1^2}{C_1^8 * C_1^7 + C_1^8 * C_1^2} = 0,22$$

¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible lo esté en 15 A?

P (el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible lo esté en 15 A)

$$\frac{C_1^2 * C_1^1}{C_1^2 * C_1^8 + C_1^2 * C_1^1} = 0,11$$

Ejemplo 2

Los pozos de petróleo perforados en la región A tienen una probabilidad de 0.2 de producir. Los pozos perforados en la región B tienen una probabilidad de 0.09. Se perfora un pozo en cada región. Suponga que los pozos producen de manera independiente.

P(A) = 0,2 entonces P(A) =0,8

P(B) = 0,09 entonces P(A) =0,91

¿Cuál es la probabilidad de que ambos pozos produzcan?

$$P(AB) = P(A) * P(B) = 0,2 * 0,91 = 0,018$$

¿Cuál es la probabilidad de que ninguno produzca?

$$P(A^c B^c) = P(A^c) * P(B^c) = 0,8 * 0,91 = 0,728$$

¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno produzca?

$$P(A \cup B) = 0,2 + 0,09 - 0,018 = 0,272$$

1.2. Enfoques conceptuales

Existen tres enfoques conceptuales diferentes para definir las probabilidades:

El enfoque clásico

Llamado también a priori porque permite el cálculo de un valor de probabilidad antes de observar cualquier evento muestral.

Se basa en la suposición de que cada resultado sea igualmente posible.

Este enfoque expone si hay "x" posibles resultados favorables a la ocurrencia de un evento A y "z" posibles resultados desfavorables a la ocurrencia de A, y todos los resultados son igualmente posibles y mutuamente excluyente (no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo), entonces la probabilidad de que ocurra A es:

$$P(A) = \frac{x}{x + z}$$

Ejemplo:

Si tenemos en una caja de cartón 15 pelotas verdes y 9 pelotas rojas. La probabilidad de sacar una pelota roja en un intento es:

$$P(A) = \frac{9}{9+15} = 0,375 = 37,5\%$$

El enfoque de frecuencia relativa

Llamado también enfoque empírico o a posteriori, ya que este enfoque determina la probabilidad sobre la base de la proporción de veces que ocurre un favorable evento en un número de observaciones. No ese utiliza la suposición previa de aleatoriedad porque la determinación de los valores de probabilidad se basa en la recopilación de datos y observación.

Ejemplo:

Se ha observado que 9 de cada 50 vehículos que pasan por una esquina no tienen cinturón de seguridad. Si un policía de tránsito se para en esa misma esquina una ida cualquiera ¿Cuál será la probabilidad de que detenga un vehículo sin cinturón de seguridad?

$$P[A] = \frac{9}{50} = 0,18 = 18\%$$

Enfoque subjetivo

Se refiere al grao de creencia o confirmación de un determinado suceso o evento de acuerdo a la experiencia, sentimientos, intuición por parte de un individuo de que un evento ocurra, basado en toda la evidencia a su disposición." Este enfoque es adecuado cuando solo hay una oportunidad de ocurrencia del evento, por lo que el evento ocurrirá o no ocurrirá esa sola vez.

El valor de probabilidad bajo este enfoque es un juicio personal.

Ejemplo

Tabla N° 1: Evento y probabilidad

Evento	Probabilidad
Te robarán el celular mañana	Baja
Hablaras con tu mamá hoy	Media
Aprobarás el curso de Estadística	Alta

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Como consecuencia de estos tres axiomas, se verifican además las siguientes propiedades:

iv) $p\ (A) = 1 - p(A^C)$

v) $p\ (\phi) = 0$

vi) si $A = B$, $p(A) = p(B)$

vii) $p(A^c) = 1 - p\ (A)$

viii)si A1 , A2 , ... , An son incompatibles dos a dos, entonces

$p(A1 U\ A2\ U\ .....\ An) = p\ (A) + p\ (A) + \ldots. + p\ (A)$

ix) si A, B son dos sucesos cualesquiera, entonces

$p\ (A\ B) = p(A) + p(B) - p\ (A\ B)$

1.3. Espacio muestral

Un espacio muestral (E) es un conjunto de todos los resultados posibles a un experimento aleatorio.

Ejemplo 1

Lanzamiento de una moneda. E = {sale cara, sale sello} o E = {cara, sello}.

Lanzamiento de un dado de seis caras. E= {sale 1, sale 2, sale 3, sale 4, sale 5, sale 6} o E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Ejercicio

Se lanza una moneda y un dado a la vez y se anotan los resultados

a.- escribe el espacio muestral:

Tabla N° 2 Espacio muestral en un lanzamiento de moneda

	Dado	1	2	3	4	5	6
moneda	c	c,1	c,2	c,3	c,4	c,5	c,6
	s	s,1	s,2	s,3	s,4	s,5	s,6

Fuente: UNAC (2018);elaboración propia

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(c,5),(c,6),(s,1),(s,2),(s,3),(s,4),(s,5),(s,6)\}$$

b.- Describe los sucesos:

A: "Obtener cara y numero par

$$A = \{(c,2),(c,4),(c,6)\}$$

B: "salir impar"

$$B = \{(c,1),(c,3),(c,5),(s,1),(s,3),(s,5)\}$$

C.- Determina los casos favorables del suceso C:

C: "Obtener sello y número mayor que 3"

$$C = \{(s,4),(s,5),(s,6)\}$$

2.- En un examen de inglés hay que desarrollar un tema que se saca de una bolsa que contiene papeletas numeradas del 1 al 6. Los temas 1 y 2 son de lectura (l), los temas 3 y 4 son de gramática (g), el tema 5 es de escritura (e) y el tema 6 es de vocabulario (v).

Considera los siguientes sucesos:

A: “salir un tema par”

B: “salir un tema impar”

C: “salir un tema de lectura”

D: “salir un tema de inglés”

E: “salir un tema de lengua”

F: “salir un tema de escritura”

Elabora el espacio muestral y analiza la probabilidad de que cada suceso ocurra.

El espacio muestral es:

$\Omega = \{l, l, g, g, e, v\}$ los temas están ordenados del 1 al 6.

$$A = \{l, g, v\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%$$

$$B = \{l, g, e\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%$$

$$C = \{lectura\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{6} = 33,3\%$$

$$D = \{l, g, e, v\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{6} = 0,6666 = 66,7\%$$

$$E = \{lengua = gramatica\} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{6} = 0,333 = 33,3\%$$

$$F = \{escritura\} = \frac{1}{6} = 0,16666 = 16,7\%$$

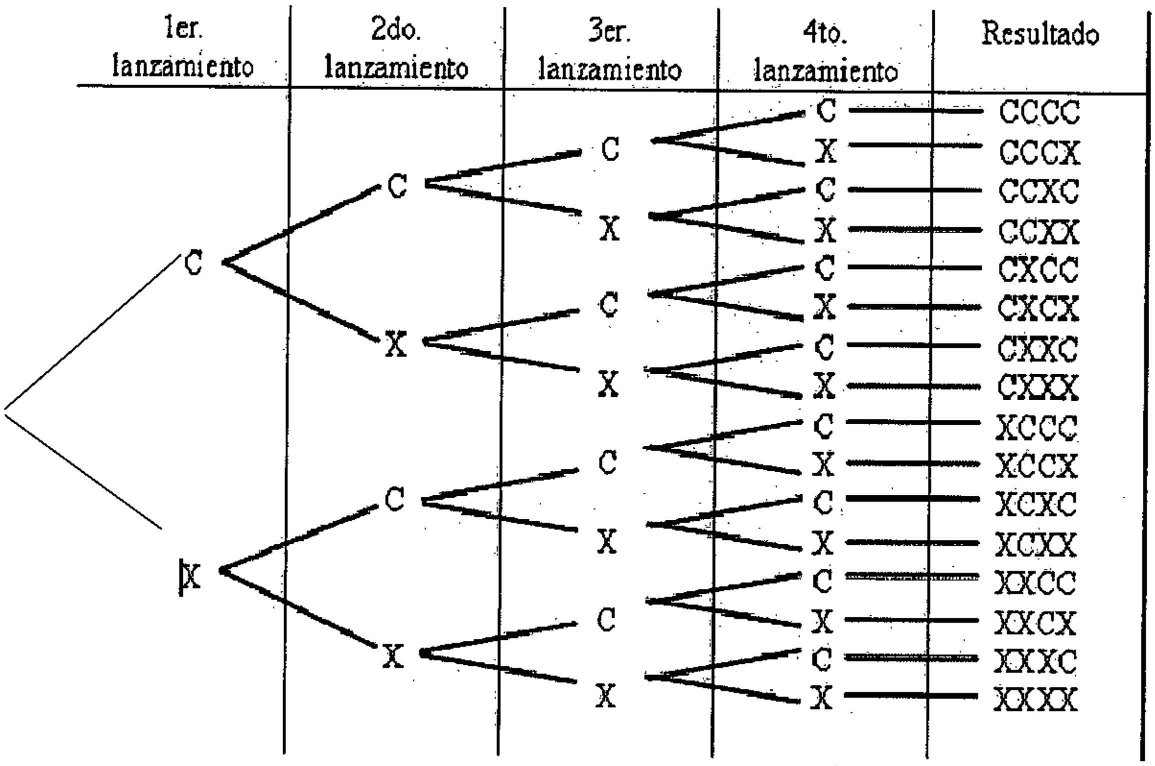
3.- consideramos el experimento que consiste en lanzar 4 monedas y anotar los resultados.

a.- Describe el espacio muestral.

Nos ayudamos con el diagrama de árbol

FIGURA N° 1:

DIAGRAMA DE ÁRBOL



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{cccc, cccs, c\,\mathrm{csc}, ccss, \mathrm{csc}\,c, \mathrm{csc}\,s, cssc, csss, sccc, sccs, s\,\mathrm{csc}, scss, sscc, sscs, sssc, ssss\}$$

b.- Hallar las probabilidades de los sucesos:

A: "SALIR DOS CARAS"

$$P(dos\_caras) = \frac{6}{16} = 0,375 = 37,5\%$$

B: "Por Lo Menos Dos Sellos" (Mínimo Dos Sellos)

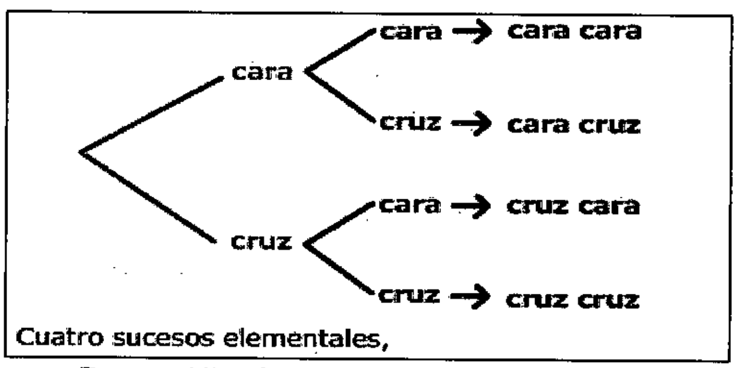
$$P(\min imo\_dos\_sellos) = P(dos\_sellos) + P(tres\_sellos) + P(cuatro\_sellos)$$

$$P(\min imo\_dos\_sellos) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875 = 68,75\%$$

4.- Lanzamos dos monedas al aire

FIGURA N° 2:

DIAGRAMA DE ÁRBOL DOS MONEDAS AL AIRE



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

$$\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$$

Hallar las probabilidades de:

a.- Obtener dos sellos o cruces

b.- Obtener una cara

$$P(una\_cara) = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$$

c.- Obtener al menos una cara

$$P(al\_menos\_una\_cara) = P(una\_cara) + P(dos\_caras) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

d.- No obtener ninguna cara

$$P(ninguna\_cara) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Ejercicio resuelto

Una caja contiene diez fusibles. Ocho de ellos están tasados en 10 amperes (A) y los otros dos están tasados en 15 A. Se seleccionan dos fusibles aleatoriamente.

Espacio muestral:

$$\Omega = \{(10,10),(10,15),(15,10),(15,15)\}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer fusible esté tasado en 15 A?

P(el primer fusible esté tasado en 15 A) =

$$\frac{C_1^2 * C_1^8 + C_1^2 * C_1^1}{C_2^{10}} = 0,2$$

b) Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible esté tasado en 10 A?

P (el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible esté tasado en 10 A)

$$\frac{C_1^8 * C_1^2}{C_1^8 * C_1^7 + C_1^8 * C_1^2} = 0,22$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible lo esté en 15 A?

P (el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible lo esté en 15 A)

$$\frac{C_1^2 * C_1^1}{C_1^2 * C_1^8 + C_1^2 * C_1^1} = 0{,}11$$

1.4. Eventos

Los eventos también llamado también sucesos, son todos los subconjuntos de un espacio muestral

Ejemplo de eventos:

En un lanzamiento de dado, los eventos serían:

Obtener un número impar A = {1, 3, 5}

Obtener un número primo y par B = {2}

Obtener un número mayor o igual a 4 C = {4,5, 6}

Ejemplo general:

Experimento: Lanzar un dado y observar el resultado

Espacio Muestral: **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6]

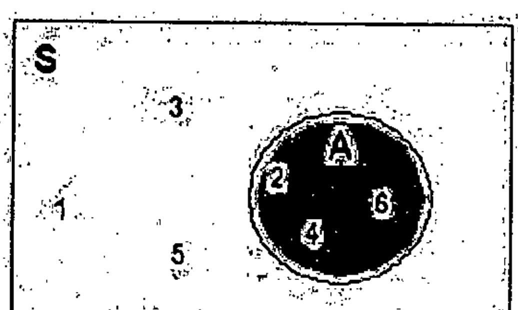
Evento de interés: **A:** el resultado es un número par

Respuesta: **A** = {2, 4, 6}

Representación gráfica con un Diagrama de Venn

FIGURA N° 3

:DIAGRAMA DE VENN



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Algunas definiciones de un evento son:

Evento nulo: No contiene resultados (puntos muestrales)

Evento simple: Contiene un solo resultado (punto muestral)

Eventos excluyentes: Eventos que no contienen resultados comunes

Tipos de eventos

Existen cuatro tipos de eventos principales

Eventos mutuamente excluyentes: Dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir en forma simultánea, esto es, si y sólo si su intersección es vacía.

Ejemplo

Lanzamiento de una moneda = cara y sello

Eventos Complementarios: El suceso A constituye un suceso complementario al Suceso B, si incluye todos los resultados posibles que no fueron incluidos en el Suceso B.

Ejemplo 1

Lanzamiento de un dado:

Evento A consiste en obtener como resultado un 3.

Evento B consiste en obtener como resultado un 1, 2, 4, 5 o 6

Estos dos sucesos son sucesos complementarios, dado que todos los resultados posibles que no aparecen en el Suceso A son exactamente las posibilidades que aparecen en el Suceso B, y viceversa.

La probabilidad que uno de los eventos complementarios ocurra siempre es 1 o 100%.

Eventos Independientes

No se ven afectados por otros independientes.

Ejemplo

El numero ganador de la tinka y la probabilidad de que este nublado hoy.

Se dice que dos eventos *A* y *B* son **independientes** si:

$$P(A|B) = P(A)$$

o bien,

$$P(B|A) = P(B)$$

Esto es equivalente a afirmar que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo

Supóngase que un supervisor debe seleccionar un trabajador para un puesto especial, de un conjunto de cuatro trabajadores, numerados 1, 2, 3 y 4. Lleva a cabo la selección mezclando los cuatro nombres y tomando uno al azar. Sea A el evento de que se selecciona el trabajador 1 o 2; B el evento de que se selecciona el trabajador 1 ó 3, y C el evento de que se selecciona el trabajador 1. ¿Son independientes A y B? ¿Son independientes A y C?

Como el nombre se selecciona al azar, una hipótesis razonable para el modelo probabilístico es asignar una probabilidad de 1/4 a cada trabajador individual. Entonces P(A) = 1/2, P(B) = 1/2 y P(C) = 1/4. Como la intersección AB contiene sólo al trabajador 1, $P(A \cap B) = 1/4$. Ahora bien, $P(A \cap B) = 1/4 = P(A)P(B)$ y, entonces, A y B son independientes, Como A $\cap$C también contiene sólo al trabajador 1, entonces

P(A∩C) = 1/4. Pero P(A∩C) = 1/4 ≠ P(A)P(C); por lo tanto, A y C no son independientes. Se dice que A y C son dependientes debido al hecho de que si sucede C cambia la probabilidad de que suceda A.

Eventos Dependientes

Para (Rosas, 2002) "La probabilidad de un evento puede ser afectada por la ocurrencia de otro. En este caso, los eventos son dependientes (eventos no independientes), porque la ocurrencia de un evento afecta a la ocurrencia del otro evento. Por ejemplo, si de una urna que contiene bolas rojas y tres negras se extrae al azar una bola, y después otra, los eventos A "obtener bola negra en la primera extracción" y B" obtener bola negra en la segunda extracción"." Un evento afecta a la probabilidad de ocurrencia de otro.

Ejemplo: estudiar para un examen, calificaciones.

Probabilidad de Eventos

La probabilidad de un evento es la frecuencia con que se espera que ocurra.

Si todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables, la probabilidad es la relación entre el tamaño del espacio de eventos y el espacio muestral.

La probabilidad de un evento E normalmente se escribe P(E).

$$P(E) = \frac{número\ de\ resultados\ en\ el\ evento}{númer\ total\ de\ resultados\ posibles}$$

Para dar un valor a una probabilidad de eventos se realizan tres tipos de asignaciones:

Método Axiomático:

Para (Gomez, 2014) es "la probabilidad de ocurrencia de un suceso como un número comprendido entre 0 y 1". Se refiere a la generalidad de frecuencias relativas, **0** < hi< 1.

Es dada por hechos:

Los hechos ciertos son favorables cuando todos los casos son posibles. Por ejemplo, una persona que compra todos los tickets de una lotería, por lo tanto, ganará el sorteo.

El hecho verosímil se refiere a cuando la probabilidad favorable es menor que 1 y mayor que 0.5.

El hecho dudoso se refiere a la probabilidad que la ventaja y desventaja de un evento sea igual. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda, sale cara o sello

El hecho inverosímil es cuando la probabilidad es menor que 0.5 y mayor que cero.

El hecho imposible es cuando no hay posibilidad de salir favorable un evento. Por ejemplo, la persona que no compre la tinka, la probabilidad de que gane será cero.

(Axiomas de Kolmogorov)

La probabilidad es una ley que asigna a cada suceso $A \in \Omega$ un número real

$p : \Omega \to \Re$ y que verifica:

$A \to p(A)$

i) $p(A) \geq 0 , \quad \forall A \in \Omega$

ii) $p(E) = 1$

iii) si A y B son sucesos incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Como consecuencia de estos tres axiomas, se verifican además las siguientes propiedades:

iv) $p(A^{C}) = 1 - p(A)$

v) $p(\varnothing) = 0$

vi) si $A \subseteq B$, $\Rightarrow p(A) \leq p(B)$

vii) $p(A) \leq 1$, $\forall A \in \Omega$

viii)si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces

$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots\ldots + p(A_n)$

ix) si $A, B \in \Omega$ son dos sucesos cualesquiera, entonces

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Método empírico o práctico.

Se refiere a la probabilidad de un suceso, como aquel número al cual aproxima cada vez más la frecuencia relativa de la ocurrencia de un suceso, cuando las veces que se repite el experimento que origina ese suceso es bastante grande.

$$P = \frac{Núumero\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo

Se han realizado 20 pruebas en un experimento en características similares. Cuatro pruebas tuvieron el resultado favorable. Por tanto, la probabilidad que en la siguiente prueba se obtenga el resultado favorable tiene un valor aproximadamente de: 4/20 = 0.2, es decir 20%

Asignación clásica

Su origen es la Teoría de Juegos.

Es el "valor de probabilidad de un evento es la relación entre la cantidad de resultados que se consideran favorables para el evento de interés, respecto al total de resultados posibles (Espacio Muestral)." (Rodriguez Ojeda, 2007)

1.5. Álgebra de sucesos

$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cup} \Omega$ A $\cup$ B es el suceso que se verifica si y

$(A,\ B) \rightarrow A\cup B$ sólo si se verifica uno de los dos.

$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cap} \Omega$ A $\cap$ B es el suceso que se verifica cuando

$(A,\ B) \rightarrow A\cap B$ se verifican los dos a la vez.

$\Omega \xrightarrow{C} \Omega$ A^C, complementario de A, es el suceso que

$A \rightarrow A^C$ se verifica cuando no se verifica *A*.

<u>Propiedades:</u>

Como las definiciones de unión, intersección y complementación de sucesos son idénticas a las de los conjuntos, estas operaciones para sucesos cumplen las mismas propiedades que para los conjuntos.

i) Conmutativa: $A\cup B = B\cup A$ $A\cap B = B\cap A$

ii) Asociativa: $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

iii) Idempotente: $A\cup A = A$ $A\cap A = A$

iv) Simplificación: $A\cup(A\cup B) = A\cup B$ $A\cap(A\cap B) = A\cap B$

v) Distributiva: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

vi) Existencia de elemento neutro: $A\cup\varnothing = A$ $A\cap E = A$

vii) Absorción: $A\cup E = E$ $A\cap\varnothing = \varnothing$

viii)Complementación: $E^C = \varnothing$ $\varnothing^C = E$

ix) Involución: $(A^C)^C = A$

x) Leyes de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Álgebra de Boole:

Un conjunto dotado con dos leyes de composición (operaciones) que cumple la conmutatividad, distributivita, existencia de elemento neutro y existencia de complementario, se llama álgebra de Boole.

Así pues, $(\Omega; \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole.

Dos sucesos se dicen incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Un sistema completo de sucesos son n sucesos A_1, A_2, ..., A_n qué verifican las dos siguientes condiciones:

i) $A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n = E$

ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall\ i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$.

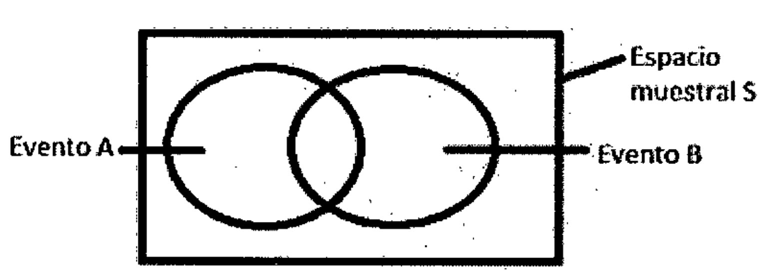
1.6. Reglas Aditivas

Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B).

FIGURA N° 4

REGLA ADITIVA



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Para obtener la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, simplemente calculamos el producto de sus probabilidades individuales.

Ejemplo

La probabilidad de que Teresa apruebe Estadística es 2/5 y la probabilidad de que apruebe Lógica es 4/7. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es 1/8. ¿Cuál es la probabilidad de que Teresa apruebe al menos uno de estos cursos? Si E es el evento aprobar Estadística y D el evento aprobar Lógica, entonces

$$P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = \frac{2}{5} + \frac{4}{7} - \frac{1}{8} = \frac{237}{280} = 0.85 = 85\%$$

1.7. Reglas multiplicativas

Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces

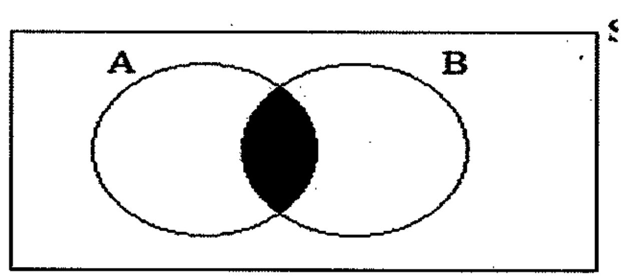
La probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de que ocurra A multiplicada por la probabilidad condicional de que ocurra B, dado que ocurre A.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \text{ dado que } P(A)>0.$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B).$$

FIGURA N° 5

PROBABILIDAD CONDICIONAL-DIAGRAMA DE VENN



A ∩ B

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejemplo

La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a la hora exacta es P(D) = 0.83; la probabilidad de que llegue a tiempo es P(A) = 0.82; y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es P(D ∩ A) = 0.78. Encuentre la probabilidad de que un avión

a) Probabilidad de que un avión llegue a tiempo, dado que salió a tiempo es

$$P(A|D) = P(D \cap A)/P(D) = 0.78/0.83 = 0.94 = 94\%$$

b) Probabilidad de que un avión haya salido a tiempo, dado que llegó a tiempo es

$$P(D|A) = P(D \cap A)/P(A) = 0.78/0.82 = 0.95 = 95\ \%$$

1.8. Probabilidad Condicional

Batanero explica que "la deducción por Bayes en 1763 de su famoso teorema llevó a una conclusión inesperada: las probabilidades de las causas podrían revisarse en función de las consecuencias observadas y perderían su carácter objetivo. Una nueva visión de la probabilidad como grado de creencia personal, basada en el conocimiento previo y los nuevos datos, hace innecesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones. El teorema de Bayes, aplicado sucesivamente, permite formalizar el proceso de aprendizaje a partir de la experiencia y unificar la metodología de la inferencia" (Batanero, 2007)

La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A y se denota P(B|A) que significa la probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

Ejemplo

Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?

A = {ser hipertenso}

B = {ser fumador}

A ∩ B = {ser hipertenso y fumador}

P (A|B) = 0,10/0,50 = 0,20

1.9. Partición

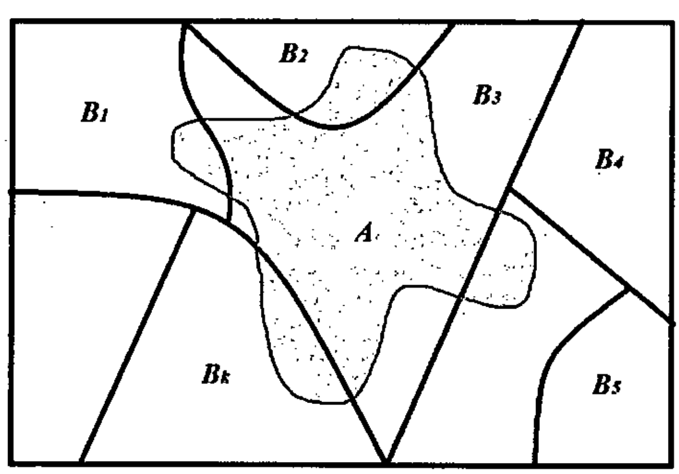
Una partición es una división de un conjunto no vacío.

Es decir, $P = \{A_i: i \in I\}$, donde se cumple:

- Para cada $i \in I$, $A_i \subseteq A$ y $A_i \neq \emptyset$
- Para cada par $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\cup_{i \in I} A_i = A$

FIGURA N° 6

PARTICIÓN DE ESPACIO MUESTRAL



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejemplo

El conjunto {1, 2, 3} tiene exactamente 5 particiones:

{ {1}, {2}, {3} }

{ {1, 2}, {3} }

{ {1, 3}, {2} }

{ {1}, {2, 3} }

{ {1, 2, 3} }

{ {}, {1,3}, {2} } no es una partición (pues contiene al conjunto vacío)

Ejemplo 2

Un día de graduación de la gran universidad FIEE, se selecciona aleatoriamente a un graduado. Sea A el evento que el estudiante está por terminar la carrera de ingeniería Eléctrica y sea B el evento que el estudiante tomó un curso de lenguaje de programación en la universidad. ¿Qué probabilidad es mayor, P(A| B) o P(B| A)?

P(A/B) = Probabilidad de que el estudiante está por terminar la carrera de ingeniería Eléctrica dado que tomó un curso de lenguaje de programación en la universidad

$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} < 1$, $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ MUY CERCANO A 1

P(B/A) = Probabilidad de que un estudiante tomó un curso de lenguaje de programación en la universidad dado que está por terminar la carrera de ingeniería Eléctrica

1.10. Teorema de la Probabilidad Total

Sea A una partición sobre el espacio muestral y sea un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales , entonces la probabilidad del suceso viene dada por la expresión:

Ejemplo

La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0,3% y para no hipertensos del 0,1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

A1 = {ser hipertenso}

A2 = {no serlo} estos sucesos constituyen una partición

B = {padecer infarto}

datos: p(B|A1) = 0,003;

p(B|A2) = 0,001; p(A1) = 0,25

p(A2) =0,75

p(B) = 0,003x0,25 + 0,001 x 0,75 = 0,0015

1.11. Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un completo sistema de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B/A_i)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Demostración:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\cdot P(B/A_i) = P(B)\cdot P(A_i/B) \quad i = 1, \ldots, n$$

12

despejando $P(A_i / B)$ nos queda:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Ejemplo 1

Se tiene dos urnas, la primera tiene 3 pelotas blancas y 2 negras, la segunda tiene 2 pelotas blancas y 3 negras. Se elige al azar una urna y de ella se extrae una pelota. Calcular la probabilidad de que sea blanca.

Sea A_1:"elegir la urna nº1"

A_2:" elegir la urna nº

B:" extraer bola blanca"

$$P(\ P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que realizada la extracción, la bola resulta ser blanca y queremos saber qué probabilidad hay de que la bola proceda de la urna nº1.

Ejercicio 2

En el transcurso de producción de válvulas para motores, éstas se someten a un primer rectificado. Las válvulas cuyos espesores están dentro de la especificación se encuentran listas para la instalación. Las válvulas cuyos espesores están arriba de la especificación se rectifican, mientras que aquellas cuyos espesores están por debajo se desechan. Suponga que después del primer rectificado, 70% de las válvulas satisface la especificación, 20% es nuevamente rectificado y 10% se desecha. Además, suponga que de las válvulas que son nuevamente rectificadas, 90% satisface la especificación y 10% se desecha.

SUCESOS

R1 : Primer rectificado

R2 : Segundo rectificado

C : correcto

D : desechada

Del enunciado

P(R1) = 1--> Probabilidad del primer rectificado (suceso seguro=1, ya que todas hacen este 1er rectificado)

P(R2) = 0.2 -> Probabilidad de un segundo rectificado.

P(C/R1) = 0.70 --> satisfacen la especificación tras el 1er rectificado

P(C/R2) = 0.90 --> satisfacen la especificación tras el 1er rectificado

P(D/R1)=0.10 --> se desechan el 10% en el primer rectificado

P(D/R2)=0.10 --> se desechan el 10% en el segundo rectificado

a) Determine la probabilidad de que una válvula se rectifique sólo una vez.

Las que no se rectifican 2 veces : 1-P(R2) = 1 - 0.2 = 0.8

b) Dado que una válvula se hace sólo una vez, ¿cuál es la probabilidad de que se deseche?

P(D/R1) = 0.10

c) Determine la probabilidad de que se deseche una válvula.

Por el teorema de probabilidad total:

P(D) = P(D/R1)*P(R1) + P(D/R2)*P(R2)

P(D) = 0.10*1 + 0.10*0.20 = 0.12

d) Dado que una válvula se desecha, ¿cuál es la probabilidad de que se rectifique dos veces?

Por el teorema de Bayes:

P(R2/D) = P(D/R2)*P(R2) / { P(D/R1)*P(R1) + P(D/R2)*P(R2) }

P(R2/D) = 0.10*0.20 / { 0.10*1 + 0.10*0.20 } = 1/6

e) Determine la probabilidad de que la válvula satisfaga la especificación (después de la primera o de la segunda rectificación).

Por el teorema de probabilidad total:

P(C) = P(C/R1)*P(R1) + P(C/R2)*P(R2)

P(C) = 0.70*1 + 0.90*0.20 = 0.88

f) Dado que una válvula satisface la especificación (después de la primera o segunda rectificación), ¿cuál es la probabilidad de que se haya rectificado dos veces?

Por el teorema de Bayes:

P(R2/C) = P(C/R2)*P(R2) / { P(C/R1)*P(R1) + P(C/R2)*P(R2) }

P(R2/C) = 0.90*0.20 / { 0.70*1 + 0.90*0.20 } = 9/44 = 0.2045

g) Dado que una válvula satisface la especificación, ¿cuál es la probabilidad de que se haya rectificado una vez?

Por el teorema de Bayes:

P(R1/C) = P(C/R1)*P(R1) / { P(C/R1)*P(R1) + P(C/R2)*P(R2) }

P(R1/C) = 0.70*1 / { 0.70*1 + 0.90*0.20 } = 35/44 = 0.7954

Ejercicio 3

Un médico dispone de tres equipos electrónicos para realizar ecosonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35%

el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos:

Suceso P: seleccionar el primer aparato

Suceso S: seleccionar el segundo aparato

Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de Bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P/E)=\frac{P(P)*P(E/P)}{P(P)*P(E7P)+P(S)*P(E/S)+P(T)*P(E/T)}$$

$$P(P/E)=\frac{0,25*0,01}{0,25*0,01+0,35*0,02+0,4*0,03}=\frac{0,0025}{0,0215}=0,116\cong 0,12\cong 12\%$$

1.12. Modelos Aleatorios

Un modelo aleatorio es aquel que aun conociendo de él mismo mucho no se pueda precisar un solo resultado sino tan sólo enumera las diferentes posibilidades, es decir no podemos precisar un único resultado solamente enumerar posibles resultados

Ejemplo

El número de automóviles involucrados en un accidente de tránsito= 0 1 2 3 hasta el infinito

El tiempo de vida de un transformador = T mayor o igual a 0

El juego con un dado = 1,2,3,4,5,6 es un modelo aleatorio

El resultado final del curso un curso = aprueba o desaprueba

CAPITULO II:

"Variables aleatorias"

2. Variables aleatorias

2.1. Definición

Es un valor numérico que corresponde a un resultado de un experimento aleatorio.

Ejemplo

Número de caras obtenidas al lanzar una moneda 3 veces

Tiempo sueño de un bebé de 6 meses, cada día

Número de mensajes que recibe un celular durante 1 día

La información sobre una variable aleatoria X está especificada en su función de probabilidad P(x) o en su función de densidad f(x), según que la variable aleatoria sea discreta o continua, respectivamente.

2.2. Función de probabilidad, f (x)

Probabilidad de que la variable X tome un valor concreto: $\boldsymbol{f(x_i) = P(X = x_i)}$

Donde: $\sum f(x_i) = 1$

Gráficamente se representa mediante barras. Con los datos del ejemplo anterior:

TABLA N° 3:

DATOS SOLICITADOS

X	0	1	2
F (x_i)	0,25	0,75	1,00

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Probabilidad de que la variable X tome un valor u otro inferior: F (xi) = P (X xi)

Dónde: F(xmín) = f (x1)

F(xmáx) = 1

Valor esperado:

$$E(\mathrm{x}) = \mu = \sum xf(x)$$

Varianza:

$$\sigma^2 = E(\mathrm{x}^2) - [\mathrm{E}(x)]^2$$

Propiedades:

E (***a***) = ***a***; $\sigma^2(a) = 0$ (donde ***a*** es una constante)

Si $Y = X + a$ .... $E(Y) = E(X) + a$ .... $\sigma^2(Y) = \sigma^2(X)$

Si $Y = a \cdot X$ .... $E(Y) = a \cdot E(X)$ .... $\sigma^2(Y) = a^2 \cdot \sigma^2(X)$

2.3. Función de Densidad

Cuando el experimento da lugar a una v.a. X continua, la variable da lugar a una función de distribución F(x) de tipo continuo, no exis-tiendo probabilidad para un valor concreto de la variable.

La probabilidad de que la variable esté comprendida en el intervalo [A, B] es F(B) - F(A).

Si dividimos la probabilidad de que un valor de X esté en un intervalo, por la longitud del intervalo, obtenemos la densidad media de probabilidad en dicho intervalo, que será : F(B) - F(A) B - A

Se define la función de densidad en un punto x, como el límite de la densidad media de probabilidad de un intervalo, cuando la longitud del intervalo tiende a cero. Se representa por f(x) y será :

$$f(x) = \lim \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Vemos pues que la función de densidad es la derivada de la función de distribución, $f(x) = F'(x)$

PROPIEDADES

1) La función de densidad es siempre positiva

Demostración:

Como la variable es continua $\Rightarrow$ la función de distribución es siempre creciente $\Rightarrow$ su derivada (función de densidad o de cuantía) es positiva.

2) $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$

Veámoslo :

$$f(+\infty) = \lim \frac{F(+\infty + \Delta x) - F(+\infty)}{\Delta x} = \lim \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0$$

$$f(-\infty) = \lim \frac{F(-\infty + \Delta x) - F(-\infty)}{\Delta x} = \lim \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

3) La función de distribución es una primitiva de la función de densidad, ya que $f(x) = F'(x)$

Por tanto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = [\,F(t)\,] = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x)$$

4) Dada una v.a. X con función de densidad f(x), se cumple:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Veámoslo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Ejemplo 1

Sea X una v.a. continua, cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ x3 & \text{para} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

La función de densidad será f(x) = F'(x) = 3x2 , luego :

$$f(x) = \begin{cases} 3x2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Veamos que realmente es función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3x\ 2dx = \int_{0}^{1} 3x\ 2\ dx = [\ x\ 3\ ] = 1 - 0 = 1$$

Ejemplo 2

Dada la función de cuantía P(X=i)=K i para i=1,2,3,...,20, hallar :

a) P(X = 4)

b) P(3 ≤ X ≤ 10)

c) P(X2 ≤ 100)

Resolución:

Calculamos K para que sea función de cuantía:

$\forall x, \ \Sigma P(x) = 1$

$\Sigma K i = 1 \Rightarrow K \Sigma i = 1 \Rightarrow K\ 1 + 20\ .\ 20 = 1 \Rightarrow 210\ K = 1 \Rightarrow \quad 2 \Rightarrow K =$ 1_210

Luego $P(X = i) = i \quad 210$

a) $P(X = 4) = 4$

210

b) $P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 2) =$ 1_ $\Sigma i -$ 1 $\Sigma i =$

210 210

= _1_ . 1 + 10 . 10 - 1_ . 1 + 2 . 2 = _52_

210 2 210 2 210

c) $P(X2 \leq 100) = P(-10 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) = 1 . \Sigma i =$ 55

$\uparrow$ 210 210

$X \geq 0$

2.4. Función de Distribución, F (X)

La distribución de una variable aleatoria consiste en conocer x asignando cualquier suceso relacionado con X una probabilidad.

Ejemplo

Tres lanzamientos de una moneda

Distribución de X = Número de veces que ha salido sello en los tres lanzamientos"

Modelo en el que los sucesos elementales de S son igualmente probables

Cálculo:

P (X = i) para i = 0, 1, 2, 3 con la regla casos favorables / casos posibles

Valor Probabilidad 0 1/8 1 3/8 2 3/8 3 1/8

2.5. Parámetros de una variable aleatoria

La ventaja de trabajar con variables aleatorias es que podemos hacer cálculos que adquieren significado sobre el comportamiento de la variable. En una variable aleatoria, podemos calcular todos los parámetros que habíamos visto en la estadística unidimensional: media, varianza moda, mediana, percentiles, desviaciones, etc., aunque nosotros vamos a centrarnos en las dos primeras, la media y la varianza

Media

La media de una variable aleatoria se llama esperanza matemática, se representa por E(X) o por μ y viene a darnos el *"valor esperado"* de la variable al realizar el experimento aleatorio. La fórmula para calcularla es

$$E(x)=\sum_{i=1}^{k} x_i * p_i = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + \dots + x_k * p_k$$

Varianza:

El significado es el mismo que en la estadística. Aporta una medida sobre la dispersión de los valores de X. Para calcularla usamos una de las dos fórmulas

$$VAR(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2 \cdot p_i \qquad VAR(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

2.6. Tipos de variables aleatorias

Existen dos tipos de variables aleatorias

Variables aleatorias continuas.

Una variable aleatoria es continua si el conjunto de sus valores posibles son todos los valores de un intervalo o de una unión de intervalos de números reales. Los números reales abarcan el rango que se trabajará., por tanto, la variable aleatoria X será continua si los valores asignados pueden tomar cualquier valor de R

Ejemplo 1

Medir el nivel de agua en una represa; X=" nivel de agua", esta puede tomar valores entre 0 y más infinito. Variables aleatorias discretas.

Es un conjunto donde los elementos va a ser siempre un número finito o pueden formar una secuencia numérica que tendrá un principio y final

Ejemplo 2

El lanzamiento de un dado dará como resultado un valor del 1 al 6.

El lanzamiento de una moneda, nunca podrá salir otra cosa que no sea cara o sello, por lo que habrá dos variables aleatorias

CAPITULO III:

"Variable aleatoria discreta"

3. Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria se llama discreta si se puede contar su conjunto de resultados posibles, en ese caso la variable aleatoria X puede tomar un número finito o infinito numerable de valores.

Se representan mediante letras mayúsculas y pueden tomar N posibles valores:

X= {x1,x2,...xn}

3.1. Valor esperado de una variable aleatoria discreta

El Valor Esperado o Media es "una medida estadística que describe la tendencia central de una variable aleatoria" (Rodriguez Ojeda, 2007)

FIGURA N° 7

DEFINICIÓN -VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Sean **X:** Variable aleatoria discreta

f(x): Distribución de probabilidad de **X**

μ o E(X): Media o Valor Esperado de la Variable Aleatoria **X**

Entonces:

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x)$$ es la Media o Valor Esperado de **X**

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejemplo 1.

En el experimento de obtención de muestras del lote de 5 artículos, encu entre el valor

esperado de la variable aleatoria **X:** Número de artículos defectuosos

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{2} xf(x) = 0(1/10) + 1(6/10) + 2(3/10) = 1,2$$

Media de articulos defectuosas

Sea una variable aleatoria X cuya función de probabilidades viene dada por

$$P(A) = \frac{9}{9+15} = 0,375 = 37,5\%$$

Obtener el valor esperado de X, es decir $E[X]$.

Solución:

Como la variable aleatoria es discreta para obtener la $E[x]$ aplicamos la expresión (*) y tenemos:

x	f(x)=P(X=x
0	1/10
1	6/10
2	3/10

$$E[X] = \sum_i x_i P(x_i) = 0.(0,1) + 1.(0,2) + 3.(0,1) + 4.(0,4) + 8.(0,2) = 3,7$$

Ejemplo 2

Sea una variable aleatoria X cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Obtener la esperanza matemática de X, es decir $E\,[x]$.

Como la variable aleatoria es continua para obtener el valor esperado $E[X]$ tenemos:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.

Sea una variable aleatoria X, como función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{x} \geq 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Obtener, si existe, la esperanza matemática de X.

Tenemos:

$$E[X]=\int_1^\infty x\cdot\frac{1}{x^2}\,dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=[Ln\ x]_1^\infty=\lim_{x\to\infty}(Ln\ x-Ln\ 1)=\lim_{x\to\infty}(Ln\ x-0)=\infty$$

No existe el valor esperado $E[X]$.

Ejemplo 4.

Sea una variable aleatoria X cuya función de probabilidad viene dada por:

$$P(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{8} & x=0\\ \frac{3}{8} & x=1\\ \frac{3}{8} & x=2\\ \frac{1}{8} & x=3\\ 0 & en\ el\ resto\end{cases}$$

Obtener los valores esperados:

$E[3X]\ y\ E[X^3]$.

Tenemos

$$E[3X]=\sum_i (3x_i).P(X=x_i)=(3\cdot 0)\cdot\tfrac{1}{8}+(3\cdot 1)\cdot\tfrac{3}{8}+(3\cdot 2)\cdot\tfrac{3}{8}+(3\cdot 3)\cdot\tfrac{1}{8}=\frac{36}{8}=4{,}5$$

$$E[X^3]=\sum_i x_i^3.P(X=X_i)=0^3.\tfrac{1}{8}+1^3.\tfrac{3}{8}+2^3.\tfrac{3}{8}+3^3.\tfrac{1}{8}=\frac{54}{8}=6{,}75$$

Propiedades del Valor Esperado

Si X es una variable aleatoria y $\alpha \in R$ entonces: $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.

Si X e Y son variables aleatorias entonces: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Si X es una variable aleatoria con valores posibles {a1, a2, . . . , ar } y g : R → R entonces E(g(X)) = Pr i=1 g(ai)P(X = ai).

Si X e Y son variables aleatorias independientes entonces: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

3.2. Varianza de una variable aleatoria discreta

La Varianza o Variancia es una medida estadística que cuantifica el nivel de dispersión o variabilidad de los valores la variable aleatoria alrededor de la media.

FIGURA N° 8

DEFINICIÓN - VARIANZA EN UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Sea	**X:**	Variable aleatoria discreta
	f(x):	Distribución de probabilidad
	μ, o E(X):	Media o Valor Esperado de la variable aleatoria **X**
Entonces		

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \quad \text{es la Varianza de la variable aleatoria } \mathbf{X}$$

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejemplo

En el experimento de lanzar tres monedas, se definió la variable aleatoria

X: Número de sellos qué se obtienen. Calcule la varianza de esta variable aleatoria.

Solución

Se tiene la distribución de probabilidad de X

El valor esperado de X es:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{3} xf(x) = 1.5$$

Entonces tenemos:

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 f(x) =$$
$$(0\text{-}1.5)^2(1/8) + (1\text{-}1.5)^2(3/8) + \ldots + (2\text{-}1.5)^2(3/8) + (3\text{-}1.5)^2(1/8) = 0.75$$

La fórmula calcular la varianza de una variable aleatorio discreta

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu^2] = E(x^2) - \mu^2$$

Ejemplo

La marca Nissan, ante la competencia existente en el mercado para la venta de carros nuevos, ha decidido rebajar sus precios con el fin de aumentar las ventas y disminuir sus existencias. El gerente comercial ha estimado la siguiente distribución de probabilidad del número total X de carros, que se venderán el próximo mes después de rebajar los precios.

TABLA N° 9

EJEMPLO DE VARIANZA ALEATORIA DISCRETA

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P(x)	0,05	0,15	0,35	0,25	0,20

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Obtener el número medio y la desviación estándar del número de carros que espera vender.

Teniendo en cuenta las definiciones de valor esperado y la varianza tendremos:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i P(x_i) = 0 \cdot (0,05) + 1 \cdot (0,15) +$$

$$2 \cdot (0,35) + 3 \cdot (0,25) + 4 \cdot (0,20) = 2,4$$

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 2,4)^2 . P(x_i) = \quad = (0 - 2,4)$$

$$^2 \cdot 0,05 + (1 - 2,4)^2 \cdot 0,15 + (2 - 2,4)^2 \cdot (0,35) +$$

$$(3 - 2,4)^2 . (0,25) + (4 - 2,4)^2 . (0,20) = 1,24$$

$$\sigma_x = \sqrt{1,24} = 1.11$$

O obtener el valor de la Var(X) utilizando la fórmula alternativa:

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

En efecto, tendremos que:

$$E\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 P(x_i) =$$

$= 0 \cdot (0,05) + 1^2 \cdot (0,15) + 2^2 \cdot (0,35) + 3^2 \cdot (0,25) + 4^2 \cdot (0,20)$

$= 1 \cdot (0,15) + 4 \cdot (0,35) + 9 \cdot (0,25) + 16 \cdot (0,20)$

$= 7$

Luego:

$\sigma_x^2 =$ Var (X)= $7 - (2,4)^2 = 1,24$

$$\sigma_x = \sqrt{1,24} = 1,11$$

Ejemplos usando el programa Matlab

Cálculo del valor esperado de una variable aleatoria discreta

```
>> x = [1 2 3 4];      Valores de la variable aleatoria X
```

```
>> f = [0.1 0.4 0.3 0.2];      Distribución de probabilidad de la variable X
>> mu = sum(x.*f)  Media de X
mu =2.6000
```

Valor esperado de una expresión

```
>> g = 2*x+1;         Una expresión con X: g(X) = 2x + 1
>> mug=sum(g .*f)  Media de g(X)
mug =6.2000
```

Cálculo de la varianza de una variable aleatoria discreta

```
>> sigma2 = var(x, f)
sigma2 =0.8400
```

3.3. Teorema de Densidad

Se denomina densidad discreta a la probabilidad de que una variable aleatoria discreta X tome un valor numérico determinado (x). Se representa: f(x) = P[X=x]

La suma de todas las densidades será igual a 1

Por ejemplo:

Al arrojar un dado dos veces podríamos estar interesados sólo en la suma de los puntos obtenidos y no en el par de valores que dio origen a ese valor de la suma.

Definimos la variable aleatoria X= puntuación obtenida. Los posibles resultados son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y todos esos valores tienen una probabilidad de 1 / 6.

Si ponemos en forma de tabla los resultados, la función de probabilidad quedaría:

TABLA N° 4

EJEMPLO DE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Valores de la variable x_i	Función de Probabilidad $p_i = P[X = x_i]$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

1. Lanzar una moneda al aire dos veces

Sucesos elementales:

E = {**CC**, **CX**, **XC**, **XX**}. Donde: **C** (Cara) y **X** (Cruz)

Se define el suceso X: N° de caras

Asignación de números reales: (**CC**, 2); (**CX**, 1); (**XC**, 1); (**XX**, 0) La variable X viene definida por los valores: 0, 1, 2

Por tanto, $X = \{0, 1, 2\}$

3.4. Teorema de Chebyshev

Proporciona una estimación conservadora (intervalo de confianza) de la probabilidad de que una variable aleatoria en un intervalo alrededor de la media.

El valor que se obtiene es únicamente una referencia, pese a ello es útil dado que se puede aplicar a un amplio abanico de variables aleatorias independientemente de sus distribuciones. La única restricción es que k tiene que ser mayor que 1 (k>1).

Sea X una variable aleatoria discreta con media μ y varianza σ^2, entonces, la probabilidad que X tome un valor dentro de k desviaciones estándar σ de su media μ, es al menos 1 – 1/k

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - 1/k^2, k \in R^+, k \geq 1$$

Ejemplo 1 de aplicación de la desigualdad de Chebyshev

Un administrador de un banco está gestionando una cartera con una rentabilidad media del 8,14% y una desviación típica del 5,12%. Qué porcentaje del retorno se encuentran al menos a 3 desviaciones típicas de la rentabilidad media simplemente aplicaríamos la formula

k = 1,96

Sustitución del valor de k: 1-1/1,96^2 = 0,739 = 73,9%

El 73,9% de los resultados está en el intervalo de confianza situado a 1,96 desviaciones típicas de la media.

Uso de otros valores distintos en k.

k = 2,46

k = 3

Sustitución de k: 1-1/2,46^2 = 0,835 = 83,5%

Sustitución de k: 1-1/3^2 = 0,889 = 88,9%

83,5% de los datos que están a una distancia de 2,46 desviaciones típicas de la media y un 88,9% que están a 3 desviaciones típicas de la media.

A mayor valor de K (mayor desviación del valor estimado sobre su media) mayor probabilidad de que la variable aleatoria se encuentro dentro del intervalo acotado.

Ejemplo 2

El gerente de un cierto bar ha llevado desde el último año un control diario del número de copas de licor que vende, obteniendo que el número medio de copas de licor vendidos ha sido de 200 por día con una desviación típica de 20 copas de licor.

Obtener:

Una cota de probabilidad de que un día le demanden 225 o más copas de licor.

El número de copas de licor que tendrá que encargar cada día para tener como mínimo una probabilidad del 0,8 de satisfacer la demanda.

Tenemos

Sea X la variable aleatoria que representa "el número de copas de licor vendidos diariamente" y admitimos que $E[X]=200\ y\ \sigma(X)=20,$ pero como no conocemos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X para acotar la probabilidad pedida tendremos que utilizar la desigualdad de Chebychev en su forma:

$$P[|X-\mu| \geq \lambda\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}$$

que nos proporcionará una cuota superior de dicha probabilidad.

La probabilidad pedida la podemos expresar como:

$$P[X \geq 225] = P[X - 200 \geq 25] \leq P[|X - 200| \geq 25]$$

y aplicando la desigualdad de Chebychev será:

$$\leq \frac{20^2}{25^2} = \frac{400}{625} = 0,64$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebychev en la forma:

$$P[\mu - k < x < \mu + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$1 - \frac{\sigma^2}{k^2} = 0,8$$

$$1 - \frac{20^2}{k^2} = 0,8 \quad ; \quad k = 45$$

y los límites del intervalo serán:

$$\mu - k = 200 - 45 = 155$$
$$\mu + k = 200 + 45 = 245$$

Luego:

$$P[155 < X < 245] \geq 0,8$$

Y, por tanto, el número de copas de licor que tendrá que encargar será 245 para satisfacer la demanda el 80% de los días.

Ejemplo 3

Sea una variable aleatoria X de tipo discreto, cuya distribución de probabilidad viene dada por:

Tabla N° 5:Ejemplo de distribución de probabilidad

X	*P(X=x)*
1	0,03
2	0,04
3	0,07
4	0,72
5	0,07
6	0,04
7	0,03
	1,00 total

Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Obtener una cuota superior de las probabilidades de los sucesos $|X-\mu|\geq k\sigma,$ para $k=2,3y4.$ Comparar estos valores con las probabilidades exactas para estos sucesos.

Calculando la media y la varianza de la distribución, tendríamos:

$$\mu=E[X]=\sum_i x_i P(X=x_i)=$$

$$1\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}04+3\cdot 0{,}07+4\cdot 0{,}072+5\cdot 0{,}07$$

$$+\ 6\cdot 0{,}04+7\cdot 0{,}03=4$$

$$\sigma^2=\text{var}$$

$$(X)=\sum_i x_i^2 P(X=x_i)-(E[X])^2=1$$

Utilizando la expresión general de la desigualdad de Chebychev tenemos.

$$P[|X-\mu|\geq 2\sigma]\leq\frac{1}{2^2}=0,2500$$

$$P[|X-\mu|\geq 3\sigma]\leq\frac{1}{3^2}\ \square\ 0,1111$$

$$P[|X-\mu|\geq 4\sigma]\leq\frac{1}{4^2}=0,0625$$

Las propiedades exactas serían:

Para $k=2,\mu=4,\sigma=1$

$$P[|X-\mu|\geq 2\sigma]=P[(X-4)\geq +2]+P[(X-4)\leq -2]$$

$$=P[X\geq 6]+P[X\leq 2]$$

= 0,04+0,03+0,03+0,04

= 0,14

Para $k=3,\mu=4,\sigma=1$

$$P[|X-\mu|\geq 3\sigma]=P[(X-4)\geq +3]+P[(X-4)]\leq -3$$

$$=P[X\geq 7]+P[X\leq 1]$$

= 0,03+0,03

=0,06

Análogamente para $k=4,\mu=4,\sigma=1$

$$P[|X-\mu|\geq 4\sigma]=P[(X-4)\geq +4]+P[(X-4)\leq -4]$$

$$=P[X\geq 8]+P[X\leq 0]$$

= 0+0

= 0

Las probabilidades exactas son considerablemente menores que las obtenidas por la desigualdad de Chebychev.

CAPITULO IV:

"Distribución de Probabilidad Discreta"

4. Distribución de Probabilidad Discreta

4.1. Distribución discreta uniforme

Una variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme si cada uno de los resultados de su espacio muestral tiene puede obtenerse con igual probabilidad.

Ejemplo.

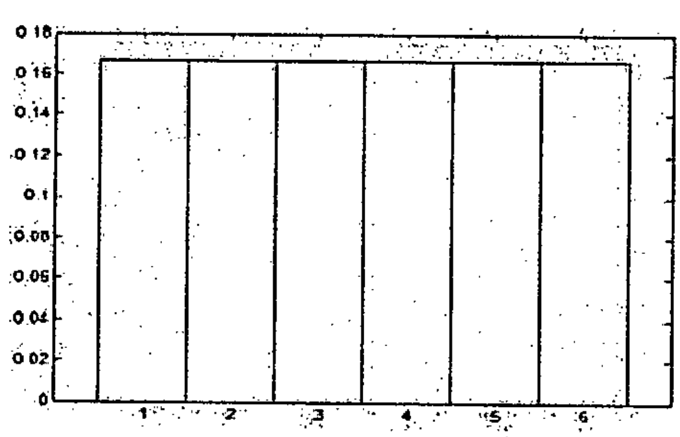
Un experimento consiste en lanzar un dado y observar el resultado.

Si X es la variable aleatoria correspondiente a los seis resultados posibles, encuentre su distribución de probabilidad.

Cada resultado tiene igual probabilidad, por lo tanto, la distribución de probabilidad de X es discreta uniforme:

FIGURA N° 10

GRÁFICO DE LA DISTRIBUCIÓN DISCRETA UNIFORME



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

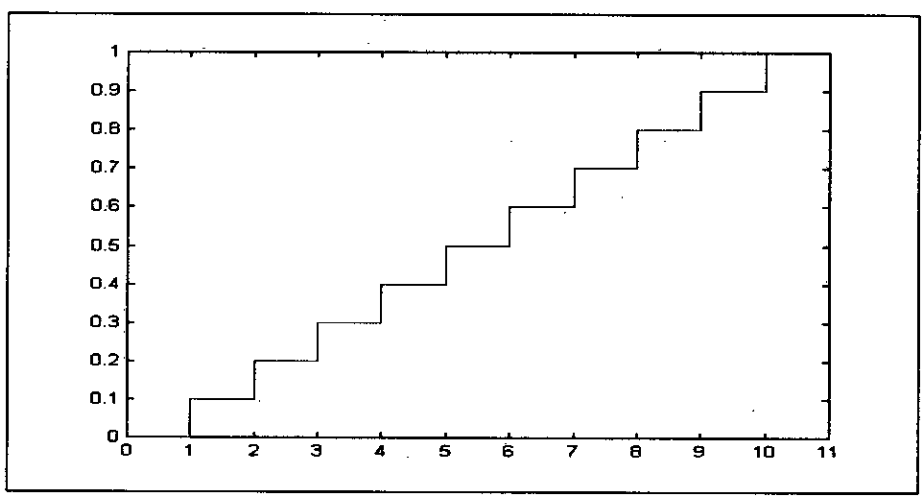
Ejemplo con Matlab

$$y = f(x \mid N) = \frac{1}{N} I_{(1,\ldots\ldots,N)}(x)$$

```
x=0:10;

y=unidcdf(x,10);

stairs(x,y)

set(gca,'Xlim',[0 11]);

» n=unidrnd(10,1,4)

n =    10    8    2    5
```

FIGURA N° 11

DIAGRAMA EN MATLAB DE DISTRIBUCIÓN DISCRETA



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Aquí, de los números del 1 al 10, escojo en forma aleatoria uniforme, un vector de 1 x 4.

4.2. Distribución de Bernoulli

"Es un experimento estadístico en el que puede haber únicamente dos resultados posibles. Es costumbre designarlos como "éxito" y "fracaso" aunque pueden tener otra representación y estar asociados a algún otro significado de interés." (Rodriguez Ojeda, 2007)

Si la probabilidad de obtener "éxito" en cada ensayo es un valor que lo representamos con p, entonces, la probabilidad de obtener "fracaso" será el complemento q = 1 – p.

Ejemplo

"Lanzar una moneda, probabilidad que salga sello".

Se trata de un solo experimento, con dos resultados posibles: el éxito (p) se considerará sacar sello valdrá 0,5. El fracaso (q) que saliera cara, que vale (1 - p) = 1 - 0,5 = 0,5.

La variable aleatoria X medirá "número de sellos que salen en un lanzamiento", y sólo existirán dos resultados posibles: 0 (ningún sello, es decir, salir cara) y 1 (un sello).

Por tanto, la variable aleatoria X se distribuirá como una Bernoulli, ya que cumple todos los requisitos.

$$X \sim Be(0,5)$$
$$P(X=0) = f(0) = 0,5^0 0,5^1 = 0,5$$
$$P(X=1) = f(1) = 0,5^1 0,5^0 = 0,5$$

4.3. Distribución binomial

El número X de éxitos en n experimentos de Bernoulli se denomina variable aleatoria binomial. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama distribución binomial y sus valores se denotarán como b (x; n, p), ya que dependen del número de ensayos y de la probabilidad de éxito en un ensayo dado. (Walpole, Myers, & Ye, 2012)

La diferencia con la de Bernoulli es el número de veces que se realiza un experimento

La distribución binomial es típica de las variables que proceden de un experimento que cumple las siguientes condiciones:

1) El experimento está compuesto de n pruebas iguales, siendo n un número natural fijo.

2) Cada prueba resulta en un suceso que cumple las propiedades de la variable binómica o de Bernouilli, es decir, sólo existen dos posibles resultados, mutuamente excluyentes, que se denominan generalmente como éxito y fracaso.

3) La probabilidad del ,éxito (o del fracaso) es constante en todas las pruebas. P(éxito) = p ; P(fracaso) = 1 - p = q

4) Las pruebas son estadísticamente independientes,

Ejemplo

La probabilidad de que un estudiante de postgrado apruebe el curso de estadística y probabilidades de manera satisfactoria es de 0.60. Si se toma una muestra de 10 estudiantes:

$$P(A) = 0,6 \Rightarrow P(A^c) = 0,4$$

$$f(x) = P(X = x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 3 estudiantes aprueben?

$$P(X = 3) = C_3^{10} * 0,6^3 * 0,4^7 = 0,0425$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 4 estudiantes aprueben?

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,1663$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 estudiantes aprueben?

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = 0,9452$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 estudiantes desaprueben?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0,9537$$

Ejemplo:

Si tiramos tres veces la moneda al aire y definimos X como el número de caras, esta variable seguirá los parámetros n = 3 y p = 0,5. Lo mismo que B(3; 0,5).

Las características fundamentales de una distribución B(n,p) son:

- Función de probabilidad:

$f(x) = P(X = x) = (nx)p^x q^{n-x}$

- Función de distribución:

$F(x) = P(X \leq x) = \sum (nx)\, p^x\, q^{n-x}$

Media: $\mu = np$

Varianza : $\sigma^2 = npq$;

donde x es el numero de aciertos, n el número de ensayos, p la probabilidad de éxito de cada ensayo, q la probabilidad de fracaso (1-p) y el número combinatorio (nx), que se lee "n sobre x" es igual a n! / (x! (n - x)!)

Ejemplo usando Matlab

=0.5, x=[0,10].

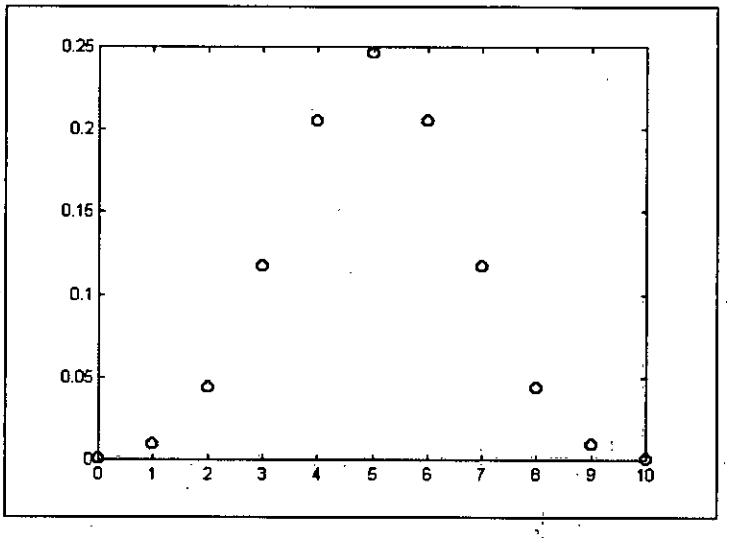
$$y = f(x \mid n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{(1-x)} I_{(0,1,\ldots,n)}(x)$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad , \quad q = 1 - p$$

```
x=0:10;
y=binopdf(x,10,0.5);
    plot(x,y,'o');
```

FIGURA N° 12

DIAGRAMA EN MATLAB DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

4.4. Distribución geométrica

Se realizan sucesivas repeticiones independientes de pruebas de Bernoulli idénticas, con probabilidad de éxito p, hasta que aparece el primer éxito, y se mide el número de fracasos. Caso particular de la distribución binomial negativa con r = 1.

4.5. Distribución de Poisson

"Es la predicción del número de eventos en un determinado período de tiempo, como, por ejemplo, el número de automóviles que se presenta a una zona de peaje en el intervalo de un minuto. Microsoft Office Excel permite calcular dichas probabilidades, introduciendo la función", fx: POISSON. (Martinez Gómez)

Ejemplo usando Matlab

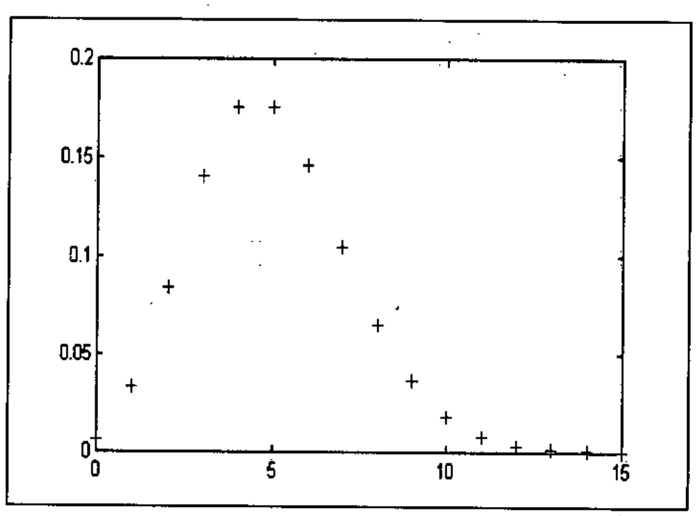
λ=5.

$$y = f(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} I_{(0,1,K)}(x)$$

```
x=0:15;

y=poisspdf(x,5);

plot(x,y,'+');

set(gca, 'Ylim', [0 0.2]);
```

FIGURA N° 13

DIAGRAMA EN MATLAB DE DISTRIBUCIÓN POISSON



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

CAPITULO V:

"Variable aleatoria continua"

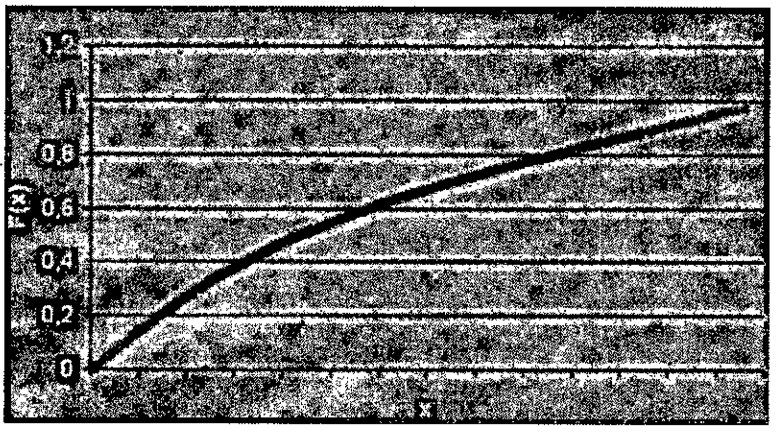
5. Variable aleatoria continua

5.1. Definición

Una variable aleatoria es continua cuando el conjunto de sus valores posibles son todos los valores de un intervalo o de una unión de intervalos de números reales.

FIGURA N° 14

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Estas variables están asociadas a ensayos, en los cuales la variable medida puede tomar cualquier valor en un intervalo

Ejemplo

La concentración de cromo en el Riachuelo es una variable aleatoria continua. La distribución de una variable aleatoria continua se describe mediante la función de densidad de probabilidad, ó simplemente función de densidad fX . La función de densidad, fX, de una variable aleatoria X satisface: 1. fX (x) ≥ 0 2. ∫ fX (x) dx = 1 3. P(X ∈ A) = ∫A fX (x) dx

5.2. Función de densidad de probabilidad

Una función de probabilidad continua viene representada por una función f(x), definida por los números reales, llamada función de densidad, tal que:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in W$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

5.3. Función de distribución

Al igual que en el caso discreto se puede definir una función de probabilidad acumulada, la cual en el caso continuo se denomina función de distribución

¿Cuáles de las siguientes funciones representan, función de densidad de una variable aleatoria continua X? Grafique las que sean función de densidad de probabilidad. Determine su rango en cada caso y la función de distribución acumulada:

a.-

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Las condiciones para ser una función de densidad de una variable aleatoria continua son las siguientes:

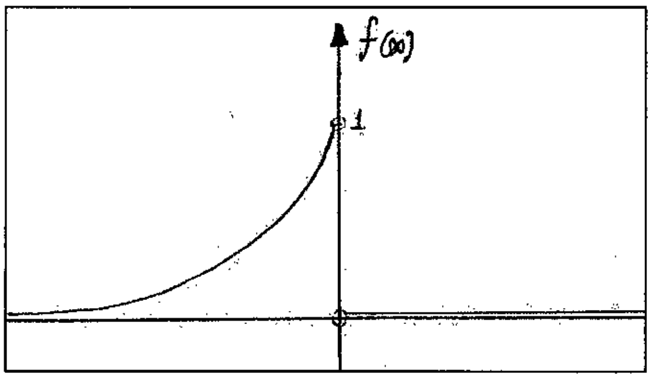
$$f(x) > 0 \;\; \forall \;\; x \in R_x.$$

$$\int_{Rx} f(x).dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^x.dx = e^x \Big|_{-\infty}^{0} = 1$$

Su gráfica es:

FIGURA N° 15

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Su rango es:

$Rx = < -\infty; o >$

La función de Distribución Acumulada:

$$F(x) = P[-\infty < x < 0] = F(0) - F(-\infty)$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{t}.dt - \underset{x \to -\infty}{Lim} \int_{-\infty}^{x} e^{t}.dt$$
$$F(x) = 1$$

Por lo tanto, la Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 1; & -\infty < x < 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$$

b.- $$f(x) = \begin{cases} 1; & -1/2 \le x \le 1/2 \\ 0; & en \quad otros \quad casos \end{cases}$$

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$f(x) > 0$; $\forall$ $x \in R_X$.

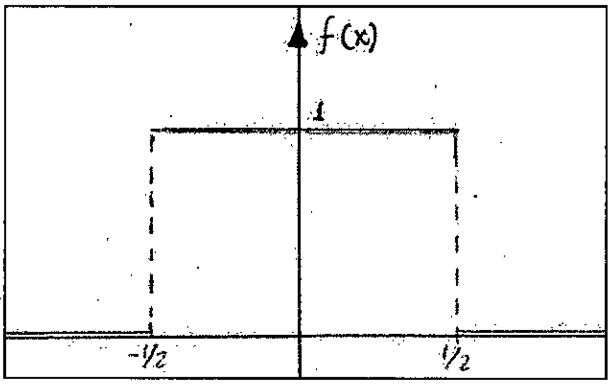
$$\int_{Rx} f(x).dx = 1 \rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} 1.dx = x\Big|_{-1/2}^{1/2} = 1$$

$\therefore$ Es una función de densidad de variable aleatoria continua.

Su gráfica es:

FIGURA N° 16

FUNCIÓN DE DENSIDAD



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Su rango es: $R_x = [-1/2;1/2]$

La Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$$ Si x<-1/2;

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{-1/2} 0.dt + \int_{-1/2}^{x} 1.dt = x + 1/2$$ Si $-1/2 \leq x \leq 1/2;$

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{-1/2} 0.dt + \int_{-1/2}^{1/2} 1.dt + \int_{1/2}^{\infty} 0.dt = 1$$ Si x>1/2;

Por tanto la Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < -1/2 \\ x + 1/2; & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1; & x > 1/2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2); & -1\le x\le 1\\ 0; & en \quad otros \quad casos\end{cases}$$

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$f(x) > 0\ ;\ \forall\ x \in R_x=[-1;1]$$

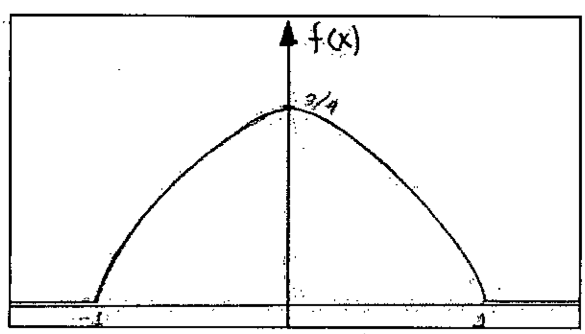
$$\int_{Rx} f(x).dx = 1 \to \int_{-1/2}^{1/2} \frac{3.(1-x^2)}{4}.dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2.dx = 1$$

$\therefore$ Es una función de densidad de variable aleatoria continua.

Su gráfica es:

FIGURA N° 17

FUNCIÓN DE DENSIDAD



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Su rango es: $R_x=[-1;1]$

La Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$$

Si x<-1;

$$F(x)=P[X\le x]=\int_{-\infty}^{-1}0.dt+\int_{-1}^{x}\frac{3(1-x^2)}{4}.dt$$

$$F(x)=\frac{3(x+1)-(x^3+1)}{4}$$

Si $\quad -1\le x\le 1;$

$$F(x)=P[X\le x]=\int_{-\infty}^{-1}0.dt+\int_{-1}^{1}\frac{3(1-x^2)}{4}.dt+\int_{1}^{\infty}0.dt=1$$

Si x>1;

Por consiguiente, la Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x)=\begin{cases}0; & x<-1\\ \dfrac{3(x+1)-(x^3+1)}{4}; & -1\le x\le 1\\ 1; & x>1\end{cases}$$

d. $f(x)=\dfrac{e^{-|x|}}{2};\quad -\infty<x<\infty$

La función se define como:

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}/2; & x<0\\ 1/2; & x=0\\ e^{-x}/2; & x>0\end{cases}$$

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

f(x) > 0 ; $\forall\ x\in R_x$

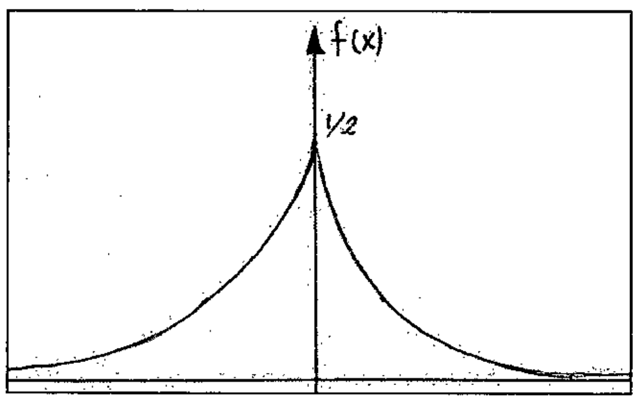
$$\int_{Rx} f(x).dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x}}{2}.dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx = \left.\frac{e^{x}}{2}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-x}}{2}\right|_{0}^{\infty} = 1$$

$\therefore$ Es una función de densidad de variable aleatoria continua.

Su gráfica es:

FIGURA N° 18

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Su rango es:

$R_x = < -\infty; \infty >$

La Función de Distribución Acumulada es:

- Si x<0;

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}}{2}.dt = \frac{e^{x}}{2}$$

- Si x>0;

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{t}}{2}.dt + \int_{0}^{x} \frac{e^{-t}}{2}.dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

Por tanto, la Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}}{2}; & x<0\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-x}}{2}; & x>0\end{cases}$$

5.4. Media y varianza de variables aleatorias continuas

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad, fX

La media o esperanza (E(X)) está dada por:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt$$

La varianza por:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu_X)^2\, f_X(t)\, dt$$

CAPITULO VI:

"Distribución de probabilidad continua "

6. Distribución de probabilidad continua

6.1. Distribución normal

La Distribución Normal es "la piedra angular de la teoría estadística moderna. Conocida y estudiada desde hace mucho tiempo, es utilizada para describir el comportamiento aleatorio de muchos procesos que ocurren en la naturaleza y también realizados por los humanos" (Rodriguez Ojeda, 2007)

La distribución normal fue registrada por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; es por ello que también se le conoce, como la "campana de Gauss".

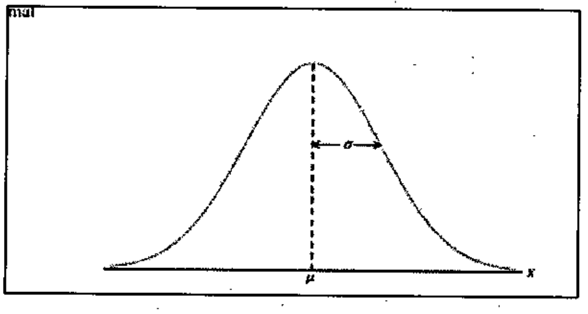
La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos medidas,su media y su desviación estándar, expresadas por µ y σ.

Con esta anotación, la densidad de la normal viene dada por la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

FIGURA N° 19

CURVA NORMAL



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Para (Walpole, Myers, & Ye, 2012)"la distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo "de la estadística es la distribución normal."

"Su importancia se debe fundamentalmente a la frecuencia con la que distintas variables asociadas a fenómenos naturales y cotidianos siguen, aproximadamente, esta distribución. Caracteres morfológicos (como la talla o el peso), o psicológicos (como el cociente intelectual) son ejemplos de variables de las que frecuentemente se asume que siguen una distribución normal" (Pértegas Díaz S., 2001)

Propiedades de la distribución normal:

La distribución normal posee ciertas propiedades importantes tal como lo menciona (Pértegas Díaz S., 2001) son:

I. Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
II. La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre y es teóricamente posible. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a 1.
III. Es simétrica con respecto a su media. Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
IV. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica (). Cuanto mayor sea, más aplanada será la curva de la densidad. V. El área bajo la curva comprendido entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95. En concreto, existe un 95% de posibilidades de observar un valor comprendido en el intervalo

Ejemplo

Estatura de las personas

Dosis de un aditivo

Toma de una cámara frigorífica

En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de Julio si una distribución normal con media de 23° y desviación típica de 5°. Calcular el nuero de días del mes en lo que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°

$$P(21 < X < 27) = P(N(23{,}5) < 21) - P(23{,}5) < 27) =$$
$$P(N(0{,}1) < \frac{21-23}{5}) - P(N(0{,}1) < \frac{27-23}{5}) = [1 - P(N(0{,}1) > 0{,}4)] - [P(N(0{,}1) > 0{,}8)$$
$$= 0{,}7881 - (1 - 0.6554) = 0{,}4425$$

El número de días seria 0,4425 *30 =13 días

Ejemplo con Matlab

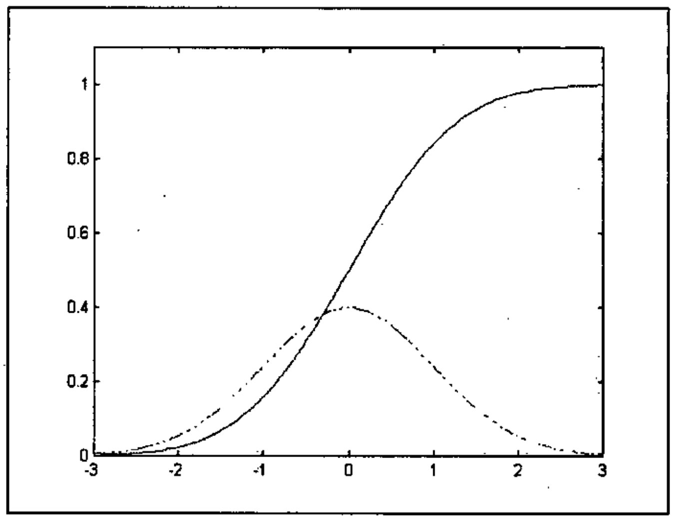
Distribución acumulada de la distribución normal. *Media nula, desviación 1.*

$$y = f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

```
x=-3:0.05:3;

y=normpdf(x,0,1);

z=normcdf(x(1:i),0,1);

plot(x,y,'-.',x,z,'-');

set(gca,'Ylim', [0 1.1]);
```

FIGURA N° 20

DIAGRAMA EN MATLAB DE DISTRIBUCIÓN NORMAL



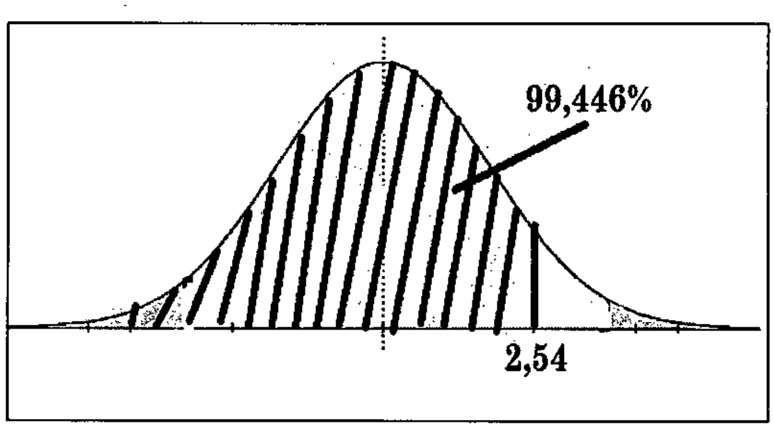
Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Manejo de la tabla de distribución normal estándar

1.- $P[Z \leq 3{,}18] = \phi(3{,}18) = \mathbf{0.99926}$

FIGURA N° 21

PROBABILIDAD SOLICITADA

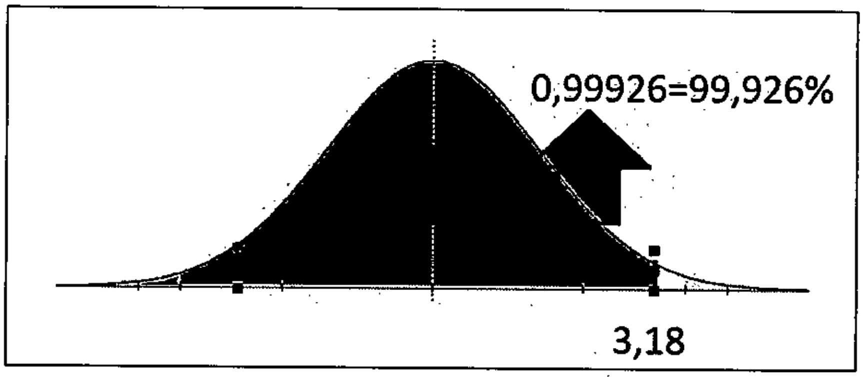


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

2.- $P[Z \leq 3{,}18] = \phi(3{,}18) = 0{,}99926$

FIGURA N° 22

PROBABILIDAD SOLICITADA

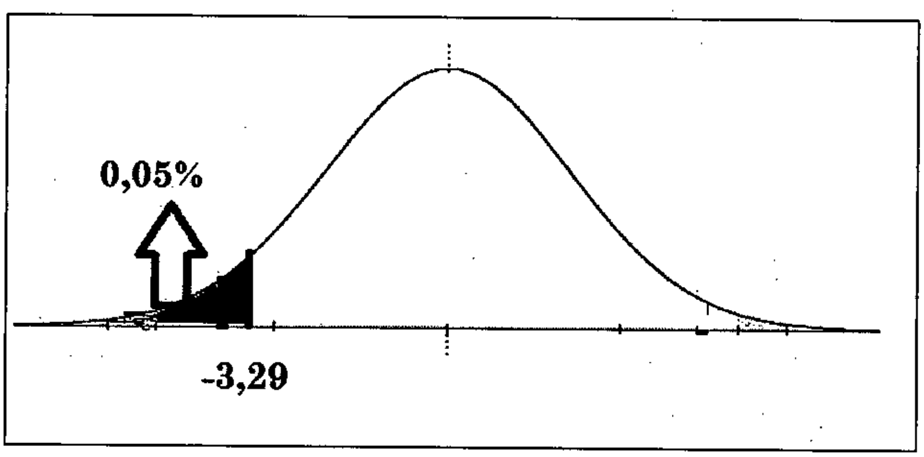


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

3.- $P[Z \leq -3{,}29] = \mathbf{0{,}0005}$

FIGURA N° 23

PROBABILIDAD SOLICITADA

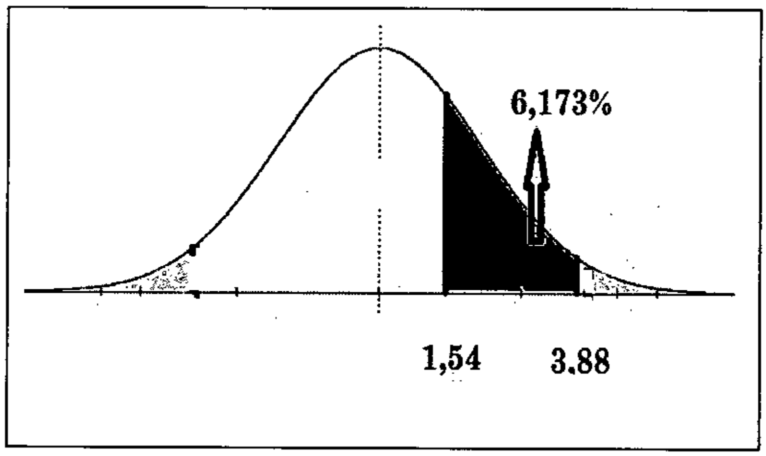


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

4 $P[1,54 \leq Z \leq 3,88] = \phi(3,88) - \phi(1,54) = \mathbf{0,99995} - \mathbf{0,93822} = 0,06173 = 6,173\%$

FIGURA N° 24

PROBABILIDAD SOLICITADA

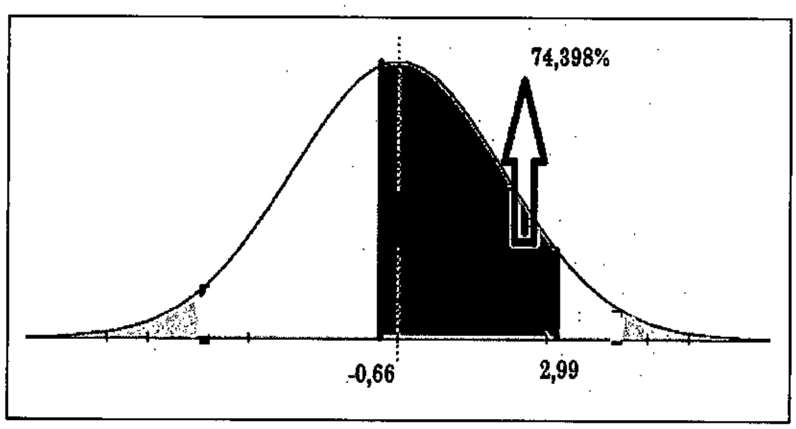


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

$P[-0,66 \leq Z \leq 2,99] = \phi(2,99) - \phi(-0,66) = \mathbf{0,99861} - \mathbf{0,25463} = 0,74398 = 74,398\%$

FIGURA N° 25

PROBABILIDAD SOLICITADA



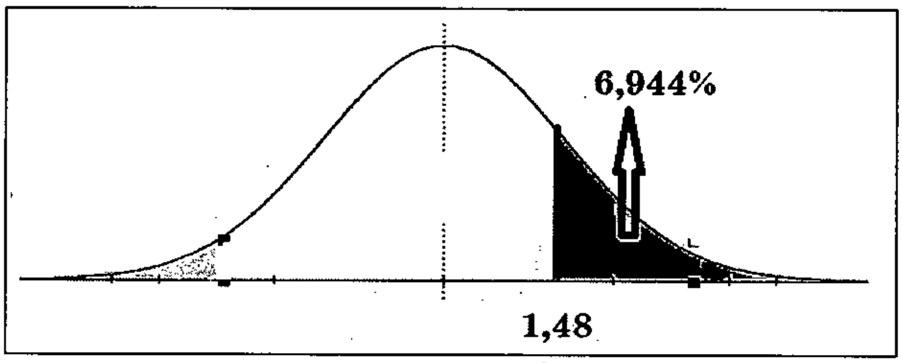
Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

6.- $P[Z > 1,48] = 1 - \phi(1,48) = 1 - \mathbf{0,93056} = 0,06944 = 6,944\%$

$$P[Z > 1,48] = \phi(-1,48) = \mathbf{0.06944} = 6,944\%$$

FIGURA N° 26

PROBABILIDAD SOLICITADA



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

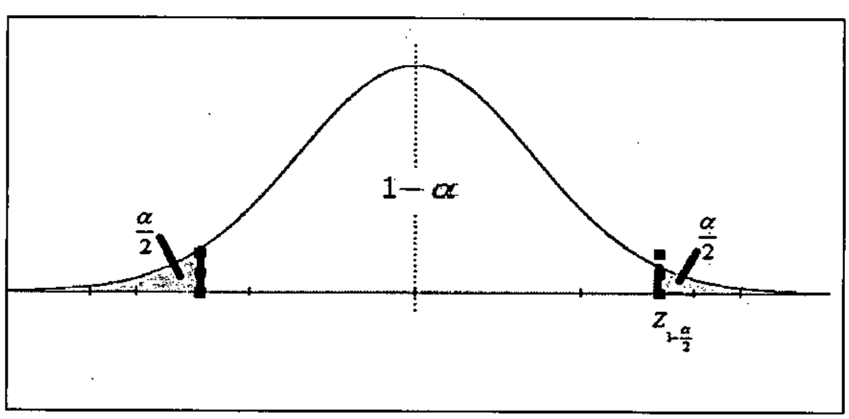
7.- Nivel de confianza: $1-\alpha$

Nivel de significación: α

$1-\alpha \in < 90;99,99\% >$

FIGURA N° 27

PROBABILIDAD SOLICITADA



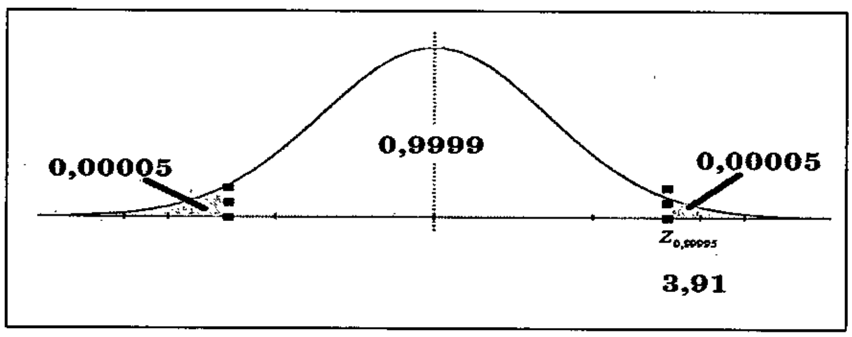
Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejercicios:

1.- Si $1-\alpha=0,95=95\%\Rightarrow Z=1,96$

FIGURA N° 28

PROBABILIDAD SOLICITADA

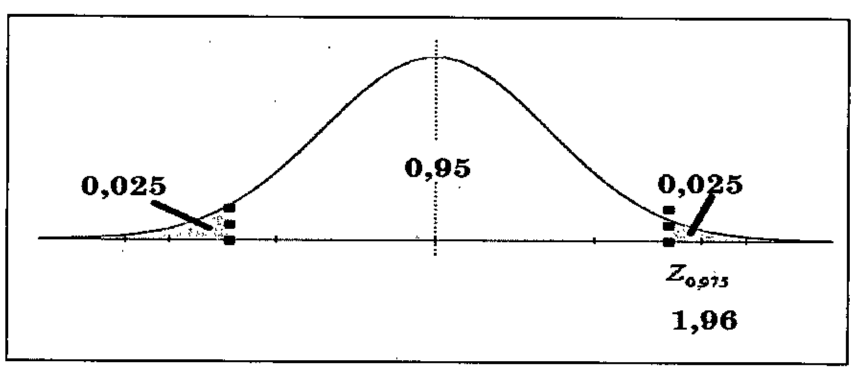


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

$1-\alpha=0,9999=99,99\%\Rightarrow Z=3,91$

FIGURA N° 29

PROBABILIDAD SOLICITADA

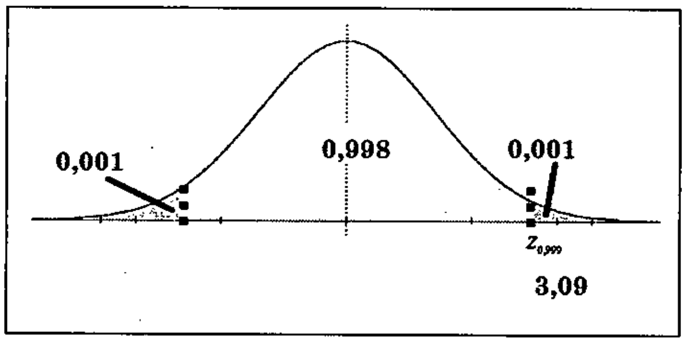


Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

SI $1-\alpha=0,998=99,8\%\Rightarrow Z=3,09$

FIGURA N° 30

PROBABILIDAD SOLICITADA



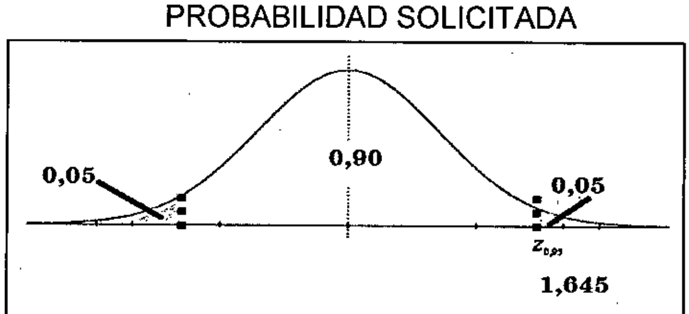
Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Si $1-\alpha=0,90=90\%\Rightarrow Z=1,645$

$$1,79\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{0.96327}$$
$$Z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,964$$
$$1,8\ldots\ldots\ldots\ldots 0,96407$$
$$\frac{Z-1,79}{1,80-1,79}=\frac{0,964-0,96327}{0,96407-0,96327}$$
$$Z=\frac{[1,8-1,79]0,964-0,96327}{0,96407-0,96327}+1,79=1,79875$$

FIGURA N° 31

PROBABILIDAD SOLICITADA



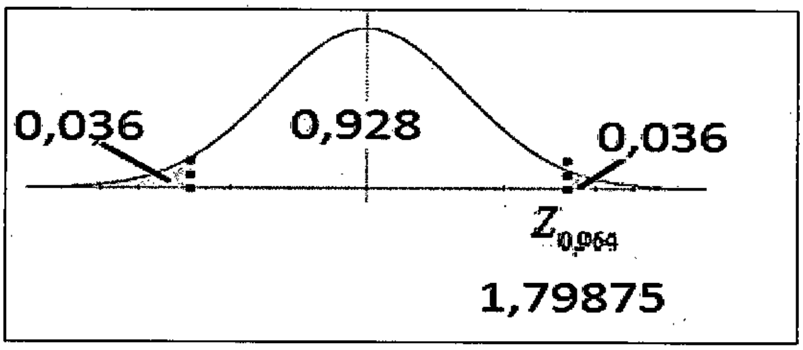
Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

5.- si $1-\alpha=0{,}928=92{,}8\% \Rightarrow Z=$

$$1{,}79\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{0.96327}$$
$$Z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0{,}964$$
$$1{,}8\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0{,}96407$$
$$\frac{Z-1{,}79}{1{,}80-1{,}79}=\frac{0{,}964-0{,}96327}{0{,}96407-0{,}96327}$$
$$Z=\frac{[1{,}8-1{,}79]0{,}964-0{,}96327}{0{,}96407-0{,}96327}+1{,}79=1{,}79875$$

FIGURA N° 32

PROBABILIDAD SOLICITADA



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Ejercicios Resueltos

1) Hallar el área bajo la curva normal tipificada:

a) Entre Z = 0 y Z = 1,2 Sol: 0,38493

b) Entre Z = -0,68 y Z = 0 Sol: 0,2517

c) Entre Z = -0,46 y Z = 2,21 Sol: 0,6636

d) Entre Z = 0,81 y Z = 1,94 Sol: 0,1828

e) A la derecha de Z = -1,28 Sol: 0,8997

2) Si "área" se refiere al área bajo la curva normal tipificada, hallar el valor o los valores de Z tales que:

a) El área entre 0 y Z sea 0,3770 Sol: $Z = \pm 1,16$

b) El área a la izquierda de Z sea 0,8621 Sol: $Z = 1,09$

c) El área entre -1,5 y Z sea 0,0217 Sol: $Z = -1,35$

3) El peso medio de 500 estudiantes varones de una universidad es de 68,5 Kg. y la desviación típica es de 10 Kg. Suponiendo que los pesos están distribuidos normalmente, hallar el número de estudiantes que pesan:

a) Entre 48 y 71 kg. Sol: entre 289 y 290 estudiantes.

b) Más de 91 kg. Sol: entre 6 y 7 estudiantes.

4) La media del diámetro interior del conjunto de lavadoras producidas por una máquina es 1,275 cm. y la desviación típica de 0,0125 cm. El propósito para el cual se han diseñado las lavadoras permite una tolerancia máxima en el diámetro de 1,26cm. a 1,29 cm., de otra forma las lavadoras se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de lavadoras defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que los diámetros están distribuidos normalmente.

Sol: 23,02%

5) Si **X** está distribuida normalmente con media 5 y desviación típica 2, hallar $P(\mathbf{X} > 8)$.

Sol: 0,0668

6) Se tiene un programador de entrenamiento diseñado para mejorar la calidad de las habilidades de los supervisores de la línea de producción. Debido a que el programa es auto administrativo, los supervisores requieren un número diferente de horas para terminarlo. Un estudio de los participantes anteriores indica que el tiempo medio que se lleva completar el programa es de 500 h. y que esta variable aleatoria normalmente distribuida tiene una desviación estándar de 100 h.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante elegido al azar requiera más de 500 h. para completar el programa? Sol: 0,5

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato elegido al azar se tome entre 500 h. y 650 h. para completar el programa de entrenamiento? Sol: 0,4332

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato elegido al azar se tome más de 700 h. en completar el programa?
Sol: 0,0228

d) Suponga que el director del programa de entrenamiento desea saber la probabilidad de que un participante escogido al azar requiera entre 550 y 650 h. para completar el trabajo requerido en el programa. ¿Cuánto ha de ser ese valor? Sol: 0,2417

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato elegido al azar se tomará menos de 580 h. para completar el programa?
Sol; 0,7881

f) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato escogido al azar se tome entre 420h? y 570 h. para completar el programa?
Sol: 0,5461

7) Dada una variable con distribución normal de media $\mu = 40$ y desviación estándar $\sigma = 6$ encuentre el valor de x que tiene:

a) El 34% del área a la izquierda. Sol: 37,54

b) El 5% del área a la derecha. Sol: 49,87

8) Cierto tipo de pieza para automóvil tiene un promedio de duración de tres años, con una desviación estándar de 0,5 años. Suponga que las duraciones de las piezas están normalmente distribuidas y encuentre la probabilidad de que una pieza determinada tenga un tiempo de duración de más de 3,5 años. Sol: 0,1587

9) Una fábrica de alimentos empaca productos cuyos pesos están normalmente distribuidos con media de 450 gramos y desviación estándar de 20 gramos. Encuentre la probabilidad de que un paquete escogido al azar pese entre 425 y 486 gramos.

Sol: 0,8585

10) En un proceso industrial el diámetro de una arandela es muy importante. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser de 3,0 ± 0,01 mm. La condición es que no acepta ninguna arandela que se salga de estas especificaciones. Se sabe que en el proceso los diámetros de las arandelas tienen distribución normal con media de 3,0 mm y una desviación estándar de 0,005 mm. ¿Qué porcentaje de arandelas será rechazado?

Sol: 4,56%

11) Determine el área situada debajo de la curva normal estándar que está:

a) A la izquierda de $z = 0,94$ Sol: 0,8264

b) A la derecha de $z = -0,65$ Sol: 0,7422

c) A la derecha de $z = 1,76$ Sol: 0,0392

d) A la izquierda de $z = -0,85$ Sol: 0,1977

e) Entre $z = -0,87$ y $z = -1,28$ Sol: 0,0919

f) Entre $z = -0,34$ y $z = 0,62$ Sol: 0,3655

12) Determine las probabilidades de que una variable aleatoria tome un valor entre 12 y 15 dado que tenga una distribución normal con:

a) $\mu = 10$ y $\sigma = 5$ Sol: 0,1859

b) $\mu = 20$ y $\sigma = 10$ Sol: 0,09668

13) Obtenga Z si:

a) El área de la curva normal entre 0 y Z es 0,2019 Sol: $Z = \pm 0,53$

b) El área de la curva normal a la derecha de Z es 0,8810 Sol: $Z = -1,18$

c) El área de la curva normal a la derecha de Z es 0,0336 Sol: $Z = 1,83$

d) El área de la curva normal entre -Z y Z es 0,2662 Sol: $Z = \pm 0,34$

4) La cantidad de radiación cósmica a la cual está expuesta una persona mientras vuela en avión es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con $\mu = 4,35$ mrem y $\sigma = 0,59$ mrem. Determine las probabilidades de que una persona que va en este vuelo está expuesta a:

a) Más de 5,00 mrem de radiación cósmica. Sol: 0,1357

b) Entre 3,00 y 4,00 mrem de radiación cósmica. Sol: 0,2666

15) La cantidad real de café instantáneo que vierte una máquina en jarras de 4 onzas varía de una jarra a otra, y se puede fijar como una variable aleatoria que tiene una distribución normal con $\sigma = 0,04$ onzas. Si sólo el 2% de las jarras va a contener menos de 4 onzas de café. ¿Cuál debe ser el contenido medio de estas jarras?

Sol: $\mu = 4,082$ onzas.

16) Una empresa fabrica juntas teóricas para el trasbordador espacial de la NASA. Las cuales se han diseñado para sellar conexiones y piezas en el sistema de combustible a fin de impedir fugas. Un tipo de juntas ha de tener 5 centímetros de diámetro para que encaje como es debido; no puede variar arriba o abajo en más de 0,25 cm. sin provocar una fuga peligrosa. La empresa afirma que esta junta tiene 5 cm. de media con una desviación típica de 0,17 cm. Si estas cifras son correctas y se supone una distribución normal de los diámetros, los funcionarios de la NASA desean determinar:

a) La proporción de juntas que se adaptarán correctamente. Sol: 0,8584

b) La proporción de juntas que son defectuosas. Sol: 0,1416

c) La probabilidad de que cualquier junta tenga un diámetro superior a 5,3 cm. Sol: 0,0392

d) La probabilidad de que una junta tenga un diámetro comprendido entre 4,9 y 5,2 cm. Sol: 0,6034

e) La probabilidad de que una junta elegida al azar tenga un diámetro entre 5,3 y 5,5 cm. Sol: 0,0376

17) Un estudio reciente reveló que el 64% de las mujeres mayores de 18 años, consideran a la nutrición la prioridad en su vida. Se seleccionó una muestra de 60 mujeres. Determinar la probabilidad de que:

a) 32 o más consideren importante la dieta diaria. Sol: 0,9686

b) 44 o más estimen que la alimentación es esencial. Sol: 0,0853

c) Más de 32 pero menos de 43 consideren importante el aspecto dietético. Sol: 0,8084

d) Exactamente 44 consideren fundamental la alimentación. Sol: 0,0348

18) Supóngase que **X** tiene una distribución probabilística binomial, con n = 50 y p = 0,25. Calcule:

a) La media y la desviación estándar de la variable aleatoria Sol: 12,5 y 3,06

b) La probabilidad de que **X** valga 15 o más. Sol: 0,2578

c) La probabilidad de que **X** valga 10 o menos. Sol: 0,2578

19) La empresa de asuntos fiscales Tax Service se especializa en las elaboraciones de declaraciones de impuestos federales. Una reciente auditoría de las declaraciones indicó que se cometió un error en el 10% de las que manifestó el año pasado. Suponiendo que tal tasa continúe en este periodo anual y elabore 60 declaraciones. ¿Cuál es la probabilidad de que realice:

a) Más de 9 con errores? Sol: 0,0655

b) Por lo menos 9 con errores? Sol: 0,1401

c) Exactamente 9 con errores? Sol: 0,0746

20) Un estudio realizado por el club de acondicionamiento físico Taurus Health Club, reveló que 30% de sus nuevos socios tienen un sobrepeso considerable. Una promoción de membresía en un área metropolitana dio como resultado la inscripción de 500 nuevos ingresantes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 175 o más de los nuevos socios tengan sobrepeso? Sol: 0,0084

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 140 o más de los miembros recientes tengan sobrepeso? Sol: 0,8461

21) Los gastos mensuales en alimentación para familias de cuatro miembros en una ciudad grande son en promedio de $420 con una desviación estándar de $80. Si los gastos mensuales en alimentación siguen una distribución normal:

a) ¿Qué porcentaje de estos gastos es menor de $350? Sol: 18,94%

b) ¿Qué porcentaje de estos gastos está entre $250 y $300?
Sol: 5,02%

c) ¿Qué porcentaje de estos gastos es menor de $250 o mayor de $450?
Sol: 36,86%

d) ¿Cuál es el gasto mayor en dólares que hace una familia que está entre el 25% de las familias que menos gastos realizan en alimentación? Sol: 366,4 dólares

22) Los salarios de los trabajadores en cierta industria son en promedio \$11,9 por hora y la desviación estándar de \$0,4. Si los salarios tienen una distribución normal. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador seleccionado al azar:

a) Reciba salarios entre \$10,9 y \$11,9? Sol: 0,4938

b) Reciba salarios inferiores a \$11? Sol: 0,0122

c) Reciba salarios superiores a \$12,95? Sol: 0,0043

d) ¿Cuál debe ser el salario menor que gana un trabajador que se encuentra entre el 10% de los trabajadores que más ganan? Sol: \$12,412

e) Si el dueño de la industria va a aumentarle el salario al 15% de los trabajadores que menos ganan. ¿Cuál será el salario máximo que deberá ganar un trabajador para ser beneficiado con el aumento? Sol: \$11,484

23) Se encontró que en un conjunto de calificaciones de exámenes finales en un curso tenía distribución normal con media 73 puntos y desviación estándar de 8 puntos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una calificación no mayor de 91 puntos en este examen? Sol: 0,9878

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo una calificación entre 65 y 89 puntos? Sol: 81,85%

c) ¿Cuál fue la calificación superada sólo por 5% de los estudiantes que hicieron el examen? Sol: 86,16 puntos

d) El profesor sigue el siguiente criterio: Le otorga A a los estudiantes que están ubicados en el 10% de las mejores notas del grupo y usted saca 81 puntos. Suponga que se realiza otro examen en el que la media es 62 y la desviación es 3 y usted saca 68 puntos. ¿En cuál de los 2 exámenes usted queda mejor calificado?. ¿Por qué?

Sol: En el segundo examen, que obtuvo A

24) Un análisis indica que la duración de las llamadas telefónicas en cierta localidad tienen una distribución normal con media de 240 segundos y varianza de 1600 segundos^2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada cualquiera dure menos de 180 seg? Sol: 0,0668

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada dure entre 180 y 300 seg.? Sol: 0,8664

c) Si se consideran 1000 llamadas. ¿Cuántas cree usted que durarán menos de 180 seg.? Sol: 67

d) ¿Cuál es la duración de la llamada más larga de aquellas que conforman el 1% de las más breves? Sol. 146,8 seg.

e) La central telefónica de la localidad ha decidido cobrar un impuesto adicional al 5% de las llamadas de mayor duración. ¿Cuánto será el tiempo máximo que puede llamar una persona para que no le sea cobrado impuesto? Sol: 305,8 seg.

25) El estadounidense adulto hombre tiene una estatura promedio 5 pies y 9 pulgadas con una desviación estándar de 3 pulgadas. (Nota: 1 pie corresponde a 12 pulgadas)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura de un hombre sea mayor de 6 pies? Sol: 0,1587

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura de un hombre sea menor de 5 pies? Sol: 0,0013

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura de un hombre esté entre 6 y 9 pies? Sol:0,1587

d) ¿Cuál es la estatura menor de que tiene un hombre que está en el 10% de los hombres más altos? Sol: 6,07 pies

e) Calcule el rango intercuantil de la estatura de los hombres estadounidenses. Sol: 0,335 pies

26) El tiempo necesario para terminar un examen final en determinado curso se distribuye normalmente con una media de 80 minutos y una desviación de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de terminar el examen en una hora o menos? Sol: 0,0228

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante termine el examen entre 60 y 85 minutos? Sol: 0,6687

c) Suponga que en el curso hay 60 alumnos y que el tiempo del examen es de 90 minutos. ¿Cuántos alumnos se espera que no puedan terminar el examen en el tiempo indicado? Sol: entre 9 y 10 alumnos

27) El volumen de acciones negociadas en la Bolsa es normal con una media de 646 millones de acciones y una desviación de 100 millones de acciones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen negociado sea menor de 400 millones? Sol: 0,0069

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen negociado de acciones oscile entre las 400 y las 600 acciones? Sol: 0,3159

c) Si la Bolsa quiere emitir un boletín de prensa sobre el 5% de los días más activos ¿Qué volumen publicará la prensa? Sol: 810,5 millones de acciones

28) Las calificaciones de las pruebas de admisión de una Universidad tienen distribución normal con una media de 450 y desviación típica de 100 puntos.

a) ¿Qué porcentaje de las personas presentan calificaciones entre 400 y 500 puntos? Sol: 38,3%

b) Suponga que la calificación de una persona es de 630. ¿Qué porcentaje de las personas tienen mejores calificaciones? Sol: 3,59%

c) Si la Universidad no admite alumnos con menos de 480 puntos de calificación. ¿Qué porcentaje de personas que presentan el examen califican para entrar a la Universidad? Sol: 38,21%

29) Se sabe que el 10% de las unidades producidas por un proceso de fabricación resultan defectuosas. De la producción total de un día se seleccionan 400 unidades aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 35 de ellas sean defectuosas? Sol: 0,8212

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 40 y 50 de ellas (ambas inclusive) resulten defectuosas? Sol: 0,4918

c) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 34 y 48 de ellas (ambas inclusive) resulten defectuosas? Sol: 0,7821

30) Se toma una muestra de 100 trabajadores de una gran empresa para estudiar su actitud frente a un cambio en el método de trabajo. Si el 60% de todos los trabajadores de la empresa están a favor del cambio. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 50 de los miembros de la muestra estén a favor? Sol: 0,0162

31) Una encuesta citó a los distribuidores de los automóviles Chevrolet y Toyota como los dos mejores en lo que respecta a servicio al cliente. Sólo el 4% de sus clientes mostró cierta inconformidad con la agencia. Si se toma una muestra de 250 clientes

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 12 clientes o menos tengan cierta inconformidad con la agencia?
Sol: 0,7910

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 5 o más clientes estén descontentos con la agencia? Sol: 0,9625

c) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 6 y 10 clientes (ambas inclusive) estén descontentos con la agencia?
Sol: 0,4901

32) La tasa real de desempleo es de 15%. Suponga que se seleccionan al azar 100 personas en posibilidad de trabajar.

a) ¿Cuál es la cantidad esperada de desempleados?
Sol: 15

b) ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar de los desempleados?
Sol:12,75 y 3,75

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 6 estén desempleados?
Sol: 0,9961

d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 10 y 15 desempleados?
Sol: 0,4939

33) Un hotel tiene 120 habitaciones. En los meses de primavera, la ocupación del hotel es de 75%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos se ocupe la mitad de los cuartos ese día? Sol: aprox. 1

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se ocupen 100 o más cuartos ese día?
Sol: 0,0228

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se ocupen 80 cuartos o menos ese día?
Sol: 0,0228

34) Se sabe que el 30% de los clientes de una tarjeta de crédito a nivel nacional dejan en cero sus saldos para no incurrir en intereses morosos. En una muestra de 150 poseedores de esa tarjeta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 40 a 60 clientes paguen sus cuentas antes de incurrir en el pago de intereses?
Sol: 0,8336

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 30 clientes o menos paguen sus cuentas antes de incurrir en pago de intereses? Sol: 0,0049

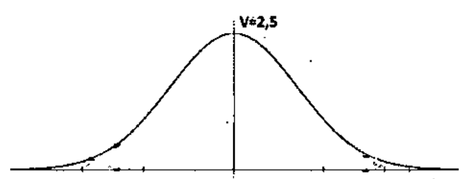
6.2. Distribución t-Student

La distribución de probabilidad de T se publicó por primera vez en 1908 en un artículo de Gosset. En esa época, Gosset trabajaba para una cervecería que prohibía a sus empleados que publicaran los resultados de sus indagaciones. Para evadir la prohibición Gosset publicó su trabajo en secreto bajo el seudónimo de "Student". Por ello que a la distribución de T se le suele llamar distribución t de Student o simplemente distribución t. Para derivar la ecuación de esta distribución Gosset supuso que las muestras se seleccionaban de una población normal. Con ella se puede demostrar que las poblaciones que no son normales y que poseen distribuciones en forma casi de campana aún proporcionan valores de T que se aproximan muy de cerca a la distribución t.

Para (Walpole, Myers, & Ye, 2012) "La distribución de T se parece a la distribución de Z en que ambas son simétricas alrededor de una media de cero. Ambas distribuciones tienen forma de campana, pero la distribución t es más variable debido al hecho de que los valores T dependen de las fluctuaciones de dos cantidades, $\bar{X}$ y S^2 ; mientras que los valores Z dependen sólo de los cambios en $\bar{X}$ de una muestra a otra"

FIGURA N° 33

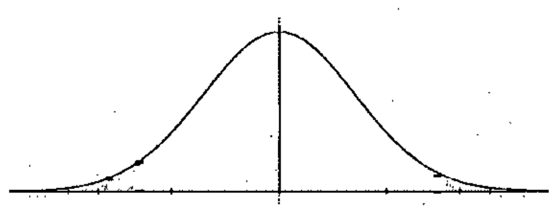
CURVA DE LA DISTRIBUCIÓN T PARA V=2,5



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

FIGURA N° 34

PROPIEDAD DE SIMETRÍA ALREDEDOR DE 0



Fuente: UNAC (2018); elaboración propia

Algunas observaciones que expresa (Rustom, 2012):

Grados de libertad es el parámetro de la distribución, igual como ocurre con la ji cuadrada, pues de hecho esta distribución es consecuencia del cociente entre una normal estándar y la raíz aritmética de una ji cuadrada dividida por sus grados de libertad, ambas independientes entre sí. 2) La curva de la distribución t de Student es acampanada centrada en 0, similar a la normal estándar, pero con "colas más pesadas", o sea, encierran una mayor área, por lo que sus valores percentiles son mayores que los de , lo que ^ Þ implica mayor variabilidad Esto parece intuitivamente razonable, porque se diferencia con el estadígrafo en que en el denominador ^ en vez del aparece la S que es un estadígrafo. T parámetro 5 varianza muestral ambién se # # cumple que :

$$\lim_{n\to\infty} t(n-1) = N(0,1),$$

Ejemplo con Matlab

v=5.

$$y = f(x \mid v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{x\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

x=-5:0.1:5;

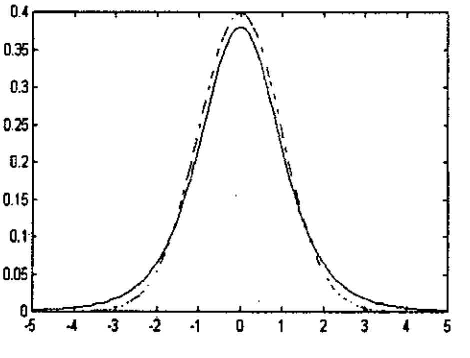
y=tpdf(x,5);

z=normpdf(x,0,1);

plot(x,y,'-',x,z,'-.');

FIGURA N° 35

DIAGRAMA EN MATLAB DE DISTRIBUCIÓN DE T-STUDENT



Fuente: UNAC (2018);elaboración propia

IV. REFERENCIAS

Batanero, C. (2007). *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. XIII.* Granada: Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Gomez, J. L. (2 de Febrero de 2014). *Probabilidad Aplicable A La Estadistica Inferencial.* Obtenido de lisandrotorresitfip: http://lisandrotorresitfip.blogspot.com/2011/08/probabilidad.html

Martinez Gómez, M. (s.f.). *Estimación de las principales distribuciones de probabilidad mediante Microsoft Excel.* Valencia: Universidad Politecnica de Valencia.

Pértegas Díaz S., P. F. (2001). *La distribución normal.* Coruña: Fisterra.

Rodriguez Ojeda, L. (2007). *Probabilidad y Estadística básica para Ingenieros.* Guayaquil: Espoledu.

Rodriguez, L. (2007). Guayaquil: espol.

Rosas, A. (2002). *Estadística Descriptiva e Inferencial.* México: Colegio de achilleres.

Rustom, A. (2012). *ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA, PROBABILIDAD E INFERENCIA. Una visión conceptual.* Santiago: Agren.

Walpole, R., Myers, R., & Ye. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* México: Pearson.

28

V. APÉNDICE

Separata de Ejercicios Propuestos

1) Un estudiante recibió un puntaje de 80 en una prueba de Física cuyo promedio de clase era 70 con desviación estándar 10. Recibió un puntaje de 75 en una prueba de biología para la cual la media de la clase era 70 con desviación estándar 2.5. ¿En qué prueba lo hizo mejor en relación con el resto de la clase?

2) Sea X = voltaje de salida en generadores. Un grupo de estos generadores, tiene una distribución aproximadamente normal con una media $\mu = 4.8$ voltios y una desviación estándar $\sigma = 0.3$ voltios.

Convierta cada uno de los siguientes intervalos de x en intervalos de z.

Interprete.

(a) $4.5 < x$

(b) (b) $x < 4.2$

(c) (c) $4.0 < x < 5.5$

Convierta cada uno de los siguientes intervalos de z a intervalos de x.

(d) $z < -1.44$

(e) (e) $1.28 < z$

(f) $-2.25 < z < -1.00$

(g) Interpretación: si un generador tenía un recuento de 5.9 voltios o superior, ¿se lo consideraría inusualmente alto?

Considere que los generadores son para uso de ingeniería electrónica

3) En los siguientes problemas, sea z una variable aleatoria con una distribución normal estándar. Encuentre la probabilidad indicada y sombrea el área correspondiente bajo la curva normal estándar.

(a) $P (z \leq 0)$

(b) $P (z \leq -0.13)$

(c) $P (z \leq 1.20)$

(d) $P (z \geq 1.35)$

(e) $P (z \geq -1.20)$

(f) $P (-1.20 \leq z \leq 2.64)$

(g) $P (-2.18 \leq z \leq -0.42)$

(h) $P (0 \leq z \leq 1.62)$

(i) $P (-0.82 \leq z \leq 0)$

(j) $P (-0.45 \leq z \leq 2.73)$

(k) $P (z \geq 0)$

(l) $P (z \leq -2.15)$

(m) $P (z \leq 3.20)$

(n) $P (z \geq 2.17)$

(o) $P (z \geq -1.50)$

(p) $P (-2.20 \leq z \leq 1.40)$

(q) $P (-1.78 \leq z \leq -1.23)$

(r) $P (0 \leq z \leq 0.54)$

(s) $P (-2.37 \leq z \leq 0)$

(t) $P (-0.73 \leq z \leq 3.12)$

4) En los siguientes problemas suponga que x tiene una distribución normal con la media especificada y la desviación estándar. Encuentra las probabilidades indicadas.

(a) P $(3 \leq x \leq 6)$; $\mu = 4$; $\sigma = 2$

(b) P $(10 \leq x \leq 26)$; $\mu = 15$; $\sigma = 4$

(c) P $(50 \leq x \leq 70)$; $\mu = 40$; $\sigma = 15$

(d) P $(7 \leq x \leq 9)$; $\mu = 5$; $\sigma = 1.2$

(e) P $(8 \leq x \leq 12)$; $\mu = 15$; $\sigma = 3.2$

(f) P $(40 \leq x \leq 47)$; $\mu = 50$; $\sigma = 15$

(g) $P(x \geq 30)$; $\mu = 20$; $\sigma = 3.4$

(h) $P(x \geq 120)$; $\mu = 100$; $\sigma = 15$

(i) $P(x \geq 90)$; $\mu = 100$; $\sigma = 15$

(j) $P(x \geq 2)$; $\mu = 3$; $\sigma = 0.25$

5) Sea x una variable aleatoria sobre consumo de energía electrica. La variable aleatoria x tendrá una distribución aproximadamente normal con media $\mu = 85$ y desviación estándar $\sigma = 25$ ¿Cuál es la probabilidad de que, la variable se considere en los intervalos indicados:

(a) x es más de 60?

(b) x es menor que 110?

(c) x es menor que 150?

(d) x es menor que 210?

(e) x es menor que 220?

(f) x es mayor que 110?

(g) x está entre 60 y 110?

(h) x es mayor que 140?

(i) x es mayor que 99?

(j) x es mayor que 86?

6) Sea x una variable aleatoria pago por consumo de energía eléctrica.

La variable aleatoria se distribuye aproximadamente de forma normal con media μ = 38 soles y desviación estándar σ = 12. soles ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario de electricidad pague en los intervalos considerados:

a) x es menor que 60?

(b) x es mayor que 16?

(c) x está entre 16 y 60?

(d) x es más de 60 soles?

7) Garantía: Relojes Accrotime es un fabricante de relojes de cristal de cuarzo. Los investigadores de Accrotime han demostrado que los relojes tienen una vida promedio de 28 meses antes de que ciertos componentes electrónicos se deterioren, haciendo que el reloj no sea confiable. La desviación estándar de la vida útil de los relojes es de 5 meses, y la distribución de los tiempos de vida es normal.

(a) Si Accrotime garantiza un reembolso total de cualquier reloj defectuoso durante 2 años después de la compra, ¿qué porcentaje de la producción total debería reemplazar la empresa?

(b) Si Accrotime no desea hacer reembolsos en más del 12% de los relojes que realiza, ¿cuánto tiempo debe durar el período de garantía (hasta el mes más cercano)?

8) La demanda de medidores trifásicos para uso de electricidad se aprecia en magnitud creciente para dar protección a las viviendas sobre todo porque son usadas para fábricas. En este entorno de preferencia, la demanda media de medidores fue con el 95% de nivel de confianza

Suponga que x tiene una distribución de probabilidad que es aproximadamente normal.

(a) Use el rango de datos del 95% para estimar la desviación estándar para la demanda de medidores trifásicos.

(b) Una demanda de medidores por debajo de 8

(c) Estime la media poblacional para un nivel de confianza del 99 %

(d) Estime la media poblacional para un nivel de confianza del 96 %

(e) Estime la media poblacional para un nivel de confianza del 99,9 %

(f) Estime la varianza poblacional para un nivel de confianza del 98 %

9 La agencia de transporte cruz polar presenta accidentes menores reportados los cuales ascienden a 6 accidentes bimestrales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos hayan dos accidentes en un mes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan accidentes en un trimestre?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más ocurran 4 accidentes entre febrero y marzo?

10) Un fabricante de estabilizadores, informa que en su último envió de 4000 estabilizadores, 500 presentaban un defecto de producción

Si el distribuidor vende a un nuevo diente 20 estabilizadores elegidos al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga defectos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 3 presenten defectos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 3 presenten defectos?

11 Un sistema contiene dos componentes eléctricos, C y D, conectados en paralelo como se muestra en el diagrama Suponga que C y D funcionan cíe manera independiente. Para que el sistema funcione, deben funcionar C o D.

a) Si la probabilidad de que C falle es 0.08 y la probabilidad de que D falle es 0.12, encuentre la probabilidad de que el sistema funcione.

b) Si tanto C como D tienen probabilidad p de fallar, ¿cuál debe ser el valor de p para que la probabilidad de que el sistema funcione sea 0.99?

c) Si tres componentes están conectados en paralelo, funcionan de manera independiente y cada uno tiene una probabilidad p de fallar, ¿cuál debe ser el valor de p para que la probabilidad de que el sistema funcione sea 0.99?

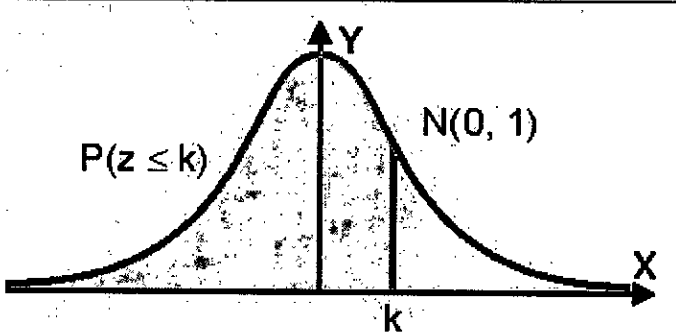
d) Si los componentes funcionan independientemente y cada componente tiene una probabilidad de fallar de 0.5, ¿cuál es el número mínimo de componentes que se debe conectar en paralelo para que la probabilidad de que el sistema funcione sea de al menos 0.99?

12) Suponga que tienen dos sistemas que poseen n y m componentes respectivamente, donde la probabilidad de falla de los componentes es p, y además se sabe que los sistemas trabajan correctamente si por lo menos 3 componentes funcionan sin fallo. Si el sistema trabaja correctamente, ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado el sistema con m componentes. Si es dos veces más probable seleccionar un sistema de n componentes a uno de m componentes?

VI. ANEXOS

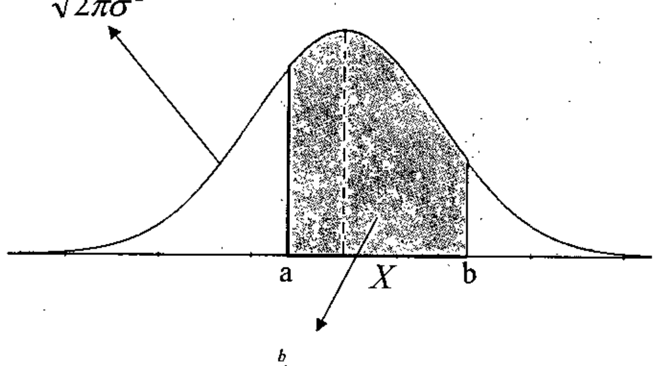
DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)



La densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\Pr\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-4	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.0001	0.0001	0.0001	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.0002	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.0003	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.0004	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.0006	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.0005
-3.1	0.00097	0.00094	0.0009	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.001
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.0024	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.0028	0.00272	0.00264

-2.6	0.00466	0.00453	0.0044	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.0057	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.0048
-2.4	0.0082	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.0099	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.0139	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.0116	0.0113	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.017	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.015	0.01463	0.01426
-2	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.0197	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.0268	0.02619	0.02559	0.025	0.02442	0.02385	0.0233
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.0392	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.0548	0.0537	0.05262	0.05155	0.0505	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.0778	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.0968	0.0951	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226

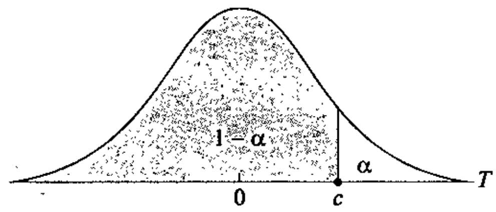
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.1335	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.121	0.119	0.11702
-1	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.2327	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.2177	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.2451
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.2946	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.2776
-0.4	0.34458	0.3409	0.33724	0.3336	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.3707	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.4562	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0	0.5	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.4721	0.46812	0.46414
Valores positiv	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

os de z Z										
0	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.5279	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.5438	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.7549
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.879	0.881	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147

1.3	0.9032	0.9049	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.9222	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94845	0.9495	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.9608	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.9732	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97615	0.9767
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.9803	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.983	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.985	0.98537	0.98574
2.2	0.9861	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.9884	0.9887	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9901	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.9918	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.9943	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.9952
2.6	0.99534	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643

2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.9972	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.9976	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.999
3.1	0.99903	0.99906	0.9991	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.9995
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.9996	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.9998	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.9999	0.9999	0.9999	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

TABLA DE LA DISTRIBUCION t-Student



r	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819

23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
□	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576