

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA DE POSGRADO

**UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**“IDENTIFICACIÓN NO PARAMÉTRICA DEL
SISTEMA MOTOR DC Y CONTROL DE
POSICIÓN POR OBSERVADOR DE ESTADOS
REALIMENTADOS”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA MENCIÓN
CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN**

JORGE PAÚL UBILLÚS GONZALES

CALLAO- 2019

PERÚ

DEDICATORIA

La presente Tesis de Maestría está dedicada a mi esposa Jully y a mis hijos Jorge Antonio y Massiel Paulina por su apoyo incondicional durante los estudios y en la elaboración de la presente Tesis

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por el regalo que nos da día a día; al Magíster Jacob Astocondor Villar, por su asesoría y constante apoyo en la elaboración de esta Tesis, a la Universidad Nacional del Callao, por su proyección y apoyo a los alumnos en realizar la Maestrías en Ingeniería Electrónica. También cumplo mi compromiso de agradecer a los colegas Magíster Julio Gonzalez Prado y al Magíster Raúl Hinojosa Sánchez por su apoyo y colaboración permanente en la vida profesional.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	4
LISTA DE TABLAS	5
RESUMEN	6
ABSTRACT	7
I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION	8
1.1 Identificación del problema	8
1.2 Formulación de problemas	10
1.3 Objetivos de la investigación	10
1.4 Justificación	11
II. MARCO TEORICO	13
2.1 Antecedentes del estudio	13
2.2 Fundamento ontológico	16
2.3 Fundamento metodológico	16
2.4 Fundamento epistemológico	16
2.5 Definición de términos básicos.	21
III. VARIABLES E HIPOTESIS	24
3.1 Definición de las variables	24
3.2 Operacionalización de variables	25
3.3 Hipótesis General e Hipótesis Específicas	26
IV. METODOLOGIA	27
4.1 Tipo de investigación	27
4.2 Diseño de la investigación	27
4.3 Identificación de la Planta	28
4.4 Representación en espacio de estado discreto	37

4.5 Controlabilidad y observabilidad del Sistema	41
4.6 Diseño de un sistema de control regulatorio con polos	44
4.7 Controlador digital con observador de estados realimentados	49
4.8 Realimentación de la salida con observador	52
4.9 Realimentación de la salida con observador y filtro de medida	54
4.10 Realimentación de la salida con filtro de Kalman	57
4.11 Aplicación del Filtro de Kalman	60
4.12 Realimentación de la salida con observador: Implementación en el Computador	61
4.13 Realimentación de la salida con observador y filtro de medida: Implementación en el computador	63
4.14 Realimentación de la salida con filtro de Kalman: Implementación en el computador	64
4.15 Descripción del desarrollo del Filtro de Kalman aplicado al diseño	65
4.16 Población y muestra	67
4.17 Técnicas e instrumentos de recolección de datos	67
4.18 Etapas de la investigación	67
4.19 Plan de análisis de datos	67
V. RESULTADOS	68
VI. DISCUSION DE LOS RESULTADOS	77
6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados	77
6.2 Contrastación de resultados con otros similares	78
VII. CONCLUSIONES	84
VIII. RECOMENDACIONES	86
IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87

ANEXOS	88
Anexo A1 Modelamiento de un motor DC, adquisición de datos, Discretización y control del sistema	89
Anexo A2. Filtro Kalman	96
Anexo A3. Matriz de Consistencia	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Esquema de un servo motor con excitación separada	17
Figura 2 Servo motor controlado por armadura	18
Figura 3 Interfaz gráfica del toolbox de identificaciones	29
Figura 4 Esquema de identificación de señales VIN Y RPM	30
Figura 5 Circuito convertidor de frecuencia a voltaje	31
Figura 6 Relación de salida de convertidor F/V y entrada	32
Figura 7 Respuesta del sistema a lazo	35
Figura 8 Respuesta del sistema a lazo abierto	36
Figura 9 Diagrama en bloques de la representación matricial en el espacio de estados	38
Figura 10 Respuesta del servo motor no realimentado para entrada escalón	40
Figura 11 Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$	44
Figura 12 Diagrama en bloques del control digital por realimentación de salida	50
Figura 13 Diagrama en bloques del observador	53
Figura 14 Diagrama de bloques real con filtro y ruido	54
Figura 15 Diagrama en bloques con filtro de Kalman	60
Figura 16 Diagrama de bloques del Sistema Discreto Realimentado	76
Figura 17 Respuesta al escalón para el sistema usando el control con observador de estado realimentado en tiempo discreto	77
Figura 18 Señal de control discreta	78
Figura 19 Diagrama de bloques del sistema motor DC	78
Figura 20 Respuesta al escalón para el Sistema usando el control con observador de estado realimentado en tiempo continuo	79
Figura 21 Control PID con Actuador que incluye saturador	80
Figura 22 Anti-Windup sin salida disponible del actuador	81
Figura 23 Respuesta al Escalón para el Sistema usando el método de optimización anti-windup PID	82
Figura 24 Diagramación de bloque del control PID con anti-windup	83

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Operacionalización de variables	25
Tabla 2 Valores del convertidor F/V	32
Tabla 3 Datos obtenidos experimentalmente de la tarjeta arduino	34

RESUMEN

La presente Tesis de Maestría está basado en el diseño de la Técnica de Control, basadas en la observación de estados realimentado para el control de la posición de un sistema motor DC y contrastar o comparar con las técnicas de control PID analizados desde el dominio del tiempo continuo y dominio del tiempo discreto. El sistema en estudio emplea un motor DC (Corriente Continua), debido a que es ampliamente usado en diferentes aplicaciones, especialmente en los sistemas electrónicos, mecatrónicos y de control electrónico.

En robótica se usa frecuentemente los motores de corriente continua por la facilidad de controlarlos y su fácil interconexión, la desventaja de los motores DC, comúnmente empleados en la construcción de robots, es su alta velocidad de giro (entre 2000 y 7000 rpm) y su bajo torque.

En esta Tesis, el objetivo es el diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observadores de estado discretos. En el periodo de desarrollo de la tesis se hace uso de técnicas avanzadas de la teoría de control moderno. La metodología empleada para cumplir con el objetivo, consistió en encontrar el modelo matemático de la planta a controlar, transformar el modelo a su forma lineal de tal manera de aplicar las técnicas lineales de control.

Paso último, es el diseño del control; en este caso por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto.

La importancia de este trabajo de tesis, para los estudiantes de Maestría y Doctorado, radica en su desarrollo, presenta técnicas avanzadas del control moderno de plantas con mayor grado de dificultad.

ABSTRACT

This Master's Thesis is based on the design of the Control Technique, based on the observation of feedback states for the control of the position of a DC motor system and to contrast or to compare with the PID control techniques analyzed from the time domain continuous and from time domain discrete. The system under study uses a DC (Direct Current) motor, because it is widely used in different applications, especially in electronic systems, mechatronic and electronic control systems.

In robotics, DC motors are frequently used due to the ease of controlling them and their easy interconnection, the disadvantage of DC motors, commonly used in the construction of robots, is their high speed of rotation (between 2000 and 7000 rpm) and their low torque.

In this thesis, the objective is the design of the control by feedback of states with assignment of poles and discrete state observers. In the thesis development period, advanced techniques of modern control theory are used. The methodology used to fulfill the objective was to find the mathematical model of the plant to be controlled, transform the model to its linear form in such a way to apply linear control techniques.

Last step is the control design; in this case by feedback of states with pole assignment and discrete status observer.

The importance of this thesis work, for the Masters and Doctorate students, lies in its development, presents advanced techniques of modern plant control with a greater degree of difficulty.

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION

1.1. Identificación del problema

El problema estudiado en este trabajo de tesis es el control de la posición angular del eje del motor DC analizado en la robótica. Este problema de control es resuelto mediante la técnica de control basado en un observador de estados realimentado y contrastada con el control PID, analizada en el dominio de tiempo continuo y en el tiempo discreto.

Necesitamos que el sistema motor DC realice el seguimiento de referencias constantes arbitrarias usando la fuerza de control adecuada. Es imprescindible identificar el modelo de la dinámica de la planta, debido a que la exactitud del modelo es fundamental para aplicarle la técnica de control. Para ello se pide la identificación del modelo motor DC, utilizando en este caso datos del control de la velocidad del motor DC en lazo abierto para el tratamiento de la técnica de identificación no paramétrica.

En el diseño del control, se va tener en cuenta los sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, explorando las conexiones entre los controladores clásicos lineales, es decir se va a definir las funciones de transferencia y se va a realizar una aproximación al diseño basado en la realimentación de estados estimados del sistema. También la combinación de un observador, junto con la realimentación de estado observado, puede ser reducida a un lazo de control clásico equivalente de modo que los controladores puedan ser expresados en la forma de función de transferencia.

1.1.1 Determinación del Problema

¿Qué se puede hacer para controlar la posición del sistema motor DC?

Podemos obtener la respuesta del sistema debido a una entrada de referencias arbitrarias entre ellas, la señal escalón unitario para el control de posición del sistema motor DC. Se empleará la técnica de control basada en observadores de estados y controladores PID. Ambos estudios se realizarán en el dominio del tiempo continuo y en el dominio del tiempo discreto.

Las técnicas de control deben de guardar relación directa con las consideraciones de diseño que se imponen para la búsqueda de la performance del sistema.

Se permite utilizar procedimientos para el control de la posición del sistema y se observará el comportamiento en estado estacionario de la posición, con una señal de referencia y condiciones iniciales nulas.

El sistema de control puede incluir los siguientes aspectos:

- ✓ Mantener la velocidad angular del sistema dentro de ciertos límites,
- ✓ La posición angular verifica el buen desempeño del control, incluso cuando la carga en la salida del motor DC varíe.
- ✓ Monitorear constantemente los estados del sistema y poder tener en cada momento registrado el desempeño del control, en este caso la técnica basada en la realimentación de estados.

1.2 Formulación del problema

a. Problema general:

¿Cómo el diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto estabiliza la posición el sistema motor DC?

b. Problema específico:

- ¿Cómo se modela matemáticamente el sistema de control del motor DC?
- ¿Cómo se determina la controlabilidad y la observabilidad del modelo?
- ¿Cómo se diseña el control realimentado por asignación de polos y observador de estado discreto?

1.3 Objetivos de la Investigación

a. Objetivo general

- El objetivo general de la investigación es diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto para un sistema motor DC, obteniendo las características de control en relación a su respuesta, es decir que el sistema sea capaz de seguir a las consignas impuestas en un menor tiempo y con error en el estado estacionario nulo.

b. Objetivos específicos

- Realizar la identificación del modelo del sistema motor DC
- Especificar requerimientos de diseño para la buena performance del control

- Usar técnicas de optimización que lleven a un buen desempeño del control
- Diseñar el controlador y validar su desempeño por medio de la simulación

1.4 Justificación

a. Legal

El presente trabajo de tesis, no desobedece las normas legales dadas por el Ministerio de Ambiente del Perú, en concordancia con el Reglamento Nacional para la Gestión y Manejo de los RAEE (Residuos de Aparatos eléctricos y Electrónicos).

b. Teórica

La ejecución del presente trabajo de tesis, es un aporte científico que se desarrolla en la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao. El trabajo de tesis permitirá ampliar los conocimientos de técnicas emergentes del control moderno. Asimismo, serán complementadas con herramientas que llevarán a cabo mediante las simulaciones por medio del programa basado en texto MatLab.

c. Tecnológica

Se optó por un tema de un sistema que es muy útil en diversas aplicaciones de la ingeniería de control, para demostrar las técnicas expuestas. Resolviendo dos problemas complejos; uno de ellos es el reconocimiento del modelo mediante identificación no paramétrica en el dominio de la frecuencia

y el otro corresponde al diseño del controlador basado observador de estados realimentado.

d. Económica

Obtenemos la disminución de costos de diseño con el uso de software y tarjetas de adquisición de datos especializados para las pruebas.

e. Social

El software y materiales utilizados en el diseño de los controladores realimentados por el método de ubicación de polos y observadores de estado discreto no contienen contaminantes; de tal manera que no impacta en el ambiente ni en la salud pública.

f. Práctica

Para demostrar las técnicas expuestas se ha escogido un tema relacionado con el área de la robótica, que es una tecnología con más apogeo en la actualidad y con mayor impacto en procesos de manufactura, debido a que se puede lograr mayor precisión en el control de trayectorias de trabajo con el método utilizado en este trabajo de tesis.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

El periodo clásico de la teoría de control, caracterizado por el análisis del dominio de la frecuencia, prevalece con fuerza actualmente, y ahora estamos en una fase “neo-clásica” – con el desarrollo de varias técnicas sofisticadas para sistemas multivariables. Pero coincidente con ello, está el periodo moderno, que empezó a finales de los años 50 y principios de los 60.

En Moscú fue el primer congreso de la Federación Internacional del Control Automático en 1960. La teoría moderna de control fue introducida por los soviéticos con el lanzamiento del Sputnik en 1957. Este logro de la tecnología soviética centró la atención de los científicos e ingenieros en general, y a la comunidad del control automático en particular, sobre todo hacia la URSS.

Los ingenieros de sistemas de control descubrieron un enfoque diferente a la teoría de control siguiendo la perspectiva que estaban familiarizados. Las ecuaciones diferenciales fueron reemplazadas por funciones de transferencia para describir la dinámica de los procesos.

En pocos años, la teoría de control occidental había absorbido y dominado este nuevo enfoque del “espacio de estado” para el análisis y diseño de los sistemas de control, los cuales ahora se han convertido en la base de gran parte de la teoría de control moderna.

La noción de espacio de estado ha ocasionado un impacto enorme en el pensamiento de los ingenieros de control, que trabajan en la frontera de la tecnología. Estos conceptos han sido también utilizados con bastante éxito en un gran número de proyectos de alta tecnología, el proyecto del US Apollo es un buen ejemplo de ello. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de control implementados en la actualidad son diseñados por métodos de una época anterior.

El diseño práctico de la ingeniería está realizado con la ayuda de los computadores. Los sistemas de control no son una excepción. No sólo son equipos utilizados en línea, implementación en tiempo real de leyes de control de realimentación en aplicaciones tan diversas como los pilotos automáticos de los aviones y controles de procesos químicos, pero son también utilizados extensamente para realizar los cálculos de diseño. En efecto, uno de las mayores ventajas del diseño del espacio de estado sobre el dominio de la frecuencia es que los primeros son más adecuados para la implementación por parte de los equipos digitales (Friedland 2012).

Las ventajas de la teoría moderna frente a la clásica son:

- Se puede representar de forma sencilla sistemas MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output), sistemas con varias entradas y varias salidas.
- Teoría más adecuada para tratar no linealidades muy acusadas de la planta.
- Abordar el diseño mediante síntesis.

La mayoría de sistemas de control que se utilizan en la actualidad se basan en la teoría clásica. Esto se debe a la complejidad matemática que presenta la teoría moderna.

La estrategia de control, en este trabajo de tesis es basada en el observador de estados realimentado, tiene por objetivo controlar la posición del motor DC de manera que desarrolle el control para referencias constantes sin dificultad, para ello se hace cumpliendo ciertas especificaciones de diseño (por ejemplo, el tiempo de establecimiento del sistema de posicionamiento, o precisión), las cuales no son fáciles de conseguir con las estrategias de control de posición utilizando por ejemplo con los controladores Proporcional-Derivativo (PD). Es decir, empleando controladores Proporcional-Integral-Derivativo (PID), se puede lograr mejoras significativas en la respuesta cuando se controla la posición para referencias constantes.

Las ventajas de los motores DC implica un excelente control de la velocidad y la capacidad de proporcionar alto par a bajas velocidades. Aunque, una mayoría de los motores DC usan escobillas para transferir energía eléctrica al rotor del motor. Los ensamblajes con escobillas no solamente requieren motores más grandes, sino que también se aumentan los requerimientos de mantenimiento. Cuando se desgastan las escobillas, se requiere mantenimiento y se genera polvo de carbón. Las escobillas son también sensibles a la contaminación, especialmente en máquinas que contienen materiales de silicona, y debiendo ser reemplazados periódicamente.

Como la energía eléctrica se suministra como corriente alterna, se requiere un equipo adicional que genere energía de corriente continua, tal como un equipo

motor generador o un sistema rectificador. Si se utilizan baterías, se puede obtener la energía directamente de ellas. Aunque estas aplicaciones son algo especializadas, se están incrementando ya que la industria cada vez es más sensible a los problemas de calidad de la energía y a los altos costes de la interrupción en la producción.

2.2. Fundamento ontológico

El control del motor DC es controlado por armadura utilizando la ley de control “control por realimentación de estado y observador de estado discreto”. El objetivo del problema radica en controlar la posición del eje del motor para diferentes señales de consigna; mediante una estrategia de control; en este caso por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto.

2.3 Fundamento metodológico

La metodología a seguir para el diseño del control motor DC por el método de realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto, se fundamenta en los siguientes pasos:

- Modelamiento matemático de la planta
- Identificación de parámetros de la planta
- Determinación de la controlabilidad y observabilidad de la planta.
- Diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto.

2.4 Fundamento epistemológico

Epistemológicamente, la relación entre las señales de entrada y salida; es decir entre las variables dependientes y las independientes se determinan por medio de un modelo matemático del sistema dinámico o planta.

Las ecuaciones que describen el comportamiento de motor DC son relativas al par en el eje (T_m) y a la fuerza contra electromotriz (e_m) que se genera en sus bornes como reacción a la excitación en su armadura:

$$T_m(t) = K_1 \Phi(t) \cdot i_m(t) \quad (1)$$

$$e_m(t) = K_2 \Phi(t) \cdot \omega_m(t) \quad (2)$$

Las constantes K_1 y K_2 son las constantes de proporcionalidad al flujo magnético de campo constante para el motor que se controla por armadura. Por otro lado en la Figura 1, se muestra al Servomotor con excitación separada donde los parámetros característicos son la resistencia de armadura, inductancia de armadura, fuerza contra electromotriz, la corriente y la velocidad angular.

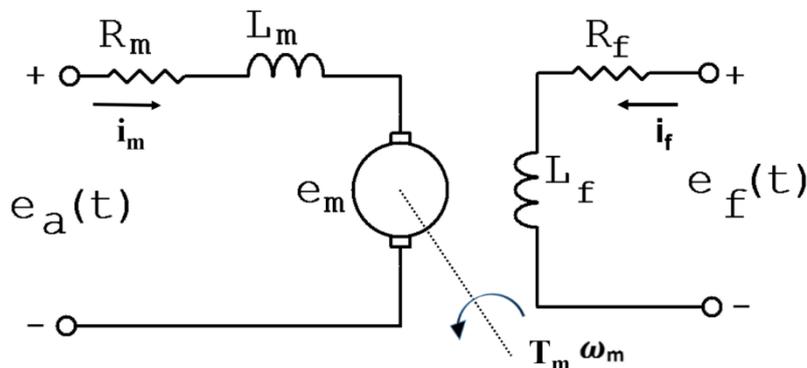


Figura 1.

Esquema de un Servomotor con excitación separada.

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración propia

Para el control de un motor DC, puede ser controlado de dos formas: cuando la **excitación del campo es constante**, donde e_f igual a una tensión d o proviene de imanes permanentes, el flujo magnético F , también será constante; por lo que el funcionamiento del motor depende exclusivamente de la corriente que circula por su armadura. En este caso se implementa un Control de armadura.

Si, al contrario, se mantiene constante la corriente de armadura, el control puede lograrse manipulando el campo magnético de excitación, a través de la variable $e_f(t)$. Se habla entonces de un servomotor es **controlado por campo**.

El control de armadura es mucho más usado que el control por campo. Esto se debe a la dificultad que implica implementar una fuente de corriente constante, contra la facilidad relativa de hacer lo propio para una fuente de tensión constante. Sin embargo, el control de campo encuentra aplicaciones prácticas en algunos sistemas donde se busca regular la velocidad de giro en el eje del motor. Por esa razón se procede a continuación con el estudio de ambos.

En un sistema del motor DC con carga, el sistema de giro del eje del motor depende de parámetros como la inercia de la carga y la resistencia proveniente de amortiguadores y elementos rígidos.

El sistema completo de un servomotor controlado por armadura se muestra en la Figura 2

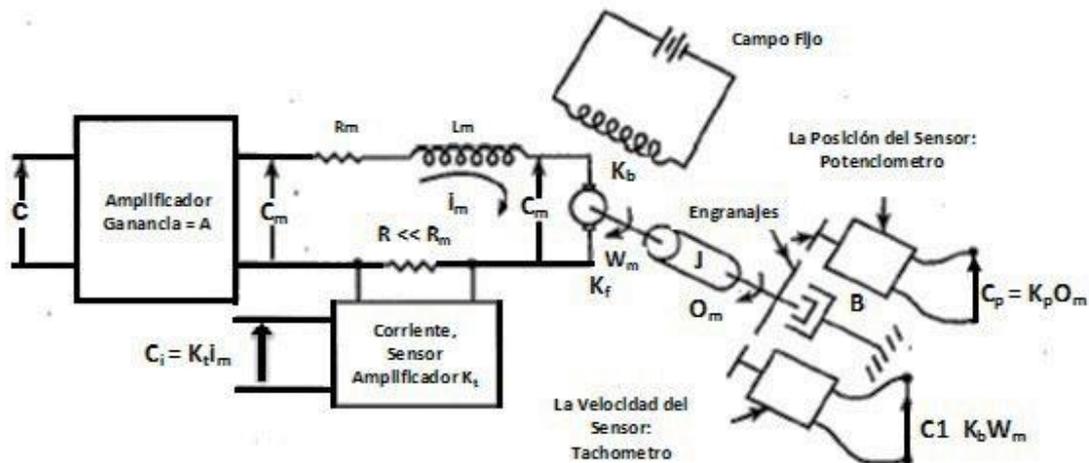


Figura 2.
Servomotor controlado por armadura
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

El control de armadura se implementa manteniendo constante la excitación del campo y manipulando la tensión de armadura la que se encuentra a la entrada del circuito.

Es decir: (3)

$$\Phi(t) = K_f \cdot i_f(t) = cte. \quad (4)$$

$$T_m(t) = K_t \cdot i_m(t) \quad (6)$$

$$e_m(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \quad (7)$$

Del circuito de armadura mostrado en la *Figura 1*

$$L_m \frac{di_m}{dt} + R_m i_m + e_m = e_a \quad (6)$$

En el sistema rotacional que existe sobre el eje del motor, se obtiene la ecuación:

$$T_m = J \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B \frac{d\theta_m}{dt} + K_r \theta_m \quad (7)$$

A través del método de la representación en variables de estado, se deben definir las ecuaciones que relacionan sus entradas y salidas; las cuales se identificarán con la tensión aplicada a la armadura ($e_a(t)$) y la posición angular del eje del motor ($\theta_m(t)$), respectivamente. Sobre esta base se procede a manipular las ecuaciones planteadas anteriormente, quedando como resultado:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

$$\alpha = -\frac{K_r}{J} \theta - \frac{B}{J} \omega + \frac{K_t}{J} i_m \quad (9)$$

$$\frac{di_m}{dt} = -\frac{K_c}{L_m} \omega - \frac{R_m}{L_m} i_m + \frac{1}{L_m} e_a \quad (10)$$

Si se seleccionan como variables de estado a la posición angular (θ), la velocidad (ω) y la corriente de armadura ($i_m(t)$), se tiene:

$$x_1(t) = \theta(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = \omega(t)A = \pi r^2 \quad (11)$$

$$x_2(t) = \omega(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = \alpha(t) \quad (12)$$

$$x_3(t) = i_m(t) \rightarrow \dot{x}_3(t) = \frac{di_m}{dt} \quad (13)$$

$$u(t) = e_a(t) \quad (14)$$

$$y(t) = \theta(t) \rightarrow y(t) = x_1(t) \quad (15)$$

Luego relacionando las variables

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (16)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_r}{J}x_1(t) - \frac{B}{J}x_2(t) + \frac{K_L}{J}x_3(t) \quad (17)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{K_e}{L_m}x_2(t) - \frac{R_m}{L_m}x_3(t) + \frac{1}{L_m}u(t) \quad (18)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (19)$$

La representación en espacio de estados queda así:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_r}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{K_L}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L_m} \end{bmatrix} u(t) \quad (20)$$

Esta ecuación nos relaciona las variables de entrada y salida

2.5. Definiciones de términos básicos

a) Vector de estado (x)

Se necesitan “n” variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas “n” variables de estado son las “n” componentes de un vector “x”. Este vector determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$ especificado.

b) Señal de control (u)

Es la señal corregida por el controlador y se aplica a la planta para controlar la variable a controlar.

c) Ganancia de realimentación de estados (K)

Es aquella que contiene las ganancias de realimentación de los estados del sistema.

d) Ganancia del observador de estados (L)

Es la matriz de ganancias del observador, es decir es una matriz de ponderación al término de la corrección que es la diferencia de la salida medida y la salida estimada.

e) Sistema de única entrada única salida (SISO)

Es el sistema de control que tiene una única entrada y una única salida.

f) Sistema lineal invariante con el tiempo (SLIT)

Un SLIT, es aquel sistema de control cuya ecuación diferencial es lineal, es decir tiene coeficientes constantes invariantes con el tiempo.

g) Sistema de múltiples entradas múltiples salidas (MIMO)

Es el sistema de control que tiene múltiples entradas y múltiples salidas.

h) Planta:

Es la denominación del conjunto de elementos cuyo objetivo común es la realización formal de un proceso determinado. Alternativamente se asigna al dispositivo físico o conjunto de los mismos que son objeto de control.

i) Tarjeta de Adquisición de Datos:

Instrumento encargado de tomar muestras del mundo real (sistema analógico) para generar datos que puedan ser manipulados por un ordenador u otras electrónicas (sistema digital). Consiste, en tomar un conjunto de señales físicas, convertirlas en tensiones eléctricas y digitalizarlas de manera que se puedan procesar en un sistema digital.

j) Microcontrolador: (μ C, UC o MCU)

Es un circuito integrado programable, capaz de ejecutar las órdenes grabadas en su memoria. Está compuesto de varios bloques funcionales, los cuales cumplen una tarea específica. Un microcontrolador incluye en su interior las tres unidades funcionales principales de un sistema informático: unidad central de procesamiento, memoria y periféricos de entrada/salida.

k) Factor de amortiguamiento (ξ)

Es un indicador del crecimiento o decaimiento de la respuesta en el tiempo de un sistema de control. Si $\xi=0$ la respuesta del sistema es oscilatoria. Si $0<\xi<1$ la respuesta es oscilatoria pero subamortiguada. Pero si $\xi=1$, la respuesta es críticamente amortiguada. Si $\xi>1$ la respuesta es lenta sin oscilación.

l) Vector de estados estimado (\hat{x})

El vector de estados estimado es una aproximación al vector de estados.

III. VARIABLES E HIPOTESIS

3.1 Definición de las variables

Los sistemas servomecanismos, son aquellos que implementan una acción de seguimiento de la variable de salida respecto a una referencia. En ellos, los actuadores, (elementos que llevan a cabo la acción) son motores de corriente directa (dc) conocidos como servomotores.

Unas de las características de los servomotores pueden destacarse una inercia pequeña o bien una alta relación entre el par y la inercia, por lo cual resultan útiles en aplicaciones tan variadas como las correspondientes al campo de la robótica o las que involucran labores de fresado y mecanizado de piezas.

El manejo de tal elemento actuador corre por cuenta de un servo manejador, que consiste en un subsistema electrónico controlador de movimiento. Dicho sistema debe admitir la programación del posicionamiento por puntos y de otras variables derivadas como aceleración y velocidad.

Vistas así la importancia y multiplicidad de aplicaciones de los servomecanismos, se comprenderá que difícilmente se proporcionarán una explicación completa acerca de los mismos.

Con este trabajo de tesis, se tiene la oportunidad, de ofrecer una modelación en espacio de estados y un análisis de la respuesta temporal de los servomecanismos, ante estímulos como el escalón. Las variables que intervienen en presente problema, objeto de la investigación se definen como: posición angular del enlace $\theta(t)$, energía externa o fuente de alimentación **$e_a(t)$ o señal de control.**

3.2 Operacionalización de variables

Durante el modelamiento matemático de la planta, las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de salida en función de las entradas están dadas por

$$x_1(t) = \theta(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = \omega(t) \quad (21)$$

$$x_2(t) = \omega(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = \alpha(t) \quad (22)$$

$$x_3(t) = i_m(t) \rightarrow \dot{x}_3(t) = \frac{di_m}{dt} \quad (23)$$

Estas relaciones que son un conjunto de ecuaciones de primer orden se representan mediante variables de estado

$$[\dot{X}] = [A]x(t) + [B]u(t) \quad (24)$$

$$y(t) = [C]x(t) + [D]u(t) \quad (25)$$

La operación se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1
Operacionalización de variables

Tipos de variables	Dimensión	Indicador	Instrumento
Variables independientes (variables de entrada)	Angulo de rotación de referencia	Posición angular	Sensor de posición angular
	Velocidad de referencia	Velocidad angular	Sensor de posición angular
Variable dependiente (variable de salida)	Angulo de rotación en el eje	Respuesta en el tiempo del Error, señal de control, posición y velocidad angular	Registrador de datos o pantalla LCD
	Velocidad angular de salida en el eje		

Fuente: Elaboración Propia

3.3 Hipótesis General e Hipótesis Específicas

a. Hipótesis General

- El diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto controlara la posición del servomecanismo.

b. Hipótesis Específicas

- Identificar el sistema para determinar los parámetros en forma experimental y obtener la función de transferencia
- El modelamiento, permitirá encontrar las ecuaciones dinámicas de la planta y la respuesta sin realimentación de estado
- La observabilidad y controlabilidad permitirá la realimentación de estado.
- El diseño del controlador por realimentación de estado con asignación de polos y observador de estado permitirá encontrar la ganancia de realimentación de estados y la ganancia del observador.

IV. METODOLOGÍA

4.1 Tipo de investigación

El presente trabajo de tesis, es una investigación científica experimental, por lo que se usará la teoría de control basado en observadores de estados realimentado, el que permitirá evaluar la performance, satisfaciendo las consideraciones del mínimo sobrepaso y error en estado estacionario nulo.

Temporal

El estudio es del tipo transversal, su ejecución se inicia el 2 de mayo del año 2017 y su posible término el 20 de julio del año 2018.

Espacial

El estudio se realizará en los ambientes de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao

4.2 Diseño de la Investigación

Dado que nuestra Universidad Nacional del Callao no cuenta con un sistema motor DC como prototipo de pruebas para tareas de control e identificación del modelo del sistema, este trabajo se desarrollará mediante los resultados provenientes de la simulación, es decir mediante la programación basada en texto.

El trabajo de Tesis, trata del diseño del control de realimentación de estados por asignación de polos y observador de estado del servomecanismo. Para lograr este objetivo, se seguirá los siguientes pasos:

- Identificación no paramétrica y obtención la Función de transferencia.
- Estudio de la respuesta del sistema, al escalón, sin realimentación de estados.
- Observabilidad.
- Controlabilidad.
- Diseño de un sistema de control mediante asignación de polos.
- Estudio de la respuesta al escalón con Realimentación Lineal de Estados (RLE).
- Introducción de entrada de referencia e implementación de Control de Seguimiento (Tracking Control).
- Diseño de observadores de estados.

Como herramienta fundamental para llevar a cabo el análisis se usa el software Matlab, proteus. Los comandos que se mostrarán corresponden a un m file (extensión .m).

Para obtener la identificación no paramétrica del servomecanismo se realiza con la tarjeta Arduino es una plataforma de hardware libre, basada en una placa con un microcontrolador y un entorno de desarrollo, diseñada para facilitar el uso de la electrónica en proyectos multidisciplinarios.

4.3 Identificación de la planta

Por identificación se entiende la formulación de un modelo que permita representar al sistema con todas sus propiedades y características relevantes. En general, si realizamos un experimento en que aplicamos ciertos valores a las entradas del sistema, obtendremos ciertas respuestas en sus salidas; de ese, de

ecuaciones, la respuesta del modelo debe tener respuestas similares a modo, dando los mismos valores que en el experimento a las variables independientes de nuestro modelo, podemos esperar que después de resolver el conjunto aquellas salidas del sistema físico.

En nuestro caso usaremos el Toolbox de Identificación de parámetros de Matlab, que es una interface gráfica mostrada en la *Figura 3*

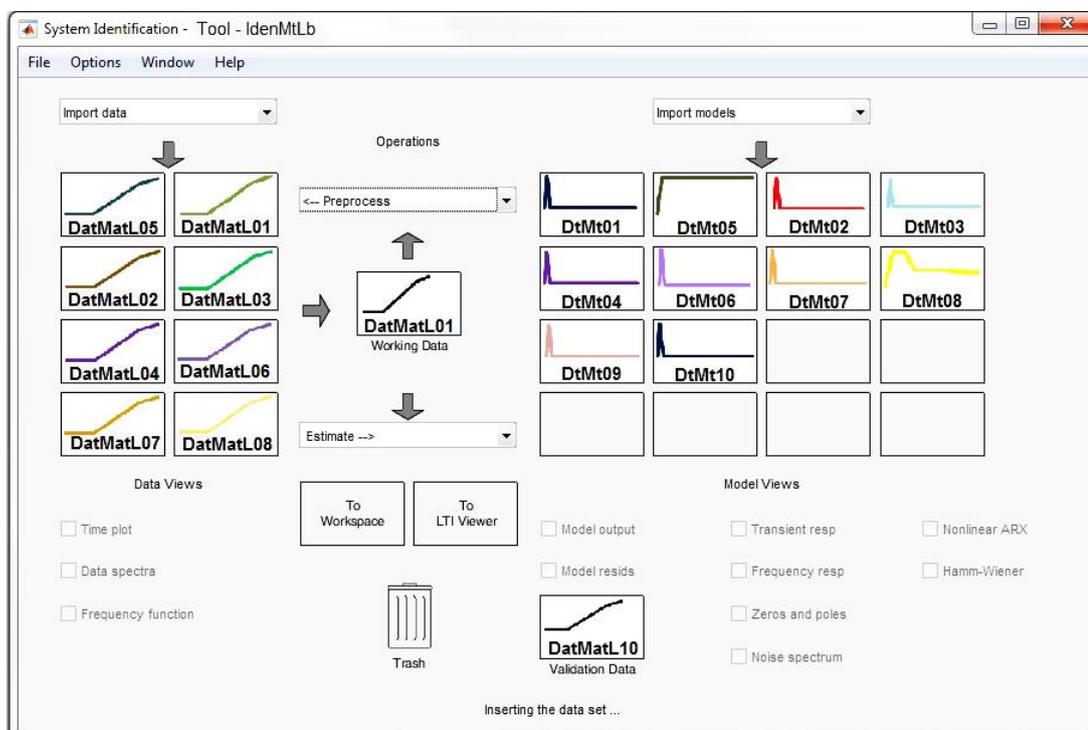


Figura 3.
Interfaz gráfica del toolbox de identificaciones (IDENT) de Matlab
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

a) Identificación de parámetros

El procedimiento para obtener los parámetros del motor DC EMG-30, y en general de cualquier otro motor DC, presenta el siguiente procedimiento:

Los datos del motor fueron estimados a partir de la adquisición de dos señales, VIN y RPM, que son voltaje promedio aplicado y velocidad angular en revoluciones por minuto, tal como se aprecia en la *Figura 4*

Para ello se implementó un variador de velocidad de control con un microcontrolador y se diseñó un sensor de velocidad angular con un convertidor de frecuencia a voltaje LM2907.

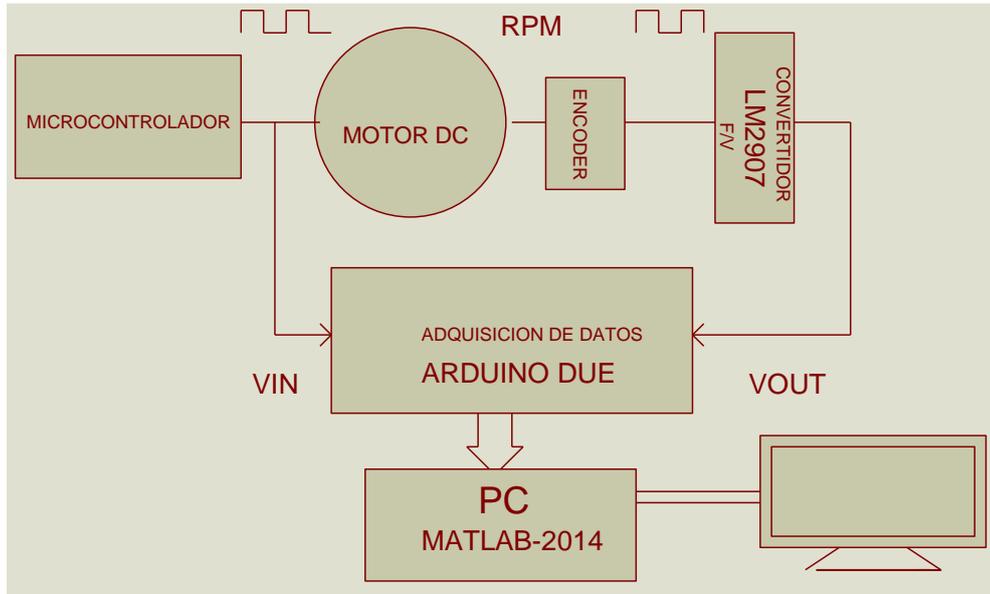


Figura 4.
Esquema de adquisición de las señales VIN y RPM.
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Sensor de velocidad

Es un encoder incorporado en el eje del motor posee cuatro entradas a parte de la alimentación del motor. Dos de ellos son canales y los otro dos la alimentación del chip encoder.

- Pulsos por revolución = 100
- Alimentación del chip encoder = 5v

Circuito conversor frecuencia voltaje (Lm 2917)

Es el circuito de acondicionamiento de la velocidad representado en pulsos por revolución (RPM), en la *Figura 5* se muestra el circuito de conexiones

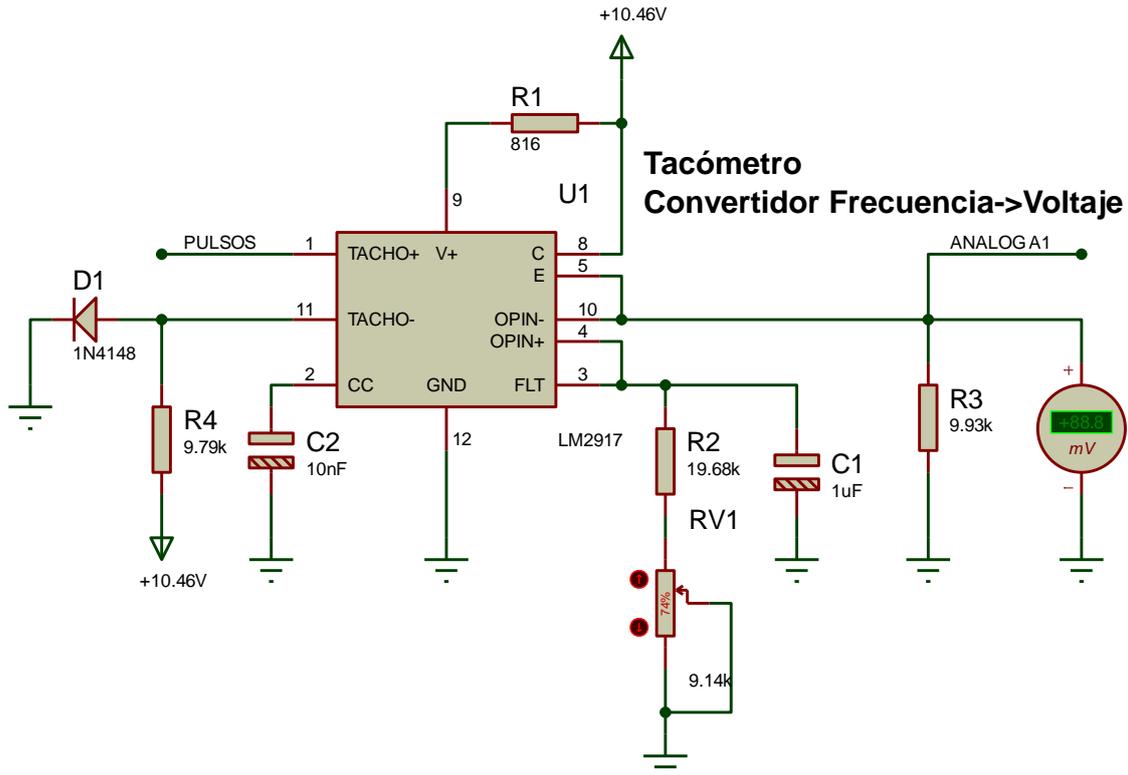


Figura 5.
Circuito convertidor de frecuencia a voltaje
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

El diagrama de bloques representativo del conversor frecuencia a voltaje se muestra debajo.



Donde

$$V_{OUT} = 0.003 * F_p$$

F_p = Frecuencia proveniente del decoder del motor (pulsos/seg)

V_{OUT} = Voltaje de salida del conversor

Para hallar la relación RPM (velocidad angular) / V_{out} (tacómetro) fue necesario calcular la frecuencia de los pulsos proporcionados por el encoder. Y su relación con el voltaje proporcionado por el convertidor de frecuencia a voltaje (Tacómetro).

Para esto se midieron los valores de la resistencia, capacitor, voltaje de entrada y voltaje de salida y usando la ecuación del convertidor:

$$V_{out}(t) = f_{frecuencia} * V_{alimentacion} * R * C$$

Luego los valores obtenidos se tienen en la Tabla 2

Tabla 2.
Valores del convertido F/V

Los valores de R,C,Vin del Tacómetro son:			Frecuencia "ecuación"	Vout tacómetro
			477.0163061	1.438
R	C	VALimentación	531.4187221	1.602
28820	0.00000001	10.46	550.658601	1.66
			587.1480263	1.77
			427.9214429	1.29

Fuente: (UNAC-2018) Elaboración propia

Los valores obtenidos experimentalmente se corroboraron con la simulación del ISIS Proteus. Además, por medio de la ecuación se obtuvo la frecuencia de trabajo. Y mediante Excel se halló la pendiente que relaciona dichas variables, obteniendo así una relación "frecuencia-Voltaje". Con esto ya es posible hallar las RPM, en función del Voltaje de salida del Tacómetro. Tal como se muestra en la *Figura 6*

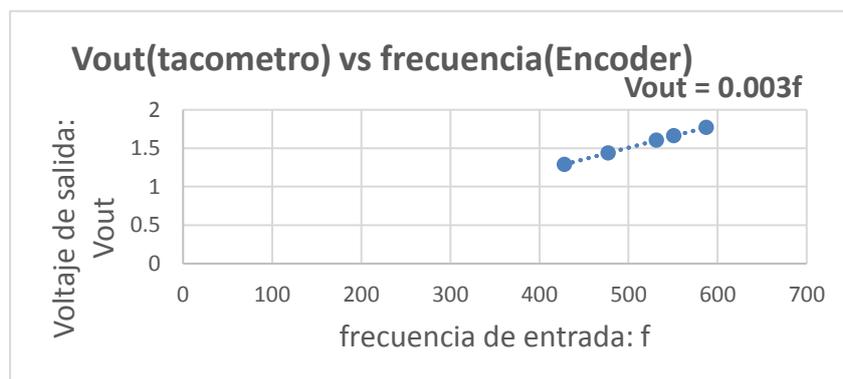


Figura 6.

Relación de salida de convertidor F/V y entrada

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Luego el valor de las RMP es

$$RPM = \frac{V_{out}(60)}{(\text{factor de conversion})(\text{pulsos/revol})} \quad (26)$$

$$RPM = \frac{V_{out}(60)}{(0.003)(100)} \quad (27)$$

Esta relación se obtiene el equivalente de este en Radianes/s, mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{Rad}{s} = \left(RPM \frac{revol}{min} \right) * \frac{2\pi}{1revol} * \frac{1min}{60s} \quad (28)$$

Finalmente, ya se tienen la entrada: Voltios y la salida: Rad/s. Y solo queda hacer un programa que nos muestre estos valores y luego mediante MATLAB poder hallar así la función de transferencia.

b) Datos obtenidos experimentalmente

Los datos obtenidos mediante la comunicación serial se imprimirán en la pantalla del monitor serial del Arduino.

Tabla 3.
 Datos obtenidos experimentalmente la tarjeta Arduino

	A refla	B salla
	Number	Number
1	30.2100	0.6600
2	30.2100	0.7600
3	30.2100	0.7600
4	30.3400	0.4700
5	30.3400	1.1300
6	30.3100	0.8500
7	30.3400	1.5100
8	30.3100	6.9900
9	30.3100	11.7200
10	30.3100	15.7800
11	30.3400	19.3700
12	30.3100	22.3900
13	30.3400	25.9900
14	30.3400	28.7300
15	30.3100	30.6200
16	30.1700	31.9400
17	30.3100	32.7900
18	30.3100	33.5500
19	30.3400	33.8300
20	30.3100	34.3000
21	30.3100	34.3000
22	30.3400	34.3000

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Estos Datos son llevados a Matlab y ordenados de manera que estén listos para importar al Excel. Luego desde Matlab hacemos llamado a subprograma *ident.*

El tiempo total que se generaron los datos fue de 5s, y las muestras proporcionadas por el Monitor Serie fueron 376.

Por lo que el tiempo de muestreo de estas señales es de 0.0133s. Dato importante al momento de llevar los datos al *ident.*

c) Ident (Matlab)

ident es una herramienta de Matlab en la cual podemos añadir valores (en columnas) de nuestra entrada y salida a un sistema experimental, *ident* se encargará de hallar la función de transferencia en función a estos valores obtenidos experimentalmente. Se hizo uso de *ident* para ver la respuesta de la planta frente a lazo abierto, lazo cerrado y junto al PID ya calculado.

Además, la función de transferencia y su respuesta en tiempo continuo y discreto.

El sistema en lazo abierto:

La reconstrucción del sistema en función a los datos obtenidos es el que se muestra a continuación.

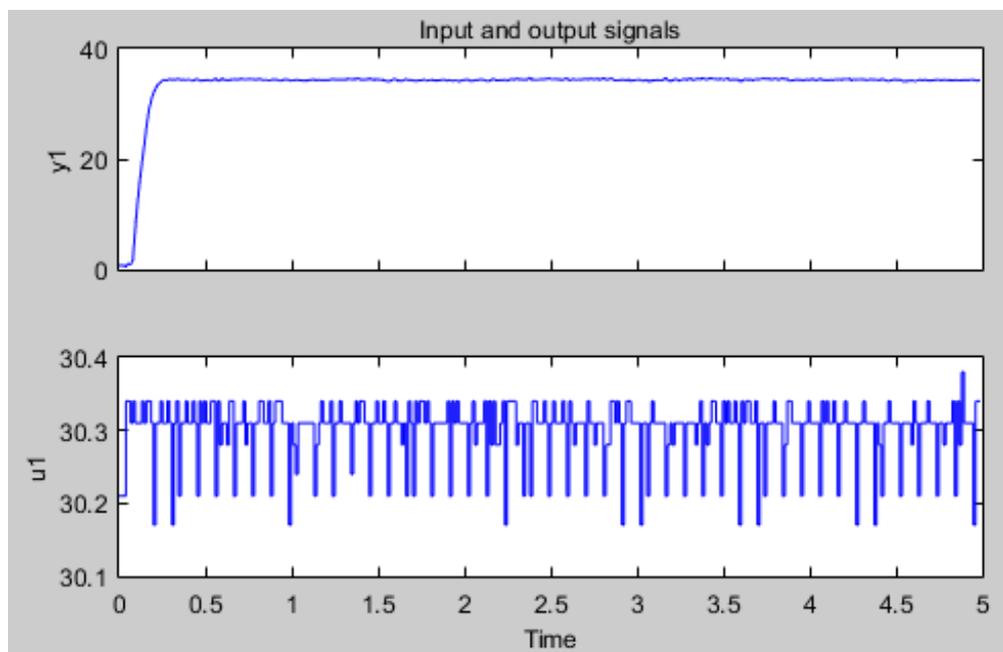


Figura 7.

Respuesta del sistema a lazo

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Luego se procedió a calcular la función de transferencia del sistema.

Siendo el siguiente: Para tiempo continuo y discreto

Ahora sólo queda hallar la ecuación de la función de transferencia de la planta. Siendo las funciones de transferencia las siguientes:

Función de transferencia del sistema en lazo abierto en tiempo continuo:

$$\frac{300.7}{s^2 + 23.9 s + 265.4} \quad (29)$$

Función de transferencia del sistema en lazo abierto en tiempo discreto:

$$\frac{0.04824}{1 - 1.675 z^{-1} + 0.7177 z^{-2}} \quad (30)$$

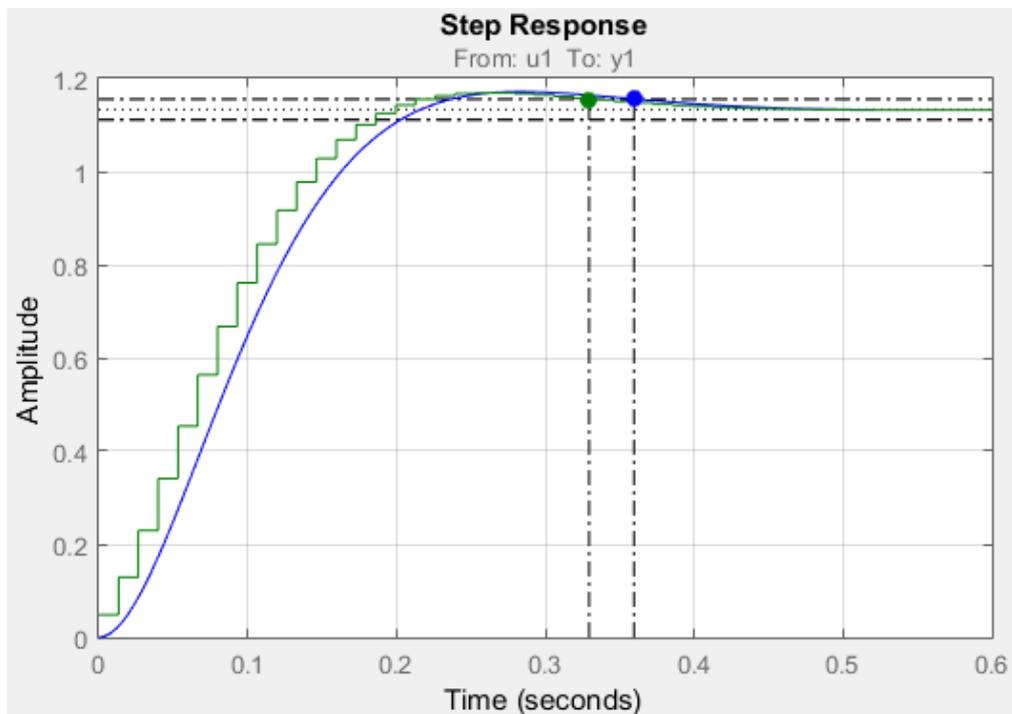


Figura 8.

Respuesta del sistema lazo abierto
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Se observa al sistema que no llega al nivel de Referencia deseado, ya que supera al nivel de escalón unitario.

4.4 Representación en espacio de estado discreto

a) Espacio de estado

Los métodos de espacio de estado son la piedra angular de la teoría de control moderna. La principal característica del espacio de estado es la caracterización de los procesos de interés por ecuaciones diferenciales en vez de funciones de transferencia.

Esto podría parecer como un regreso al periodo clásico donde las ecuaciones diferenciales también constituían los medios de representar el comportamiento de los procesos dinámicos. Pero en el periodo clásico los procesos eran simples suficientes para ser caracterizados por una única ecuación diferencial de orden pequeño.

En el enfoque moderno el proceso está caracterizado por sistemas de orden “n” en el espacio de estados, que tendrán “n” ecuaciones lineales de primer orden. En principio no hay límite para el orden de los sistemas y en la práctica el único límite para el orden es que la disponibilidad del software informático sea capaz de realizar los cálculos necesarios de forma fiable.

El espacio de estados es el conjunto de todos los posibles estados de un sistema lineal, cada uno de los estados corresponde a un único punto en el espacio de estados. Los sistemas lineales que aparecen tienen la siguiente forma, donde se puede destacar $\mathbf{u}(t)$ que es la entrada del sistema, $\mathbf{y}(t)$ que es

la salida del sistema, $x_i(t)$ que son las variables de estado, y las constantes a_i, b_i, c_i y d que son parámetros que definen la representación en el espacio de estados.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Se puede ver que $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado y $\dot{\mathbf{x}}(t)$ es la derivada del vector de estado. A, B, C y D son matrices donde A es la matriz de estado, B la matriz de entrada, C la matriz de salida y D la matriz de transferencia directa.

En sistemas donde sólo existe una entrada y una salida, D es un escalar. Además, cabe considerar que en la mayoría de los sistemas utilizados $D = 0$

En la *Figura 9* se puede ver el diagrama de bloques de la representación matricial de la ecuación.

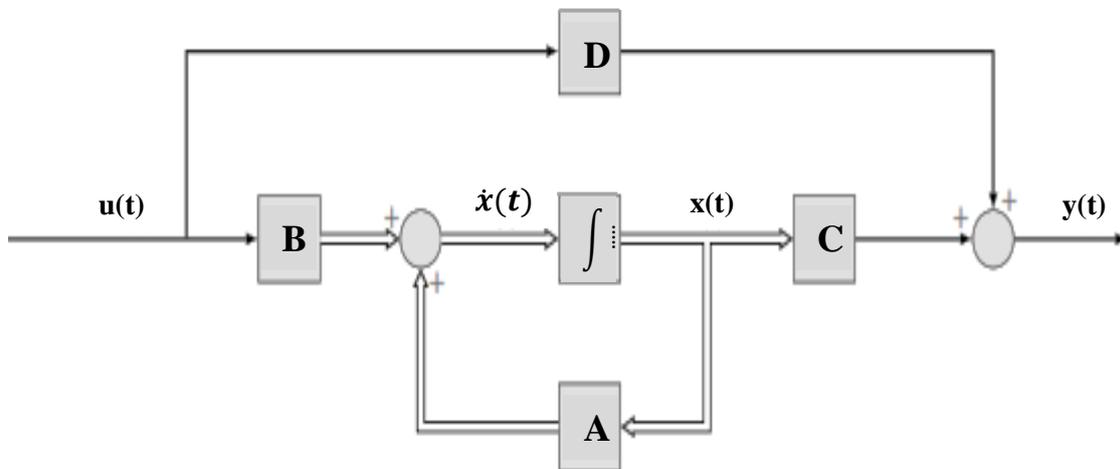


Figura 9.

Diagrama de bloques de la representación matricial en el espacio de Estados

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Hay infinitos conjuntos de variables de estado, por lo que puede haber infinitos conjuntos de matrices para representar el mismo sistema.

Existen 3 métodos diferentes para el cálculo de las ecuaciones de estado de un sistema lineal. Estos son:

- Cuando se conocen las ecuaciones físicas del sistema.
- Cuando se conoce el diagrama de bloques detallado del sistema lineal.
- Cuando solo se dispone de la ecuación diferencial o la función de transferencia.

En este trabajo de tesis se analizó el tercer método ya que se ha hecho el proceso de identificación y obtención de la función de transferencia en forma experimental de nuestro motor DC.

b) Respuesta en lazo abierto

Para graficar la respuesta al escalón, debe definirse previamente un vector "t", que contenga los valores en los cuales se evaluarán las variables de estado del sistema. Este vector inicialmente será igual a cero, tendrá un valor final suministrado por el usuario y un incremento, también definido por el usuario: **t = [0.0:incremento:valor_final]**

La entrada escalón estará conformada por un vector cuyas componentes son todas iguales a 1; y tendrá tantas componentes como valores en el tiempo tenga el vector "t".

$$\mathbf{u} = \mathbf{ones}(1, \text{length}(t))$$

Como las condiciones iniciales tendrán valores suministrados por el usuario se formará un vector:

$$\mathbf{x0} = [\mathbf{ci1}; \mathbf{ci2}; \mathbf{ci3}]$$

Para simular la salida del sistema se hace uso del comando de Matlab **lsim** y se asigna el resultado a una matriz:

y = lsim(A,B,C,D,u,t,x0)

Finalmente, la gráfica esperada se obtiene al utilizar el comando plot, del siguiente modo:

plot(t,y)

La siguiente secuencia ilustra el uso de todos los comandos explicados:

Código lazo abierto

```
NUM=[0 0 300.7];  
DEN=[1 23.9 265.4];  
[A,B,C,D]=tf2ss(NUM,DEN);  
polos=eig(A)  
t=0.00:0.001:30;  
u=ones(1, length(t));  
y=lsim(A;B;C;D,u,t,x0);  
plot(t,y)
```

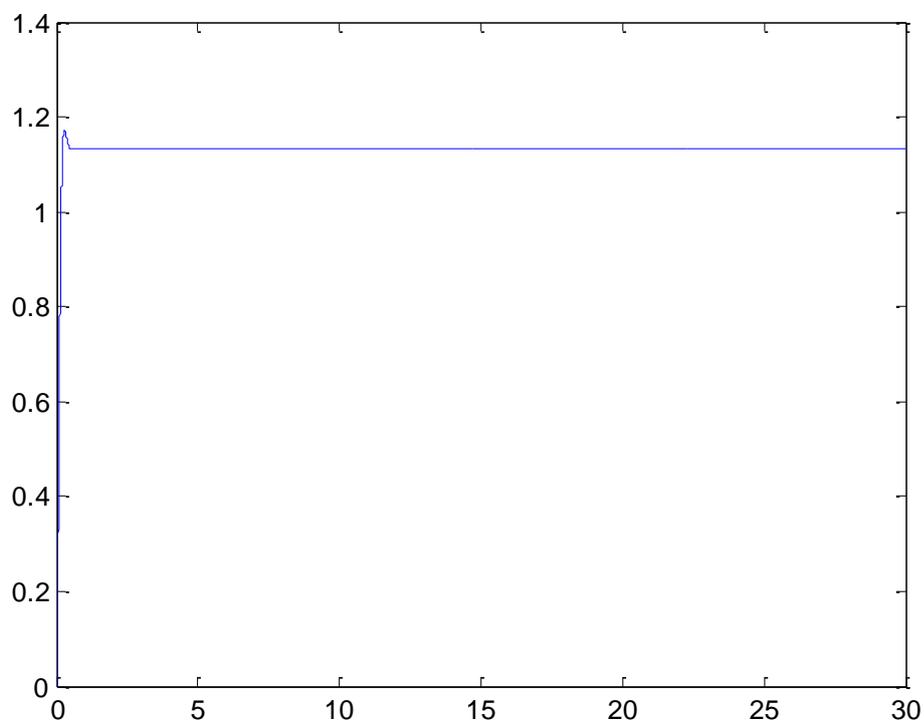


Figura 10.
Respuesta del servomotor no realimentado, para entrada escalón
Fuente: (UNAC-2019)

4.5 Controlabilidad y Observabilidad Sistema

En la teoría de control moderna se puede hablar de muchos científicos que influyeron en el desarrollo de la misma. Uno de los que más contribuyeron en esta tarea fue Rudolf Kalman, conocido por el “Filtro de Kalman” y los conceptos de controlabilidad y observabilidad.

Rudolf Emil Kalman nació en Budapest en 1930, hijo de un ingeniero eléctrico decidió seguir los pasos de su padre. Durante la Segunda Guerra Mundial emigró a Estados Unidos, donde se doctoró en el M.I.T. En Ingeniería Eléctrica en 1954. Su interés por los sistemas de control fue aumentando y con el paso de los años hizo contribuciones importantes en el diseño de sistemas de control lineales de datos muestreados.

A partir de 1958, y hasta 1964, Kalman trabajó en el RIAS (Research Institute for Advanced Study), y fue allí donde hizo algunas de sus contribuciones más importantes para los sistemas de control moderno. Sus publicaciones durante estos años muestran la creatividad y su búsqueda por la unificación de la teoría de control. Entre ellas destacan los conceptos de observabilidad y controlabilidad, que ayudaron a poner bases teóricas sólidas de algunos de los aspectos estructurales más importantes de los sistemas de ingeniería. Estos aspectos son una forma de explicar por qué un método de diseñar compensadores para sistemas inestables cancelando polos inestables por ceros en el semiplano derecho está condenado a incluso fallar si la cancelación es perfecta.

a) El concepto de controlabilidad

Es un sistema completamente controlable si existe un control sin restricción $u(t)$ que puede llevar cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado deseado $x(t)$ en un tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

La condición para la Controlabilidad completa de sus variables de estado, es que la matriz: $M=[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ sea de rango "n", donde "n" es el número de filas o columnas de la matriz A.

Esto significa que "M" debe tener "n" vectores columna, linealmente independientes.

Un modo de verificar esta condición con Matlab es a través del uso de los comandos `ctrb` y `rank`

`M = ctrb(A,B)`
`rank(M)`

Con la primera de estas dos líneas se obtiene la matriz "M", y con la segunda, su rango.

b) El concepto de observabilidad

Un sistema es completamente observable si y sólo si existe un tiempo finito "T" de forma que el estado inicial $x(0)$ se pueda determinar a partir de la observación de la historia $y(t)$ dado el control $u(t)$.

El principal **problema de la observabilidad** es que tiene muchas aplicaciones importantes. Si un sistema es observable, no hay sistemas dinámicos internos, por tanto, podemos entender todo lo que está pasando a

través de la observación de las entradas y salidas. El problema de la observabilidad es de un interés significativo debido a que ésta determinará si un conjunto de sensores es suficiente para controlar nuestro sistema.

La condición de completa Observabilidad de un sistema se verifica si puede construirse una matriz: $N=[C^T \ A^T \ C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$

Tal que el rango de “N” sea igual a “n”.

Usando Matlab es muy simple determinar a la matriz “N” y su rango, mediante los comandos:

N = obsv (A, C)
rank(N)

Código:

```
NUM=[0 0 300.7];
DEN=[1 23.9 265.4];
[A,B,C,D]=tf2ss(NUM,DEN);
polos=eig(A)
t=0.00:0.001:30;
x0=[0;0];
u=ones(1, length(t));
y=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);
plot(t,y)
%*****
M=ctrb(A,B)
rank(M)
% El sistema es completamente controlable
N=obsv(A,C)
rank(N)
% el sistema es completamente observable
%*****
```

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -23.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rango= 2

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 300.7 \\ 300.7 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango=2

4.6 Diseño de un sistema de control regulatorio mediante asignación de polos.

El diseño de un sistema de control mediante la asignación de polos busca lograr la compensación de perturbancias para devolverlo a una condición inicial de equilibrio (Regulación).

Este procedimiento es conocido como Realimentación Lineal de Estados (**RLE**) y consiste en aplicar una transformación que permita ubicar los polos del sistema donde se deseen.

Esto se logra mediante la realimentación de las variables de estado, a través de una matriz de ganancia (K), para redefinir las entradas del sistema, ahora en lazo cerrado. La *Figura 9* sirve como ilustración del concepto.

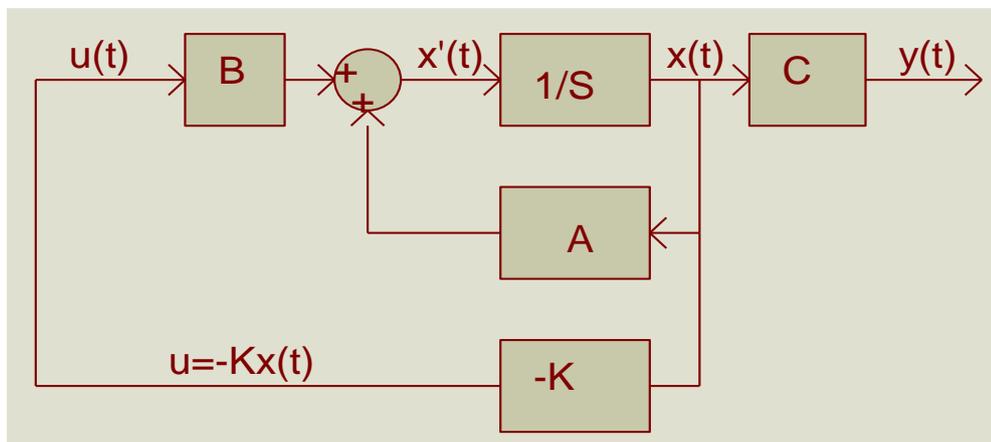


Figura 11.

Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$

Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

La realimentación requerida puede implementarse al acoplar un potenciómetro en el eje del motor, de manera que las variaciones de la posición angular se traduzcan en cambios de tensión.

Para la velocidad se usa un tacómetro y la corriente de armadura puede censarse indirectamente a través de la tensión caída en una pequeña resistencia (recuérdese que las tres variables de estado son θ , ω e i_m) en nuestro análisis se considera dos ($\theta(t)$, $\omega(t)$).

Una vía expedita para lograr el diseño deseado consiste en los siguientes pasos:

a) Verificar la controlabilidad del sistema

Obtener un vector formado por los coeficientes del polinomio característico de la matriz A

$$(|SI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n) \quad (32)$$

Con Matlab, esto se logra haciendo uso del comando poly.

Por ejemplo, en la expresión siguiente, se forma el vector cpca con estos coeficientes:

cpca=poly(a)

b) Determinar la matriz de transformación (T)

Permite expresar la ecuación de estado en su Forma Canónica Controlable (FCC).

“T” se obtiene como el producto de otras dos matrices: “M” y “W”; “M” es la matriz de controlabilidad y “W” tiene la forma que se muestra a continuación:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Definir los polos deseados para el sistema en lazo cerrado y formar con ellos un polinomio característico.

Previamente debe definirse una matriz (J) que tenga en la diagonal los valores de los polos deseados.

$$J = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$$

En la próxima expresión, los polos deseados se representan como u_i y los coeficientes del polinomio característico resultante, mediante a_i .

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_n) = s^n + \alpha s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (33)$$

El vector con los coeficientes a_i (cpda) se forma con el comando poly.
cpda=poly(j)

d) La matriz de ganancias de realimentación

Se obtiene a partir de la Ecuación:

$$K = [(\alpha_n - a_n) \quad (\alpha_{n-1} - a_{n-1}) \quad \dots \quad (\alpha_1 - a_1)] * T^{-1} \quad (34)$$

En resumen, para un sistema con $n = 3$; el grupo de comandos de Matlab que permiten seguir los pasos descritos para lograr el diseño de una matriz de realimentación de estado que garantice la ubicación de los polos del sistema donde se desee, son:

cpca=poly(a)

w = [a₂ a₁ 1; a₁ 1 0; 1 0 0]

T=M*w

J = [mu₁ 0 0; 0 mu₂ 0; 0 0 mu₃]

cppa=poly(j)

Se considera el sistema de la ecuación 31 con $D = 0$ para simplificar el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (35)$$

$$y = Cx$$

Por lo tanto, si se quiere que un sistema sea flexible y permita colocar todos los polos arbitrariamente, el sistema ha de ser controlable y observable.

Rudolf Kalman desarrolló un algoritmo llamado "**Filtro de Kalman**", que permite identificar el estado oculto que es un estado no medible de un sistema dinámico lineal cuando el sistema está sometido a ruido blanco aditivo. La ganancia K de realimentación del error se escoge de manera óptima cuando se conoce la varianza de los ruidos que afectan al sistema. Como este algoritmo es recursivo, corre en tiempo real usando sólo las mediciones de entradas actuales, el estado calculado previamente y su matriz de incertidumbre. Obtuvo resultados en tiempo discreto (datos muestreados) a finales de 1958 y principios de 1959. Combinó trabajos fundamentales en el filtrado de Wiener, Bode y otros con el enfoque moderno del espacio de estados.

La solución del problema del tiempo discreto le permitió llegar al problema del tiempo continuo, y en 1960-1961 desarrolló la versión de tiempo continuo del "**Filtro de Kalman**". El filtro de Kalman, y su posterior extensión a los problemas no-lineales, representa quizás la aplicación más importante de la teoría de control moderna. Podemos ver esta aplicación en la navegación y control de vehículos espaciales (Apollo), algoritmos para el seguimiento por radar, control de procesos, y sistemas socioeconómicos. Su popular aplicación es debida al hecho de que una computadora digital puede realizar la fase de diseño también como la implementación de la misma.

Tiempo discreto

Un computador para obtener información de lo que ocurre en el exterior toma muestras periódicas cada "T" segundos (periodo de muestreo) de las señales analógicas que proporcionan los sensores y las convierte en valores que se pueden representar de forma digital.

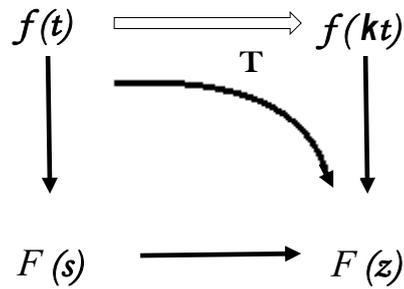
Como el computador tiene que realizar transformaciones de analógico a digital, y viceversa, dispone de dos convertidores: ADC (Analog to Digital Converter) y DAC (Digital to Analog Converter).

La salida del convertidor ADC es una secuencia debido a que el computador trabaja en tiempo discreto, es decir, toma valores de la señal en saltos discretos del tiempo que corresponde con el tiempo de muestreo T. La entrada al convertidor es una señal en tiempo continuo llamada $y(t)$.

La CPU (Central Processing Unit) utiliza la secuencia que se obtiene a la salida del convertidor ADC $y(kT)$ y la señal de referencia $r(kT)$. Esto proporciona la señal $u(kT)$ que es una señal digital y el convertidor DAC la convierte otra vez en una señal analógica $u(t)$. Pero para poder trabajar en tiempo discreto es necesario que la CPU pueda pasar la señal en tiempo continuo a tiempo discreto.

Para ello, hay que conseguir que la transformada de Laplace, que convierte ecuaciones integro-diferenciales en ecuaciones algebraicas, pase a ser una transformada z, que convierte ecuaciones en diferencias en ecuaciones algebraicas simplificando el análisis en tiempo discreto.

Se puede pasar de una a la otra directamente como podemos ver a continuación:



donde $f(t)$ es la función en tiempo continuo, $F(s)$ la transformada de Laplace de la función $f(t)$, $f(kT)$ es la función en tiempo discreto, $F(z)$ la transformada z de $f(kT)$, y como ya se ha dicho con anterioridad, T es el periodo de muestreo.

El objetivo es obtener $F(z)$ ya que a partir de la transformada z se pueden calcular las ecuaciones en diferencias necesarias para realizar la implementación en el computador.

4.7 Controlador digital con Observador de estados realimentados

La realimentación de la salida es característica de los sistemas de control debido a que se realiza una operación inicial a la entrada del controlador donde la referencia $r(k)$ menos la salida $y(k)$ generan un error que el sistema corregirá con el paso del tiempo a partir de la acción de control integral $u_i(k)$ y el integrador discreto.

En muchos casos prácticos, sólo son medibles unas cuantas variables de estado de un sistema dado, mientras que las demás no lo son. Puede darse el caso que sólo las variables de salida son medibles. En caso de que esto ocurra, será necesario estimar las variables de estado que no se puedan medir directamente a partir de las variables de salida y las de control.

Para ello será necesario el uso de un algoritmo que realice la estimación del estado basado en el conocimiento previo del modelo en tiempo discreto de la planta.

En el diagrama de bloques de la *Figura 12* se muestra el esquema de la realimentación de la salida con acción integral.

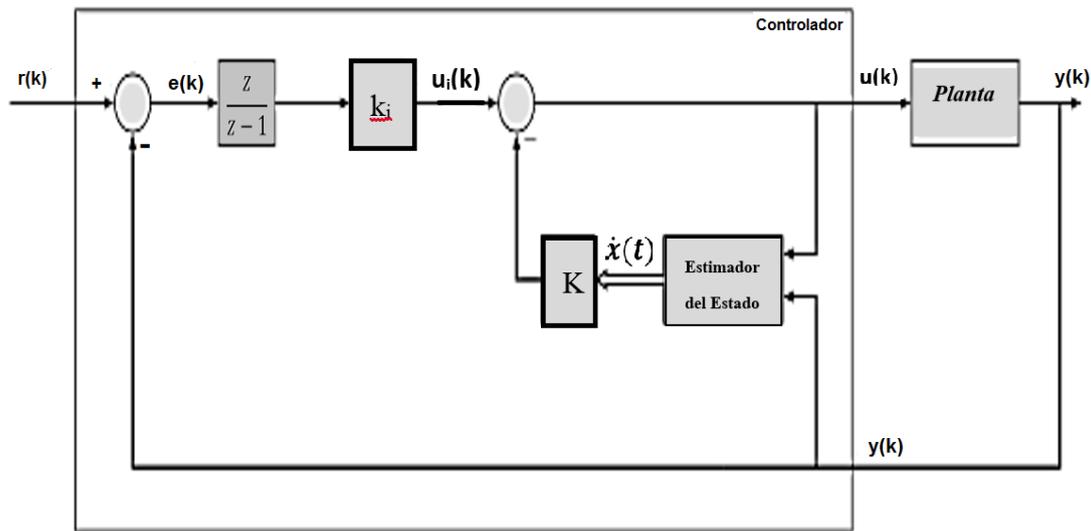


Figura 12.

Diagrama de bloques del control digital por realimentación de la salida

Fuente:(UNAC-2019) Elaboración Propia

Se observa que el controlador engloba al estimador del estado, a la acción de control integral $u_i(k)$ y al vector K por la estimación de la variable de estado $\hat{x}(k)$.

Como ya se ha dicho, el controlador está compuesto por el estimador del estado, por la acción de control integral $u_i(k)$ y por el vector K . Además, cabe destacar que el controlador presenta dos entradas, la referencia $r(k)$ y la salida del sistema $y(k)$, y una salida, la acción de control $u(k)$, ver *Figura 12*

Por lo tanto, la acción de control $u(k)$ por realimentación de la salida (control por realimentación del estado estimado) tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(k) = K\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{u}_i(k) \quad (36)$$

Donde $u_i(k)$ es la acción de control integral, que es el producto de la constante k_i por la salida del integrador discreto que acumula el error $e(k) = r(k) - y(k)$.

La ecuación en diferencias que corresponde con $u_i(k)$ se define como sigue:

$$U_i(z) = k_i \frac{z}{z-1} E(z) = \frac{k_i}{1-z^{-1}} E(z) \quad (37)$$

$$[1 - z^{-1}]U_i(z) = k_i E(z) \quad (38)$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + k_i e(k) \quad (39)$$

Se puede apreciar claramente que cuando el valor del error es cero $e(k) = 0$, la acción de control integral se mantiene constante $u_i(k) = u_i(k-1)$.

En cambio, sí hay error, por pequeño que sea, la acción de control integral irá variando su valor

En la acción de control $u(k)$ la estimación del vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se multiplica por el vector fila K , que corresponde con los parámetros de diseño del controlador.

A continuación, se analizará qué ocurre en la realimentación de la salida con observador. Además, también se analizará la realimentación de la salida con observador y filtro de la medida, y la realimentación de la salida por filtro de Kalman.

4.8 Realimentación de la salida con observador

En el diagrama de bloques de la *Figura 13* se tiene un estimador del estado, por lo que éste, a continuación, se convertirá en un observador del estado, ya que es lo que se implementará en nuestro sistema.

El observador del estado utiliza la información del modelo del sistema expresado en el espacio de estado:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (40)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (41)$$

El algoritmo de estimación del vector de estado $\tilde{x}(k)$ (basado en el observador de Luenberger es:

$$\tilde{x}(k + 1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + L[y(k) - C\tilde{x}(k)] \quad (42)$$

$$\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k) \quad (43)$$

Debe considerarse que aunque el estado $x(k)$ no sea medible, la salida $y(k)$ si lo es, por lo que el desempeño del modelo dinámico puede mejorar si se utiliza la diferencia entre la salida medida $y(k)$ y la salida estimada $\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$ para monitorizar el estado $\tilde{x}(k)$.

En la *Figura 13* se representa gráficamente el algoritmo de estimación del estado, donde se observan las dos entradas: la acción de control $u(k)$ y la salida realimentada $y(k)$, y la salida: el vector de estado estimado $\tilde{x}(k)$. También aparece en el diagrama de bloques la salida estimada $\tilde{y}(k)$, se puede apreciar claramente que la ganancia del observador (L) estará multiplicada por la diferencia de $y(k) - \tilde{y}(k)$.

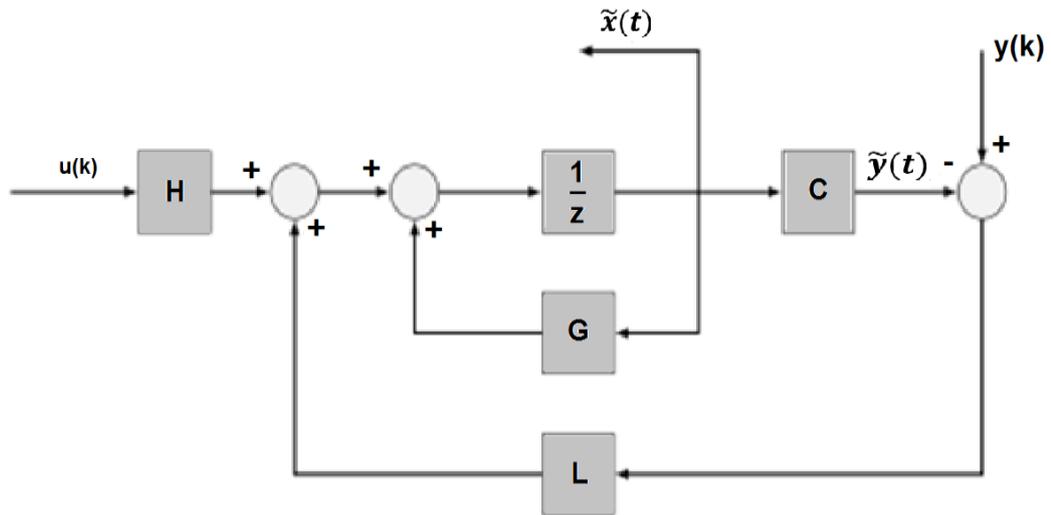


Figura 13.
 Diagrama de bloques del observador
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Si el sistema es observable, la matriz L, matriz equivalente a la matriz de realimentación del observador k_e puede ser escogida de modo que $[G- LC]$ sea asintóticamente estable y $\tilde{x}(k)$ asintóticamente se aproxime a $x(k)$.

El término $[y(k) - C \tilde{x}(k)]$ proporciona un factor de corrección proporcional que asegura la estabilidad del observador incluso cuando el sistema es inestable y ayuda a reducir las diferencias entre el modelo dinámico y el modelo real.

Este diseño lo componen las matrices de la representación en el espacio de estados en tiempo discreto. Se puede ver que la matriz “H” es la matriz de entrada, la matriz “C” es la matriz de salida, la matriz “G” es la matriz de estado, y por último, como ya se ha dicho anteriormente, la matriz “L” es la matriz de realimentación del observador o ganancia del observador, y donde se encuentran los valores propios deseados.

4.9 Realimentación de la salida con observador y filtro de Medida

La presencia de perturbaciones es una de las razones principales para el uso de sistemas de control. Sin perturbaciones no habría necesidad de utilizar sistemas con realimentación. La naturaleza de las perturbaciones determina la calidad de regulación en un proceso de control, y además, transmiten información importante sobre las propiedades del sistema.

Hasta el momento se ha hablado sólo de la realimentación de la salida con observador y se ha considerado un sistema ideal en el que no hay ruido ni perturbaciones. Pero esto no es así.

Todos los sistemas que encontramos se ven afectados tanto por ruido como por perturbaciones que impiden un correcto funcionamiento de nuestro sistema. Para corregir estos problemas una solución es filtrar la medida de la salida controlada.

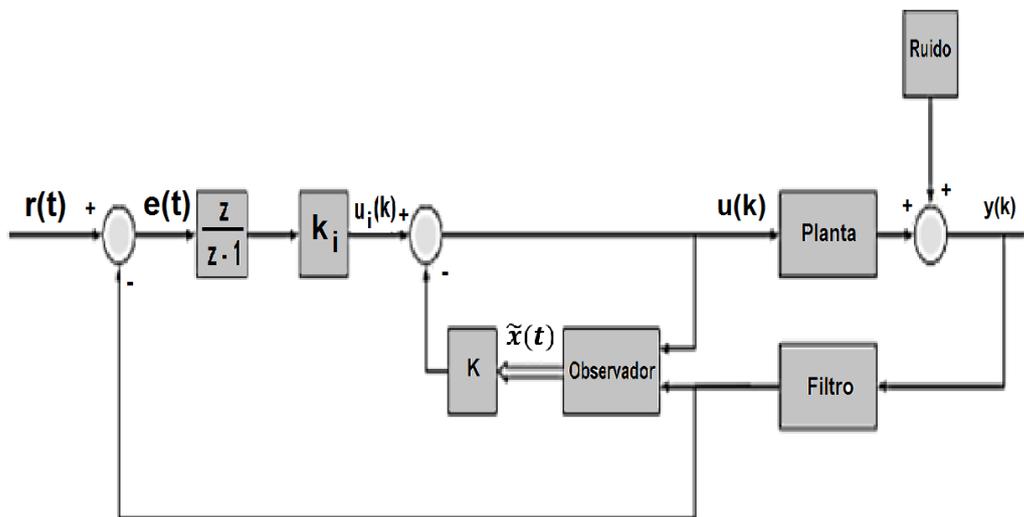


Figura 14.
Diagrama de bloques real, con filtro y ruido
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Como se puede ver en la Figura 14 se incorpora en la realimentación un filtro de la medida que tomará el valor de la salida más el ruido generado. Este ruido es generado por el propio motor.

La forma de evitar que este ruido sea muy perjudicial para nuestro sistema es incorporar un filtro, de modo que reduzca las vibraciones que se produzcan en éste mediante un proceso matemático sobre la señal de entrada.

Los filtros son redes que procesan las señales de una manera dependiente de la frecuencia. El concepto básico de un filtro se puede explicar examinando la naturaleza de la frecuencia de la impedancia de los condensadores e inductores. Tienen muchas aplicaciones prácticas. Un simple filtro de paso bajo (integrador) a menudo se utiliza para estabilizar amplificadores por la atenuación de la ganancia a altas frecuencias donde el desplazamiento de la fase puede causar oscilaciones. Por otra parte, un simple filtro de paso alto puede ser usado para bloquear el offset de DC en los amplificadores de alta ganancia o circuitos de alimentación individual. Los filtros se pueden utilizar para separar señales, pasando las de interés, y atenuando las no deseadas.

Hay diferentes tipos de filtros de la medida. Se pueden destacar varios, como el filtro de Chebyshev, el filtro de Bessel y el filtro de Butterworth. Según Zverev y Blinichikoff (1976) cada uno de ellos presenta un mejor funcionamiento para determinados diseños.

Para conocerlos un poco mejor, a continuación, se puede ver una pequeña explicación de cada uno de los filtros que hemos nombrado.

El filtro de **Bessel** está optimizado para obtener una respuesta transitoria debido a una fase lineal (es decir, retardo constante) en la banda de paso. Esto significa que no habrá respuesta de frecuencia relativamente más pobre (menos discriminación de amplitud). Es decir, se trata de un filtro con buena respuesta en el dominio del tiempo. Los polos del filtro de Bessel se pueden determinar localizando todos los polos en un círculo y separando la parte imaginaria.

El filtro de Chebyshev da una mejor discriminación de amplitud respecto a los otros dos, seguido del filtro de Butterworth y del de Bessel. Existen dos tipos diferentes de filtros de Chebyshev: Tipo 1 (la onda sólo está permitida en la banda de paso) y Tipo 2 (presentan la onda sólo en la banda de detención). Los que más se usan son los de tipo 1. A medida que aumenta la ondulación, la atenuación se agudiza.

La respuesta de Chebyshev es una óptima compensación entre esos dos parámetros. Finalmente, el filtro de Butterworth es el que presenta mejor relación entre atenuación y respuesta de fase. No tiene onda en la banda de paso ni en la banda de detención, y debido a esto a veces se llama filtro de aplanamiento máximo. Logra su planeidad a pesar de una amplia región de transición de la banda de paso a la banda de detención, con características medias transitorias.

Al ser este último filtro mejor que los otros dos, ya que podríamos decir que se encuentra en medio, se ha escogido para nuestro sistema de modo que podamos atenuar el ruido del motor.

El filtro de Butterworth es un filtro digital de orden "n", que puede presentar una frecuencia normalizada de corte ω_n que variará a nuestra elección, no

obstante estas variaciones provocarán que la salida presente más o menos sobrepasamiento y un tiempo de establecimiento menor o mayor.

Hay que tener en cuenta que la frecuencia normalizada de corte es la razón entre la frecuencia de corte ω_c en radianes por segundo y la frecuencia en H_z de la muestra por tanto:

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{f_s} = \frac{2\pi f_c}{\frac{1}{T_s}} = 2\pi T_s f_c \quad (44)$$

Introducir un filtro de la medida en nuestro sistema permite que la acción de control se suavice, y por lo tanto, que no aparezca ruido en ella. Sin embargo, dependiendo del orden del filtro, estaremos introduciendo más polos y ceros al sistema, con lo que las especificaciones de funcionamiento (tiempo de establecimiento y pico de sobrepasamiento) pueden variar.

4.10 Realimentación de la salida con filtro de Kalman

La ganancia de un observador se selecciona simplemente para mantener la estabilidad y para proporcionar una respuesta dinámica razonable. Este método de selección es a menudo adecuado.

Existen dos casos, en los cuales es necesario el uso de un método más sistemático.

El primer caso es que no haya una forma obvia de selección de la ganancia del observador. Esta situación generalmente surge cuando hay más términos en

la matriz de la ganancia del observador de los que se necesitan para establecer los polos del observador.

El segundo caso aparece cuando es importante que el estado estimado producido por el observador sea lo más preciso posible, y donde las propiedades del ruido en la medida se pueden determinar. Para estos casos es apropiado el uso del filtro de Kalman, (Friedland 1995, p. 189).

En Åström y Wittenmark (2013), el filtro de Kalman se describe para sistemas discretos de la forma que sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{w}(k) \quad (45)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (46)$$

Donde $\mathbf{w}(k)$ y $\mathbf{v}(k)$ son el ruido en tiempo discreto del proceso y de la medida respectivamente.

La función de covarianza de un proceso se define como:

$$R_1 = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(k)^T]; \quad R_2 = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T]; \quad R_{12} = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}(k)^T] \quad (47)$$

Donde R_1 y R_2 son variables independientes, es decir uno puede aumentar y no influiría en el otro, éste puede disminuir o aumentar arbitrariamente. Además, para simplificar, consideramos que $R_{12} = 0$. La estimación del próximo estado tiene la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(k|k+1) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{L}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k+1)] \quad (48)$$

Por lo que la dinámica del error de estimación $e = x - \hat{x}$ pasa a ser:

$$e(k+1) = [\mathbf{G} - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}]e(k) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{L}(k)\mathbf{v}(k) \quad (49)$$

La matriz L se utiliza para obtener los valores propios deseados. Pero el problema que encontramos aquí es diferente: las propiedades del ruido se tienen en cuenta y el criterio es minimizar la varianza del error de estimación, que se define por $P(k)$:

$$P(k) = E[(e(k) - E[e(k)])(e(k) - E[e(k)])^T] \quad (50)$$

El valor medio del error de estimación se obtiene desde la ecuación (49):

$$E[e(k+1)] = [G - L(k)C]E[e(k)] \quad (51)$$

Se puede observar que si $E[\tilde{x}(0)] = E[x(0)]$, entonces el valor medio del error de estimación es cero para todos los tiempos independientes de $L(k)$.

Teniendo en cuenta esto, la ecuación (50) que expresa la varianza del error de estimación puede escribirse como sigue:

$$P(k) = E[e(k)e(k)^T] \quad (52)$$

Siempre que $e(k)$, $w(k)$ y $v(k)$ sean independientes, la dinámica del error de estimación (ecuación 49) se puede utilizar en la expresión (52) para derivar en:

$$P(k+1) = E[e(k+1)e(k+1)^T] \quad (53)$$

$$P(k+1) = [G - L(k)C]P(k)[G - L(k)C]^T + R_1 + P(k)R_2P(k)^T \quad (54)$$

El algoritmo de minimización (Åström y Wittenmark 2013) da lugar al siguiente algoritmo para el cálculo de $L(k)$:

$$L(k) = GP(k)C^T[R_2 + CP(k)C^T]^{-1} \quad (55)$$

$$P(k+1) = GP(k)G^T + R_1 + L(k)CP(k)G^T \quad (56)$$

4.11 Aplicación del Filtro de Kalman

La reconstrucción definida por las ecuaciones (48), (55) y (56) se denomina

Filtro de Kalman:

$$\tilde{x}(k+1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + L(k)[y(k) - C\tilde{x}(k)] \quad (57)$$

$$L(k) = GP(k)C^T[R_2 + CP(k)C^T]^{-1} \quad (58)$$

$$P(k+1) = GP(k)G^T + R_1 + L(k)CP(k)G^T \quad (59)$$

Todo esto se resume en el siguiente teorema:

La reconstrucción de los estados usando el modelo de la ecuación (48) es óptima en el sentido que la varianza del error de reconstrucción está minimizada si la matriz $R_2 + CP(k)C^T$ se define positiva y si la ganancia de la matriz se elige acorde con la ecuación (55) y la ecuación (56). Esta última ecuación nos proporciona la varianza del error de reconstrucción.

En la *Figura 15* se puede ver un diagrama de bloques correspondiente a nuestro sistema con un filtro de Kalman.

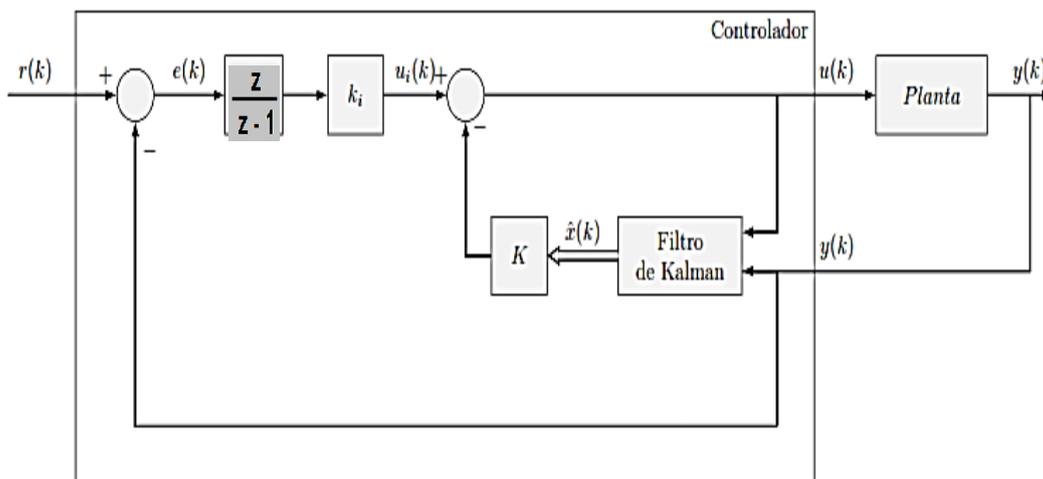


Figura 15.

Diagrama de bloques con filtro de Kalman

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Implementación en un computador

Aquí se exponen los algoritmos de las siguientes estrategias de control digital por realimentación de la salida:

- Basado en observador del estado.
- Con observador del estado y filtro de la medida.
- Basado en la estimación del estado con un filtro de Kalman

4.12 Realimentación de la salida con observador: Implementación

La secuenciación de las operaciones a realizar por el computador para implementar un control por realimentación de la salida (basado en observador) viene definida por el siguiente algoritmo:

Algoritmo del Controlador

Datos: $K; K_e; k_i; r(k); y(k); u_i(k-1); \tilde{x}(k)$

Resultados: $e(k); u_i(k); u(k); \tilde{x}(k+1)$

Método:

1. $e(k) = r(k) - y(k);$
2. $u_i(k) = u_i(k-1) + K_i e(k)$
3. $u(k) = -k\tilde{x}(k) + u_i(k)$
4. $\tilde{x}(k+1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e[y(k) - C\tilde{x}(k)]$

Controlador

Los parámetros que el algoritmo debe conocer son la constante k_i y los vectores K y k_e .

Además, se suponen conocidos los valores de la señal de referencia $r(k)$ y la salida controlada $y(k)$ procedente del muestreo.

En la primera línea de programa, se observa que el error $e(k)$ viene definido por la referencia $r(k)$ menos la realimentación de la salida $y(k)$. Por lo que el valor de la referencia en el instante actual de muestreo debe coincidir en escala y unidad con el valor de la salida.

En la segunda línea del algoritmo del controlador, se calcula la acción de control integral $u_i(k)$ que depende de la acción de control integral en el anterior muestreo y del error $e(k)$ por la constante integral K_i .

En caso de querer aplicar herramientas anti windup sería en esta línea de programa donde se tendría que aplicar. Si se aplicará el método **Back calculation** la línea de programa 2 quedaría como sigue:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + k_i e(k) - k_b [v(k - 1) - u(k - 1)] \quad (60)$$

donde k_b es una variable que utiliza el *anti windup mode Back calculation*, $v(k-1)$ es la acción de control no saturada en el instante anterior, y $u(k-1)$ es la acción de control saturada también en el instante anterior.

En caso de aplicar el método *Clamping* la línea de programa sería:

$$u_i(k) = u_i(k - 1) + k_i e(k) [v(k - 1) == u(k - 1)] \quad (61)$$

La diferencia de utilizar el método *Clamping* es que en este caso se compara la acción de control no saturada $v(k-1)$ con la acción de control saturada $u(k-1)$.

El objetivo del algoritmo es calcular y ofrecer como resultado el valor de la acción de control $u(k)$ –línea de programa 3–. Pero como las variables se van actualizando para la siguiente ejecución, también es solución del algoritmo $\tilde{x}(k + 1)$ que se trata de la estimación del vector de estado en la próxima ejecución.

Cabe destacar que en la línea 4 de programa se realiza una diferencia interna en el propio observador entre la salida $y(k)$ y la estimación de la salida $\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$, que se multiplica por la constante k_e , que corresponde con la ganancia del observador de estado.

4.13 Realimentación de la salida con observador y filtro de medida:

Implementación

La secuenciación correspondiente a la realimentación de la salida con observador y filtro de la medida es la que sigue:

Algoritmo del controlador con filtro de la medida

Datos: $k, k_e, k_i, r(k), y(k), yf(k - 1), yf(k - 2), u_i(k - 1), \tilde{x}(k)$

Resultados: $yf(k), e(k), u_i(k), u(k), \tilde{x}(k + 1)$

Método:

1. $yf(k) = -\frac{a_1}{a_0}yf(k - 1) - \frac{a_2}{a_0}yf(k - 2) + \frac{1}{a_0}y(k)$
2. $e(k) = r(k) - yf(k)$
3. $u_i(k) = u_i(k - 1) + k_i e(k)$
4. $u(k) = -k\tilde{x}(k) + u_i(k)$
5. $\tilde{x}(k + 1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + k_e[yf(k) - C\tilde{x}(k)]$

Controlador con observador más filtro

Como se puede observar, este algoritmo es muy similar al algoritmo del controlador con observador.

No obstante, la diferencia respecto al anterior es que se ha de tener en cuenta una nueva ecuación en diferencias correspondiente al filtro de la medida que se ha introducido en la realimentación para reducir y eliminar el ruido.

Por lo tanto, el algoritmo del controlador con observador más filtro de la medida comienza con la línea de programa correspondiente al cálculo de $y(k)$, que es la salida filtrada que llegará al observador.

Se observa que para el cálculo de la salida filtrada $y_f(k)$ son necesarios los valores de la salida filtrada en las dos anteriores ejecuciones, $y_f(k-1)$ y $y_f(k-2)$, además, de la salida del sistema en el instante actual $y(k)$.

Hay que tener en cuenta los parámetros $a_0, a_1; a_2$ que dependen de la frecuencia normalizada de corte del filtro $wnorm$ y del orden que tendrá el filtro de la medida n_f , por lo tanto serán valores conocidos. Escoger una configuración distinta para el filtro de la medida, provocará un cambio en $y_f(k)$.

Se debe de tener en cuenta que $y(k)$ en este algoritmo pasa a ser **$y_f(k)$** .

4.14 Realimentación de la salida con el filtro de Kalman: Implementación

El algoritmo anterior nos permite obtener las operaciones que nuestro computador debe realizar para evaluar las variables que utilizaremos en la siguiente secuenciación. No obstante, este algoritmo se centra en el observador y necesitamos otro algoritmo para el filtro de Kalman que se ha utilizado. Por lo

tanto, el algoritmo que se ha de desarrollar se basa en Åström y Wittenmark (2013) "Computer-controlled systems: theory and design".

4.15 Descripción del desarrollo del Filtro de Kalman aplicado al Diseño

Datos: $r(k), y(k), k, k_i, R_1; R_2$

Resultados: $e(k), u_i(k), u(k), L(k), P(k + 1), \tilde{x}(k + 1)$

Método:

1. $e(k) = r(k) - y(k)$
2. $u_i(k) = u_i(k) + k_i e(k)$
3. $u(k) = -k\tilde{x}(k) + u_i(k)$
4. $L(k) = GP(k)G^T [R_2 + CP(k)C^T]^{-1}$
5. $P(k + 1) = GP(k)G^T + R_1 - L(k)CP(k)G^T$
6. $\tilde{x}(k + 1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + L(k)[y(k) - C\tilde{x}(k)]$

Las tres primeras líneas del programa que se presentan son iguales que en el algoritmo del controlador con observador, ya que, al igual que cuando se utiliza observador, se ha de tener un error $e(k)$ (que es el resultado de la diferencia entre la referencia $r(k)$ y la salida del sistema $y(k)$) a partir del cual se obtiene la acción de control integral.

En la línea de programa 2 se observa que para el cálculo de la acción de control integral $u_i(k)$ se necesita esa misma variable. No obstante no corresponde a la misma $u_i(k)$, sino que se trata de la acción de control integral en el anterior instante de muestreo. Se nombran de la misma forma para no tener que realizar una actualización de variables posteriormente. Si el $e(k) = 0$ la acción de control integral en este instante será igual al estado anterior.

La siguiente línea de programa (3) es la acción de control de nuestro sistema, es decir, la salida del controlador, y tiene en cuenta la acción de control integral en este instante de tiempo, además de la multiplicación del vector K (parámetros de diseño del controlador) y el vector del estado estimado en este instante también $\tilde{x}(k)$. Al presentar el controlador una realimentación, estos dos últimos términos se restan a la acción de control integral.

Las líneas de programa 4, 5 son diferentes al controlador con observador, ya que aparecen conceptos que se necesitan al implementar un filtro de Kalman y que no son necesarios con un observador. Estos conceptos son: $L(k)$ y $P(k + 1)$.

$L(k)$ es una matriz de ponderación que irá cambiando de valor según pase el tiempo. Por lo que respecta a $P(k + 1)$ se trata de la varianza del error de estimación en el siguiente instante de muestreo. También aparecen dos valores (R_1 y R_2) que corresponden a dos escalares independientes.

Cabe considerar que ambas líneas utilizan la matriz $P(k)$, varianza del error de estimación calculada en el anterior muestreo, y que en la línea 5 de programa, $P(k + 1)$ utiliza la actual matriz de ponderación $L(k)$.

Por último, en la línea de programa 6 se define la ecuación del próximo estado estimado $\tilde{x}(k + 1)$.

Para ello es necesario calcular en las líneas anteriores la acción de control $u(k)$ y la matriz $L(k)$.

Se puede ver que se utiliza el actual estado estimado $\tilde{x}(k)$ calculado en la anterior ejecución del programa, y la salida estimada $\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$.

4.16 Población y muestra

Debido a la naturaleza de este trabajo de tesis, no amerita determinar el tamaño de la muestra.

4.17 Técnicas de instrumentos de recolección de datos

Las técnicas de recolección de datos son las distintas formas de obtener información. En este sentido, las recolecciones de datos en la presente tesis se obtendrán de los datos provenientes de las simulaciones basados en texto para la identificación del modelo y medida de la performance del sistema de control.

4.18 Etapas de la investigación

Las etapas de la investigación del presente trabajo de tesis, se concretan en los siguientes aspectos:

- a. Descripción experimento
- b. Hipótesis de investigación
- c. Variables
- d. Universo-muestra
- e. Instrumento de medición
- f. Etapas de la investigación
- g. Prueba piloto
- h. Limitaciones y alcances

4.19 Plan de análisis de datos

La realización del estudio de optimización de los parámetros del control, precisa de la cuantificación para su ejecución. Es evidente que si uno se equivoca en el cálculo de los estimadores los resultados del estudio serían incorrectos, pero también es evidente que si uno se equivoca en los cálculos estos se pueden volver a repetir y corregir.

V. RESULTADOS

En este trabajo de tesis, presentamos a un controlador PID que tienen parámetros optimizados que son elaborados a partir de las ecuaciones en tiempo continuo para luego ser transferidas en ecuaciones de datos muestreados en forma discreta. Utilizaremos la experiencia establecida con controladores en tiempo continuo, su principio y sus reglas de sintonía muy conocidas que pueden aplicarse a los controladores discretos. También, implementaremos nuestro controlador $C[z]$ basado en el observador de estado realimentado que será implementado a partir de nuestro controlador PID discreto.

Método de Aproximación Digital

La tendencia actual de controlar sistemas en forma digital es mediante la integración de computadores digitales, debido a la ventaja que presenta cuando se trabaja con señales digitales. En el control de plantas o procesos con controladores digitales se requiere describir la compensación del sistema mediante las ecuaciones de diferencias, de esta manera es posible llevar a cabo el análisis y diseño del controlador digital. Para ello emplearemos los métodos de aproximación ampliamente conocidos, como son: el método de Euler y el método de ecuaciones de diferencias de segundo orden que es una extensión del método de Euler.

Método de Euler

Una particular aproximación digital en la solución en tiempo real de una ecuación de diferencias es el método de Euler (también llamado regla

rectangular hacia adelante). Este resultado se aproxima por la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad (62)$$

Donde,

- $T = \text{intervalo de muestreo en segundos} = t_{k+1} - t_k$
- $t_k = kT$
- $k = \text{entero}$
- $x(k) = \text{valor de } x \text{ en } t_k$
- $x(k+1) = \text{valor de } x \text{ en } t_{k+1}$

Esta aproximación puede usarse en el lugar de todas las derivadas que aparecen en las ecuaciones de diferencias del controlador para llegar a un conjunto de ecuaciones que pueden ser resueltas en una computadora digital. Estas ecuaciones de diferencia se resuelven repetidamente con los pasos de tiempo de longitud T .

Para sistemas que tienen ancho de banda en *Hertz*, el tamaño de la muestra están a menudo en el orden de un 1KHz , para que los períodos de la muestra estén en el orden de los milisegundos, los errores de la aproximación deben ser bastante pequeños.

Ecuaciones de Diferencias

Las ecuaciones de diferencias se obtienen discretizando la ecuación de diferencias.

Aquí la ecuación diferencial de segundo orden puede usar los términos que contengan derivadas empleando diferencias por atraso de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T^2} \quad (63)$$

En nuestro caso vamos a recurrir a los dos métodos planteados anteriormente.

Por lo tanto, es posible utilizar la técnica de aproximación basada en el retenedor de orden cero (ZOH).

Controlador PID Discreto

Para obtener la ley de control discreta, planteamos la ecuación controlador ideal paralelo PID cuya ley de control será utilizada en el diseño del controlador para el sistema motor DC.

Se ha usado los parámetros del controlador PID, que han sido obtenidos anteriormente, de modo que, la función de transferencia del controlador PID continuo es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = 87 + \frac{1740}{s} + 5s \quad (64)$$

Para hacerlo discreto, se va a llevar al dominio del tiempo de la siguiente forma:

$$sU(s) = 5s^2E(s) + 87sE(s) + 1740 \quad (65)$$

Luego

$$\frac{du(t)}{dt} = 5 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + 87 \frac{de(t)}{dt} + 1740u(t) \quad (66)$$

Aplicando las ecuaciones (64) y (65) en (66) se tiene:

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = \frac{5e(k) - 10e(k-1) + 5e(k-2)}{T^2} + \frac{87e(k) - 87e(k-1)}{T} + 1740e(k) \quad (67)$$

Simplificando:

$$Tu(k) - Tu(k-1) = (5 + 87T + 1740T^2)e(k) - (10 + 87T)e(k-1) + 5e(k-2) \quad (68)$$

Asumimos un tiempo de muestreo de $T = 0.01$ segundos.

$$0.01u(k) - 0.01u(k-1) = 6.044e(k) - 10.87e(k-1) + 5e(k-2) \quad (69)$$

Aplicando la transformada inversa Z

$$(1 + z^{-1})U(z) = 604.4E(z) - 1087z^{-1}E(z) + 500z^{-2}E(z) \quad (70)$$

Reordenando, obtenemos la función de transferencia del controlador PID en tiempo discreto dado por:

$$\frac{U[z]}{E[z]} = \frac{604.4z^2 - 1087z + 500}{z(z-1)} \quad (71)$$

Controlador con Observador de Estado en Tiempo Continúo

Consideremos la planta de nuestro sistema motor DC. La ecuación debe de discretizar de modo que tenemos la ecuación de diferencias siguiente:

$$(1 + 2.8571T)y(k) - (2 + 2.8571T)y(k-1) + y(k-2) = 26T^2u(k) \quad (72)$$

Aplicando transformada Z, con $T = 0.01$

$$1.028571Y[z] - 2.028571z^{-1}Y[z] + z^{-2}Y[z] = 0.0026U[z] \quad (73)$$

Reordenando, obtenemos la función de transferencia de la planta ($n = 2$) en tiempo discreto dado por:

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{0.002527z^2}{z^2 - 1.9722z + 0.9722} \quad (74)$$

Nuestro controlador PID en tiempo discreto de la ecuación es de orden $n_c = 2$.

Como $n_c > n - 1$, estamos ante el caso del controlador de alta complejidad que fue analizado anteriormente. El polinomio en lazo cerrado puede ser computado. Para esto computamos el polinomio en lazo cerrado $A_{cl}[z]$:

```
a=conv([1 -1 0],[1 -1.9722 0.9722])+conv([0.002527 0 0],...
[604.4 -1087 500])
```

Con este cómputo, el polinomio característico toma la forma:

$$A_{cl}[z] = 2.5273z^4 - 5.7190z^3 + 4.2079z^2 - 0.9722z \quad (75)$$

Usando el siguiente código en MATLAB.

```
raiz=roots(a);
p1=raiz(1);
p2=raiz(4);
p3=conv([1 -raiz(2)],[1 -raiz(3)]);
```

Podemos expresar al polinomio $A_{cl}[z]$ de la siguiente forma:

$$A_{cl}[z] = z(z - 0.4613)(z^2 - 1.8016z + 0.8339) \quad (76)$$

En este caso, $n_c - (n - 1) = 1$, se usa el principio del modelo interno para aumentar la planta a $n_c - n + 1 = 1$ estados incontrolables. Como se vio anteriormente, el polo asociado con este estado debe ser un polo del controlador. Entonces el grado de $E(s)$ es fijado igual a dos que corresponden a " $m - 1$ " donde " m " es el número de estados de la planta aumentada. Por otro lado, el grado de $F(s)$ es dos que corresponden al número de estados de la planta (ellos son asumidos estados controlables). En este caso, asociamos el disturbio con el polo en el origen; esto es, usamos el modelo, con:

$$A_d = 0 \text{ y } C_d = 1.$$

Se asigna los dos polos más rápidos en ($z = 0$ y $z = 0.4613$) al observador del polinomio $E(s)$ y los polos restantes al polinomio de realimentación $F(s)$.

$$E[z] = z(z - 0.4613) = \det(zI_2 - A_{22} + JA_{12}) \quad (77)$$

$$F[z] = z^2 - 1.8016z + 0.8339 = \det(zI_2 - A_0 + B_0K_0) \quad (78)$$

Los cálculos de " J " y " K " serán determinados a partir de la solución de los valores propios de $E[z]$ y $F[z]$ respectivamente. Usamos la descripción espacio estado de la forma canónica de la observabilidad para obtener las matrices de estado A_0 y B_0 . Para ello, debemos de obtener la ecuación diferencial de la planta en el dominio del tiempo se obtiene a partir del desarrollo de la transformada inversa de Laplace de $G_0[z]$.

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{0.002527z^2}{z^2 - 1.9722z + 0.9722} \quad (79)$$

La ecuación (75) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$Y[z] - 1.9722z^{-1}Y[z] + 0.9722z^{-2}Y[z] = 0.002527U[z] \quad (80)$$

Se obtiene la ecuación de diferencias:

$$y(k) - 1.9722y(k-1) + 0.9722y(k-2) = 0.002527u(k) \quad (81)$$

Se puede identificar los coeficientes de la ecuación (81) en forma análoga al caso continuo dado por la ecuación de observabilidad de la *Figura 10*, se tiene que:

$$\alpha_1 = -1.9722, \alpha_2 = 0.9722, \beta_0 = 0, \beta_1 = 0 \text{ y } \beta_2 = 0.002527. \quad (82)$$

Reemplazando los valores de α_i y β_i ($i = 1, 2$ y $j = 0, 1, 2$) se tienen las matrices de estado en la forma canónica observable:

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} 1.9722 & 1 \\ -0.9722 & 0 \end{bmatrix}, B = B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002527 \end{bmatrix}, C = C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (83)$$

La descripción de estado anterior se usa para computar "J" y "K". Ingrese el siguiente código en MATLAB para computar las matrices de estado del controlador.

```
% Matrices de estado de la planta
A=[1.9722 1;-0.9722 0];
B=[0;0.002527];
C=[1 0];
D=0;
polos=[0.9008+0.1499*i 0.9008-0.1499*i];
% Obtenemos K con Place
K=place(A,B,polos)
% Obtenemos J con Place
op=[0 0.4613];
A22=[0 1;0 0];
CC=[1 0];
J=place(A22',CC',op)
```

Los valores de las matrices para las ganancias J y K son respectivamente.

$$J = \begin{bmatrix} -0.4613 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_0 = [78.4202 \quad 67.5109] \quad (84)$$

El polo no controlable " $z = 1$ " no puede cambiarse por realimentación y será preservado usando la ganancia de realimentación K de la siguiente forma.

$$K_0 = [78.4202 \quad 67.5109 \quad 1] \quad (85)$$

Con los valores computados de " J " y " K " usamos la descripción de espacio estado para aumentar al sistema con $A_d = 0$ y $C_d = 1$, y así obtenemos las matrices de estado del sistema aumentado.

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} 1.9722 & 1 & 0 \\ -0.9722 & 0 & 0.002527 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y

(86)

$$B = B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002527 \\ 0 \end{bmatrix}, C = C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Si usamos las ecuaciones y las ganancias " J " y " K ", obtenemos el controlador original esperado, para ello ingresaremos el siguiente código en MATLAB.

```
A=[1.9722 1 0;-0.9722 0 0.002527;0 0 0];
B=[0;0.002527;0];
C=[1 0 0];
D=0;
K=[78.4202 67.5109 1]
J=[-0.4613;0];
Ac=[-J eye(1)]*(A-B*K)*[zeros(1,1);eye(1)]
Bc=[-J eye(1)]*(A-B*K)*[1;J]
Cc=K*[zeros(1,1);eye(1)]
Dc=K*[1;J]
```

Luego obtenemos las matrices de estado A_c , B_c , C_c y D_c .

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.2907 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} -0.3947 \\ 0 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 67.5109 \\ 1 \end{bmatrix}^T, D_c = 47.2774 \quad (87)$$

Usando el Toolbox de Matemática Simbólica de MATLAB, implementaremos la ley de control dada en la ecuación.

```
syms z
Cz=Cc*inv(z*eye(2)-Ac)*Bc+Dc;
pretty(Cz)
```

Finalmente obtenemos la función de transferencia $C[z]$,

$$C[z] = \frac{42z - 40}{z - 0.3} \quad (88)$$

Implementamos nuestro sistema motor DC en SIMULINK, que se muestra en la *Figura 16*

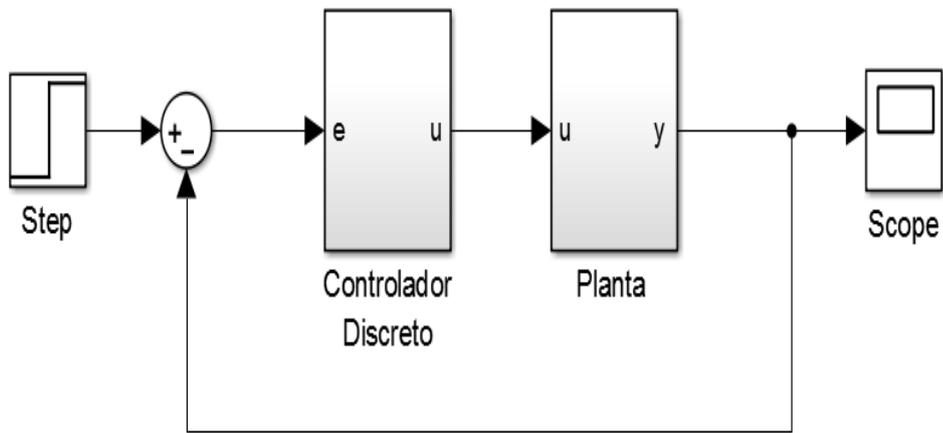


Figura 16.
Diagrama de bloques del Sistema Discreto Realimentado.
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

Respuesta del sistema de control para una entrada escalón unitario como se muestra en la *Figura 17*.

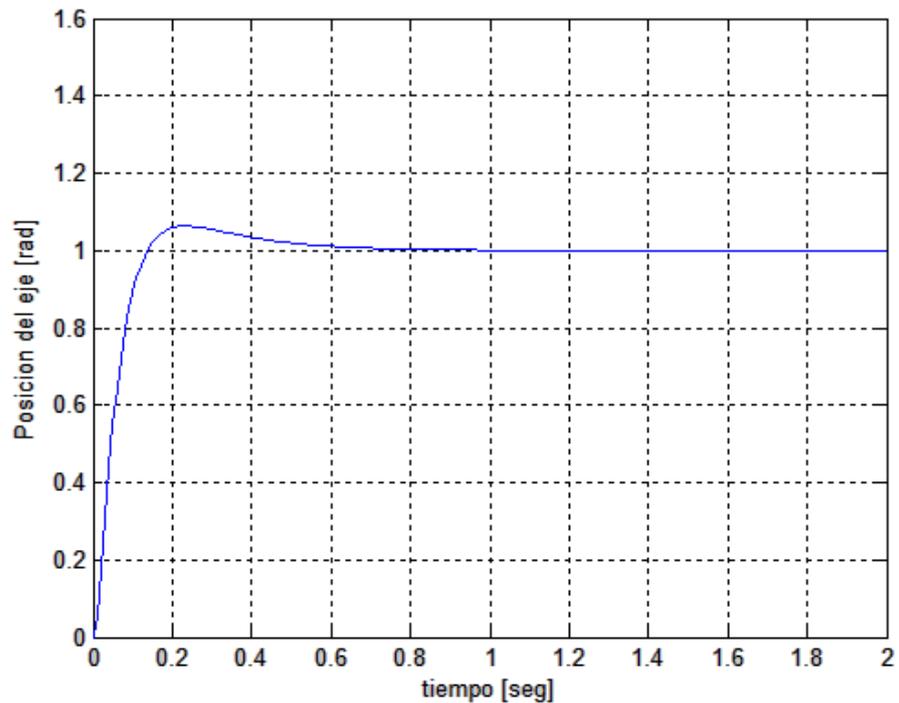
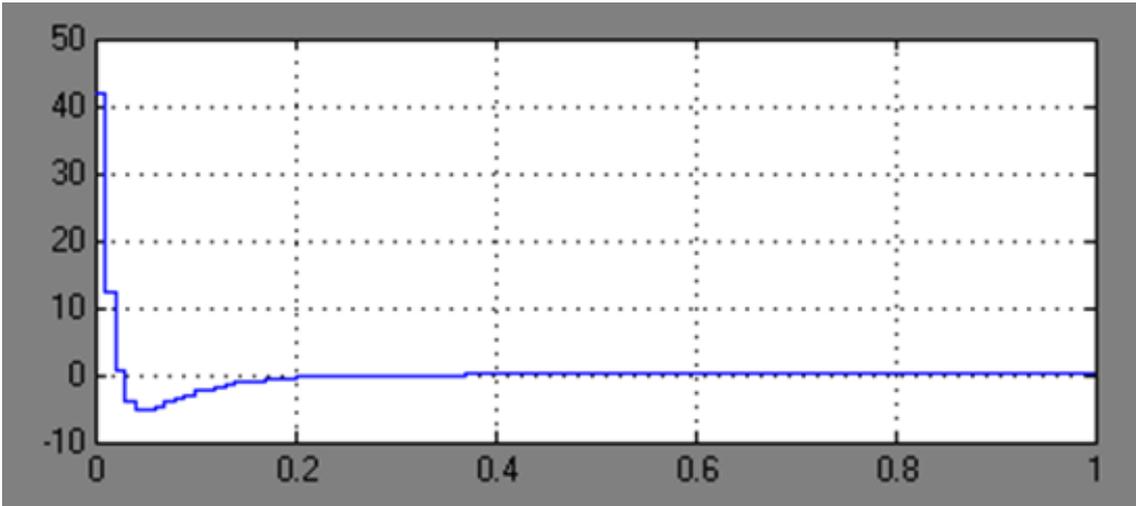


Figura 17.

Respuesta al escalón para el sistema usando el control con observador de estado realimentado en tiempo discreto.

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

En la *Figura 17* se observa el sobrepaso máximo del 5% con un tiempo de asentamiento del orden de los 0.7 segundos. Como se puede ver, se ha conseguido una mejora sustancial en el control del sistema motor DC. Ploteo de la señal de control desde el bloque de simulación PID discreto:



Fuente 18.

Señal de control discreta.

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Implementamos nuestro sistema motor DC en SIMULINK, para una entrada escalón unitario como se muestra en la *Figura 19*.

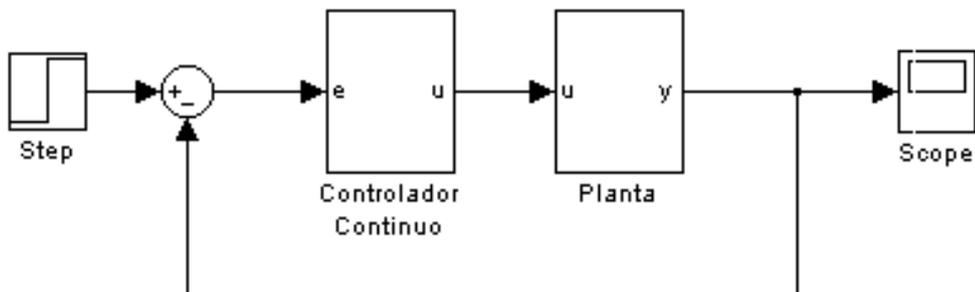


Figura 19.

Diagrama de bloques del sistema motor DC.

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

En la *Figura 18* se observa el sobrepaso máximo del 35% con un tiempo de asentamiento del orden de los 0.4 segundos. Como se puede ver, el sobrepaso máximo puede ser perjudicial para nuestro sistema motor DC, más aún, las oscilaciones sostenidas pueden ser dañinas para el sistema de control.

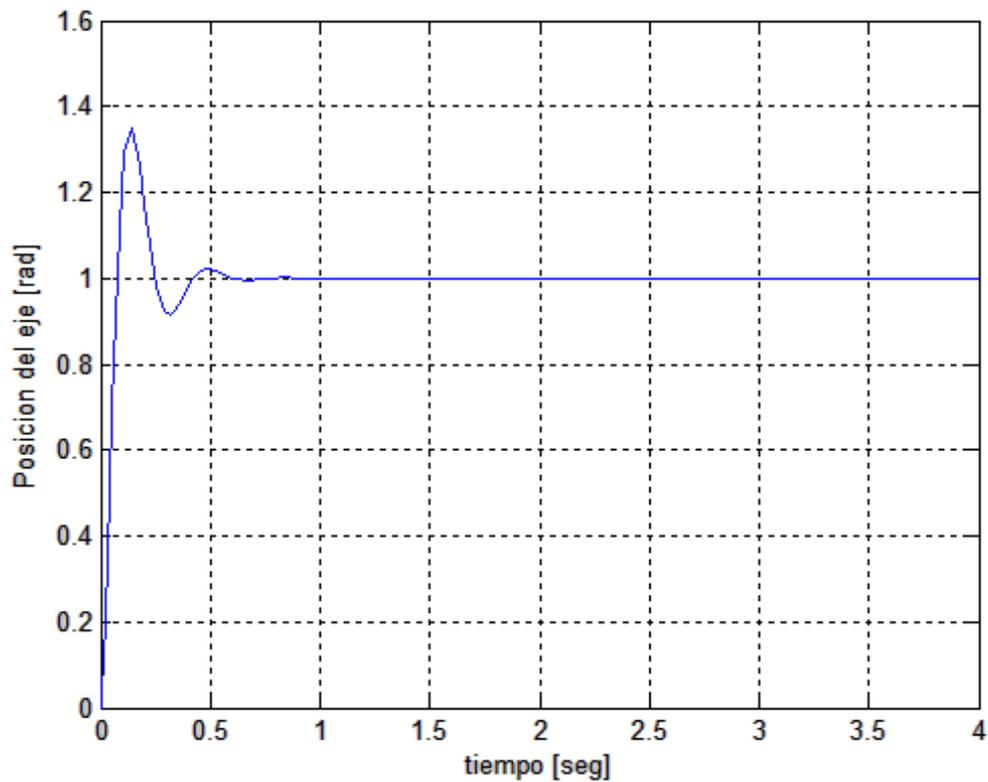


Figura 20.

Respuesta al escalón para el sistema usando el control con observador de estado realimentado en tiempo continuo

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Para atenuar el sobrepaso máximo, se va a estudiar la técnica de optimización (aplicada a nuestro compensador $C(s)$) del control PID con Anti-Windup.

Control PID con Anti-windup

Cuando se implementa los controladores PID, existen consideraciones adicionales que hay que tener en cuenta, como es la saturación del actuador, los cambios drásticos en la señal de referencia, entre otros. Es por eso que existen técnicas (caso anti-windup) de optimización de los parámetros PID que expondremos a continuación.

Anti-Windup

Cuando se implementa los controladores PID, generalmente se trabaja con actuadores que tienen un rango de trabajo establecido, razón por la cual no se puede aumentar ni disminuir indefinidamente la señal de control. Es por eso que se incluye el término saturador (ubicado entre la salida del compensador y la entrada a la planta), el cual limita la señal de control de acuerdo a los valores máximos y mínimos que pueden admitir el actuador. Esto se puede observar en la *Figura 21*, donde $v(t)$ es la salida del controlador, $u(t)$ es la salida del correspondiente actuador con saturación, $r(t)$ es la señal de referencia, $y(t)$ es la salida del sistema y $e(t)$ es el error de proceso.

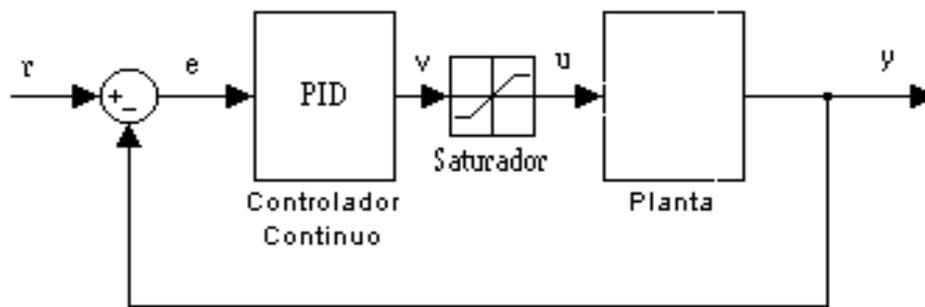


Figura 21.

Control PID con Actuador que incluye saturador
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

El problema con el saturador es que el lazo de retroalimentación se rompe cuando el actuador se satura, lo cual nos lleva a tener un controlador inestable. Es por ello que una modificación común en muchos controladores PID es el anti-windup, que es una característica adicional del término integral y cuyo propósito es ejercer una acción compensatoria y prevenir la integración del error cuando la señal de control se satura.

Esto se puede hacer agregando al término integral $I = K_i e(t)$ un compensador de la saturación tal como se muestra en la siguiente ecuación.

$$I(t) = K_i e(t) + \frac{1}{T_t} (u(t) - v(t))$$

Donde T_t es la “constante de seguimiento” y cuyas elecciones comunes son:

- $T_t = T_i$, donde T_i es la constante de tiempo integral
- $T_t = \sqrt{T_i T_d}$, donde T_d es la constante de tiempo derivativa

Sí $0 < T_t \leq T_i$, el estado integrativo se convierte en sensitivo para todos los casos en que es $e_s \neq 0$, entonces.

$$I(t) = \int_0^t \left[\frac{Ke(\tau)}{T_i} + \frac{e_s(\tau)}{T_t} \right] dt \approx \frac{1}{T_t} \int_0^t e_s(\tau) d\tau$$

Donde es representa la diferencia entre la señal saturada y la señal de control

$$e_s = u - v.$$

El esquema con anti-windup que utilizaremos en el algoritmo de control Ideal Paralelo PID, se muestran en la *Figura 24*, en el observamos que cuando no existe una salida medible del actuador se puede usar un modelo del actuador con saturación dentro del algoritmo y de esta manera poder aplicar la compensación cuando la señal de control se satura.

Podemos observar también, que se ha obtenido un sobrepaso máximo del 5% con un tiempo de establecimiento alrededor de los 2 segundos, con lo que satisface nuestras consideraciones de diseño implantadas en esta tesis.

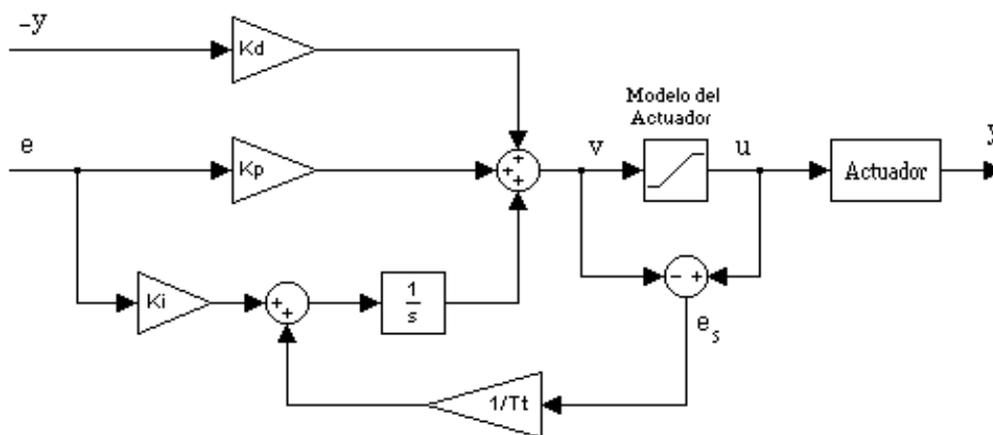


Figura 22.

Anti-Windup sin salida disponible del actuador

Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Así mismo, debemos de indicar que en el diseño del controlador con anti-windup resulta una mejora debido a que el motor DC no responde inmediatamente a una tensión de entrada, le toma un tiempo para alcanzar la máxima velocidad.

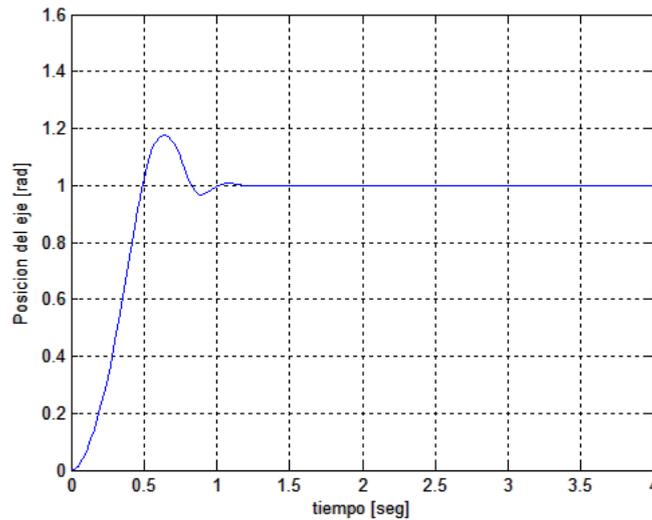


Figura 23.
Respuesta al Escalón para el sistema usando el método de Optimización anti-windup PID.
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Utilizamos SIMULINK para implementar el sistema motor DC, debido a que podemos enmascarar a nuestro sistema de modo que podamos sintonizar con comodidad nuestro control como se observa en la *Figura 16*.

Para ello hemos creado el “subsistema enmascarado” con los siguientes parámetros $K_p = 87, K_i = 1740, K_d = 5, T_t = 0.01$ (se elige $0 < T_t < T_i = 0.05$, para valores de “ T_t ” muy pequeño, los errores pueden saturar la salida que lleva al accidente de resetear al integrador).

El bloque de saturación limita a la señal de control $v(t)$, el saturador ha sido seteado a los límites ± 0.08 . Para valores superiores a los límites establecidos obtenemos una respuesta oscilatoria, de modo que es muy sensible a pequeños

cambios de la entrada, por ese motivo debemos de sintonizar de manera adecuada.

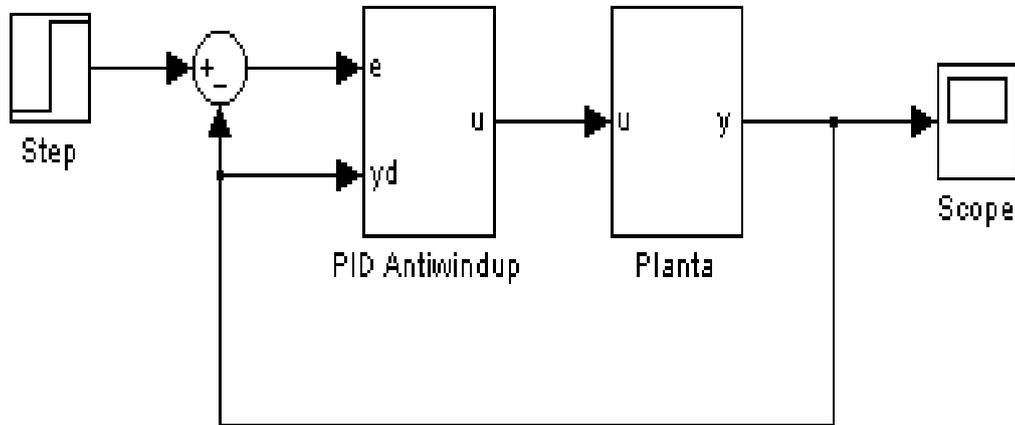


Diagrama de bloques del control PID con anti-windup.
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

El empleo de los filtros de Kalman en el control automático del motor DC genera grandes ventajas, al minimizar los efectos que las señales aleatorias de ruido provocan en la respuesta de estos sistemas. Como se ve en el anexo B desarrollado en la presente Tesis, los resultados finales son completamente satisfactorios y la respuesta transitoria no se ve apreciablemente perjudicada por la inserción del filtro, a diferencia de lo que ocurriría si se emplease un filtro tipo pasa bajo, el cual provocaría unos tiempos de respuesta mayores.

VII. CONCLUSIONES

Concluimos este trabajo de tesis con un resumen de las contribuciones y algunas recomendaciones para investigaciones del futuro que son principalmente los problemas que no han sido resueltos en este trabajo de tesis.

1. Se ha mostrado que el uso de observadores de orden reducido permite que cualquier controlador clásico lineal SISO puede ser interpretado en una arquitectura de control basado en la realimentación de estado del sistema estimado. Esto permite los controladores clásicos agregar a la dinámica del control en lazo cerrado originado por el observador de una planta más la posible aplicación del principio del modo interno, de tal manera que el sistema sea capaz de seguir a las consignas impuestas en un menor tiempo y con menor error en el estado estacionario nulo.
2. Se ha diseñado el controlador y se ha validado su desempeño por medio de la simulación, usando equipos y aplicaciones actuales de simulación. La ley de control de un observador de estado realimentado es un único controlador clásico equivalente (salvo un bloque de referencia feedforward). Sin embargo, la conversión no es en general verdadera: dado un lazo de control clásico y una descripción de espacio estado de una planta fija, podrían haber muchos (de hecho, un número infinito) sistemas de control con observador de estado realimentado equivalentes. Esto se aplica particularmente cuando se tiene controladores de baja complejidad como los controladores PID. Además, el rendimiento de los lazos clásicos frente a la compensación, perturbación, ruido, atenuación, y la robustez es completamente determinada por la función de traslado

del controlador clásico. Por consiguiente, allí podría existir un número infinito de controladores basado en estados estimados que tengan el mismo rendimiento que los lazos cerrados.

3. Este trabajo de tesis no defiende al control clásico solo cuando se enseñe la metodología de síntesis en espacio estado, pero muestra en un nivel más avanzado, ambos se acercan al entendimiento de los problemas fundamentales en el diseño de sistema control. Se han usado técnicas de optimización que llevan a un buen desempeño del control.

VIII. RECOMENDACIÓN

La recomendación de este trabajo de tesis es:

- La extensión del diseño del controlador basado en un observador de estado realimentado para sistemas SISO que ha sido formulada en este trabajo de tesis, pueden ser aplicadas para sistemas multiple-input, multiple-outputs (MIMO) que involucra a problemas más complejos, sean estos en el tiempo continuo o en tiempo discreto.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Smith C., Corropio A., (1991) *Control Automático de Procesos: Teoría y Práctica*, México, Editorial LIMUSA.
- Lennart L., Torkel G., (1994) *Modeling of Dynamics Systems*, United States of America, Dit Mosco, Prentice Hall.
- Lennart L, (2014) *System Identification Toolbox For Use with MATLAB*, The MathWorks, Inc.
- Ogata K, (2015) *Ingeniería de Control Moderno, México*, Prentice Hall Hispanoamericana
- Franklin G., Powell J., (2006) *Digital Control of Dynamics System*, California, Addison Wesley,.
- Ogata K., (2014) *Dinámica de Sistemas México*, Prentice Hall Hispanoamericana,
- Franklin G, Powell J., Emami-Naeini A., (1994) *Feedback Control of Dynamics System*. Addison Wesley

ANEXOS

A1. Modelamiento de un motor DC, adquisición de datos, discretización y control del sistema

A2. Filtro de Kalman

A3. Matriz de Consistencia

Los componentes básicos de la Matriz de Consistencia en esta investigación aplicada son:

- Título.
- Problema: General y Específico.
- Objetivos: General y Específico.
- Hipótesis.
- Variables.
- Métodos.

Anexo A1. Modelamiento de un motor dc, adquisición de datos, Discritizacion y control del sistema

1. Algoritmo para obtener la función de transferencia en forma experimental

El objetivo experimental es obtener la DATA experimental desde las tarjetas de adquisición de datos **NIDAQ PCI 6221** o desde la **NIDAQ USB 6008/6009** o desde la tarjeta **Arduino**.

La DATA es procesada y posteriormente evaluada usando las herramientas del software de simulación de **LabVIEW** o de **Matlab**, para así determinar la **función de transferencia del sistema** usando el método de identificación el Ajuste de la Curva por Interpolación Lineal que es dado en el dominio de la frecuencia. En la Figura A1 se observa el conexión de las salidas analógicas para que interactúe la planta física con la tarjeta de adquisición de datos.

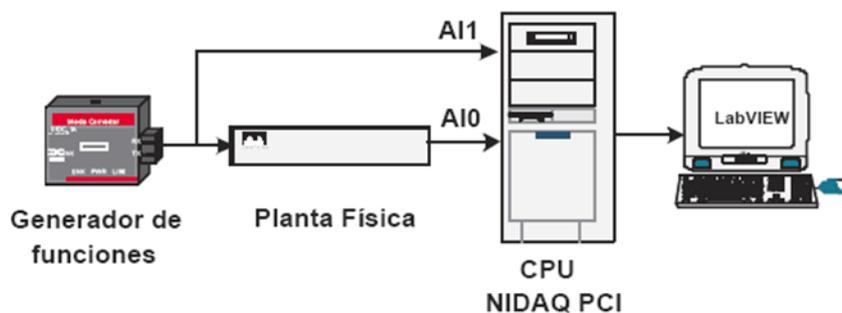


Figura A1
Esquema de conexión de la planta física con la NIDAQ
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

MOTOR CON ENCODER

Es un motor DC que lleva acoplado a un extremo del rotor un sistema óptico o magnético que proporciona pulsos digitales en función de la velocidad. La señal de salida es una onda cuadrada con una frecuencia variable máxima de 2KHz. Esta señal cuadrada se puede utilizar para medir la velocidad del

motor, posición, aceleración o inclusive sentido de giro; por tanto es ideal para utilizarla como realimentación en un sistema de control.



Figura A2
Motor con Encoder

Fuente: (UNAC-2019) Laboratorio de control y Automatización

2. APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA TEORICA USANDO EL TOOL BOX SYSTEM IDENTIFICATION DE MATLAB (IDENT)

Con la Nidaq en LabView en un VI adquirimos y transferimos a un archivo la respuesta a escalón (1000 muestras por segundo) obtenida de nuestro motor. Dicho archivo se procesa para utilizarlo en MatLab y se guarda con nombre "DataMotorOrig.lvm".

A continuación cargamos la data en MatLab y la ploteamos

```
clear all; clc; clf;  
data=load('DataMotorOrig.lvm');  
t=data(:,1);  
y=data(:,2);  
plot(t,y)
```

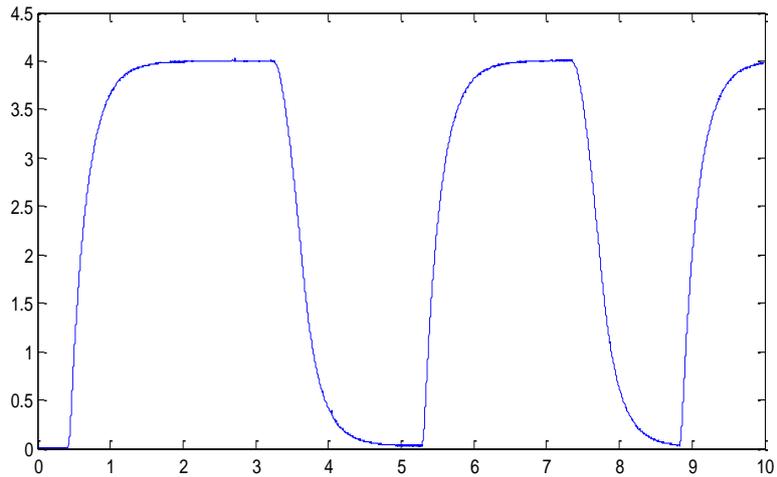


Figura A3
Data Original.
Fuente:(UNAC-2019) elaboración propia

Escogemos la porción de data que sea más conveniente para hallar la función de transferencia, dicha porción de data se guarda con el nombre “DataMotor.lvm”. En nuestro caso escogemos la primera subida y asentamiento que se aprecia en el Ploteo, además corregimos desplazamientos de la data:

```
clear all; clc;
data=load('DataMotor.lvm');
t=data(425:2001,1);
offset=min(t);
t=t-offset;
y=data(425:2001,2);
offset=min(y);
y=y-offset;
plot(t,y,'b');
```

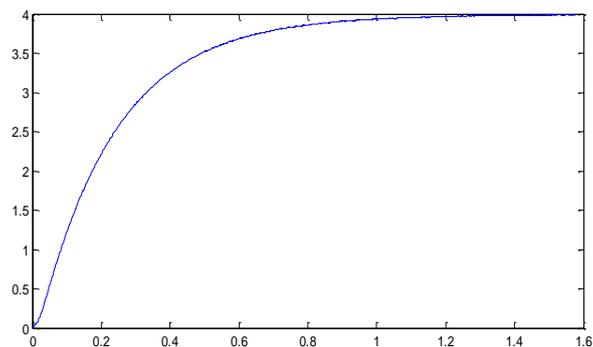


Figura A4
Data Recortada
Fuente: (UNAC-2019) Elaboración propia

Haciendo uso del Tool Box System Identification de MatLab obtenemos, con una aproximación de 98.6%, la función de transferencia teórica de nuestro motor:

```
clear all; clc;
data=load('DataMotor.lvm');
t=data(425:2001,1);
offset=min(t);
t=t-offset;
y=data(425:2001,2);
offset=min(y);
y=y-offset;
plot(t,y,'b');

% Con el Tool Box System Identification se obtiene

num=0.9967;
den=conv([0.22571 1],[0.012479 1]);
G=tf(num,den)

% Transfer function:
%          0.9967
% -----
% 0.002817 s^2 + 0.2382 s + 1

u=4*ones(size(y));
[y t x]=lsim(G,u,t);
hold on;
plot(t,y,'r');
```

$$G(s) = \frac{0.9967}{0.002817s^2 + 0.2382s + 1}$$

Procedemos a plotear nuestra data y la respuesta a escalón de nuestra función de transferencia teórica:

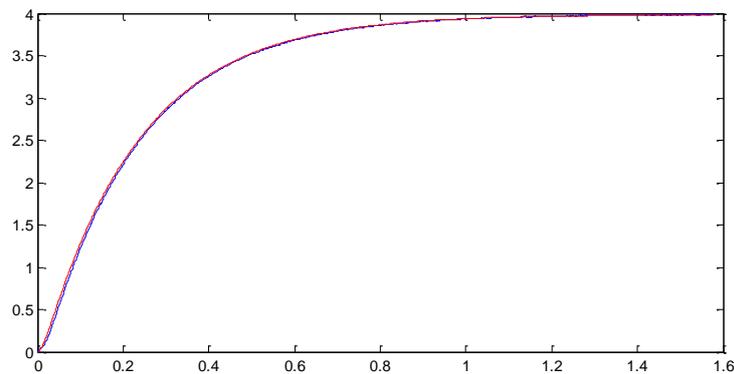


Figura A5
 Data y Respuesta a Escalón de G(s).
 Fuente: (UNAC-2019) Elaboración Propia

Se puede observar que la función de transferencia teórica obtenida $G(s)$ se superpone casi exactamente sobre la data obtenida de nuestro motor en tiempo real, por lo tanto podemos utilizar nuestra $G(s)$ para diseño, simulación y análisis de controladores para el motor DC en estudio.

Discretización

Se realiza con el algoritmo

```
Gd=c2d(G,0.01,'zoh')
% Transfer function:
% 0.01357 z + 0.01025
% -----
% z^2 - 1.405 z + 0.4293
step(Gd,G)
```

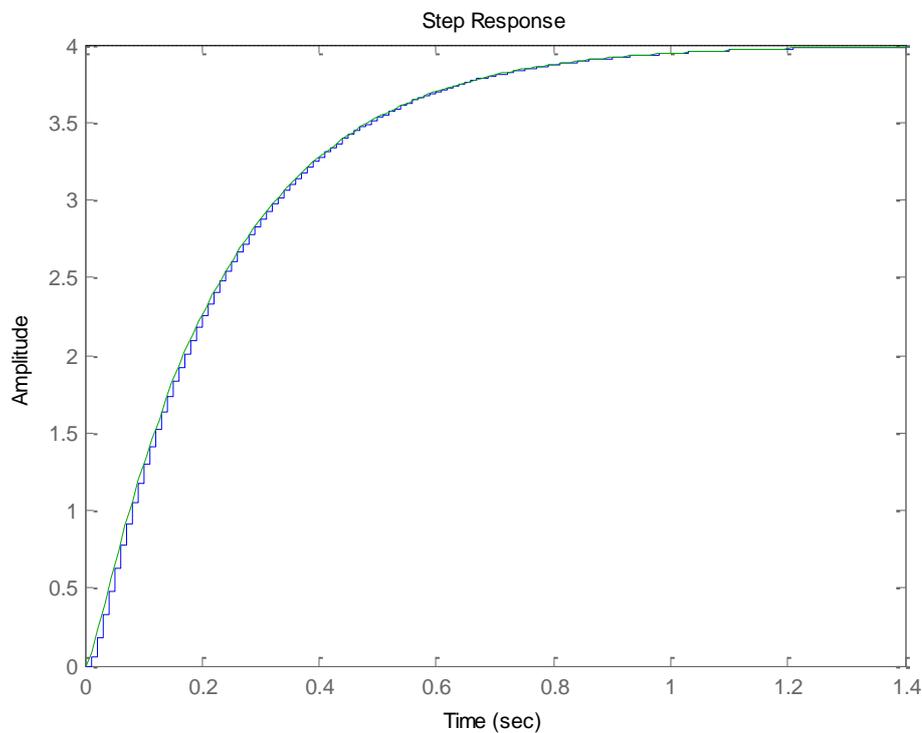


Figura A6

Ploteo de la función de transferencia experimental frente a una entrada escalón

Fuente: UNAC-2019) elaboración propia

3. DISEÑO, SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE CONTROL PID

Los controladores PID son controladores realimentados, se implementan en lazo cerrado. Estos obtienen como entrada el error y proporcionan como salida la señal de control que ingresa a la planta.

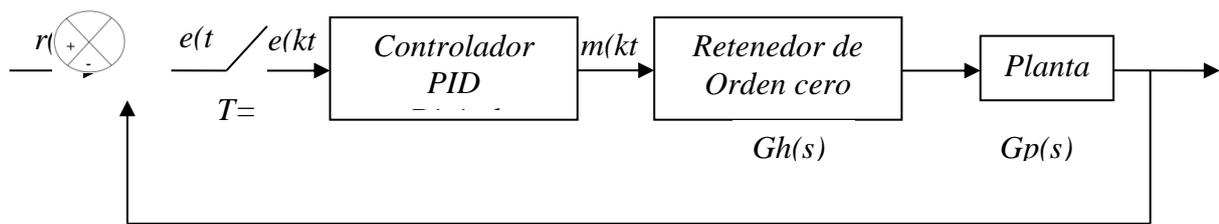


Figura A7
 Planta con Controlador PID.
 Fuente: (UNAC-2019) elaboración Propia

Diseño de PID Analógico por Método de Máxima Pendiente

Dado que la respuesta a escalón tiene forma de S se puede usar este método, para lo cual es necesario construir la recta de máxima pendiente para nuestra respuesta a escalón y hallar los parámetros L, T:

Los cálculos de la máxima pendiente se realizan con MatLab (ver archivo "MotorEncoder.m") de donde obtenemos los siguientes valores para los parámetros:

$$L = 0.0690 \quad T = 0.2683$$

De acuerdo a las sugerencias de Ziegler-Nicholson obtenemos:

$$K_p = 4.6689 \quad T_i = 0.1379 \quad T_d = 0.0345$$

Algoritmo desarrollado en Matlab para obtener la respuesta y control con PID analógico y discreto del control del motor DC

```

%% PID Analogico
clc; clf;
num=[0 0 0.9967]
den=conv([0.22571 1],[0.012479 1])
kp=50.7348; ki=0.1062; kd=2.3551;
numc=[(kp*kd) kp (kp*ki)]
denc=[0 1 0]
numg=conv(num,numc)
deng=conv(den,denc)
deng=numg+deng
Gpid=tf(numg,deng)
step(Gpid)

```

```

%% PID Discreto

Gd=c2d(G,0.01,'zoh')
num=[0 0.01357 0.01025];
den=[1 -1.405 0.4293];

kp=0.5; ki=0.05; kd=0.05;

numc=[kp+ki+kd -(kp+2*kd) kd];
denc=[1 -1 0];
numg=conv(num,numc)
deng=conv(den,[1 -1 0])

for k=1:4
    deng(1,k)=numg(1,k)+deng(1,k);
end

deng(1,5)=numg(1,5);
r=4*ones(size(y));
c=filter(numg,deng,r);
t=linspace(0,max(t),length(r));
plot(t,c,'k');
hold off;
legend('Motor Encoder','Simulacion','PID Discreto');

```

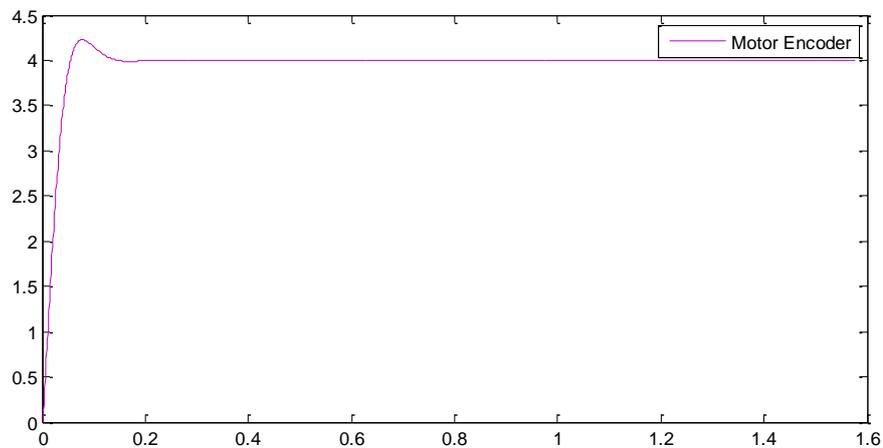


Figura A8:
Planta controlada (motor)
Fuente: (UNAC-2019) elaboración propia

Anexo A2. Filtro Kalman

Un filtro de Kalman es un proceso matemático iterativo que, basado en un modelo del sistema dinámico bajo estudio, y de unas medidas realizadas mediante sensores de las variables que modelan este sistema, elimina el **ruido blanco o aleatorio** de ambas fuentes para dar una estimación del valor real de las variables de dicho sistema. Dicho de otra manera, minimiza el error cuadrático medio de un conjunto de datos para dar la estimación más óptima y fiable hasta ahora conseguida de la realidad.

Un ruido blanco es aquel que tiende a cero con la evolución del sistema, es decir, se trata de un ruido aleatorio que aparece como resultado de errores en las medidas o en la predicción realizada por el modelo dinámico de las variables del sistema, como puede ser el no haber considerado un componente en el modelado del sistema en estudio.

Se llama ruido o incertidumbre porque se trata de variaciones pequeñas sobre los resultados reales.

Es importante, por tanto, remarcar la idea de que un filtro de Kalman no es capaz de decidir si la medida o el modelo son acertados o erróneos.

Su única tarea es estimar, dentro de los datos de los que dispone, una solución óptima libre de ruido aleatorio.

Para su implementación El filtro de Kalman, es un observador de estados que es capaz de filtrar las señales de ruido presentes en un sistema, esto lo hace una herramienta muy poderosa cuando se desea controlar sistemas con un alto contenido de ruido

En los sistemas de control (reales) existen perturbaciones indeseables, que provocan que su funcionamiento se aleje del deseado, el ruido es una de estas perturbaciones y siempre es necesario minimizar el efecto que este pueda tener sobre el funcionamiento del sistema.

Cuando se diseña un sistema de control, este debe ser capaz de mantener los valores de las señales de salida dentro de los rangos deseados, es decir que ante cualquier perturbación el control debe ser capaz de tomar decisiones para realizar las acciones necesarias, y mantener el sistema dentro de ciertos parámetros, prefijados.

IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN Y DEL SISTEMA DE SEGUIMIENTO

A continuación se explica la implementación (en MATLAB) del filtro de Kalman junto a un sistema de seguimiento, para controlar la posición de un motor DC.

El sistema motor DC se escribe su modelo matemático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Fv \\ y &= Cx + w\end{aligned}$$

Donde

- x es el vector de estado,
- u es una entrada escalar conocida,
- y es la salida escalar
- v , w son procesos escalares aleatorios gaussianos del tipo de ruido blanco, cuyas densidades espectrales de potencia son V y W , respectivamente.

Para diseñar un observador o estimador óptimo de Kalman para el vector de estado, se recurre a la estructura básica del observador.

La ecuación que describe a este observador es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_k(y - C\hat{x})$$

Siendo

\hat{x} el vector de estado estimado y K_k la matriz de diseño del estimador.

Si las señales v y w no están correlacionadas, el valor de K_k se determina mediante la fórmula:

$$K_k = P_{opt} * C^T * W^{-1}$$

Siendo P_{opt} la matriz de covarianza óptima del error del estimador de estado, obtenida a partir de la ecuación de **Riccati**

$$0 = AP_{opt} + P_{opt} * A^T - P_{opt} * C^T * W^{-1} * C * P_{opt} + F * V * F^T$$

El diagrama de estado de la figura B1 muestra la configuración del Filtro de Kalman para el presente caso.

Se observa que sus entradas son las señales $u(t)$ e $y(t)$ y su salida es el vector de estado estimado

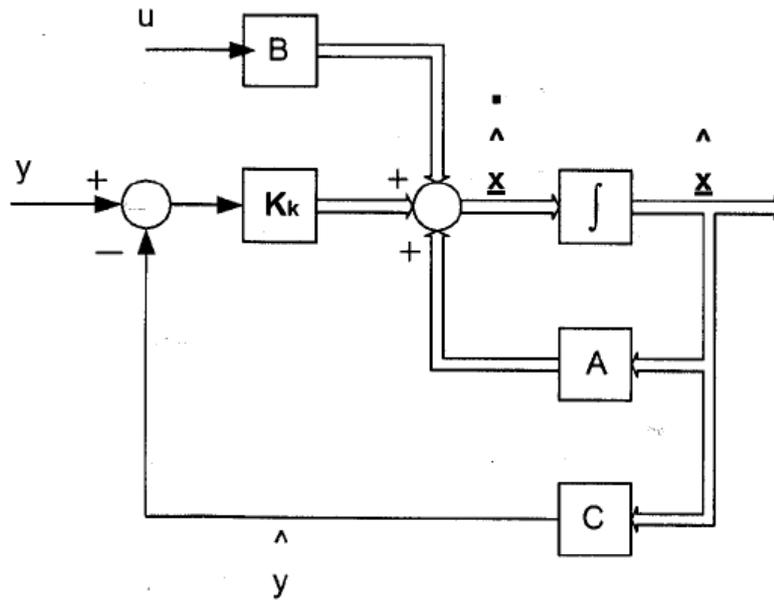


Fig. B1
Configuración del Filtro de Kalman.
Fuente: (UNAC-2019) Autoría propia

Programa en Matlab del sistema

```

% Ingresamos la planta motor DC
num=[0 0 0.9967];
den=conv([0.22571 1],[0.012479 1]);
% Planta en variables de estado
[A,B,Cc,D]=tf2ss(num,den);
% Controlabilidad y Observabilidad y obtencion de la ganancia K
M = [B A*B ];
N = [Cc' A'*Cc'];
H=[-2+i*2*sqrt(3),-2-i*2*sqrt(3)];
K=place(A,B,H);
t=0:0.01:4;
AA=A-B*K;
BB=B;
CC=Cc;
DD=D;

x0=[10;0];
x00=[0.1;0.1];
[Y,T,X]=initial(AA,BB,CC,DD,x0,t);
plot(t,Y')
title('Respuesta del sistema en cadena cerrada para posicion angular
inicial no nula')
pause
[y,T,X]=initial(AA,BB,CC,DD,x00,t);
plot(t,y')
title('Respuesta del sistema en cadena cerrada para velocidad
inicial no nula')
pause

```

```

%Las señales aleatorias se generan mediante el siguiente conjunto de
instrucciones:
%Nn es la covarianza entre w y V
Qn=1.0;
Rn=1.0;
Nn=0.0;

t_aum=0:0.01:50;
nn_aum=length(t_aum);

randn('seed',0);
w_aum=0.06*randn(nn_aum,1);

w_aum=sqrt(Qn)*randn(nn_aum,1);
randn('seed',0);
v_aum=0.03*randn(nn_aum,1);
% El siguiente código MatLab permitió realizarla simulación del nuevo
sistema:
Ar=AA;
Br=[1 0;0 0];
Cr=CC;
Dr=[0 1];
SYS=ss(Ar,Br,Cr,Dr);
z_aum=[w_aum,v_aum];
% Se obtiene la respuesta del sistema a las primeras condiciones
iniciales
[YS,TS]=lsim(SYS,z_aum,t_aum,x0);
plot(TS,YS)
title('Respuesta en cadena cerrada con ruido x1(0) no nula')
pause
%*****Diseño filtro Kalman*****

G=[1;0];
H=[0];
SYSk=ss(A,[B G],Cc,[D H]);
[KEST,Kk,PP]=kalman(SYSk,Qn,Rn,Nn);

disp('Matriz Estimador de Kalman')
Kk

% Matriz regulador Cuadrático
Q=[1 0;0 0];
R=[1];
N=[0;0];
[Kr,S,Er]=lqr(A,B,Q,R,N);
disp('Matriz del regulador óptimo')
Kr

RLQG=lqgreg(KEST,Kr);
PLANTA=ss(A,B,Cc,D);
LAZO=feedback(PLANTA,RLQG,1);
[Acc,Bcc,Ccc,Dcc]=ssdata(LAZO);

x0_aum=[x0;0;0];
x00_aum=[x00;0;0];
%*****RESPUESTA DEL SISTEMA CON REGULADOR Y FILTRO****
[YSS,TS]=lsim(LAZO,w_aum,t_aum,x00_aum);
plot(t_aum,YSS)
title('Respuesta del Sistema de Posición Angular ')

```

```
xlabel('tiempo')
ylabel('Posicion angular')
pause
```

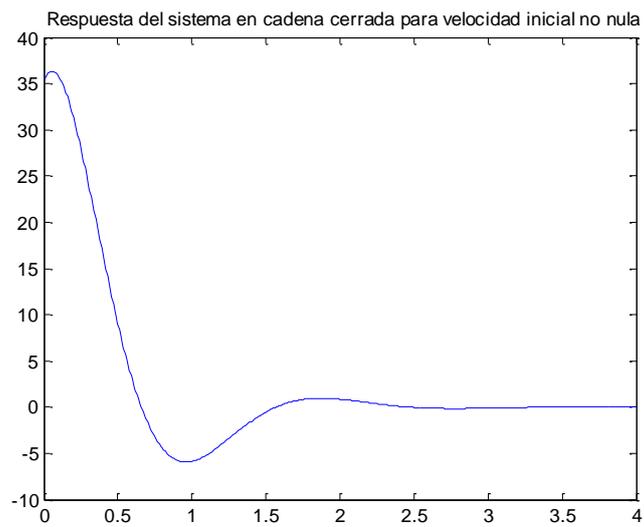
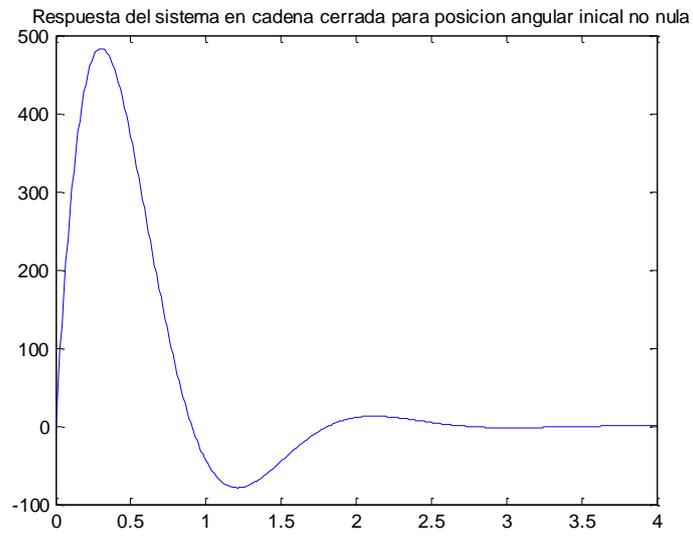


Figura B2
Respuesta del sistema para la posición angular y velocidad
Fuente: (UNAC-2019) Autoría propia



Figura B3
 Respuesta del sistema con filtro de Kalman a las perturbaciones, cuando la velocidad angular inicial no es cero.
Fuente: (UNAC-2019) Autoría propia

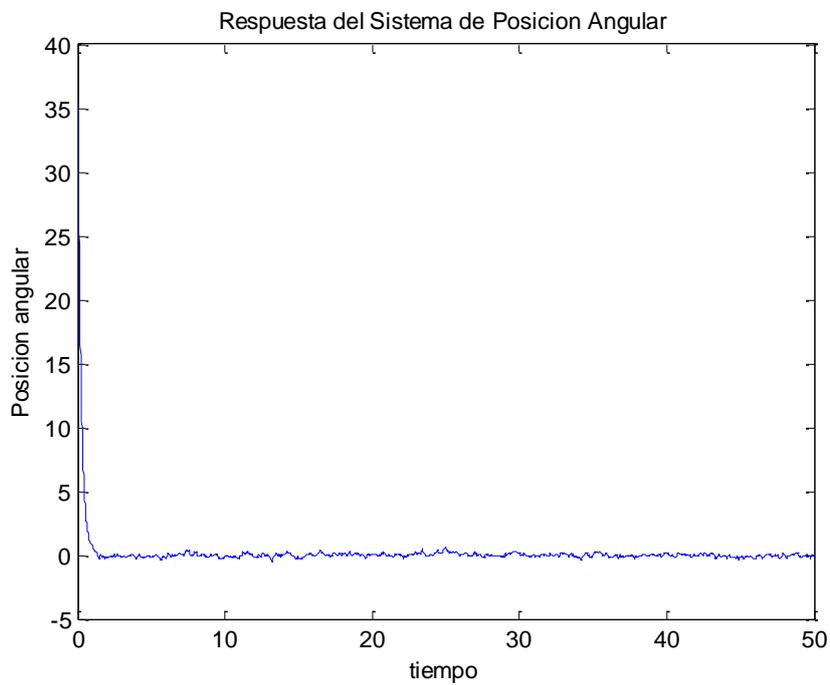


Figura B4
 Respuesta del sistema con filtro de Kalman a las perturbaciones con ruido, cuando la posición angular inicial
Fuente: (UNAC-2019) Autoría propia

Anexo A3.- Matriz de Consistencia

TITULO DEL PROYECTO : Identificación no paramétrica del sistema motor dc y control de posición por observador de estados realimentado					
Problema	Objetivo	Justificación	Hipótesis	Variables	Tipo de investigación
<p>General</p> <p>¿Cómo el diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto estabiliza la posición el sistema motor DC</p> <p>Específico:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo se modela matemáticamente el sistema de control del motor DC? • ¿Cómo se determina la controlabilidad y la observabilidad del modelo? • ¿Cómo se diseña el control realimentado por asignación de polos y observador de estado discreto? 	<p>General</p> <p>Diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto para un sistema motor DC, obteniendo las características de control en relación a su respuesta, es decir que el sistema sea capaz de seguir a las consignas impuestas en un menor tiempo y con error en el estado estacionario nulo.</p> <p>Específicos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Realizar la identificación del modelo del sistema motor DC. • Usar técnicas de optimización que lleven a un buen desempeño del control • Diseñar el controlador y validar su desempeño por medio de la simulación 	<p>La ejecución del presente trabajo, es un aporte más a otros trabajos que se desarrollan en la Sección de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.</p>	<p>General</p> <p>El diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos y observador de estado discreto controlara la posición del servomecanismo.</p> <p>Específicas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar el sistema para determinar los parámetros en forma experimental y obtener la función de transferencia • El modelamiento, permitirá encontrar las ecuaciones dinámicas de la planta y la respuesta sin realimentación de estado • La observabilidad y controlabilidad permitirá la realimentación de estado. • El diseño del controlador por realimentación de estado con asignación de polos y observador de estado permitirá encontrar la ganancia de realimentación de estados y la ganancia del observador. 	<p>Variable Independiente, es la tensión aplicadas al motor.</p> <p>Variables Dependiente, es la posición angular de la articulación</p>	<p>El presente trabajo, es una investigación científica, por lo que se utilizará la teoría de control avanzado, que nos permitirá diseñar el controlador adecuado para el sistema motor DC.</p>