UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

IF

MAY 2019

INFORME FINAL DEL TEXTO:

“TEXTO: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES”

Autor: SOFÍA IRENA DURAN QUIÑONES

Período de Ejecución: Del 01-05-2017 al 30-04-2019

Resolución Rectoral N° 488-2017-R

CALLAO, 2019

INDICE

INDICE DE CUADROS

INDICE DE FIGURAS

PRÓLOGO

El presente texto desarrollado tiene como propósito servir de base y de complemento para un Curso de Introducción a las Ecuaciones Diferenciales para los alumnos que lo cursan en una Facultad de Ciencias e Ingeniería, y como material didáctico para los profesores de este curso.

Gran parte del contenido de este **"TEXTO: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"** está basado en las notas de clase del curso: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales, dictado por la autora en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, en la Escuela Profesional de Física, durante los años del 2005 al 2011.

Esperamos que al concluir la lectura del Texto, el interesado haya adquirido los conocimientos necesarios para poder abordar tópicos más avanzados sobre la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones diferenciales Parciales y Análisis Numérico. Así como también poder solucionar problemas reales de acuerdo a la disciplina en la que se encuentre inmerso, tales como: Ciencias Físicas, Ingeniería, Biología, Estadística, Economía, entre otros.

Deseo que este Libro logre su propósito, facilitando el proceso de enseñanza – aprendizaje de los alumnos según los objetivos y contenidos del curso, así como también será de apoyo a los profesores.

La autora: Sofía Irena Duran Quiñones

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de Investigación se ha elaborado el **"TEXTO: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"** para estudiantes de segundo y tercer año de Ciencias e Ingeniería de las universidades del país, especialmente para los alumnos de la Escuela Profesional de Física y Matemática de la Facutlad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, con el propósito de lograr una buena comprensión de las Ecuaciones Diferenciales en su parte introductoria, en base a mi experiencia como docente del curso se ha tratado de exponer los temas de manera didáctica para así lograr un mejor entendimiento de los mismos.

El desarrollo del presente Texto se ha dividido en seis Capítulos siguiendo el orden del Sílabo de la Asignatura Introducción a las Ecuaciones Diferenciales del Tercer ciclo de la Escuela Profesional de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

En el **Capítulo I**, se han tratado los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales, se han estudiado las ecuaciones diferenciales de primer orden y los tipos y métodos de solución.

El **Capítulo II**, está dedicado al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden superior, los métodos de solución: Coeficientes Indeterminados y Variación de Parámetros. Estudiamos la Ecuación de Cauchy-Euler, los Sistemas Lineales y algunas aplicaciones.

En el **Capítulo III**, desarrollamos los conceptos básicos de la Transformada de Laplace y su inversa. Las propiedades de traslación. La función Delta de Dirak y sus aplicaciones.

El **Capítulo IV** lo dedicamos al estudio de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Lineales mediante Series de Potencias, damos los conceptos fundamentales y se desarrolla las soluciones en torno a puntos ordinarios y singulares.

En el **Capítulo V** damos inicio al estudio de las Series de Fourier, y las Series de Fourier de funciones pares e impares.

Finalmente, en el **Capítulo VI** se hace una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales. Se estudia el Método de Separación de Variables y las tres ecuaciones básicas: Ecuación de Calor, Ecuación de Onda y Ecuación de Laplace.

En cada Capítulo se desarrollan variados ejemplos de aplicaciones de los diferentes métodos de solución para cada uno de los temas y para cada tipo de ecuación diferencial.

CAPÍTULO I:
ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1.1 Definición. Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales.

1.1.2 Definición. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

1. 1.3 Definición. El grado de una ecuación diferencial es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la expresión.

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según su tipo, orden o grado.

a) Según el tipo

- Ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.
- Ecuaciones diferenciales parciales. La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

b) Según el orden

- Ecuaciones diferenciales de primer orden. Es cuando la ecuación diferencial contiene derivadas de primer orden.
- Ecuaciones diferenciales de segundo orden. Se trata de ecuaciones que contienen derivadas hasta el orden ***n***.

c) Según el grado

- Ecuaciones diferenciales lineales. Ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones siguientes:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer orden.
- Cada coeficiente de la variable dependiente y sus derivadas dependen solo de la variable independiente.

➢ <u>Ecuaciones diferenciales no lineales</u>. Aquellas ecuaciones diferenciales que no satisfacen las condiciones de las Ecuaciones Lineales.

Ejemplo 1

La ecuación $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-v^2\right)y=0$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal de primer orden.

Ejemplo 2

La ecuación $\mu\dfrac{\partial^2\mu}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2}$ es una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal. Una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden ***n*** se puede expresar en la forma siguiente:

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^n\right)=0$$

donde $y=y(x)$.

1.1.4 Definición. Una solución de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación diferencial en un determinado intervalo de $\mathbb{R}$.

1.1.5 Definición. Solución general de una ecuación diferencial es la función que satisface a la ecuación y que contiene uno o más constantes arbitrarias.

1.1.6 Definición. Solución particular de una ecuación diferencial es la función que satisface la ecuación y que se obtiene de la solución general para valores específicos de las constantes.

1.1.7 Definición. Solución singular de una ecuación diferencial es la función que satisface la ecuación y que no se obtiene de la solución general para ningún valor de las constantes.

La gráfica de la solución de una ecuación diferencial es llamada ***curva solución***.

Si $y=\varphi(x)$ es solución de una ecuación diferencial ordinaria en algún intervalo I, entonces $y=\varphi(x)$ es llamado ***solución explícita***.

Si $E(x,y)=0$ define una o más soluciones explícitas es un intervalo I para una ecuación diferencial se dice que $E(x,y)=0$ es una ***solución implícita.***

1.1.8 Definición. Un problema con valores iniciales es una ecuación diferencial junto con una o más condiciones iniciales.

Un problema con valor inicial para una ecuación diferencial lineal de primer orden es:

$$PVI=\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

1.1.9 Teorema. Dado el $PVI(*)$, si las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en algún rectángulo abierto $R=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ que contiene al punto (x_0,y_0), entonces existe una única función φ que satisface el PVI en algún intervalo abierto que contenga a x_0.

Ejemplo 3

$y(x)=\dfrac{2}{x-2}$ es solución única del $PVI\begin{cases} y'=\dfrac{-y(y+1)}{x} \\ y(1)=-2 \end{cases}$

En efecto, las funciones $f(x,y)=\frac{-y(y+1)}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y-1$ son continuas en todo rectángulo abierto que contiene el punto $(1,-2)$; luego el Teorema garantiza la existencia de la solución única del PVI, derivando $\varphi(x)$ y reemplazando en la ecuación vemos que la satisface y además $\varphi(1)=-2$.

1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de la forma: $F(x,y,y')=0$, la cual puede escribirse como

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)dy=0$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se clasifican en:

- Ecuaciones de Variables separables.
- Ecuaciones diferenciales homogéneas.
- Ecuaciones diferenciales exactas.
- Ecuaciones diferenciales lineales.
- Ecuaciones diferenciales no lineales.

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

1.3.1 Definición. Una ecuación diferencial es de variables separables cuando puede llevarse a la forma $M(x)dx+N(y)dy=0$, donde M y N son funciones que solo dependen de x.

1.3.2. Método de solución. Integración directa de cada sumando:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C;\ C=cte.$$

Ejemplo 1

Resolver $y'=e^{x-y}$

Solución. Separado las variables se tiene: $y'=e^x e^{-y}$

$\frac{dy}{e^{-y}}=e^x\,dx$; luego $e^x\,dx-e^y\,dy=0$

Integrando cada sumando: $e^x - e^y = C$

Es la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2

Resolver $y' = \dfrac{\cos^2 x}{y}$

Solución. Separando variables: $\cos^2 x dx - y dy = 0$

Integrando cada sumando: $\int \cos^2 x dx - \int y dy = C$

$\Rightarrow y^2 = x + \frac{1}{2} sen 2x + C$ es la solución general

Ejemplo 3

Resolver: $\left(x^2+2x-1\right)dy - \left(xy+y+x+1\right)dx = 0$

Solución. Separando variables:

$\left(x^2+2x-1\right)dy - \left(x\left(y+1\right)+\left(y+1\right)\right)dx = 0$

$\left(x^2+2x-1\right)dy - \left(x+1\right)\left(y+1\right)dx = 0$

$\dfrac{dy}{y+1} - \dfrac{\left(x+1\right)dx}{\left(x+1\right)^2} = 0$

Integrando con respecto a cada variable se tiene:

$\ln y - \ln\left(x+1\right)^2 = \ln C$, entonces: $\ln\left[\dfrac{y}{\left(x+1\right)^2}\right] = \ln C$

$\Rightarrow y = C\left(x+1\right)^2$ es la solución de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 4

Resolver: $xy' - y = x^2 e^x$

Solución: La ecuación es equivalente a $x dy - y dx = x^2 e^x dx$

Haciendo $y = ux$; $dy = u dx + x du$

Luego: $x\left(u dx + x du\right) - ux dx = x^2 e^x dx$

Agrupando y separando variables: $du = e^x dx$

Integrado se tiene: $u = e^x + C$

Como $u=\frac{y}{x}$, se tiene que $y=xe^{x}+Cx$ es la solución general de la ecuación dada.

1.3.3 Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Variables Separables

Tiene la forma: $y'=f(ax+by+c)$, $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$, $b\neq 0$; haciendo

$$u=ax+by+c \rightarrow u'=a+by' \rightarrow y'=\frac{u'-a}{b}$$

Reemplazando en la ecuación dada, resulta: $\frac{u'-a}{b}=f(u)$, la cual es equivalente a: $\frac{du}{b\,f(u)}-a\,dx=0$ que es de variables separables.

Ejemplo 1

Resolver: $y'=(x+y+1)^2$

Solución

$u=x+y+1 \rightarrow u'=1+y' \rightarrow y'=u'-1$

$u'-1=u^2$, la cual es equivalente a $\frac{du}{u^2+1}-dx=0$

Integrando se obtiene: $arc\,tg\,u-x=C$

⇨ La solución de la ecuación diferencial es: $arctg((x+y+1)-x)=C$

Ejemplo 2

Resolver: $y'=\frac{1}{2x+y}$

Solución

$u=2x+y \rightarrow u'=2+y' \rightarrow y'=u'-2$

Luego: $u'-2=\frac{1}{u}$, lo cual es equivalente a $\frac{du}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{1+2u}\right)=dx$

Integrando: $\frac{u}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+2u)=x$

$\Rightarrow \frac{y}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+4x+2y)=C$ es la solución

Ejemplo 3

Resolver: $y' = \sqrt{2x+y}$

Solución

$u = 2x + y \quad \rightarrow \quad u' = 2 + y' \quad \rightarrow \quad y' = u' - 2$

Luego: $u' - 2 = \sqrt{u}$, la cual es equivalente a: $\dfrac{du}{\sqrt{u}+2} = dx$

integrando hacemos

$z = \sqrt{u} + 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{u} = z - 2 \quad \rightarrow \quad dz = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$

Entonces: $\dfrac{2(z-2)dz}{z} = dx$, así $2dz - \dfrac{4}{z}dz - dx = 0$;

entonces $2z - 4\ln(z) - x = C$;

luego $2(\sqrt{u}+2) - 4\ln(\sqrt{u}+2) - x = C$

$\Rightarrow \quad 2(\sqrt{2x+y}+2) - 4\ln(\sqrt{2x+y}+2) - x = C$ es la solución general de la ecuación diferencial.

1.4 ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

1.4.1 Definición. Una ecuación diferencial de primer orden $M(x)dx + N(y)dy = 0$ se dice homogénea cuando M y N son funciones homogéneas del mismo grado $r \in \mathbb{R}$, es decir, cuando

$$M(tx,ty) = t^r M(x,y) \text{ y } N(tx,ty)t^r N(x,y), \forall t > 0$$

Ejemplo 1

$f(x,y) = x^3 y e^{\frac{x}{y}}$ es homogénea de grado 3, puesto que $f(tx,ty) = (tx)^2 t$,

y $e^{\frac{tx}{ty}} = t^3 \left(x^2 y e^{\frac{x}{y}} \right) = t^3 f(x,y)$

1.4.2 Método de Solución

Mediante sustituciones algebraicas adecuadas, las ecuaciones diferenciales homogéneas se transforman en ecuaciones de variables separables, la más utilizada es hacer $y = ux$ ó $x = yv$. De manera que $dy = u\,dx + x\,du$ ó $dx = v dy + y dv$. Luego se debe reemplazar en la ecuación y separar las variables.

Ejemplo 1

Resolver el $PVI\; x^2 y' = y^2 + xy$; $y(1) = 1$

Solución

La ecuación es equivalente a $x^2\,dy = \left(y^2 + xy\right)dx$, la cual es homogénea de grado 2. Haciendo $y = ux$; $dy = udx + x\,du$, luego

$$x^2\left(udx + x\,du\right) = \left(u^2x^2 + ux^2\right)dx$$

Agrupando y separando variables: $\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$

Integrando: $\frac{x}{y} = -\ln x + C$

Tomando antilogaritmo $e^{\frac{x}{y}} = \frac{C}{x}$

Para $y(1) = 1$, se tiene: $e = C$

$\Rightarrow xe^{\frac{x}{y}} = e$ es solución del PVI

1.4.3 Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas

Tienen la forma: $\left(A_1x + B_1y + C_1\right)dx + \left(A_2x + B_2y + C_2\right)dy = 0$

Método de Solución

a) Si $\Delta = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$,

se resuelve el sistema $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

se halla la única solución (x_0, y_0), luego se hace el cambio de variable:

$x' = x - x_0 \quad \rightarrow \quad dx' = dx$

$y' = y - y_0 \quad \rightarrow \quad dy' = dy$

Se reemplaza en la ecuación diferencial y se reduce a una ecuación diferencial homogénea.

b) Si $\Delta = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$

Se hace la sustitución: $z = A_1 x + B_1 y \rightarrow \qquad z' = A_1 + B_1 y',\ y' = \dfrac{z' - A_1}{B_1}$

Se reemplaza en la ecuación y ésta se reduce a una de variables separables.

Ejemplo 1

Resolver: $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$

Solución

$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2-2 = 0$; hacemos: $z = x+y+1$; $z\ 1+y'$

Reemplazando en la ecuación, se tiene:

$$dx - \left(\frac{2z-3}{z-3}\right)dz = 0 \quad \rightarrow \quad dx - \left(2 + \frac{3}{z-3}\right)dz = 0$$

Integrando: $x - 2z - 3\ln(z-3) = C$

Pero $z = x+y+1$, entonces:

$$x - 2(x+y+1) - 3\ln(x+y+1-3) = C$$

$$\Rightarrow \quad x + 2y + 2 + 3\ln(x+y-2) = K$$

Es la solución de la ecuación diferencial

Ejemplo 2

Resolver $y' = \dfrac{x+y}{x-2y-3}$

Solución

La ecuación es equivalente a: $(x+y)dx + (-x+2y+3)dy = 0$

$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$

Resolviendo: $\left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ x-2y-3=0 \end{matrix}\right\}$ obtenemos $(x_0, y_0)=(1,-1)$

Luego: $\begin{cases} x_1 = x-1 & dx_1 = dx \\ y_1 = y+1 & dy_1 = dy \end{cases}$

Reemplazando en la ecuación:

$$(x_1+1+y_1-1)dx_1 + (-x_1-1+2(y_1-1)+3)dy_1 = 0$$

$$(x_1+y_1)dx_1 + (-x_1+2y_1)dy_1 = 0$$

La cual es una ecuación diferencial homogénea.

Hacemos: $y_1 = tx_1 \rightarrow \quad dy_1 = tdx_1 + x_1 dt$

Reemplazamos en la ecuación anterior

$$(x_1+tx_1)dx_1 + (-x_1+2tx_1)(tdx_1 + x_1 dt) = 0$$

Agrupando términos: $\dfrac{dx_1}{x_1} + \left(\dfrac{2t-1}{2t^2+1}\right)dt = 0$

Integrando: $\ln x_1 + \dfrac{1}{2}\ln(2t^2+1) - \dfrac{1}{\sqrt{2}} arc\,tg\left(\dfrac{2t^2}{\sqrt{2}}\right) = C$

Finalmente, volviendo a las variables originales:

$$\ln\left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{2(y+1)^2+(x-1)^2}}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}} arc\,tg\left[\sqrt{2}\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2\right] = C$$

Es solución de la ecuación diferencial dada.

1.5 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1.5.1 Definición. Una expresión de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se denomina ***Diferencial Exacta*** si existe una función $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, esto es si

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy;\ \forall (x,y) \in D,$$

por ejemplo $(2x-5y)dx + (-5x+3y^2)dy$ es el diferencial exacta de $F(x,y) = x^2 - 5xy + y^3$.

1.5.2 Teorema. Sea $R=[a,b]\times[c,d]$; $M(x,y)dx$ y $N(x,y)dy$ funciones definidas en R continuas y con derivadas parciales continuas, $\forall(x,y)\in R$. Entonces $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es el diferencial exacta si y solo si $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.

Prueba. Supongamos que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ poseen derivadas parciales continuas, $\forall(x,y)\in R$. Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es exacta, entonces existe una función $F:R\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $\forall(x,y)\in R$ se cumple

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy\text{, luego}$$

$$M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\ ;\ N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\text{; entonces}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right]=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\ ;\ \forall(x,y)\in R$$

Recíprocamente, supongamos que $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$; $\forall(x,y)\in R$ debemos hallar la función F tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ integramos $M(x,y)$ respecto de x, manteniendo la variable y como una constante.

Así: $$F(x,y)=\int M(x,y)dx+g(x)=G(x,y)+g(y) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

derivando $F(x,y)$ respecto a y e igualando a $N(x,y)$ se tiene: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}G(x,y)+g'(x,y)=N(x,y)$, luego $g'(y)=N(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}G(x,y)$, integramos respecto a y a fin de encontrar $g(y)$, entonces

$$g(y)=\int N(x,y)dy-\int\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)dy$$

$$g(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right]dy \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Sustituyendo (α) en(β)

$$F(x,y)= G(x,y)+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right]dy$$

Observación

1) $N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ es independiente de x, en efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

2) El procedimiento para la obtención de $F(x,y)$ puede iniciarse también suponiendo que $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$, integrando respecto a y

$F(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)$, donde $h'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$ es independiente de y.

1.5.3 Definición. Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta en $D\subset\mathbb{R}^2$ si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es diferencial de algún campo escalar f definido en D. Es decir, si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy;\ \forall(x,y)\in D$.

Observación. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta sí y solo sí: $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$; $\forall(x,y)\in D$

Ejemplo 1. Resolver:

$$(x^3-y)dy+3x^2(x^3+y)dx=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Solución

$M(x,y)=3x^2(x^3+y) \quad\rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=3x^2$

$N(x,y)=x^3-y \quad\rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=3x^2$

Luego la ecuación (*) es exacta, luego existe una función diferencial f tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x}= 3x^2\left(x^3+y\right)$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}= x^3-y$, integrando la primera igualdad respecto de x.

$$F(x,y)=\int 3x^2\left(x^3+y\right)dx+g(y)=\frac{x^6}{2}+x^3y+g(y) \quad .... (\alpha)$$

Ahora derivando respecto de y e igualando a N

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^3+g'(y)=x^3-y$$

$$g'(y)=x^3-y-x^3=-y \quad \rightarrow \quad g(y)=-\frac{y^2}{2} \quad .... (\beta)$$

Ahora reemplazando (β) en (α): $F(x,y)=\dfrac{x^6}{2}+x^3y-\dfrac{y^2}{2}$, luego la solución de la ecuación diferencial es $x^6+2x^3y-y^2=C$.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\left(xy^{-1}+xe^x+e^x\right)dx+\ln x\,dy=0 \quad .... (*)$$

Solución

$$M(x,y)=xy^{-1}+xe^x+e^x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}$$

$$N(x,y)=\ln x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x}$$

Luego (*) es exacta, entonces existe una función diferencial f tal que:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x}+xe^x+e^x$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln x$, integrando respecto de y:

$$F(x,y)=\int \ln x\,dy+h(y)=y\ln x+h(y) \quad .... (\alpha)$$

Derivando respecto de x e igualando a M

$$\frac{y}{x}+h'(x)=\frac{y}{x}+xe^x+e^x$$

$$h'(x)=xe^x+e^x$$

$$h(x)=xe^x-\int e^x dx+\int e^x dx$$

$$h(x)=xe^x \quad .... (\beta)$$

$$F(x,y)=y\ln x+xe^x$$

Haciendo (β) en (α) $y\ln x + xe^{x} = C$, es solución de la ecuación diferencial.

1.5.4 Factor Integrante

Dada la función no nula $u(x,y)$ definida en D. Si la ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{..........} (*)$$

No es exacta en D y $u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0 \text{..........} (\Delta)$ resulta exacta, entonces la función no nula $u(x,y)$ es llamada factor integrante para la ecuación (*)

Observación

No existe un método general establecido que nos permita encontrar factores integrantes, sin embargo, en algunos casos particulares es posible hallarlo, como por ejemplo: $M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0$ es exacta en D sí y solo sí

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uM)}{\partial x} \Rightarrow u\frac{\partial(M)}{\partial y} + M\frac{\partial(u)}{\partial y} = u\frac{\partial(N)}{\partial x} + N\frac{\partial(u)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \quad u\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial(\ln u)}{\partial x} - M\frac{\partial(\ln u)}{\partial y} \qquad \text{..........} (\theta)$$

Analizando (θ):

i) Si $u(x,y) = u(x)$ depende sólo de x, tenemos de (θ):

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial(\ln u)}{\partial x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\ln u)}{\partial x}$$

Así, $u(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$ es el factor integrante que solo depende de x

ii) Si $u(x,y) = u(y)$ depende solo de y, tenemos de (θ):

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -M\frac{\partial(\ln u)}{\partial y} \quad \leftrightarrow \quad -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\ln u)}{\partial y}$$

Así, $u(x)= e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$ es el factor integrante que solo depende de y

iii) Supongamos que la ecuación tiene un factor integrante no nulo en función del producto xy esto es $u(x,y)=u(xy)$.

Hacemos $z=xy$, y como (Δ) es exacta $\dfrac{\partial(uM)}{\partial y}=\dfrac{\partial(uN)}{\partial x}$, por la Regla de la Cadena: $x\dfrac{\partial u}{\partial z}M+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=y\dfrac{\partial u}{\partial z}N+u\dfrac{\partial N}{\partial x}$, luego

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{du}{dz}(yN-xM)\leftrightarrow \quad \frac{\frac{du}{dz}}{u}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM} \quad ......(**)$$

Si $yN-xM\neq 0,(**)$ es una función solo de $z=xy$; luego

$h(z)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}$ y $u(z)=e^{\int h(z)dz}$ es el factor integrante buscado.

Ejemplo 3. Resolver la siguiente ecuación:

$$(xy-y-1)dx-x\,dy=0 \qquad .... (*)$$

Solución

$M=xy-y-1 \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y}=x-1$

$N=-x \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1$

Luego, esta ecuación no es exacta. Hallaremos un factor integrante.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{x}(xy-y-1)=-1$$

$$u(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

Multiplicando la ecuación (*) por el factor integrante:

$(xye^{-x}-ye^{-x}-e^{-x})dx-xe^{-x}dy=0$, la cual es exacta, luego existe $f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=xye^{-x}-ye^{-x}-e^{-x}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-xe^{-x}$, integrando la segunda ecuación respecto de y, $f(x,y)=\int -xe^{-x}dy = -xye^{-x}+g(x)$ y derivando respecto de x e igualando a M: $xye^{-x}-ye^{-x}+g(x)=xye^{-x}-ye^{-x}-e^{-x}$; $g(x)=e^{-x}$; luego la solución general de la ecuación (*) es $-xye^{-x}+e^{-x}=C$.

Ejemplo 4

Resolver: $\left(3x^2+y\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$ .... (*)

Solución

$M=3x^2+y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y}=1$

$N=x^2y-x \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy-1$

Observamos que no es una ecuación exacta, por tanto:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{x(xy-1)}\left[1-(2xy-1)\right]=-\frac{2}{x}$$

$u(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^{-2}$; multiplicando (*) por $u=x^{-2}$ tenemos $\left(3+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$, ahora es exacta, luego existe $f(x,y)$ tal que

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3+\dfrac{y}{x^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=y-\dfrac{1}{x}$

$f(x,y)=\int 3+\dfrac{y}{x^2}+g(y)=3x-\dfrac{y}{x}+g(y)$ .... $(\Delta\Delta)$

Derivando respecto de y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{x}+g'(y)=y-\dfrac{1}{x}$ → $g'(y)=y$, luego

$y=\dfrac{y^2}{2}$ .... (α);

Haciendo (α) en $(\Delta\Delta)$: $3-\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{2}=C$ es la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 5

Resolver $\left(2y+xy^2\right)dx+\left(x+x^2y\right)dy=0$ .... (*)

Solución

Hacemos $z=xy$, luego $u(x,y)=\frac{1}{xy}$ es un factor integrante, multiplicando (*) por $u(x,y)=\frac{1}{xy}$ tenemos $\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+\left(\frac{1}{y}+x\right)dy=0$ resultando ahora una ecuación diferencial exacta.

Resolviendo $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{x}+y$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}+x$, luego

$$f(x,y)=\int\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+g(y)=2\ln x+xy+g(y) \qquad \text{..........}(\alpha)$$

derivando respecto de y e igualando a $\frac{1}{y}+x$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+g'(y)=\frac{1}{y}+x \rightarrow \qquad g''(y)=\frac{1}{y}$$

$$\rightarrow \quad g(y)=\ln y \qquad \text{..........}(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) se tiene $2\ln x+xy+\ln y=C$ que es la solución de la ecuación diferencial.

1.6 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1.6.1 Definición. Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma $y'+p(x)y=q(x)$ .... $(*)$.

Si $q(x)$ es la función nula, la ecuación es llamada Lineal homogénea, si $q(x)\neq 0$, entonces es Lineal no homogénea.

Para resolver la ecuación (*) lo multiplicamos por un factor integrante de la forma $u(x)=e^{\int p(x)dx}$, así tenemos: $\frac{d}{d(x)}\left(e^{\int p(x)dx}\right)=q(x)e^{\int p(x)dx}$,

integrando respecto de x, se tiene $e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$, luego

despejamos y, obtenemos: $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$ que es la solución general de la ecuación (*).

Ejemplo 6

Resolver $(3x^2y-x^2)dx+dy=0$ .... $(*)$

Solución

La ecuación es equivalente a $y' + 3x^2 y = x^2$, cuyo factor integrante tiene la forma $u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$; multiplicando (*) por $u(x) = e^{x^3}$ se tiene $e^{x^3} y' + 3e^{x^3} x^2 y = e^{x^3} x^2$, cuya solución es:

$$y = e^{-x^3}\left[\int x^2 e^{x^3} dx + C\right] = e^{-x^3}\left[\frac{1}{3}e^{x^3} + C\right] = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$$

Ejemplo 7

Resolver $\left(x + \frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$ .... (*)

Solución

La ecuación (*) es equivalente a $y' - \frac{1}{x}y = x$ con $p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x$.

La solución es: $y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{\int -\frac{1}{x}dx} + C\right] = e^{\ln x}\left[\int xe^{\ln x} dx + C\right]$

$y = e^{\ln x}\left[\int x.\frac{1}{x}dx + C\right] = x\left[\int dx + C\right]$; $\therefore y = x[x + C]$ es la solución.

Ejemplo 8

Resolver: $xy' + 4y = x^3 - x$ .... (*)

Solución

La ecuación tiene la forma $y' + \frac{4y}{x} = x^2 - 1$, donde $p(x) = \frac{4}{x}$; $q(x) = x^2 - 1$

luego, la solución está dada por: $y = e^{-\int \frac{4}{x}dx}\left[e^{\int \frac{4}{x}dx}(x^2 - 1)dx + C\right]$

$$y = e^{-4\ln x}\left[\int e^{4\ln x}(x^2 - 1)dx + C\right]$$

$$y = x^{-4}\left[\int x^4(x^2 - 1)dx + C\right] = x^{-4}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + C\right]$$

Entonces, $y = \frac{x^3}{7} - \frac{x}{5} + Cx^{-4}$ es la solución de la ecuación (*)

Ejemplo 9

Resolver: $(x^2 + 1)y' - (1 - x)^2 y = xe^{-x}$ .... (*)

Solución

La ecuación tiene la forma $y' - \frac{(1-x)^2}{x^2+1} y = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$, donde $p(x) = -\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$;

$q(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$, luego la solución es $y = e^{\int \frac{(1-x)^2}{x^2+1}dx}\left[\int e^{-\int \frac{(1-x)^2}{x^2+1}dx} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}dx + C\right]$,

integrando obtenemos $y = \frac{e^x}{x^2+1}\left[C - \frac{e^{-2x}}{2}\right]$ que es la solución de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 10

Resolver el $PVI \begin{cases} y' = x^3 - 2xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Solución

La ecuación $y' = x^3 - 2xy$ puede escribirse como $y' + 2xy = x^3$ la cual es lineal y su solución es $y = e^{-\int 2x dx}\left[\int e^{\int 2x dx} x^3 dx + C\right] = e^{-x^2}\left[\int e^{x^2} x^3\, dx + C\right]$

luego $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$. De las condiciones iniciales $y(1) = 1$, tenemos

$y = 1$; $x = 1$, luego $1 = \frac{C}{e} \quad \rightarrow \quad C = e$

$\therefore \ y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + e^{1-x^2}$ es solución del PVI.

1.7 ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

1.7.1 Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

Son ecuaciones de la forma:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n; \qquad n \neq 0 \,;\, n \neq 1 \qquad \text{..........} \ (\alpha)$$

Método de Solución

Se reduce a una ecuación diferencial de la siguiente manera:

i) Divide (*) por y^n

$$y^{-n}y' + y^{-n+1}\, p(x) = q(x) \qquad \text{..........} \ (\alpha)$$

ii) Hacer el cambio de variable

$$z = y^{-n+1} \qquad \left.\begin{aligned} &\to z' = (1-n)y^{-n+1}p(x) = q(x) \\ &\to \quad y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

iii) Sustituir (β) en (α)

$$\frac{z'}{1-n} + x\,p(x) = q(x), \text{ ecuación lineal en } z.$$

iv) Resolver esta última ecuación y reemplazar z.

Ejemplo 1

Resolver $y' + y = y^3$ .... (*)

Solución

Dividimos la ecuación entre y^3

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = 1 \qquad \to \qquad y^{-3}y' + y^{-2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Hacemos cambio de variable:

$$z = y^{-2} \to \qquad z' = -2y^{-3}y' \quad \to \qquad y^{-3}y = \frac{z'}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α)

$$\frac{z'}{2} + z = 1 \;\equiv\; -z' + 2z = 2 \;\equiv\; z' - 2z = -2$$

$$z = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{-\int 2dx} - 2dx + C\right] = e^{2x}\left[e^{-2x}(-2)dx + C\right]$$

$$z = e^{2x}\left[e^{-2x} + C\right] = 1 + Ce^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y^{-2} = 1 + Ce^{2x}}$$

$$\boxed{1 = y^2\left(1 + Ce^{2x}\right)}$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial $\begin{cases} y' + y = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solución

Dividimos la ecuación entre y^2

$$y^{-2}y' + y^{-1} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Cambiando variables:

$$z = y^{-1} \rightarrow \quad z' = -y^{-2}y' \quad \rightarrow \quad y^{-2}y' = -z' \quad \ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α)

$$-z' + z = 1 \quad \equiv z' - z = -1 \quad \rightarrow \quad z = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}(-1)dx + C\right]$$

$$z = e^{x}\left[\int e^{-x}(-1)dx + C\right] = e^{x}\left(e^{-x} + C\right) = 1 + Ce^{x}$$

$$z = \frac{1}{y} \rightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 + Ce^{x} \quad \equiv \quad \boxed{y = \frac{1}{1 + Ce^{x}}}$$

$$y(0) = 1 \rightarrow \quad 1 = \frac{1}{1 + Ce^{0}} \quad \rightarrow \quad C = 0$$

$\therefore$ $\boxed{y = 1}$ es solución única del PVI.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$

Solución

Escribiendo la ecuación en la forma: $y' - \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{x^2}{3}y^{-2}$

Dividiendo la ecuación entre xy^2

$$y^2y' - \left(\frac{2}{3x}\right)y^3 = \frac{x^3}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = y^{-(-2)+1} = y^3$$

$$z' = 3y^2y' \quad \rightarrow \quad y^2y' = \frac{z'}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α)

$$\frac{z'}{3} - \left(\frac{2}{3x}\right)z = \frac{x^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\Delta)$$

$\equiv\ z' - 2z = x^2$ solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Resolver: $\left(xy^3 + 1\right)dx + x^2y^2dy = 0$

Solución

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y) = xy^3 + 1 & \rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 \\ N(x,y) = x^2y^2 & \rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy^2 \end{array}\right\} \text{ No es exacta}$$

Ahora:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2y^2}\left(3xy^2 - 2xy^2\right) = \frac{xy^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x} \text{ (función que depende solo de } x\text{)}$$

$$\rightarrow F.I = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$\underbrace{\left(x^2y^3 + 1\right)}_{M}dx + \underbrace{x^3y^2}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 \qquad \text{ahora si es exacta}$$

Sea $f(x,y) = C$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\rightarrow \qquad f(x,y) = \int \left(x^2y^3 + x\right)dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3y^2}{3} + h'(y) = x^3y^2$$

$$h'(y) = 0 \qquad \rightarrow h(y) = k \text{ cte}$$

luego: $\quad f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + k = C \quad \Rightarrow \therefore \ \dfrac{x^3y^3}{3} + x = C$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación: $\left(x^2 + y\right)dx - x\,dy = 0$

Solución

$$\left.\begin{array}{lll} M(x,y)=x^2+y & \to & \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ N(x,y)=-x & \to & \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1 \end{array}\right\} \quad \text{No es exacta}$$

Ahora:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{x}(1-(-1))=-\frac{2}{x} \text{ (función que depende solo de } x)$$

$$\to F.I=e^{\int -\frac{2dx}{x}}=e^{-2\ln x}=x^{-2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$\underbrace{\left(1+\frac{y}{x^2}\right)}_{M}dx-\underbrace{\frac{1}{x}}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2} \qquad \text{ahora si es exacta}$$

Sea $f(x,y)=C$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

$$\to \qquad f(x,y)=\int\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx$$

$$f(x,y)=x-\frac{y}{x}+h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{x}+h'(y)=-\frac{1}{x}$$

$$\to \qquad h(y)=k\ ,\ k=\text{cte}$$

luego: $\quad f(x,y)=x-\frac{y}{x}+k=C \ \Rightarrow\ \therefore\ x-\frac{y}{x}=C$

1.8 CAMPO DE DIRECCIONES

Cuando no podemos encontrar la solución exacta de un determinado problema con valor inicial (PVI).

Sin embargo, se puede aproximar las soluciones y analizar el comportamiento de estas mediante el Método del CAMPO DE DIRECCIONES para una ecuación diferencial de primer orden.

Consideremos la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$. Si (x_0,y_0) pertenece al dominio de f, entonces, para cualquier solución de la ecuación que pasa por (x_0,y_0), la pendiente de la recta tangente trazada a la gráfica de tal solución en (x_0,y_0) es $f(x_0,y_0)$.

El método consiste en seleccionar un número representativo de puntos del plano y en cada uno de estos puntos trazar pequeños segmentos de recta con la pendiente de la solución que pasa por ese punto.

Ejemplo. Trazar un campo de direcciones para la ecuación diferencial $y'=2x$ y hacer un bosquejo de las soluciones que pasan por $0(0,0)$ y $A(2,1)$.

Solución

Hacemos: $2x = C = y'$

$C=0 \quad \rightarrow \quad 2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$

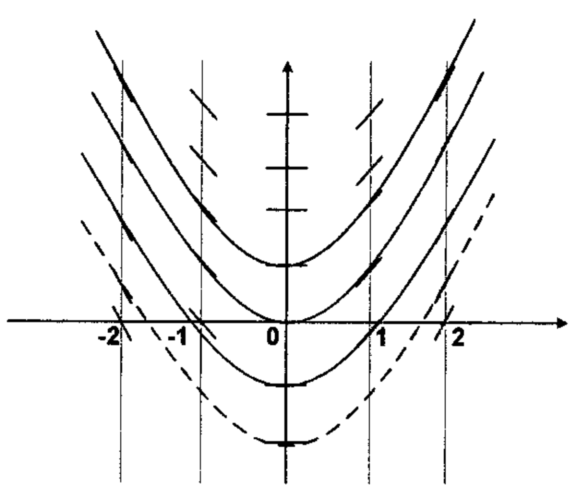
$C=1 \quad \rightarrow \quad 2x=1 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

$C=2 \quad \rightarrow \quad 2x=2 \quad \rightarrow \quad x=1$

$C=-1 \quad \rightarrow \quad 2x=-1 \rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2}$

$C=-2 \rightarrow \quad 2x=-2 \rightarrow \quad x=-1$

Figura 1.1: Campos de Dirección

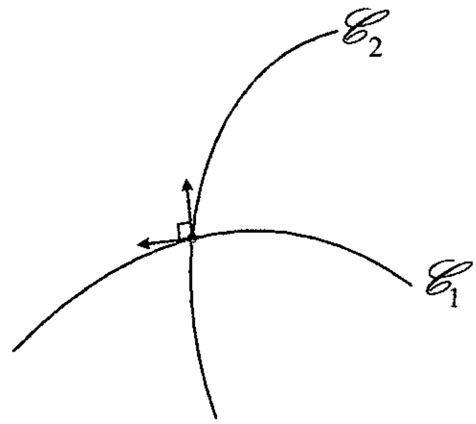


Fuente: Autoría propia

1.9 TRAYECTORIAS ORTOGONALES

1.9.1 Definición. Dos curvas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales si sus tangentes son ortogonales en su punto de intersección.

Figura 1.2: Curvas Ortogonales



Fuente: Autoría propia

1.9.2 Definición. Dadas dos familias de curvas $F(x,y,\mathscr{C}_1)=0$; y $G(x,y,\mathscr{C}_2)=0$, se dice que la familia de curvas $G(x,y,\mathscr{C}_2)=0$ son las trayectorias para la familia $F(x,y,\mathscr{C}_1)=0$.

Si la familia de curvas $F(x,y,\mathscr{C}_1)=0$ tiene la ecuación diferencial asociada $F(x,y,y')=0$, la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales a ella es una ecuación de la forma $F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0$; esto es si, $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ es la ecuación diferencial de una familia de curvas, la ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x,y)}$.

Ejemplo 1

Halle las trayectorias ortogonales para la familia $y=\mathscr{C}_1 x^2$.

Solución

Derivamos $y=\mathcal{C}_1x^2$ obteniendo $y'=2\mathcal{C}_1x = 2\left(\dfrac{y}{x^2}\right)x = \dfrac{2y}{x}$. La ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es $y' = \dfrac{2y}{x}$, esto es $2ydy + xdx = 0$. Resolviendo $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = \mathcal{C}_2$

$\therefore 2y^2 + x^2 = \mathcal{C}_2$ es la ecuación para la familia de trayectorias ortogonales.

Ejemplo 2

Halle las trayectorias ortogonales para la familia de curvas $y=x+\mathcal{C}_1e^{-x}$

Solución

Derivando $y'=1-\mathcal{C}_1e^{-x} \quad \rightarrow \quad \mathcal{C}_1 = (y-x)e^{x}$, luego $y' = 1-y+x$

La ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es $y' = \dfrac{1}{1-y+x}$ reducible a separable. Haciendo $z = 1-y+x$, obtenemos $z' = \dfrac{1-z}{z}$. Separando variables $dx + \dfrac{1}{1-z}dz = 0 \rightarrow \quad dx + \left(1+\dfrac{1}{1-z}\right)dz = 0$ e integrando $x + z + \ln(z-1) = \mathcal{C}_2$.

Reemplazando z obtenemos $y-1 = \ln\left(\dfrac{\mathcal{C}_2}{y-x-2}\right)$

$\therefore \quad (y-x-2)e^{y-1} = \mathcal{C}_2$

Ejemplo 3

Determine el valor de a para que las familias de curvas $y^3 = \mathcal{C}_1x;\ x^2 + ay^2 = \mathcal{C}_2^2$ sean trayectorias ortogonales una de la otra.

Solución

$$m_1 = \frac{\mathcal{C}_1}{3y^2};\ \mathcal{C}_1 = \frac{y^3}{x} \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{y}{3x} \qquad\qquad m_2 = \frac{-x}{ay}$$

$$m_1 m_2 = -1 \quad \leftrightarrow \quad m_1 m_2 = \left(\frac{y}{3x}\right)\left(\frac{-x}{ay}\right) = -1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{3a} = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

1.10 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1.10.1 Crecimiento de población

La tasa de crecimiento de la población es proporcional a la población total en un instante t. Si $p(t)$ representa la población en el tiempo t, entonces la ecuación diferencial del crecimiento de población es: $\frac{dp}{dt} = kp$, donde k puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la población aumenta o disminuye.

La ecuación de crecimiento poblacional puede ser considerada como una lineal o de variables separables, luego la solución está dada por: $p(t) = C_1 e^{kt}$; para $t=0$ se tiene que $C = p(0)$ es la población inicial, así la solución del $PVI \begin{cases} \frac{dp}{dt} = kp \\ p(0) = C \end{cases}$ está dada por: $p(t) = p(0)e^{kt}$

- Si $k>0$, la población crecerá exponencialmente.
- Si $k<0$, la población decrecerá exponencialmente.
- Si $k=0$, la población permanece constante en su punto de equilibrio $p(0)$.

Ejemplo

Una estimación de la tasa de crecimiento de una población es 1.5% por año, ¿cuántos años tomará para que la población se duplique?

Solución

Se quiere hallar t tal que $2p(0)=p(t)$, así $2p(0) = p(0)e^{kt} \rightarrow$

$2=e^{kt} \rightarrow \quad \ln 2 = kt$

Del dato, la tasa de crecimiento $k=1.5\%$ anual, luego $t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0.015} = 46.2$.

$\therefore$ Tomará 46,2 años para que la población se duplique.

1.10.2 Crecimiento Logístico

La tasa de crecimiento por individuo de una población es la diferencia entre la tasa promedio de nacimiento y la tasa promedio de mortalidad. Si $P(t)$ representa la población en el tiempo t, $\alpha>0$ es la tasa promedio de nacimiento, $\beta>0$, $\beta p(t)$ la tasa de mortalidad. La ecuación diferencial del crecimiento logístico es: $\frac{dp}{dt}=P(\alpha-\beta P)$ cuya solución está dada por:

$$P(t)=\frac{\alpha P(0)}{\beta P(0)+(\alpha-\beta P)e^{-\alpha t}}$$

Ejemplo

Un estudiante es portador de virus de ébola y regresa a su aula donde hay 200 alumnos. Si se supone que la rapidez con que se propaga el virus es proporcional, no sola a la cantidad Y de alumnos infectados, sino también a la cantidad de alumnos no infectados. Determine la cantidad de alumnos infectados 6 días después i se observa que a los 3 días habían 12 alumnos infectados.

Solución

Debemos resolver el problema siguiente: $\frac{dP}{dt}=KP(200-P)$; $P(0)=1$.

Tenemos $\alpha=200K$, $\beta=K$, luego

$$P(t)=\frac{200K}{K+199Ke^{-200Kt}}=\frac{200}{1+199e^{-200Kt}}$$

Del dato $P(3)=12$, luego: $12=\frac{200}{1+199Ke^{-600K}}$. De aquí se tiene:

$$-600K=\ln\left(\frac{47}{597}\right)=\ln(0.0787)=-2.5421$$

Luego: $$P(t)=\frac{200}{1+199e^{-0.8474t}}$$

Nos piden: $P(8)=\frac{200}{1+199e^{-5.0844}}=89.5936$

$\therefore$ La cantidad de afectos 6 días después es 90 alumnos.

1.10.3 Ley de enfriamiento

La razón de cambio de temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea.

Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en un instante t. T_m la temperatura del medio que lo rodea, la ecuación diferencial para esta situación es: $\frac{dT}{dt}=K(T-T_m)$, donde $K<0$ es la constante de proporcionalidad.

La solución está dada por $T(t)=T_m+Ce^{-Kt}$.

Ejemplo

Se retira del fuego una olla con agua hirviendo(100°C) y se deja enfriar a una temperatura ambiente de 22°C, tres minutos después la temperatura del agua en la olla es 70°C, ¿cuál será la temperatura del agua después de 5 minutos?, y ¿después de 10 minutos?

Solución

$T(0)=100°C$; $T_m=22°C$; $T(3)=70°C$

Tenemos: $T(t)=T_m+Ce^{-Kt}$; $C=T(0)=100$

$T(t)=22°+100e^{-Kt}$

Del dato $70°=22°+100e^{-3K}$ $\rightarrow$ $-3K=-0.7339$

Así $T(t)=22°+100e^{-0.2446t}$

$$\therefore \begin{cases} T(5)=22°+100e^{-0.2446(5)} & \rightarrow \quad T(5)=51.4257 \\ T(10)=22°+100e^{-0.2446(10)} & \rightarrow \quad T(10)=30.6426 \end{cases}$$

Ejemplo

Un cuerpo a una temperatura de 0°C se coloca en un cuarto ya temperatura se mantiene a 100°C. si después de 10 minutos la temperatura del cuerpo es 25°C, halle:

a) El tiempo requerido por el cuerpo para llegar a una temperatura de 10°C.

b) La temperatura del cuerpo después de 25 minutos.

Solución

a) $T(0)=0°C$; $T_m=100°C$; $T(10)=25°C$

Tenemos: $T(t)=T_m+Ce^{-Kt}$; $C=T(0)=-100$

➔ $T(t)=100°-100e^{-Kt}$

En $t=10$: $25°=100°-100e^{-10K} \rightarrow -10K=\ln\left(\frac{4}{3}\right) \rightarrow K=0.024$

$T(t)=100°-100e^{-0.024K}$

Del dato: $10°=100°-100e^{-0.024K} \rightarrow t=4.390021$

b) $T(25)=22°+100e^{-0.2446(25)} \rightarrow T(25)=45.1188$. La temperatura del cuerpo después de 25 minutos es 45°C.

1.11 EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Resolver la ecuación: $ydx+\left(2x-ye^{y}\right)dy=0$

Solución

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y)=y & \rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ N(x,y)=2x-ye^{y} & \rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x}=2 \end{array}\right\} \quad \text{No es exacta}$$

Ahora:

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{y}(1-2)=\frac{1}{y} \text{ (función que depende solo de } y\text{)}$$

$$\rightarrow F.I=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln y}=y$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$\underbrace{y^2}_{M}dx+\underbrace{\left(2xy-y^2e^{y}\right)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2y \qquad \text{ahora si es exacta}$$

Sea $f(x,y)=C$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

$$\rightarrow \quad f(x,y)=\int y^2dx=xy^2+h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + h'(y) = 2xy - y^2 e^y$$

$$\rightarrow \qquad h'(y) = -y^2 e^y \rightarrow h(y) = (2y - y^2 - 2)e^y + k,\ k = \text{cte}$$

luego: $f(x,y) = xy^2 + (2y - y^2 - 2)e^y + k = C \Rightarrow \therefore\ xy^2 + (2y - y^2 - 2)e^y = C$

Ejercicio 2

Resolver la ecuación: $(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 5x^3 + 3xy + 2y^2 & \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} &= 3x + 4y \\ N(x,y) &= x^2 + 2xy & \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x + 2y \end{aligned}\right\} \qquad \text{No es exacta}$$

Ahora:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 + 2xy}(3x + 4y - 2x - 2y) = \frac{1}{x} \ (\text{función que depende solo de } x)$$

$$\rightarrow F.I = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$\underbrace{(5x^4 + 3x^2 y + 2xy^2)}_{M} dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2 y)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 4xy \qquad \text{Ahora si es exacta}$$

Sea $f(x,y) = C$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\rightarrow \qquad f(x,y) = \int (5x^4 + 3x^2 y + 2xy^2)dx$$

$$f(x,y) = x^5 + x^3 y + x^2 y^2 + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y + h'(y) = x^3 + 2x^2 y$$

$$\rightarrow \qquad h'(y) = 0 \qquad \rightarrow h(y) = k,\ k = \text{cte}$$

luego: $$f(x,y) = x^5 + x^3 y + x^2 y^2 + k = C$$

$$\therefore\ x^5 + x^3 y + x^2 y^2 = C$$

Ejercicio 3

Resolver la ecuación : $x^2dx - \left(x^3y^2 + y^2\right)dy = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} M(x,y) = x^2 & \to & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ N(x,y) = -x^3y^2 - y^2 & \to & \dfrac{\partial N}{\partial x} = -3x^2y^2 \end{array}\right\} \quad \text{No es exacta}$$

Ahora:

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(0 - \left(-3x^2y^2\right)\right) = -3y^2 \text{ (función que depende solo de } y\text{)}$$

$$\to F.I = e^{\int -3y^2dy} = e^{-y^3}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$\underbrace{\left(x^2 e^{-y^3}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(-x^3y^2e^{-y^3} - y^2e^{-y^3}\right)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2y^2e^{y^3} \qquad \text{Ahora si es exacta}$$

Sea $f(x,y) = C$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\to \quad f(x,y) = \int x^2 e^{-y^3} dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3}e^{-y^3} + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^3y^2}{3}e^{-y^3} + h'(y) = -x^3y^2 e^{-y^3} - y^2 e^{-y^3}$$

$$\to \quad h'(y) = -y^2 e^{-y^3} \qquad \to h(y) = \int -y^2 e^{-y^3} dy$$

$$h(y) = \frac{1}{3}e^{-y^3} + k,\ k = \text{cte}$$

luego : $$f(x,y) = \frac{x^3}{3}e^{-y^3} + \frac{1}{3}e^{-y^3} + k = C$$

$$\therefore \ \frac{1}{3}e^{-y^3}\left(x^3 + 1\right) = C$$

Ejercicio 4

Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento t.

Si la población se duplicó en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadriplicará?

Solución

x	x_0	$2x_0$	$3x_0$	$4x_0$
t	0	5	m	n

$\frac{dx}{dt} = kx$; k es factor de proporcionalidad

$$\int_{x_0}^{2x_0} \frac{dx}{x} = k\int_0^5 dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{2x_0}{x_0}\right) = k(5-0) \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{5}\ln 2$$

$$\int_{x_0}^{3x_0} \frac{dx}{x} = k\int_0^m dt \quad \rightarrow \quad \ln 3 = k.m = \frac{m}{5}\ln 2 \quad \rightarrow \quad m = 7.925$$

$$\int_{x_0}^{4x_0} \frac{dx}{x} = k\int_0^n dt \quad \rightarrow \quad \ln 4 = k.n = \frac{n}{5}\ln 2 \quad \rightarrow \quad n = 10$$

$\therefore$ la población se triplicará en aproximadamente 8 años y se cuadriplicará en 10 años.

Ejercicio 5

Suponga que la población de la comunidad del problema anterior es 10,000 después de 3 años, ¿Cuál es la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

Solución

Según el problema anterior:

$$x(t) = Ae^{kt} \quad \rightarrow \quad 10\,000 = Ae^{3k} \quad \rightarrow \quad 3k = \ln\left(\frac{10\,000}{A}\right)$$

$$* \; k = \frac{1}{5}\ln 2 = 0{,}139$$

$$3(0{,}139) = \ln\left(\frac{10\,000}{A}\right) = 0{,}416 \quad \rightarrow \quad A = x_0$$

$$10\,000 = x_0\, e^{0{,}416} \quad \rightarrow \quad x_0 = 6\,598.047$$

$$x_{(10)} = 6\,598.047\, e^{10(0{,}139)} \quad \rightarrow \quad x_{(10)} = 26{,}384.42$$

$\therefore$ la población inicial es 6 598 y la población en 10 años 26 384

Ejercicio 6

La población de una comunidad crece a razón proporcional a la población en cualquier momento ***t***. Su población inicial es de 500 y aumenta 15% en 10 años, ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Solución

x	$x_0 = 500$	$x_{10}=575$	x_{30}
t	0	10	30

$x(t) = Ae^{kt} \quad \rightarrow \quad x_0 = 500 \quad \rightarrow \quad 500 = A\cancel{e^{(0)t}}^{=1}$

$\rightarrow \; A = 500$

$x_{10} = 575 \quad \rightarrow \quad 575 = 500e^{10k} \quad \rightarrow \; e^{10k} = 1.15 \quad \rightarrow \quad 10k = \ln 1.15$

$\rightarrow \; k = 0.014$

$x_{30} = 500e^{30(0.014)} \rightarrow \quad x_{30} = 500e^{0.42} \rightarrow \quad 760.98 \quad \rightarrow \; x_{30} = 760.98$

$\therefore$ la población dentro de 30 años será de aprox 761 individuos.

Ejercicio 7

En cualquier tiempo ***t***, la cantidad de bacterias en un cultivo, crece a razón proporcional al número de bacterias presentes. Al cabo de 3 horas hay 400 individuos. Después de 10 horas hay 2,000 especímenes, ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Solución

x	x_0	400	2 000
t	0	3	10

$x(t) = Ae^{kt} \quad \rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = A\cancel{e^{(0)t}}^{=1}$

$\rightarrow \; A = x_0$

$$400 = x_0\, e^{3k} \qquad (1)$$

$$2000 = x_0\, e^{10k} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene:

$5x_0 e^{3k} = x_0 e^{10k}$ → $5 e^{7k}$ → $\ln 5 = 7k$

$k = 0.23$

Para determinar la cantidad inicial x_0 de bacterias

$400 = x_0 e^{3(0.23)}$ → $x_0 = 200.63$

$\therefore$ la cantidad inicial de bacterias es 200 individuos.

Ejercicio 8

Cuando pasa un haz vertical de luz por una sustancia transparente, la rapidez con que decrece su intensidad ***I*** es proporcional a ***I(t)***, donde ***t*** representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar claro, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es 25% de la intensidad I_0 del haz incidente ¿Cuál es la intensidad a 15 pies bajo la superficie?

Solución

I	I_0	$I_0/4$	I_{15}
t	0	3	15

Como decrece:

$I(t) = Ae^{-kt}$

$I(0) = I_0$ → $I_0 = Ae^{-kt}$ → $I_0 = A$

$\frac{I_0}{4} = Ae^{-3k}$ → $0.25 = e^{-3k}$ → $k = 0.462$

$I(t) = Ae^{-kt}$ → $I(15) = Ae^{-15(0.462)}$ →

$I(15) = I_0 9.78 \times 10^{-4}$

Es la intensidad a 15 pies bajo la superficie.

Ejercicio 9

Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es 70°F y se lleva al exterior donde la temperatura es de 10°F. después de medio minuto, el termómetro indica 50°F, ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 15°F?

Solución

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

$$T_m = 10°F \qquad T_0 = 70°F \qquad t = 1/2 \text{ min}$$

Reemplazando datos:

$$50 = 10 + (70-10)e^{-k/2}$$

$$60e^{-k/2} = 40 \qquad \rightarrow \qquad k = -2\ln(2/3)$$

$$T(1) = 10 + 60e^{-k} = 10 + 60e^{2\ln(2/3)} = 10 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \rightarrow \quad T(1) = \frac{110}{3}$$

$$15 = 10 + 60e^{-kt} = 10 + 60e^{2\ln(2/3)t} \qquad \Rightarrow 5 = 60\left(\frac{2}{3}\right)^2 t \qquad \therefore \ t = 3.06 \text{ min}$$

∴ para que el termómetro llegue a 15°F se necesitan 3 minutos.

Ejercicio 10

Un termómetro se lleva del interior de una habitación al exterior, donde la temperatura del aire es de 5°F. Después de un minuto, el termómetro indica 55°F, cinco minutos después marca 30°F, ¿Cuál era la temperatura del interior de la habitación?

Solución

$$T_m = 5°F;\ T(1) = 55°F \qquad 55 = T(1) = 5 + (T_0 - 5)\,e^{-k} \qquad 50 = (T_0 - 5)\,e^{-k}$$

$$-k = \ln\left(\frac{50}{T_0 - 5}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$T(6) = 30 = 5 + (T_0 - 5)\,e^{-6k} \ \rightarrow \qquad 25 = (T_0 - 5)\,e^{-6k}$$; luego

$$\left(\frac{25}{T_0 - 5}\right) = e^{-6k} \qquad -6k = \ln\left(\frac{25}{T_0 - 5}\right) \qquad \ldots.(2)$$

Relacionado (1) y (2)

$$\ln\left(\frac{25}{T_0 - 5}\right) = 6\ln\left(\frac{50}{T_0 - 5}\right) \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{50}{T_0 - 5}\right)^6 = \left(\frac{25}{T_0 - 5}\right)$$

$\therefore\ T_0 = 62.435°F$ es la temperatura en el interior de la habitación

Ejercicio 11

Un termómetro que indica 70ºF se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio o del horno. Un observador registra que la temperatura es de 110ºF después de medio minuto, y de 145ºF después de 1 minuto, ¿a qué temperatura está el horno?

Solución

$$T_0 = 70^\circ F \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 110 = T_m + (70^\circ - T_m)e^{-k/2} \\ 145 = T_m + (70^\circ - T_m)e^{-k} \end{cases}$$

$$110 - T_m = (70^\circ - T_m)e^{-k/2} \qquad (1)$$

$$145 - T_m = (70^\circ - T_m)e^{-k} \qquad (2)$$

De (1)

$$\frac{110 - T_m}{70 - T_m} = e^{-k/2} \qquad \rightarrow \qquad -\frac{k}{2} = \ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)$$

$$\rightarrow \qquad -k = 2\ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)$$

De (2)

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = e^{-k} \qquad \rightarrow \qquad -k = \ln\left(\frac{145 - T_m}{70 - T_m}\right)$$

Igualando ambas expresiones en $-k$

$$2\ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right) = \ln\left(\frac{145 - T_m}{70 - T_m}\right)$$

$$\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2 = \left(\frac{145 - T_m}{70 - T_m}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_m = 390^\circ F}$$

CAPÍTULO II:
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1 Definición. Una ecuación diferencial ordinaria de orden superior es de la forma

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y(x) = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*),$$

donde $a_i(x), f(x)$, $(i = 1,2, \ldots, n)$ son funciones continuas definidos en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

2.1.2 Teorema. Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluciones linealmente independientes en I de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial (*):

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \text{ y si } y_p(x)$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea en I, entonces la solución general de (*) es de la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots\ldots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

Donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Prueba: sea $y(x)$ cualquier solución de $(*)$ en I; $y(x) - y_p(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada, luego existen constantes arbitrarias $c_1, c_2 + \ldots + c_n$ tales que:

$$y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots\ldots + c_ny_n(x)$$

$$\therefore \; y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots\ldots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

2.1.3 Definición. Sea y_p una solución dada de (*) en un intervalo I, y sea $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a (*) en I. La solución general de la ecuación (*) se define como: $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, $\forall x \in I$, donde $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ es llamada solución complementaria. $y_p(x)$ es una solución particular de (*) en I.

$\therefore$ $y(x)$ = solución complementaria + solución particular

2.1.4 Principio de Superposición

Sea $y_1(x)$ solución particular de la ecuación $a_n(x)y^n + \ldots\ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x)$, y sea $y_2(x)$ solución particular de la ecuación: $a_n(x)y^n + \ldots\ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_2(x)$; entonces $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ es solución particular de: $a_n(x)y^n + \ldots\ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

Ejemplo 1

Dada la ecuación diferencial $y''' - y' = sen\, x$ una solución particular es $y_p(x) = \frac{1}{2}\cos x$ y una solución complementaria es $y_c(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$ luego la solución general de la ecuación dada es $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + \frac{1}{2}\cos x$ la cual se puede comprobar derivando.

Ejemplo 2

Para la ecuación diferencial $y''' - y' = sen\, x$ se tiene que $y_1(x) = \frac{1}{2}\cos x$ es solución particular, mientras que para la ecuación $y''' - y' = \cos x$ se tiene una solución particular $y_2(x) = -\frac{1}{2} sen\, x$, luego por el principio de superposición $y(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} sen\, x$ es solución particular de $y''' - y' = sen\, x + \cos x$, en efecto, derivando tenemos:

$$y'(x) = -\frac{1}{2} sen\, x - \frac{1}{2}\cos x \qquad y''(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} sen\, x$$

$$y'''(x) = \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{2}\cos x$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{2}\cos x = sen\, x + \cos x$$

2.2 REDUCCIÓN DE ORDEN

2.2.1 Definición. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles a una ecuación diferencial de primer orden tienen la forma:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad \vee \quad F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

En estas ecuaciones solo debe aparecer o bien x o bien y. La solución se obtiene por reducción de orden haciendo $u = y'$; $u' = y''$.

Ejemplos

1) Resolver $xy'' + y' = 1$; $x>0$

   Solución

   Hacemos $u = y'$; $u' = y''$ $\rightarrow$ $xu' + u = 1$, esta es una ecuación de variables separables $\frac{dx}{x} + \frac{du}{u-1} = 0$.

   Resolviendo $\quad \ln z + \ln(u-1) = \ln C \rightarrow C = x(u-1)$

   Despejando $\quad u = \frac{C+x}{x} \quad \rightarrow \quad dy = \frac{C+x}{x}dx$

   Nuevamente integrando: $y = C\ln x + x + K$ es solución de la ecuación diferencial dada.

2) Resolver $(x+1)y'' + y' = x+1$

   Solución

   Hacemos $u = y'$; $u' = y''$, luego tenemos: $u' + \left(\frac{1}{x+1}\right)u = 1$ lineal en u.

   Resolviendo: $u = e^{-\int \frac{dx}{x+1}}\left[e^{-\int \frac{dx}{x+1}} dx + C\right]$

$$y' = u = \frac{1}{x+1}\left[\int (x+1)dx + C\right] = (x+1)\left[\ln(x+1) + C\right]$$

$$y' = \frac{x+1}{2} + \frac{C}{x+1}$$

   Integrando obtenemos $y = \frac{(x+1)^2}{4} + C\,ln(x+1) + K$ la solución de la ecuación diferencial.

2.2.2 Elaboración de una segunda solución

Dada la solución $y_1 = y_1(x)$ no nula en $I \subset \mathbb{R}$ de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden.

$$y''+ p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\Delta)$$

Se busca una segunda solución $y_2 = y_2(x)$ de (Δ) tal que $\{y_1, y_2\}$ es linealmente independiente en I.

El método consiste en suponer que la solución es de la forma $y = u(x)y_1(x)$, entonces $y' = uy_1' + u'y_1$; $y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + u''y_1$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = u\underbrace{\left[y_1'' + py' + qy_1\right]}_{=0} + y_1u'' + (2y_1i + py_1)u' = 0$$

Obtenemos: $y_1u'' + (2y_1i + py_1)u' = 0$ ecuación lineal de variables separables.

Despejando variables: $\dfrac{u''}{u'} + \dfrac{2y_1'}{y_1} + p = 0$

Integrando $\qquad \ln(u'y_1^2) = -\int p(x)dx + C$

Luego: $\qquad u'y_1^2 = e^{-\int p(x)dx} + C$

Despejando: $\qquad u' = \dfrac{e^{-\int p(x)dx} + C}{y_1^2}$

Integrando nuevamente: $u = \int \dfrac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + C_2$

Eligiendo $C_1 = 1; C_2 = 0$ se tiene: $\int \dfrac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$

Luego una segunda solución de la ecuación diferencial (*) es

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Observaciones:

1) $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es linealmente independiente.

2) La solución general de (*) en $I \subset \mathbb{R}$ está dada por $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Ejemplos

1) $y_1 = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4 = 0$. Halle una segunda solución en $\langle -\infty, \infty \rangle$.

Solución

De lo anterior expuesto, una segunda solución está dada por:

$$y_2(x) = e^{2x} \int \frac{e^{-\int -4dx}}{\left(e^{2x}\right)^2} dx = e^{2x} \int \frac{e^{4x}}{e^{4x}} dx = xe^{2x}$$

$$\therefore\ y_2(x) = xe^{2x}$$

2) Resolver la ecuación diferencial $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es una solución en $\langle 0, \infty \rangle$.

Solución

La ecuación diferencial es equivalente a: $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$

Luego una segunda solución viene dada por:

$$y_2(x) = x^2 \int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{\left(x^2\right)^2} dx = x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx = x^2 \ln x$$

$\therefore$ La solución general en $\langle 0, \infty \rangle$ es $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$

2.3 ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

2.3.1 Definición. Dada la ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Si $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces, se dice que $\{y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial.

2.3.2 Método de Solución

Se busca soluciones para (Δ) de la forma $y=e^{rx}$, r constante; al sustituir $y=e^{rx}$ en la ecuación homogénea resulta:

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Llamada ecuación característica de (Δ), analizando los diferentes casos sobre las raíces de (I) se tiene:

Caso 1. Si las raíces son reales y diferentes, digamos $r_1 < r_2 < \ldots . < r_n$, entonces $\left\{e^{r_1x}, e^{r_2x},\ldots,e^{r_nx}\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (Δ), luego su solución general es:

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots . + c_ne^{r_nx}$$

Caso 2. Si $\alpha \pm \beta_i$ son raíces complejas diferentes, entonces $\{e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\ e^{\alpha x}\,sen\ \beta x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (Δ).

Caso 3. Si r es una raíz real de multiplicidad K, entonces $\{e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx},\ldots,x^{k-1}e^{rx}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (Δ).

Caso 4. Si $\alpha \pm \beta_i$ es una raíz de multiplicidad K, entonces

$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\,sen\,\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}sen\,\beta x,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\,sen\,\beta x\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (Δ).

Ejemplos

1) Resolver $y''-y'-6y=0$

Solución

La ecuación característica es $r^2-r-6=0$, luego $r_1=-2$, $r_2=3$. Así se tiene que $\{e^{-2x}, e^{3x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones, luego la solución general de la ecuación diferencial es $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$

2) Resolver : $y''+4y=0$

Solución

La ecuación característica es: $r^2+4=0$, de donde $r=\pm 2i$. Así $\{\cos 2x, sen 2x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial , luego la ecuación general es:

$$y(x)=C_1\cos 2x+C_2\, sen 2x$$

3) Resolver: $-5y''+3y'+9y=0$

Solución

La ecuación característica es $r^3-5r^2+3r+9=0$

De donde $r_1=-1$, $r_2=3$, $r_3=3$

Luego $\{e^{-x}, e^{3x}, xe^{3x}\}$ es un conjunto fundamental de solución de la ecuación diferencial, por tanto, la solución general es:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+C_3xe^{3x}$$

4) Resolver: $y^{iv}+y'''+y''=0$

Solución

La ecuación característica es: $r^4+r^3+r^2=0$

Luego: $r_1=0$; $r_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, así la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3e^{-x/2}sen\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

5) Resolver: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Solución

La ecuación característica es: $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, luego $r = 1$ triple, así la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

2.4 COEFICIENTES INDETERMINADOS

Dada la ecuación diferencial no homogénea ordinaria de orden n

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

$a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes.

Para hallar la solución general debemos primero encontrar la solución complementaria $y_c(x)$ que es la solución de la ecuación homogénea asociada, y luego se debe encontrar una solución particular $y_p(x)$ de (*), así, la solución general es:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

2.4.1 Método de los Coeficientes Indeterminados

Es aplicado cuando $f(x)$ es una función de la forma $x^n e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^m e^{\alpha x} sen\, \beta x$ o combinaciones lineales finitas de ellas donde $n, m \geq 0$, α, β constantes consiste en suponer que la solución particular de (*) es combinación lineal de las funciones anteriores para adecuados valores de n, m, α, β según la siguiente regla.

Si $f(x) = p(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q(x) e^{\alpha x} sen\, \beta x$, donde $p(x)$ tiene grado $n \geq 0$ y $q(x)$ tiene grado $m \geq 0$. Entonces la solución particular tiene la forma:

$$y_p = x^l \left[\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r \right) e^{\alpha x} \cos \beta x + \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r \right) e^{\alpha x} sen\, \beta x \right]$$

Donde $r = \max\{n, m\}$ y $a_0 + a_1 + \ldots + a_r, b_0 + b_1 + \ldots + b_r$ son constantes que se tienen que determinar derivando $y_p(x)$ y reemplazando en la ecuación diferencial (*).

Nota:

Los a_i, b_i, $i = 0,1,2,......,r$ son llamados ***coeficientes indeterminados***.

Ejemplos

1) Resolver $y'' + 3y' + 2y = 6$

   Solución

   La ecuación característica es: $r^2 + 3r + 2 = 0$, luego $r_1 = -2$, $r_2 = -1$

   Entonces: $y_c(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$,

   Como $f(x) = 6$ $\quad y_p(x) = A$, $y_p'(x) = 0$, $y_p''(x) = 0$

   Luego: $0 + 3.0 + 2A = 6 \quad \rightarrow \quad A = 3$

   $\therefore\ y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3$ es solución general de la ecuación diferencial.

2) Resolver $y'' + y' - 6y = 2x$

   Solución

   La ecuación característica es: $r^2 + r - 6 = 0$, luego $r_1 = -3$, $r_2 = 2$

   Entonces: $y_c(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$

   Como: $f(x) = 2x \rightarrow y_p(x) = Ax + B$; $y_p'(x) = A$; $y_p''(x) = 0$

   Luego: $0 + A - 6(Ax + B) = 2x \quad \begin{cases} A = -1/3 \\ B = -1/18 \end{cases}$

   $\therefore\ y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}$ es la solución de la ecuación dada.

3) Resolver : $y'' + 4y = 3\,sen\,2x$

   Solución

   La ecuación característica es: $r^2 + 4 = 0$, luego $r = \pm 2i$

   Entonces $y_c(x) = C_1\cos 2x + C_2\,sen\,2x$

   Como $f(x) = 3\,sen\,2x$ $\quad y_p(x) = Ax\cos 2x + Bx\,sen\,2x$

   $y_p'(x) = A\cos 2x - 2Ax\,sen\,2x + B\,sen\,2x + 2Bx\cos 2x$

$y_p''(x) = -4A\,sen2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\,sen2x$

$$y'' + 4y = -4A\,sen2x - 4B\cos 2x = 3\,sen2x \quad \begin{cases} A = -3/4 \\ B = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ y(x) = C_1\cos 2x + C_2\,sen2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$ es la solución de la ecuación diferencial dada.

4) Resolver: $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

Solución

La ecuación característica es: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, luego $r = 1$

Entonces $y_c(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

Para obtener la solución particular separamos la ecuación diferencial en dos ecuaciones diferenciales en la forma:

(a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x$

(b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = -4e^x$

Resolviendo cada una de ellas obtenemos

Para (a)

$y_p(x) = Ax + B \qquad y_p'(x) = A \qquad y_p''(x) = 0 \qquad y_p''' = 0$

Luego: $3A - Ax - B = x \qquad \begin{cases} B = 3A \\ A = -1 \end{cases}$

Así: $y_{p_1} = -3x - B$

Para (b)

$y_p(x) = Ax^3e^x + Ax^3e^x \qquad y_p'(x) = 3Ax^2e^x + Ax^3e^x$

$y_p''(x) = 6Axe^x + 6Ax^2e^x + Ax^3e^x \qquad y_p'''(x) = 6Ae^x + 18Axe^x + 9Ax^2e^x + Ax^3e^x$

Luego: $6Ae^x = -4e^x \qquad A = -\frac{2}{3}$

Así: $y_{p_2}(x) = -\frac{2}{3}x^3e^x$

Entonces de (a) y (b) por el Principio de Superposición

$$y_p(x) = -x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$$

$\therefore\ y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$ es la solución general es:

5) Resolver: $y''' + y'' = e^x \cos x$

Solución

La ecuación característica es: $r^3 + r^2 = 0$, $r^2(r+1) = 0$

luego $r = 0$ doble, $r = -1$

Entonces $y_c(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$

$y_p(x) = Ae^x \cos x + Be^x sen\,x$

$y_p'(x) = Ae^x \cos x + Be^x sen\,x - Ae^x sen\,x + Be^x \cos x$

$y_p'(x) = (A+B)e^x \cos x + (B-A)e^x sen\,x$

$y_p''(x) = (A+B)e^x \cos x + (B-A)e^x sen\,x - (A+B)e^x sen\,x + (B-A)e^x \cos x$

$y_p''(x) = 2Be^x \cos x - 2Ae^x sen\,x$

$y_p'''(x) = 2Be^x \cos x - 2Ae^x sen\,x - 2Be^x sen\,x - 2Ae^x \cos x$

$y_p'''(x) = 2(B-A)e^x \cos x - 2(A+B)e^x sen\,x$

$2(B-A)e^x \cos x - 2(A+B)e^x sen\,x + 2Be^x \cos x - 2Ae^x sen\,x = e^x \cos x$

$(2B - 2A + 2B)\, e^x \cos x - (2A + 2B + 2A)e^x sen\,x = e^x \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} 4B - 2A = 1 \\ 2B + 4A = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

$y_p(x) = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x sen\,x$

$\therefore\ y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x sen\,x$

6) Resolver la ecuación diferencial $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 4x + 8$

Solución

Se sabe que: $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

Hallando la solución complementaria:

$y''' + 3y'' + 2y' = 0 \qquad \rightarrow \qquad \phi(m) = m^3 + 3m^2 + 2m = 0$

$$\phi(m)=(m^2+3m+2)m=0$$

$$\phi(m)=m(m+1)(m+2)=0$$

$$m_1=0\ ,\ m_2=-1, m_3=-2 \quad \rightarrow \quad y_c(x)=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$$

Hallando la solución particular:

$$g(x)=x^2+4x+8 \quad \rightarrow \quad y_p(x)=x^s(Ax^2+Bx+C)$$

$s=0 \quad \rightarrow \quad y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ pero no es l.i. con $y_c(x)$

$s=1 \quad \rightarrow \quad y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx$, si es l.i. con $y_c(x)$

$$y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx \quad \rightarrow \quad y'_p(x)=3Ax^2+2Bx+C$$

$$y''_p(x)=6Ax+2B \quad \rightarrow \quad y'''_p(x)=6A$$

$$y'''+3y''+2y'=x^2+4x+8$$

$$6A+3(6Ax+2B)+2(3Ax^2+2Bx+C)=x^2+4x+8$$

$$(6A)x^2+(18A+4B)x+(6A+6B+2C)=x^2+4x+8$$

De donde:

$$\begin{cases} 6A=1 & \rightarrow & & & A=\dfrac{1}{6} \\ 18A+4B=4 & \rightarrow & B=\dfrac{4-18A}{4} & \rightarrow & B=\dfrac{1}{4} \\ 6A+6B+2C=8 & \rightarrow & C=\dfrac{8-6A+6B}{2} & \rightarrow & C=\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

Por lo que tenemos: $\quad y_p(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{11x}{4}$

Así, la solución general es: $\quad y(x)=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{11x}{4}$

2.5 MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método de variación de parámetros es aplicado en la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas de orden superior de la forma:

$$a_n(x)y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y(x)=f(x)$$

Sabemos que la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_n = c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$$

El método consiste en cambiar las constantes c_i por funciones $u_i(x)$ de tal modo que la solución particular de la ecuación diferencial sea de la forma: $y_p = u_1(x)\varphi_1(x)+u_2(x)\varphi_2(x)+u_3(x)\varphi_3(x)+\ldots+u_n(x)\varphi_n(x)$, donde los $u_i(x)$ son funciones a determinarse.

2.5.1 Definición (Wronskiano). Sean $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ funciones continuas y derivables hasta por lo menos el orden $n-1$. El determinante

$$W = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Es llamado ***wronskiano*** de las funciones $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$

Ejemplos

1) Dadas las funciones $y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = sen(\ln x)$, $x>0$, halle el wronskiano

   Solución

$$W = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & sen(\ln x) \\ -\dfrac{sen(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln x)}{x} + \frac{sen^2(\ln x)}{x} = \frac{1}{x}$$

2) Halle el wronskiano de $y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = e^{\beta x}$, $y_3 = e^{\gamma x}$; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

   Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} & \gamma e^{\gamma x} \\ \alpha^2 e^{\alpha x} & \beta^2 e^{\beta x} & \gamma^2 e^{\gamma x} \end{vmatrix} = e^{\alpha x}e^{\alpha x}e^{\alpha x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ W = e^{(\alpha+\beta+\gamma)x}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

2.5.2 Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Sea la ecuación diferencial $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$; sean las funciones $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada, luego

$$\varphi_1'' + a_1(x)\varphi_1' + a_0(x)\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2'' + a_1(x)\varphi_2' + a_0(x)\varphi_2 = 0$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada es:

$$y_c = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

La solución particular se considera que es:

$$y_p = u_1(x)\varphi_1(x) + u_2(x)\varphi_2(x)$$

donde las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$ se deben determinar, para ello se considera el siguiente sistema:

$$\varphi_1(x)u_1'(x) + \varphi_2(x)u_2'(x) = 0$$

$$\varphi_1'(x)u_1'(x) + \varphi_2'(x)u_2'(x) = f(x)$$

Calculamos:

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(x) \\ f(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = -f(x)\varphi_2(x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & 0 \\ \varphi_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = f(x)\varphi_1(x)$$

De donde, aplicando la Regla de Cramer

La solución del sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}$$

$$u_2'(x) = \frac{W_2}{W} = -\frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}$$

Con lo que las funciones buscadas son:

$$u_1(x) = -\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}dx$$

$$u_2(x) = -\int \frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}dx$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y = cot\ 2x$

Solución

Buscamos la solución de la ecuación homogénea $y''+4y=0$ la cual tiene como ecuación característica $r^2+4=0$, cuyas soluciones son $r=\pm 2i$, soluciones complejas, donde $\alpha=0$, $\beta=2$. Con lo que la solución de la homogénea es: $y_c = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\,sen\,\beta x)$. Reemplazando se tiene:

$$y_c = e^{0\alpha}(A\cos 2x + B\,sen 2x)$$

$$y_c = A\cos 2x + B\,sen\,2x$$

Pero $$y_c = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

Luego: $$\varphi_1(x) = \cos 2x \quad , \quad \varphi_2(x) = sen 2x$$

Buscamos el wronskiano del sistema:

$$W(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & sen\ 2x \\ -2sen\ 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$W(\varphi_1,\varphi_2) = 2\cos^2 2x + 2sen^2 2x$$

$$W(\varphi_1,\varphi_2) = 2(\cos^2 2x + sen^2 2x) = 2$$

Buscamos las funciones: $$u_1(x) = -\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}dx$$

$$u_1(x) = -\int \frac{\cot 2x\ sen 2x}{2}dx = -\int \frac{\left(\frac{\cos 2x}{sen 2x}\right)sen 2x}{2}dx = -\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{4}sen\,2x$$

$$u_2(x)=\int \frac{\cot 2x \cos 2x}{2}dx=\int \frac{\left(\frac{\cos 2x}{sen 2x}\right)\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 2x}{sen 2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\left(1-sen^2 2x\right)}{sen 2x}dx=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{sen 2x}-sen 2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\csc 2x - sen 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int \csc 2x\, dx-\frac{1}{2}\int sen 2x\, dx$$

$$u_2(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\csc 2x-\cot 2x\right)+\frac{1}{4}\cos 2x$$

Con lo que la solución particular es:

$$y_p=u_1(x)\varphi_1(x)+u_2(x)\varphi_2(x)$$

Se tiene que:

$$y_p=-\frac{1}{4}sen 2x\cos 2x+\frac{1}{4}\ln\left(\csc 2x-\cot 2x\right)\left(sen 2x\right)+\frac{1}{4}\cos 2x\, sen 2x$$

$$y_p=\frac{1}{4}\ln\left(\csc 2x-\cot 2x\right)\left(sen 2x\right)$$

Siendo la solución general de la ecuación diferencial:

$$y=A\cos 2x+B\, sen 2x+\frac{1}{4}\ln\left(\csc 2x-\cot 2x\right)\left(sen 2x\right)$$

2.5.3 Ecuación Diferencial de Orden *n*

Dada la ecuación diferencial

$$a_n(x)y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y(x)=f(x)$$

La solución de la ecuación homogénea es de la forma:

$$y_n=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$$

La solución particular es:

$$y_p=u_1(x)\varphi_1(x)+u_2(x)\varphi_2(x)+u_3(x)\varphi_3(x)+\ldots+u_n(x)\varphi_n(x)$$

Donde los $u_k(x)$ se obtienen mediante las integrales $u_k(x)=\int \frac{W_k}{W}dx$

Donde W es el determinante del sistema lineal:

$$(\theta)\begin{cases} u_1'\varphi_1 + u_2'\varphi_2 + \ldots\ldots + u_n'\varphi_n = 0 \\ u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' + \ldots\ldots + u_n'\varphi_n' = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ u_1'\varphi_1^{(n-2)} + u_2'\varphi_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + u_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'\varphi_1^{(n-1)} + u_2'\varphi_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + u_n'\varphi_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Es decir:

$$W = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \ldots & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & \ldots & \ldots & \varphi_n' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' & \ldots & \ldots & \varphi_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & \varphi_3^{(n-2)} & \ldots & \ldots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \varphi_3^{(n-1)} & \ldots & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

W_k es el determinante que se obtiene al cambiar en W la columna *k-esima* por la columna después del signo igual del sistema (θ)

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial: $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^{2x} + 24x^2$

Solución

Resolvemos la ecuación diferencial homogénea.

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0 \text{ con } f(x) = 12e^{2x} + 24x^2$$

Cuya característica es: $m^3 - 3m^2 + 2m = 0$, la cual tiene como solución $m=0, m=2, m=1$. Luego, la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^x$$

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x)$$

$$\varphi_1(x) = 1; \quad \varphi_2(x) = e^{2x}; \quad \varphi_3(x) = e^x$$

Buscamos el wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix}$$

$$W=\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{x} \\ 0 & 2e^{2x} & e^{x} \\ 0 & 4e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2e^{2x} & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix}=2e^{2x}\left(e^{x}\right)-4e^{2x}\left(e^{x}\right)$$

$$W=-2e^{3x}$$

Ahora buscamos los determinantes de cada variable:

$$W_1\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{x} \\ 0 & 2e^{2x} & e^{x} \\ 12e^{2x}+24x^2 & 4e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix}=\left(12e^{2x}+24x^2\right)\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix}$$

$$W_1=\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(-e^{3x}\right)$$

$$W_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{x} \\ 0 & 0 & e^{x} \\ 0 & 12e^{2x}+24x^2 & e^{x} \end{vmatrix}=-\left(12e^{2x}+24x^2\right)\begin{vmatrix} 1 & e^{x} \\ 0 & e^{x} \end{vmatrix}$$

$$W_2=\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(e^{x}\right)$$

$$W_3=\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 2e^{2x} & 0 \\ 0 & 4e^{2x} & 12e^{2x}+24x^2 \end{vmatrix}=\left(12e^{2x}+24x^2\right)\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$W_3=\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(2e^{2x}\right)$$

Ahora buscamos: $u_k(x)=\int \frac{W_k}{W}dx$

$$u_1(x)=\int \frac{W_1}{W}dx=\int \frac{-\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(-e^{3x}\right)}{-2e^{3x}}dx=\int \left(6e^{2x}+12x^2\right)dx=3e^{2x}+4x^2$$

$$u_2(x)=\int \frac{W_2}{W}dx=\int \frac{\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(e^{x}\right)}{-2e^{3x}}dx=-\int \left(6+12x^2e^{-2x}\right)dx$$

$$=-\left(6x-6x^2e^{-2x}-6xe^{-2x}-3e^{-2x}\right)$$

$$u_3(x)=\int \frac{W_3}{W}dx=\int \frac{\left(12e^{2x}+24x^2\right)\left(2e^{2x}\right)}{-2e^{3x}}dx=\int \left(12e^{x}+24x^2e^{-x}\right)dx$$

$$=-\left(12e^{x}-24x^2e^{-x}-48xe^{-x}-48e^{-x}\right)$$

Entonces la solución particular es:

$$y_p=u_1(x)\varphi_1(x)+u_2(x)\varphi_2(x)+u_3(x)\varphi_3(x)$$

$$y_p = \left(3e^{2x} + 4x^2\right) - \left(6x - 6x^2 e^{-2x} - 6xe^{-2x} - 3e^{-2x}\right) - \left(12e^{x} - 24x^2 e^{-x} - 48xe^{-x} - 48e^{-x}\right)$$

$$y_p = -9e^{2x} + 4x^3 - 6xe^{2x} + 30x^2 + 54x + 51$$

Siendo la solución de la ecuación diferencial dada:

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{x} - 9e^{2x} + 4x^3 - 6xe^{2x} + 30x^2 + 54x + 51$$

2.6 ECUACION DE CAUCHY – EULER

Es una ecuación de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

donde los coeficientes: $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$; y $x \neq 0$

2.6.1 Método de Solución

Consiste en suponer que la solución de la función homogénea asociada es de la forma $y = x^m$; derivando y reemplazando se tiene: $p(m)x^m = 0$, donde $p(m)$ es un polinomio de grado n y llamaremos a $p(m) = 0$ ecuación auxiliar cuyas raíces son los valores de m.

Para el caso de una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden de la forma:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Se tiene: $\quad ax^2 m(m-1)x^{m-2} + bmx^{m-1} + cx^m = 0$

De donde: $\quad \left[a\left(m^2 - m\right) + bm + c\right]x^m = 0$

Así: $\quad p(m) = am^2 + (b-a)m + c = 0$

Luego se presentan los siguientes casos:

a) Si $p(m)$ posee dos raíces reales distintas: $m_1 \neq m_2$, entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ son soluciones linealmente independientes de (*), así la solución general es:

$$y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

b) Si $p(m)$ posee una raíz real m de multiplicidad dos, se tiene una solución $y_1 = x^m$ y se busca la segunda solución que es de la forma $y_2 = x^m \ln x$ que es linealmente independiente con y_1, así, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1 x^m + C_2 x^m \ln x$$

c) Si $p(x)$ posee raíces complejas: $m = \alpha \pm \beta i$, se tiene $y_1 = x^{\alpha} \cos \beta x$, $y_2 = x^{\alpha} \, sen \, \beta x$ soluciones linealmente independientes de (*), luego la solución general es de la forma:

$$y(x) = C_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + C_2 x^{\alpha} \, sen(\beta \ln x)$$

Ejemplos

1) Resolver $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ ..... $(*)$

Solución

Sea $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

Reemplazando en (*)

$x^2\left(m(m-1)x^{m-2}\right) + 4x\left(mx^{m-1}\right) + 2\left(x^m\right) = 0$

$\left(m^2 + 3m + 2\right) = 0 \qquad m = -1 \, , \, m = -1$

$\therefore \; y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$

2) Resolver: $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$ ..... $(*)$

Solución

Sea $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$, $y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

Reemplazando en la ecuación diferencial (*)

$x^3\left(m(m-1)(m-2)x^{m-3}\right) + 5x^2\left(m(m-1)x^{m-2}\right) + 7x\left(mx^{m-1}\right) + 8x^m = 0$

Luego: $\left(m^3 + 2m^2 + 4m + 8\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = 2 \, , \, m = \pm 2i$

Entonces: $y_1 = x^2 \qquad y_2 = \cos(2\ln x) \qquad y_3 = sen(2\ln x)$

Son soluciones linealmente independientes de (*).

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 \cos(\beta \ln x) + C_3\, sen(\beta \ln x)$$

Observaciones:

Una ecuación diferencial del tipo Cauchy – Euler puede escribirse en la forma de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes haciendo el cambio de variable: $x = e^t \leftrightarrow \ln x = t$, consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden: $ax^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + bx\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$.

Si $\quad x = e^t \rightarrow \quad \ln x = t \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx}$

Como $\quad t = \ln x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^t}$

Así $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{1}{e^t} \quad \rightarrow \quad e^t\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \quad \rightarrow \quad x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}$

Hacemos $\dfrac{dy}{dx} = ry \quad \rightarrow \quad x\dfrac{dy}{dx} = Dy$

Ahora: $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{dy}{dx}\right] = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{dy}{dt}.\dfrac{1}{e^t}\right] = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}.\dfrac{1}{e^t}\right)\dfrac{dt}{dx}$

Luego: $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[\dfrac{d^2y}{dt^2}\left(\dfrac{1}{e^t}\right) - \dfrac{dy}{dt}\left(\dfrac{1}{e^t}\right)\right]\dfrac{1}{e^t} = \left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)\dfrac{1}{e^{2t}}$

Entonces: $e^{2t}\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} \quad \rightarrow \quad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy = (D^2 - D)y$

Así, la ecuación diferencial se transforma en:

$$a = (D^2 - D)y + bDy + cy = 0$$

la cual es equivalente a: $ay'' + (b-a)y' + cy = 0$, que es una ecuación diferencial con coeficientes constantes de segundo orden. Continuando de esta forma obtenemos:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\ldots(D-(n-1))y$$

Luego, la ecuación diferencial (*) se transforma en

$$a_nD(D-1)\ldots(D-(n-1))y + \ldots + D(D-1)y + Dy + a_0y = f(e^t)$$

La cual es una ecuación con coeficientes constantes de orden n en t.

Ejemplos:

1) Para la ecuación diferencial $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x$ se tiene: $D(D-1)y + 4Dy + 2y = 2t$ que es equivalente a

$y'' + 3y' + 2y = 2t$ .... (Δ)

La ecuación característica es : $(r+1)(r+2)=0$

Luego: $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

La solución particular es de la forma $y_p = At + B$, derivando y reemplazando en (Δ) $3A + 2(A+B) = 2t$, resolviendo: $A = 1$, $B = -\dfrac{3}{2}$

Luego: $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + t - \dfrac{3}{2}$ es la solución general de (Δ), pero $t = \ln x$, por tanto, la solución general de (*) es:

$$y(x) = C_1x^{-1} + C_2x^{-2} + \ln x - \frac{3}{2}$$

2) Resolver la ecuación diferencial

$$(3x-1)^2y'' + (9x-3)y' + 9y = sen\left[\ln(3x-1)\right],\ x > \frac{1}{3}$$

Solución

Sea $3x - 1 = e^t$, entonces $t = \ln(3x-1)$, luego, reemplazando en la ecuación diferencial $3^2D(D-1)y + 3(3Dy) - 9y = sent$, esto es:

$9y'' - 9y' + 9y' - 9y = sent$, luego queda $9y'' - 9y = sent$ .... (Δ)

cuya ecuación característica es $9r^2 - 9 = 0$ $\rightarrow$ $r = \pm 1$, entonces:

$y_c = C_1e^{-t} + C_2e^t$

Una solución particular es de la forma:

$$y_p = A\cos t + B sent\ ;\ y_p' = -A sent + B\cos t$$

$$y_p'' = -A\cos t - B sent$$

Reemplazando en (Δ):

$$-18\cos t - 18 sent = sent \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

Así: $y_p = -\frac{1}{18} sen t = -\frac{1}{18} sen\left(\ln\left(3x-1\right)\right)$

Por tanto, la solución de (*) es:

$$\therefore\ y(x) = C_1(3x-1)^{-1} + C_2(3x-1)^{-2} - \frac{1}{18} sen\left(\ln\left(3x-1\right)\right)$$

2.7 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

2.7.1 Sistemas Lineales

Un sistema lineal es de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$$

Si los coeficientes $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$ son constantes, tendremos un ***"sistema lineal con coeficientes constantes"***, en caso contrario será un "***sistema lineal con coeficientes variables"***.

2.7.2 Sistemas Homogéneos con Ecuaciones Lineales

Son sistemas con términos independientes nulos, para el caso de dos ecuaciones, serán sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y \end{cases}$$

2.7.3 Método de Eliminación

El Método de Eliminación consiste en convertir un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes en una única ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Si partimos del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

Y denominamos $D = \dfrac{d}{dt}$ al operador derivada a t, tendremos:

$$\begin{cases}(D-a)x - by = f(t)\\ -cx + (D-d)y = g(t)\end{cases}$$

Si decidimos eliminar la variable x del sistema procederemos de la siguiente manera: multiplicando la primera ecuación por $-c$ y la segunda por $(D-a)$, y restando los resultados, reducimos el sistema a una ecuación de la forma:

$$(D^2 + Pd + q)y = h(t)$$

La cual es una ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden que resolveremos con las técnicas aprendidas en el tema anterior.

Ejemplo 1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes homogéneo:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 4x - y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y\end{cases}$$

Solución

El sistema puede ser reescrito en términos del operador $D = \dfrac{d}{dt}$ en la forma:

$$\begin{cases}(D-4)x + y = 0\\ -2x + (D-1)y = 0\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}(D-1)(D-4)x - (D-1)y = 0\\ -2x + (D-1)y = 0\end{cases}$$

Y así, restando ambas ecuaciones tendremos:

$$(D-1)(D-4)x + 2x = 0 \quad \rightarrow (D^2 - 5D + 6)x = 0$$

Que puede ser resuelta fácilmente y obtenemos:

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$$

Teniendo en cuenta ahora la primera ecuación:

$$y(t) = 4x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \qquad y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4y + e^t \end{cases}$$

Procederemos ahora despejando directamente la variable y en la primera ecuación:

$$y = x' + x \qquad \rightarrow \qquad y' = x'' + x'$$

Donde hemos utilizado la notación $x' = \frac{dx}{dt}$, por simplicidad. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $x'' + 5x' + 6x = e^t$ cuya solución es $x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^t$.

El cálculo de y es ahora directo, usando $y = x' + x$

$$y(t) = -2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t$$

Nota

En el caso particular de sistemas homogéneos, es posible un procedimiento todavía más directo para obtener la solución, pues la ecuación característica de la ecuación de segundo orden asociado puede encontrarse en una forma muy sencilla.

Dado el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

El proceso de eliminación mostrado nos lleva a una ecuación lineal de segundo orden con operador asociado $(D^2 + pD + q)$, tanto si se elimina la variable x como si se hace con la variable y. Es fácil demostrar entonces que la ecuación característica $\lambda^2+p\lambda+q=0$ de dicho problema se obtiene directamente de la expresión:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, & x(0)=1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x, & y(0)=1 \end{cases}$$

Solución

La ecuación característica será: $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2+1=0$,

por tanto, tenemos dos raíces imaginarias: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. De esta manera, la solución será, por ejemplo, para $x(t)$: $x(t) = K_1 \cos t + K_2\, sent$ mientras que las variables $y(t)$ la obtenemos fácilmente a partir de la primera ecuación $y(t) = x'(t)$: $y(t) = K_2 \cos t - K_1\, sent$. Sustituyendo las condiciones iniciales en ambas expresiones generales tendremos la solución particular buscada:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + sent \\ y(t) = \cos t - sent \end{cases}$$

2.8 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

2.8.1 Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos

1) Movimiento Armónico Simple

Para hallar el desplazamiento vertical $x(t)$ de una masa m sujeta a un resorte, hacemos uso de las siguientes leyes empíricas.

Segunda Ley de Newton

Esta ley dice que la fuerza neta F que actúa sobre un cuerpo en movimiento es igual a producto de su masa m por la aceleración en un instante t, esto es:

$$F = m.a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$a = a(t)$ aceleración del cuerpo en un instante t.

Ley de Hook

Que dice que la fuerza F de restitución de un resorte estirado es proporcional a su alargamiento $s + x$, esto es: $F = K(s + x), k > 0$ es la constante de proporcionalidad, $x = x(t)$ es la distancia recorrida cuando el sistema está en movimiento a partir de la posición de equilibrio la fuerza que actúa sobre la masa es

$$F = -Kx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Así, despreciando fuerzas externas y amortiguación, la ecuación diferencial del movimiento vertical del centro de gravedad de la masa se obtiene igualando (α) y (β)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Donde el signo negativo indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en dirección opuesta a la del movimiento, es decir, hacia la posición de equilibrio.

Observación

En la práctica, la ecuación (*) se expresa en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 = 0 \quad \text{donde } \omega^2 = \frac{K}{m}$$

La cual describe el movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado.

La solución de esta última ecuación es:

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2\, sen\ \omega t \qquad \ldots\ldots\ldots (\Delta)$$

Donde el período de vibraciones libres que describe (Δ) es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la frecuencia de vibraciones es $F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Ejemplo

Una masa que pesa 2 libras estira un resorte de longitud 0.5 pie. Cuando $t = 0$ la masa se suelta desde un punto a $\frac{2}{3}$ pies debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia arriba de $\frac{4}{3}$ pìes/seg. Determine la ecuación del movimiento libre.

Solución

De los datos: $s = 0.5\,\text{pies}$, $W = 2lb$, $x'(0) = \frac{4}{3}\,\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$

$x(0) = \frac{2}{3}\,\text{pies}$, $W = mg \rightarrow \quad m = \frac{W}{g} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

También $mg = Ks = 2 = K\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \quad K = 4$

Luego se tiene la ecuación diferencial $x'' + 64x = 0$, aquí $\omega^2 = 64$; $\omega = 8$ y la solución general es $x(t) = C_1 \cos 8t + C_2\, sen\, 8t$

De las condiciones iniciales: $C_1 = \frac{2}{3}$; $C_2 = \frac{1}{6}$

Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t + \frac{1}{6} sen\, 8t$$

Además, el período es $T = \frac{\pi}{4}$, y la frecuencia: $F = \frac{4}{\pi}$

2) Movimiento Libre Amortiguado

Las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo está expresada por un múltiplo constante de $x'(t)$. Luego la ecuación diferencial asociada a este fenómeno es:

$$mx''(t) = -Kx(t) - \beta x'(t) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$\beta>0$ es la constante de amortiguamiento, la ecuación (I) es equivalente a:

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Donde $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$, $\quad \omega^2 = \dfrac{K}{m}$, m es la masa del cuerpo.

De acuerdo a la naturaleza de las raíces de la ecuación característica: $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ se tienen los siguientes casos:

Caso I: Cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ se tiene un sistema sobre amortiguado cuya solución es:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right)$$

Caso II: Cuando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ se tiene un sistema críticamente amortiguado cuya solución es:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

Caso III: Cuando $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ se tiene un sistema sub amortiguado cuya solución es:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t\right) + C_2\, sen\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\right)\right)$$

En esta solución, cuando $t \to \infty$, las amplitudes de vibraciones van para caso.

Ejemplo

Un peso de 4 lb suspendido de un resorte lo estira 3 pulgadas. El peso se jala 6 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Asuma que sobre el peso actúa una fuerza amortiguadora que numéricamente, en libras, es igual a 2V donde V es la velocidad instantánea en pies por segundo.

a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones que describa el movimiento.

b) Determine la posición del resorte en cualquier tiempo después de haber soltado el peso.

c) Escriba el resultado de b) en la forma $A(t)sen\left(\omega t+\phi\right)$

Solución

De los datos $W=4\,lb$, $s=3\ pulg=\frac{1}{4}pie$, $x_0=6\ pulg=\frac{1}{2}pie$

$x_0=6\,\text{pulgadas}=\frac{1}{2}\,\text{pie}$. La fuerza amortiguadora es $F_a=2x'$, luego se tiene la ecuación diferencial $W=4=Ks=K\left(\frac{1}{4}\right)\ \rightarrow\ K=16$

Luego se tiene la ecuación diferencial $\frac{x''}{8}+2x'+Kx=0$

a) La ecuación diferencial que describe el movimiento es $x''+16x'+8Kx=0$, sujeta a las condiciones siguientes: $x(0)=\frac{1}{2}\ pie$; $x'(0)=0$

b) Resolviendo la ecuación diferencial se tiene la ecuación característica $r^2+16r+16(8)=0$, de donde $r=-8\pm 8i$, entonces el sistema es sub amortiguado y su solución es:

$$x(t)=e^{-8t}\left[C_1\cos 8t+C_2\,sen\,8t\right]$$

De las condiciones iniciales: $C_1=C_2=\frac{1}{2}$

$x(t)=\frac{e^{-8t}}{2}\left[\cos 8t+sen\,8t\right]$ nos indica la posición del resorte para cualquier tiempo t.

c) Como $sen\left(8t+\frac{\pi}{4}\right)=\left[\cos 8t+sen\,8t\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ x(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-8t}\left[sen\left(8t+\phi\right)\right]$ donde $\phi=\frac{\pi}{4}$

De aquí $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ segundos, $W=8$

3) Movimiento forzado

Si tomamos en cuenta una fuerza externa $F(t)$ que actúa sobre una masa oscilatoria en un resorte se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{W}{g}x'' = -Kx - \beta x' + F(t) = \frac{W}{g}x'' + \beta x' + Kx = F(t)$$

La cual puede escribirse de la forma:

$$ax'' + bx' + cx = F(t)$$

Donde $a = \frac{W}{g}$, $b = \beta$, $c = K$, llamada ecuación de vibraciones forzadas.

Ejemplo

Un contrapeso de 16 libras estira un resorte una longitud de $\frac{8}{3}$ pies. Al principio el contrapeso parte del reposo a 2 lb pies debajo de la posición de equilibrio, y el movimiento ocurre en un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la mitad de la velocidad instantánea. Establezca la ecuación del movimiento si el contrapeso está impulsado por una fuerza externa igual a $F(t) = 10\cos 3t$

Solución

De las condiciones del problema:

$W = mg = 16lb$; $s = \frac{8}{3}pies$, $x(0) = 2lb$, $x'(0) = 0$

$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}x' = F_a$; $F_e = f(t) = 10\cos 3t$

$mg = K\left(\frac{8}{3}\right) \quad \rightarrow \quad K = 6$

Así se tiene: $\frac{16}{32}x'' + \frac{1}{2}x' + 6x = 10\cos 3t$

Y la ecuación del movimiento está dada por:

$$x'' + x' + 12x = 10\cos 3t \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Y resolviendo obtenemos la solución del sistema:

$$x(t)=\frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{47}}\left[\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t+sen\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]+\frac{5}{3}(\cos 3t+sen 3t)$$

Nota:

En la solución se tiene que $x(t)=x_c(t)+x_p(t)$, donde

$x_c(t)=\frac{2}{\sqrt{47}}e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t+sen\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]$ es el estado transitorio y

$x_p(t)=\frac{5}{3}(\cos 3t+sen 3t)$ es el estado estable del sistema.

CAPÍTULO III:
TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1.1. Definición. Sea $f:\left[0,\infty\right\rangle \to \mathbb{R}$ seccionalmente continua. La integral $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}$ es llamada ***"Transformada de Laplace"*** de f si la integral impropia existe, donde la integral se entiende como $\int_0^\infty e^{-st} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt$

Notación: $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$

Ejemplos

$$(1)\ \mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^b = \frac{1}{s},\ s>0$$

$$(2)\ \mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \underbrace{-\frac{t}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s^2},\ s>0$$

$$(3)\ \mathscr{L}\{t^2\} = \int_0^\infty e^{-st}t^2dt = -\frac{t^2e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^t e^{-st}tdt = \frac{2}{s}\mathscr{L}(t) = \frac{2!}{s^3},\ s>0$$

$$(4)\ \mathscr{L}\{e^{-2t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-2t}dt = \int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt = -\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+2},\ s>-2$$

$$(5)\ \mathscr{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = -\frac{1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha},\ s>\alpha$$

$$(6)\ \mathscr{L}\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt = -\frac{1}{s}\cos t\,e^{-st}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty sen t\,dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left[\underbrace{-\frac{1}{s}e^{-st}\,sen t\Bigg|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{\cos t\}$$

$$\text{Luego}: \left(1+\frac{1}{s^2}\right)\mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{1}{s} \qquad \therefore\ \mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$$

3.2 TRANSFORMADA INVERSA

3.2.1 Definición. Dada la función $F(s)$, diremos que la función $f(t)$ es la Transformada Inversa de $F(s)$ si $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ y lo demostraremos por $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejemplos

$$(1)\ \mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

$$(2)\ \mathscr{L}\{s\}=\frac{1}{s^2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$$

$$(3)\ \mathscr{L}\{t^2\}=\frac{2!}{s^3} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}=t^2$$

$$(4)\ \mathscr{L}\{e^{-2t}\}=\frac{1}{s+2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$$

$$(5)\ \mathscr{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\}=e^{\alpha t}$$

$$(6)\ \mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$$

3.2.2 Transformada de funciones elementales

$$\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n\ ;\ n\in\mathbb{N}$$

$$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\}=e^{\alpha t}$$

$$\mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$$

$$\mathscr{L}\{\cos \alpha t\}=\frac{s}{s^2+\alpha^2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\alpha}\right\}=\cos \alpha t$$

$$\mathscr{L}\{sen\ t\} = \frac{s}{s^2+1} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = sen\ t$$

$$\mathscr{L}\{sen\ \alpha t\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\alpha}\right\} = sen\ \alpha t$$

$$\mathscr{L}\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2-1} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} = senh\ t$$

$$\mathscr{L}\{\cosh \alpha t\} = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right\} = \cosh \alpha t$$

$$\mathscr{L}\{senh\ t\} = \frac{s}{s^2-1} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} = senh\ t$$

$$\mathscr{L}\{senh\ \alpha t\} = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-\alpha}\right\} = senh \alpha t$$

Las propiedades enunciadas se verifican aplicando la definición de la Transformada de Laplace, lo cual queda como ejercicio para el lector.

3.2.3. Teorema. (Linealidad de la Transformada)

Sean f, g funciones definidas para $t \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$, entonces para todo $t \geq 0$ se tiene:

(i) $\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}$

(ii) $\mathscr{L}^{-1}\{aF(s)+bG(s)\} = a\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$

Prueba:

(i) De la linealidad de la integral se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(ae^{-st}f(t)+be^{-st}g(t)\right)dt \\
&= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \\
&= a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}
\end{aligned}$$

(ii) Resulta de (i) y de la definición de Transformada Inversa.

Ejemplos

$$(1)\ \mathcal{L}\{2-3t+5e^{-2t}\} = 2\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s+2}$$

$$(2)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s} + \frac{7}{s-3} + \frac{5}{s^2-1}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}$$

$$= 3 + 7e^{3t} + 5\,senh\,t$$

$$(3)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+4s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/4}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}sen\,2t$$

$$(4)\ \mathcal{L}\{senh\,\alpha t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(s+\alpha)-(s-\alpha)}{(s-\alpha)(s+\alpha)}\right]$$

A partir de la linealidad de la Transformada de Laplace podemos obtener nuevas Transformadas de funciones elementales, como muestran los siguientes ejemplos:

Función seno. Sean $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función:

$$f(t) = sen\,\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\{e^{i\omega t}(t)\} - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Siempre que $\operatorname{Re} s > 0$.

Función coseno. Sean $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función:

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

De forma análoga a la anterior, se obtiene que:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2i}\left[\mathscr{L}\{e^{i\omega t}(t)\} - \mathscr{L}\{e^{-i\omega t}(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Siempre que $\operatorname{Re} s > 0$.

Función seno hiperbólico. Sean $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función:

$$f(t) = senh\, \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i}$$

Entonces:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\{e^{\omega t}(t)\} - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Siempre que $\operatorname{Re} s > |\omega|$.

Función coseno hiperbólico. Sean $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función:

$$f(t) = \cosh \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i}$$

Entonces:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\{e^{\omega t}(t)\} - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

Siempre que $\operatorname{Re} s > |\omega|$.

3.2.4 Definición. (Función de orden exponencial)

Diremos que una función f es de orden exponencial α si existen $M > 0$ y $T > 0$, tales que $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$, $\forall t \ge T$.

Ejemplos

(1) $f(t)=t,\ \forall t>0$ es de orden exponencial, pues existen $M=1$ y $T>0$, tales que $|t|\leq e^{t}, \forall t\geq 0$.

(2) $f(t)=e^{-t}, \forall t\geq 0$, es de orden exponencial $\alpha=1$, pues existen $M=1$ y $T>0$, tales que $|e^{-t}|\leq e^{t}, \forall t\geq 0$.

(3) $f(t)=sent, \forall t\geq 0$ es de orden exponencial $\alpha=1$, pues existen $M=1$ y $T>0$ tales que $|sent|\leq e^{t}, \forall t\geq 0$

3.2.5. Teorema. Sea f una función seccionalmente continua en $\left[0,\infty\right\rangle$ y de orden exponencial α, entonces existe $|f(t)|\leq Me^{\alpha t}, \forall t\geq T$.

Prueba

f es de orden exponencial α, entonces existen $M=1$ y $T>0$ tales que $\mathscr{L}\{f(t)\}\leq M e^{\alpha t}, \forall t\geq T$, luego $\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$ la primera integral converge y para la segunda tenemos

$$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt\right|\leq \int_T^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt\leq \int_T^\infty e^{-st}\left|f(t)\right|dt$$

$$\leq \int_T^\infty e^{-st}M e^{\alpha t}dt\leq M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$$

$$=-M\left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right|_T^\infty=\frac{M e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}, \ s>\infty$$

Con lo cual también converge.

$\therefore$ existe $\mathscr{L}\{f(t)\}, \forall s>\alpha$

Ejemplo 1

La función $f(t)=\begin{cases} 2t+1 \ ; & 0\leq t<1 \\ 0 \ ; & t\geq 1\end{cases}$ es de orden exponencial y seccionalmente continua, luego existe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ y está dada por:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st}(2t+1)dt + \int_1^\infty 0\,dt$$

$$= \int_0^1 2t\,e^{-st}\,dt + \int_0^1 e^{-st}\,dt = 2\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{s}e^{-st}dt \right] - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^1 - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \left(\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} \right)e^{-s}$$

Ejemplo 2

Halle la Transformada de $f(t) = \begin{cases} t & t>1 \\ 0 & 0 \le t < 1 \end{cases}$

Solución

f es de orden exponencial y seccionalmente continua, luego podemos encontrar la transformada de f

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st}\,0\,dt + \int_1^\infty e^{-st}t\,dt = \int_1^\infty e^{-st}t\,dt = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}\int_1^\infty e^{-st}t\,dt$$

$$= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}e^{-s} \right)$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

3.2.6. Teorema (Primer Teorema de Traslación)

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s)\big|_{s\to s-a} \geq F(s-a)$

y $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\big|_{s\to s-a}\right\} = e^{at}f(t)$

Ejemplos

$$(1)\ \mathscr{L}\{e^{2t}t\} = \mathscr{L}\{t\}_{s\to s-2} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s\to s-2} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$(2)\ \mathscr{L}\{e^{\pi/2}\cos t\} = (1)\ \mathscr{L}\{\cos t\}_{s\to s-\frac{\pi}{2}} = \frac{s}{s^2+1}\Big|_{s\to s-\frac{\pi}{2}} = \frac{s-\frac{\pi}{2}}{\left(s-\frac{\pi}{2}\right)^2+1}$$

$$(3)\ \mathscr{L}\{e^{-2t}\,sen\,h3t\} = \mathscr{L}\{senh3t\}_{s\to s+2} = \left.\frac{3}{s^2-3^2}\right|_{s\to s+2} = \frac{3}{(s+2)^2-9}$$

$$(4)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+2s+10}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+9}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}_{s\to s+1} = e^{-t}\,sen3t$$

$$(5)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+3)^3}\right\} = \frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^{2+1}}\right\} = \frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}_{s\to s+3} = \frac{5}{2}e^{-3t}t^2$$

Observaciones

a) Si f es continua por tramos en $\left[0,+\infty\right\rangle$ y de orden exponencial, entonces $\lim_{s\to\infty} f(t) = 0$

b) Si f, g son funciones continuas por partes, tales que $F(s) = G(s)$, entonces $f = g$, excepto un número finito de puntos en cualquier intervalo finito.

La verificación de estas propiedades pueden encontrarlo en ([1])

3.3 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

3.3.1 Teorema. Sea f una función en $\left[0,+\infty\right\rangle$, tal que f y sus derivadas hasta el orden $n-1$ son continuas y de orden exponencial en $\left[0,+\infty\right\rangle$, y si la derivada de orden n de f es continua por tramos en $\left[0,+\infty\right\rangle$, entonces existe $\mathscr{L}\{f^n(t)\}$ y además

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Prueba:

Por inducción sobre el orden n de la derivada

(i) para la primera derivada de f

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\therefore\ \mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

[1] ZilL D., Cullen M. Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera.

(ii) para la segunda derivada de f

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt = e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\} = -sf'(0) + s\left[sF(s) - f(0)\right]$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(iii) Para la tercera derivada

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'''(t)dt = e^{-st} f''(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt$$

$$= -f''(0) + s\mathscr{L}\{f''(t)\} = sf''(0) + s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right]$$

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Y así sucesivamente por inducción se llega a probar que $\exists\, \mathscr{L}\{f^n(t)\}$ y está dada por:

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots\ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Ejemplos

(1) $D(sent) = \cos t$, luego

$$\mathscr{L}\{\cos t\} = s\mathscr{L}\{sen\ t\} - sen(0) = s\frac{1}{s^2+1} - 0 = \frac{s}{s^2+1}$$

(2) $D(e^{3t}) = 3e^{3t}$; luego

$$\mathscr{L}\{3e^{3t}\} = s\mathscr{L}\{e^{3t}\} - e^{3(0)} = s\frac{1}{s-3} - 1 = \frac{3}{s-3}$$

Observación

La Transformada de una derivada es utilizada para resolver problemas con condiciones iniciales.

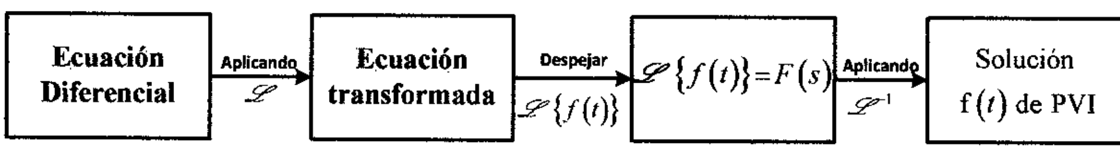
3.3.2 Solución de un problema con condiciones iniciales mediante la Transformada de Laplace

Para resolver un problema con condiciones iniciales se procede de la siguiente manera:

Dada la ecuación diferencial se aplica la Transformada de Laplace a cada miembro utilizando las condiciones iniciales y la linealidad de la Transformada se despeja la Transformada quedando una ecuación en términos de s.

Finalmente se aplica la Transformada inversa y resulta la solución en términos de t

Figura 3.1: Solución de una Ecuación diferencial por Transformada de Laplace



Fuente: Autoría propia

Ejemplos

1) Resolver el problema con valor inicial $y'-y=1-t$; $y(0)=-1$

Solución

Aplicando $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}\{y'-y\} = \mathscr{L}\{1-t\}$

$\mathscr{L}\{y'\}-\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\}\mathscr{L}\{t\}$

$sy(s) - y(0) - y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$

$(s-1)y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - 1$

$y(s) = \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{s^2(s-1)} - \frac{1}{(s-1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1}$

Aplicamos ahora $\mathscr{L}^{-1}$ y se tiene la solución: $y(t) = t - e^t$

2) Resolver: $y'' - 3y' + 2y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solución

Aplicando Transformada y las condiciones iniciales

$\mathscr{L}\{y''\} - 3\mathscr{L}\{y'\} + 2\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\}$

$s^2y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sy(s) + y(0) + 2y(s) = \frac{1}{s}$

$$\left(s^2-3s+2\right)y(s)=\frac{1}{s}+1$$

$$y(s)=\frac{1}{s\left(s^2-3s+2\right)}+\frac{1}{\left(s^2-3s+2\right)}$$

Separando el lado derecho por fracciones parciales:

$$y(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{2}{s-1}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

Aplicando la Transformada inversa, se tiene la solución

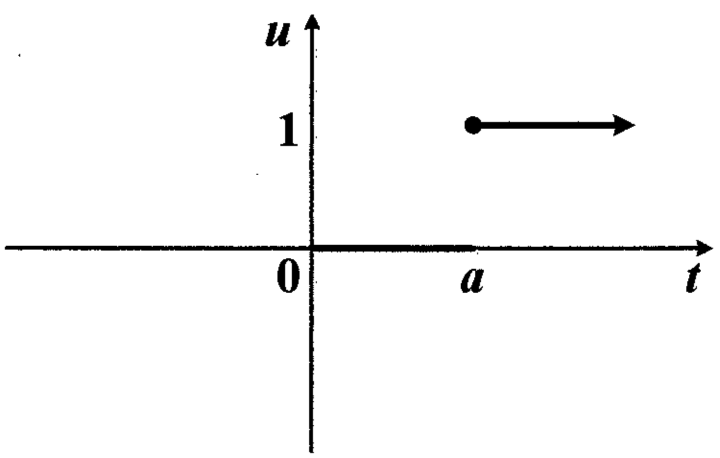
$$y(t)=\frac{1}{2}-2e^{t}+\frac{3}{2}e^{2t}$$

3.4 FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

3.4.1. Definición. Dada $a\geq 0$, la función escalón unitario se denota y define por:

$$\mu(t-a)=\begin{cases}1, & t\geq a\\ 0, & 0\leq t<a\end{cases}$$

Figura 3.2: Función escalón unitario



Fuente: Zill D, Cullen

Observación

La función escalón unitario es utilizada para expresar una función con un número finito de discontinuidades como combinación lineal de éstas.

Una función del tipo $f(t)=\begin{cases}f_1(t)\ , & 0\leq t<a\\ f_2(t)\ , & t\geq a\end{cases}$ podemos expresarlo en términos de la función escalón unitario en la forma:

$$f(t)=f_1(t)-f_1(t)u(t-a)+f_2(t)u(t-a)$$

Asimismo, una función del tipo:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\le t<a \\ h(t) & , \quad a\le t<b \\ 0 & , \quad t\ge b \end{cases}$$

Podemos expresarla de la siguiente manera:

$$f(t)=0-0\mu(t-a)+h(t)\mu(t-a)-h(t)\mu(t-b)+0\mu(t-b)$$

$$\therefore f(t)=h(t)\left[\mu(t-a)-\mu(t-b)\right]$$

Similarmente, para una función f de forma más general:

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & , \quad 0\le t<a_1 \\ f_2(t) & , \quad a_1\le t<a_2 \\ \vdots & \quad\quad \vdots \\ f_n(t) & , \quad t\ge a_{n-1} \end{cases}$$

Se tiene:

$$f(t)=f_1(t)-f_1(t)\mu(t-a_1)+f_2(t)\mu(t-a_1)-f_2(t)\mu(t-a_2)+$$
$$+\dots+f_n(t)\mu(t-a_{n-1})$$

Ejemplo

Expresar $f(t)$ en términos de la función escalón unitario

$$f(t)=\begin{cases} t & ; \quad 0\le t<2 \\ 0 & ; \quad 2\le t<3 \\ t^2 & ; \quad t\ge 3 \end{cases}$$

Solución

Tenemos: $f_1(t)=t$, $f_2(t)=0$, $f_3(t)=t^2$; $a_1=2, a_2=3$, luego

$$f(t)=t-t\mu(t-2)+0\mu(t-2)-0\mu(t-3)+t^2\mu(t-3)$$

$$\therefore f(t)=t-t\mu(t-2)+t^2\mu(t-3)$$

3.4.2 Teorema (Segundo Teorema de Traslación)

Si $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}\wedge a>0$, entonces

(i) $\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$

$(ii)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t-a)\mu(t-a)\right\}$

Ver la prueba en ([2])

Ejemplos

$(1)\ \mathscr{L}\left\{(t-3)^2\mu(t-3)\right\} = e^{-3s}\dfrac{2!}{s^3}$

$(2)\ \mathscr{L}\left\{\cos(t-\pi)\mu(t-\pi)\right\} = e^{-\pi s}\dfrac{s}{s^2+1}$

$(3)\ \mathscr{L}\left\{e^{-3(t-2)}\mu(t-2)\right\} = \dfrac{e^{-2s}}{s+3}$

$(4)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-7s}}{s+2}\right\} = e^{-2(t-7)}\mu(t-7)$

$(5)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\int_0^{-1}\left[e^{-\frac{\pi}{2}s}\dfrac{2}{s^2+2^2}\right] = \dfrac{1}{2}sen2\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\mu\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$(6)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2-7}\right\} = \cos\sqrt{7}(t-3)\mu(t-3)$

3.5 DERIVADA DE UNA TRANSFORMADA

3.5.1 Teorema. Sea f continua a trozos y de orden exponencial $\alpha>0$. Si $n\in\mathbb{N}$ entonces existe $\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}, s>\alpha$ y además $\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$, donde $F(s)=\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$.

Prueba. Por inducción sobre n

Para $n=1$ tenemos:

$$-\frac{d}{ds}F(s)=-\frac{1}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty -\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty t\,e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\,t(t)dt=\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$$

Supongamos que el Teorema vale para $n=h$, esto es:

$$\mathscr{L}\left\{t^h f(t)\right\}=(-1)^h\frac{d^h}{ds^h}F(s)$$

[2] ZilL D., Cullen M. Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera.

Veamos que se cumpla para $n=h+1$

$$\mathscr{L}\left\{t^{h+1} f(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{t\, t^{h} f(t)\right\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{t^{h} f(t)\right\}=$$

$$=-\frac{d}{ds}\left[(-1)^{h}\frac{d^{h}}{ds^{h}}F(s)\right]=(-1)^{h+1}\frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}}F(s)$$

Ejemplos

(1) $\mathscr{L}\left\{t^{2}\, sen\, t\right\}=(-1)^{2}\dfrac{d^{h}}{ds^{h}}\mathscr{L}\left\{sen\, t\right\}=(-1)^{2}\dfrac{d^{2}}{ds^{2}}\left(\dfrac{1}{s^{2}+1}\right)$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{\left(s^{2}+1\right)^{2}}\right]=\frac{6s^{2}-2}{\left(s^{2}+1\right)^{3}}$$

(2) $\mathscr{L}\left\{t\cos t\right\}=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{\cos t\right\}=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^{2}+1}\right)=\dfrac{s^{2}-1}{s^{2}+1}$

(3) $\mathscr{L}\left\{t^{2}\cosh 2t\right\}=(-1)^{2}\dfrac{d^{2}}{ds^{2}}\mathscr{L}\left\{\cosh 2t\right\}=\dfrac{d^{2}}{ds^{2}}\left(\dfrac{s}{s^{2}-1}\right)$

$$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{2}-1}{\left(s^{2}-1\right)^{2}}\right)=\frac{2s^{3}+6s}{\left(s^{2}-1\right)^{3}}$$

(4) $\mathscr{L}\left\{t^{2}\, senh\, 2t\right\}=(-1)^{2}\dfrac{d^{2}}{ds^{2}}\mathscr{L}\left\{senh\, 2t\right\}=\dfrac{d^{2}}{ds^{2}}\left(\dfrac{1}{s^{2}-1}\right)$

$$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{\left(s^{2}-1\right)^{2}}\right)=\frac{2+6s^{2}-8s^{4}}{\left(s^{2}-1\right)^{3}}$$

3.6 CONVOLUCIÓN

3.6.1 Definición. Dadas las funciones integrables f y g se define la convolución $f*g$ de ambas funciones como la función

$$(f*g)(t)=\int_{0}^{t} f(t-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha$$

La cual es conmutativa, es decir: $f*g=g*f$

En efecto:

$$(f*g)(t)=\int_{0}^{t} f(t-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha=\int_{t}^{0} f(z)g(t-z)\,(-dz)$$

$$=-\int_{t}^{0} f(z)g(t-z)\,dz=-\int_{0}^{t} g(t-z)f(z)\,dz$$

3.6.2 Teorema. Si f y g son funciones continuas por partes y de orden exponencial en $[0,\infty\rangle$, entonces: $\mathscr{L}\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s)$, donde $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ y $G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}$; y $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t)$

Prueba: Ver. ([3])

Ejemplos

1) Halle: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

Solución

Como $\mathscr{L}\{sen\ t\}=\dfrac{1}{s^2+1}$, tenemos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}=sen\ t*sent$$

$$=\int_0^t sen\ \alpha\cdot sen(t-\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}sent$$

2) Halle: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$

Solución

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s-2)}\right)\left(\frac{1}{(s-3)}\right)\right\}=e^{2t}*e^{3t}$$

$$=\int_0^t e^{2\alpha}*e^{3(t-\alpha)}\,d\alpha=\int_0^t e^{3t}e^{-\alpha}\,d\alpha=e^{3t}\left(-e^{-t}+1\right)$$

$$=-e^{4t}+e^{3t}$$

3) Resolver el PVI: $y''-y'=e^t;\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

Solución

Aplicando la Transformada y de las condiciones iniciales

---

3 Campbell S., Haberman R. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera.

$$\mathscr{L}\{y''\}-\mathscr{L}\{y'\}=\mathscr{L}\{e^t\}$$

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)-sy(s)-y(0)=\frac{1}{s-1}$$

$$s(s-1)y(s)=\frac{1}{s-1} \qquad\qquad y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)\right\}=1*t\,e^t$$

$$\therefore\ y(t)=\int_0^t \alpha e^{\alpha t}.1d\alpha = t\,e^t - e^t + 1$$ es solución del PVI.

4) Resolver el PVI: $y''+3y'+2y=te^{-t}$, $t>0$; $y(0)=y'(0)=0$

Solución

Aplicamos la transformada y de las condiciones iniciales

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+3sy(s)-3y(0)+2y(s)=\mathscr{L}\{te^{-t}\}$$

$$\left(s^2+3s+2\right)y(s)=\frac{1}{(s+1)^2} \qquad\qquad y(s)=\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right)\left(\frac{}{s+2}\right)\right\}=\frac{t^2e^{-t}}{2}e^{-2t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2e^{-\alpha}.e^{-2(t-\alpha)}\,d\alpha=\frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t\alpha^2e^{\alpha}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t^2e^t-2te^t+e^t-1\right)$$

$$\therefore\ y(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}$$ es solución del PVI.

3.6.3 Teorema (Transformada de una integral)

Si f es de orden exponencial y continua por tramos, entonces:

$$(i)\ \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\alpha)d\alpha\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

$$(ii)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(\alpha)d\alpha$$

$$(iii)\ \mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)\,du\ ; \qquad F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$$

Prueba

Se deduce del Teorema 3.6.2

Ejemplos

$$(1)\ \mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos 2\alpha\ d\alpha\right\}=\frac{\mathscr{L}\{\cos 2t\}}{2}=\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}$$

$$(2)\ \mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{-2\alpha}\ sen\ 4\alpha}{\alpha}d\alpha\right\}=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left\{\frac{e^{-2\alpha}\ sen\ 4\alpha}{\alpha}\right\}=\frac{1}{s}\int_s^\infty \mathscr{L}\left\{e^{-2\alpha}\ sen\ 4\alpha\right\}du$$

$$=\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_s^b \frac{4}{(u+2)^2+16}du=\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty} arctg\left(\frac{u+2}{4}\right)\Bigg|_s^b$$

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{u+2}{4}\right)\right]$$

3.6.4 Teorema (Transformada de una función periódica)

Sea f una función periódica de período T. Si f es de orden exponencial y continua por partes en $\left[0,\infty\right\rangle$, entonces:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

Prueba

Si $T>0$ el período de f, entonces $f(t+T)=f(t)$, $\forall t\geq 0$, luego de la definición de Transformada

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

Haciendo el cambio de variable $t=\alpha+T$ en la segunda integral se tiene

$$\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_T^\infty e^{-s(\alpha+T)}f(\alpha+T)\,dt=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-s\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

$$=e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}$$

Así tenemos: $\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}$

Despejando tenemos:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\left(\frac{1}{1-e^{-sT}}\right)\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Ejemplo

1) Halle la Transformada de la función $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t<2 \end{cases}$ donde

$f(t+2)=f(t),\ \forall t\ge 2$

Solución

$f(t)$ es una función periódica de período $T=2$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\left(\frac{1}{1-e^{-2s}}\right)\int_0^T e^{-st} f(t)dt=\left(\frac{1}{1-e^{-2s}}\right)\left[\int_0^1 e^{-st}\,t\,dt+\int_1^2 e^{-st}\,0\,dt\right]$$

$$=\left(\frac{1}{1-e^{-2s}}\right)\left[\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^1-\int_0^1 e^{-st}\,t\,dt\right]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]$$

2) Halle la transformada de la función

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{a}{b}t \quad, & 0\le t<b \\ f(t+b), & t\ge b \end{cases} \quad ;\ \forall a>0$$

Solución

f es una función periódica de período $T=b$, luego:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-bs}}\left[\int_0^b e^{-st}\frac{a}{b}t\,dt\right]=\frac{1}{1-e^{-bs}}\left[\frac{a}{b}\int_0^b e^{-st}\,t\,dt\right]$$

$$=\frac{a}{b\left(1-e^{-bs}\right)}\left[-\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^b+\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\,dt\right]$$

$$=\frac{a}{b\left(1-e^{-bs}\right)}\left[-\frac{be^{-sb}}{s}+\left(-\frac{1}{s^2}\right)e^{-sb}+\frac{1}{s^2}\right]$$

$$=\frac{ae^{-sb}}{b\left(1-e^{-bs}\right)}+\left(\frac{1-e^{-sb}}{s^2}\right)\frac{a}{b\left(1-e^{-bs}\right)}$$

$$=\frac{a}{s}\left[\frac{1}{bs}-\frac{1}{e^{sb}-1}\right]$$

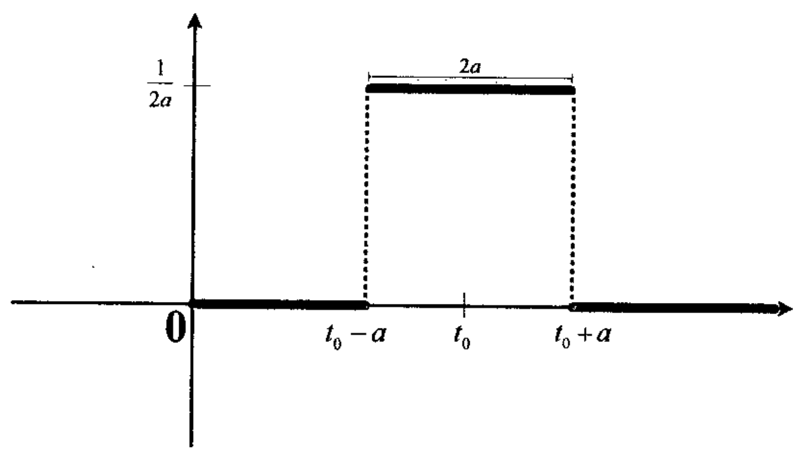
3.7 FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

3.7.1 Definición. Dados $a>0$ y $t_0>0$, la función definida y denotada por

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\leq t<t_0-a \\ \dfrac{1}{2a} & , \quad t_0-a\leq t<t_0+a \\ 0 & , \quad t\geq t_0+a \end{cases}$$

Es llamada ***impulso unitario***.

Figura 3.3: Función Impulso Unitario



Fuente: Zill D, Cullen

3.7.2 Propiedad. La función impulso unitario satisface: $\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt=1$, en efecto

$$\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt = 0+\int_{t_0-a}^{t_0+a}\frac{1}{2a}dt = \left.\frac{t}{2a}\right|_{t_0-a}^{t_0+a} = 1$$

3.7.3 Definición. La función delta de Dirac se define como:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$$

3.7.4 Propiedad. La función Delta de Dirac satisface:

(i) $\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty & , \quad t=t_0 \\ 0 & , \quad t\neq t_0 \end{cases}$

(ii) $\int_0^\infty \delta(t-t_0)dt=1$

Lo cual indica que no es una función.

3.7.5 Teorema

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \;; t_0 > 0$$

Prueba

La función impulso unitario en términos de la función escalón unitario viene dado por $\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\left[\mu(t-(t_0-a)) - \mu(t-(t_0+a))\right]$, aplicamos la Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-sa(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-sa(t_0+a)}}{s}\right] = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)$$

Tomando límite cuando $a \to 0$ se tiene la forma indeterminada $0/0$, luego aplicamos L'Hospital

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0) = e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa} = e^{-st_0}$$

Ejemplos

$(1)\ \mathscr{L}\{\delta(t-2)\} = e^{-2s}$

$(2)\ \mathscr{L}\{\delta(t-2\pi)\} = e^{-2\pi s}$

(3) Resolver $y''-2y'+y = \delta(t-1)$; $y(0)=0$, $y'(0)=5$

Solución

Aplicando la Transformada

$$s^2y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sy(s) - 2y(0) + y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2-2s+1)y(s) = e^{-s}+5 \qquad \rightarrow \qquad y(s) = \frac{e^{-s}+5}{(s-1)^2}$$

Aplicamos la Transformada inversa y linealidad

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}\right\} + 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= \mu(t-1)\,(t-1)e^{t+1} + 5te^{-t}$$

(4) Resolver la siguiente ecuación integro – diferencial

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\alpha)\cos(t-\alpha)\,d\alpha \ , \ y(0)=1$$

Solución

Aplicamos la Transformada

$$sy(0)-y(0)=\mathscr{L}\{\cos t\}+\mathscr{L}\left\{\int_0^t y(\alpha)\cos(t-\alpha)d\alpha\right\}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}+y(s)\frac{s}{s^2+1} \qquad \left(s-\frac{s}{s^2+1}\right)y(s)=\frac{s}{s^2+1}+1$$

$$y(s)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s^2+1}{s^3}+\frac{s^2+1}{s^3} \qquad y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}$$

Aplicando la Transformada inversa se tiene la solución

$$y(t)=t+1+\frac{t^2}{2}$$

(5) Resolver el sistema de ecuaciones siguientes:

$$x'=3x+2y+9t;\ y'=3y+9\ ;\ \forall\ t>0\ ;\ x(0)=0, y(0)=0$$

Solución

Aplicando la Transformada de Lapalce y las condiciones iniciales a cada ecuación:

$$sx(s)-x(0)=3x(s)+2y(s)+\frac{9}{s^2}$$

$$sy(s)-y(0)=3y(s)+\frac{9}{s}$$

Despejando $x(s)$ y $y(s)$ obtenemos:

$$x(s)=\frac{18}{s(s-3)^2}+\frac{9}{s^2(s-3)}=\frac{1}{s}-\frac{3}{s^2}-\frac{1}{s-3}+\frac{6}{(s-3)^2}$$

$$y(s)=\frac{9}{s(s-3)}=-\frac{3}{s}+\frac{3}{s-3}$$

Aplicando la Transformada inversa obtenemos

$$x(t)=1-3t-e^{3t}+6te^{3t}\ ;\ y(t)=-3+3e^{3t}$$

Que es la solución del sistema.

CAPÍTULO IV:

SOLUCIONES DE ECUACIONES LINEALES EN SERIES DE POTENCIAS

4.1 CONCEPTOS BÁSIOS DE SERIES DE POTENCIAS

4.1.1. Definición. Una serie de potencias en $x-x_0$ es una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$, llamada también serie de potencias centrada en x_0. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}$ es una serie de potencias en x centrada en $x_0=0$.

Dado un valor de x, una serie de potencias s una serie de constantes. Si la serie equivale a una constante real finita para la x dada, se dice que la serie converge en x, caso contrario se dice que la serie diverge en x. El conjunto de números para los cuales la serie converge es llamado ***intervalo de convergencia***.

4.1.2 Definición. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, tal que $L=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ si $0\le L<\infty$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias se define como $R=\frac{1}{L}$, donde $R=0$ si $L=\infty$ y $R=\infty$ si $L=0$

4.1.3 Teorema. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ solo se verifica una de las siguientes probabilidades.

a) La serie converge en su centro x_0, en este caso, $R=0$.

b) La serie converge $\forall x\in\mathbb{R}$, en este caso $R=\infty$.

c) La serie converge $\forall x$ que satisface $|x-x_0|< R$, donde $R>0$, y la serie diverge $\forall x$, tal que $|x-x_0| > R$.

Observaciones

1. La desigualdad $|x-x_0|< R$ es equivalente a $x_0 - R < x < x_0 + R$, así el intervalo de convergencia absoluta de la serie de potencias es $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$.
2. Si una serie de potencias converge para la x tales que $|x-x_0|< R, R>0$ entonces puede o no converger en los extremos del intervalo $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$.
3. Una serie de potencias centrada en x_0 define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie $R>0$. Luego en este intervalo existe es diferenciable e integrable y se tiene que $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$.

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Aunque el radio de convergencia de ambas series es R, el intervalo de convergencia puede ser diferente al de la serie original puesto que la convergencia en los extremos se puede perder por diferenciación o generar por integración.

Ejemplos

1. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$

Solución

El radio de convergencia es $R = \frac{1}{L}$, donde

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}n+1}}{\dfrac{1}{2^{n}n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

La serie converge absolutamente cuando $|x-3|<2$, es decir, en $\langle 1,5\rangle$.

Para $x=1$ se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ la cual es convergente por ser una serie alternada.

Para $x=5$ se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ la cual es divergente por ser la serie armónica.

2. Determine el intervalo de convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ 3^n(x-5)^n}$.

Solución

La serie es equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left[(x-5)^{-1}\right]^n}{n\ 3^n}$; hallando el límite

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ 3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(3^{-1}\right)=\frac{1}{3}$$

Luego $R=3$y la serie converge absolutamente para $|x-5|^{-1}<3$, esto es:

$$|x-5|>\frac{1}{3} \quad\leftrightarrow\quad x-5>\frac{1}{3} \quad\vee\quad x-5<-\frac{1}{3}$$

$$\leftrightarrow\quad x>\frac{1}{16} \quad\vee\quad x<\frac{14}{3}$$

Para $x=\frac{16}{3}$ se tiene la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ la cual es convergente

para $x=\frac{14}{3}$ se tiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.3^n(-1/3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ la cual es divergente.

Por tanto, el intervalo de convergencia es: $\left\langle -\infty, \frac{14}{3} \right\rangle \cup \left[\frac{16}{3}, +\infty \right\rangle$

4.2 SOLUCIÓN EN TORNO A PUNTO ORDINARIO

4.2.1 Definición.- Dada la ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (*)$$

Donde $a_2(x) \neq 0$, la cual es equivalente a:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (**)$$

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es p unto ordinario de la ecuación (*) si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0 es decir ambas funciones se pueden expresar en forma de series de potencias en dicho punto. Un punto que no es ordinario es llamado ***punto singular***.

Ejemplos:

1) La ecuación $y'' + (sen\ x)y' + e^x y = 0$ tiene un punto ordinario en $x=0$, ya que:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad ; \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

2) La ecuación $y'' + (\ln x)y' = 0$ tiene un punto singular en $x=0$, pues $q(x) = \ln x$ no admite un desarrollo en series de potencias.

4.2.2 Teorema. Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (**), entonces existen $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias centradas en x_0, $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$, donde por lo menos una de las soluciones converge para $|x - x_0| < R$, *R* es el radio de convergencia de la serie.

Ejemplo:

1. Resolver la ecuación diferencial $y'' + xy = 0$ en torno a un punto ordinario.

Solución:

$x = 0$ es un punto ordinario , luego $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ es solución de la ecuación, derivando se tiene:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \; ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

Al sustituir en la ecuación obtenemos:

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

$$= 2C_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

Uniformizamos los índices en ambas sumatorias, procedemos como sigue:

Hacemos $\begin{cases} k = n-2 \\ k+2 = n \end{cases}$ en la primera ecuación, y luego $\begin{cases} k = n+1 \\ k-1 = n \end{cases}$ en la segunda. Por tanto:

$$y'' + xy = 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k$$

$$= 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) + C_{k-1} \right] x^k = 0$$

De donde se debe cumplir: $2C_2 = 0$ entonces $C_2 = 0$, y

$$(k+2)(k+1) C_{k+2} + C_{k-1} = 0$$

Entonces: $$C_{k+2} = \frac{-C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \; ; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora bien, reemplazando los valores de *k* se tiene:

$$C_3 = \frac{-C_0}{(3)(2)} \quad ; \; C_4 = \frac{-C_1}{(3)(4)}; \qquad C_5 = 0 ; \qquad C_6 = \frac{C_0}{(2)(3)(5)(6)};$$

$$C_7 = \frac{-C_1}{(3)(4)(6)(7)} \quad ; \qquad C_8 = 0 ; \qquad C_9 = \frac{-C_0}{(2)(3)(5)(6)(8)(9)};$$

$$C_{10} = \frac{-C_1}{(3)(4)(6)(7)(9)(10)} \; ; \; C_n = 0 \; ; \quad C_0 \, , C_1 \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots .$$

$$y = C_0 + C_1 x + (0)x^2 - \frac{C_0}{(3)(2)}x^3 - \frac{C_1}{(3)(4)}x^4 + (0)x^5 - \frac{C_0}{(2)(3)(5)(6)}x^6 -$$

$$-\frac{C_1\, x^7}{(3)(4)(6)(7)} + (0)x^8 - \frac{C_0\, x^9}{(2)(3)(5)(6)(8)(9)} - \frac{C_1\, x^{10}}{(3)(4)(6)(7)(9)(10)}$$

$$y = C_0\left(1 - \frac{x^3}{(3)(2)} - \frac{x^6}{(2)(3)(5)(6)} - \frac{x^9}{(2)(3)(5)(6)(8)(9)} - \ldots\right) +$$

$$C_1\left(x - \frac{x^4}{(3)(4)} - \frac{x^7}{(3)(4)(6)(7)} - \frac{x^{10}}{(3)(4)(6)(7)(9)(10)} - \ldots\right)$$

Así:

$$y_1(x) = \; C_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[1\,.\,4\,.\,7\,.\ldots.(3k-2)\right]}{(3k)!}\, x^{3k}\right]$$

$$y_2(x) = \; C_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[2\,.\,5\,.\,8\,.\ldots.(3k-1)\right]}{(3k+1)!}\, x^{3k+1}\right]$$

Aplicando el criterio de la razón, vemos que esta serie converge para $|x| < \infty$

2. Resolver la ecuación diferencial $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$ en torno a punto ordinario $x_0 = 0$

Solución

$x_0 = 0$ es punto ordinario, luego $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ es solución de la ecuación diferencial, derivando se tiene:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} \ ; \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Al sustituir en la ecuación dada obtenemos:

$$\left(1+x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Uniformizando índices:

$$2C_2 - 2C_0 + 6C_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=2} (k-1)(k+2)C_k x^k = 0$$

Luego se debe tener: $2C_2 - 2C_0 = 0$; $6C_3 = 0$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + (k-1)(k+2)C_k = 0$$

De donde $C_2 = C_0$; $C_3 = 0$;$C_{k+2} = -\dfrac{(k+1)C_k}{k+1}$; $k \geq 2$

Reemplazando los valores de k tenemos:

$$C_4 = -\frac{C_2}{3} = -\frac{C_0}{3} \ ; \ C_5 = 0 \ ; \ C_6 = \frac{C_0}{5}; \ C_7 = 0 \ ; \ C_8 = -\frac{5}{7}; \ldots$$

$$C_1 \ , C_0 \in \mathbb{R}$$

Luego: $\quad y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$

$$y = C_0 + C_1 x + C_0 x^2 + 0x^3 - \frac{C_0}{3}x^4 + 0x^5 + \frac{C_0}{5}x^6 + \ldots$$

$$\therefore y = C_0\left[1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \ldots\ldots\right] + C_1 x$$

Es solución de la ecuación diferencia, donde:

$$y_1 = 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \ldots\ldots ; \ y_2 = x$$

Son soluciones linealmente independientes.

4.3 SOLUCIONES EN TORNO A PUNTO SINGULAR REGULAR

4.3.1 Definición. Un punto $x = x_0$ es un punto ***singular regular*** de la ecuación (*) si tanto $(x - x_0)p(x)$ como $(x - x_0)^2 q(x)$ son analíticos en

$x=x_0$. Un punto singular que no es regular es llamado ***punto singular irregular*** de la ecuación (*).

Ejemplo:

Sean $x=-2$, $x=2$ puntos singulares de la ecuación:

$\left(x^2-4\right)^2 x+(x-2)y'+y=0$

$x=2$ es un punto singular regular, y $x=-2$ es un punto singular irregular.

4.3.2 Teorema de Frobenius

Si $x=x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial ordinaria:

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

Entonces, existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$$

Donde *r* es una constante a determinar.

Esta serie converge en un intervalo de la forma $0<x-x_0<R$.

Ejemplo

Utilizar el teorema de Frobenius para hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial: $3xy''+y'-y=0$

Solución:

$x=0$ es punto singular y es regular porque: $p(x)=\dfrac{1}{3x}$; $q(x)=-\dfrac{1}{3x}$.

Suponemos una solución de la forma:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad \text{derivando}: \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-2}$$

Y sustituimos en la ecuación diferencial:

$$3xy''+y'-y=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n\right]=0$$

Sacamos la potencia más baja:

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n\right]=0$$

$$\text{Haciendo: }\begin{cases} k=n-1 & \rightarrow \quad n=k+1 \\ n=1 & \rightarrow \quad k=0 \end{cases}$$

Luego:

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k\right]=0$$

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}-C_k\right]x^k\right]=0$$

En potencias de: x^{-1} : $r(3r-2)C_0$

Y en potencias de:

$$x^k:\ (k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}-C_k=0 \quad \text{con} \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Si: $C_0\neq 0 \rightarrow \underbrace{r(3r-2)=0}_{ec.\ indicial} \Rightarrow \underbrace{r_2=0 \quad r_1=\frac{2}{3}}_{\text{índices (o exponentes) de la singularidad}}$ y

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)} \quad \text{con} \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Con $r_1=\frac{2}{3}$ que es la raíz mayor, entonces:

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{\left(k+\frac{5}{2}\right)(3k+3)}=\frac{C_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k=0,1,2,3,\ldots \quad (1)$$

Con $r_2=0$, tenemos:

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k=0,1,2,3,\ldots \quad (2)$$

Iterando (1):

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

$$k=0 \quad : C_1 = \frac{C_0}{(5)(1)}$$

$$k=1 \quad : C_2 = \frac{C_1}{(8)(2)} = \frac{C_0}{(5)(1)(8)(2)} = \frac{C_0}{(2!)(5)(8)}$$

$$k=2 \quad : C_3 = \frac{C_2}{(11)(3)} = \frac{C_0}{(5)(1)(8)(2)(11)(3)} = \frac{C_0}{(3!)(5)(8)(11)}$$

$$k=3 \quad : C_4 = \frac{C_3}{(14)(4)} = \frac{C_0}{(4!)(5)(8)(11)(14)}$$

Generalizando se tiene:

$$C_n = \frac{C_0}{(n!)(5)(8)(11)(14)\ldots(3n-2)}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Iterando, ahora (2):

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

$$k=0 \quad : C_1 = \frac{C_0}{(1)(1)}$$

$$k=1 \quad : C_2 = \frac{C_1}{(2)(4)} = \frac{C_0}{(1)(1)(2)(4)}$$

$$k=2 \quad : C_3 = \frac{C_2}{(3)(7)} = \frac{C_0}{(1)(1)(2)(4)(3)(7)} = \frac{C_0}{(3!)(4)(7)}$$

$$k=3 \quad : C_4 = \frac{C_3}{(4)(10)} = \frac{C_0}{(4!)(4)(7)(10)}$$

Generalizando:

$$C_n = \frac{C_0}{(n!)(1)(4)(7)(10)\ldots(3n-2)}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$r_1 = \frac{2}{3} \rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^{\frac{2}{3}} \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \right]$$

$$= x^{\frac{2}{3}} \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{(n!)(5)(8)(11)(14)\ldots(3n-2)} x^n \right]$$

$$= C_0 x^{\frac{2}{3}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)(5)(8)(11)(14)\ldots(3n-2)} \right]$$

$$r_1 = 0 \rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \right]$$

$$= \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{(n!)(1)(4)(7)(10)\ldots(3n-2)} x^n \right]$$

$$= C_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)(1)(4)(7)(10)\ldots(3n-2)} \right]$$

Luego, la solución general es:

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2$$

$$y = k_1 C_0 x^{\frac{2}{3}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)(5)(8)(11)(14)\ldots(3n-2)} \right] +$$

$$+ k_2 C_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)(1)(4)(7)(10)\ldots(3n-2)} \right]$$

Observamos que para este ejemplo:

$$r_1 = \frac{2}{3},\ r_2 = 0 \rightarrow r_1 - r_2 = \frac{2}{3} \neq \text{entero}$$

Nota: en general, si $x=0$ es un punto singular regular, entonces las funciones $x\,p(x)$ y $x^2 q(x)$ son analíticas en $x=0$, es decir:

$$x\,p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots$$

$$x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots$$

Son convergentes en intervalos de radio positivo. Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial y simplificar, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en r que resulta de igualar a cero el coeficiente de la menor potencia de x. siguiendo este procedimiento se puede mostrar que la ecuación indicial es:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Se hallan las raíces de la ecuación indicial y se sustituyen en la relación de recurrencia.

Con las raíces de la ecuación inicial pueden ocurrir los siguientes casos:

a) **Caso 1**: cuando $r_1 - r_2 \neq$ entero positivo $(r_1 > r_2)$, entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1};\ a_0 \neq 0 \qquad ; \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2},\ b_0 \neq 0$$

b) **Caso 2**: cuando $r_1 - r_2 =$ entero positivo $(r_1 > r_2)$, entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1},\ C_0 \neq 0$$

$$y_2 = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_2}\ b_0 \neq 0$$

Donde C es una constante que puede ser cero.

c) **Caso 3**: cuando $r_1 = r_2 = r$, entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r},\ C_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

4.4 FUNCIONES DE BESSEL

4.4.1 Funciones de Bessel de orden natural

La ecuación diferencial de Bessel de orden ν, viene representada por:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

O bien: $$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

Donde $x \in \mathbb{R}$ y $\nu \geq 0$ $\left(\text{podría ser } x, \nu \in \mathbb{C}\right)$.

Mediante series de potencias para $x_0 = 0$ punto singular regular la solución de la ecuación de Bessel para $\nu \in \mathbb{N}$

La función $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,(\nu+k)!}$

Además, como:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{k+1} (x/2)^{n+2k+2}}{(k+1)!\,(n+k+1)!}}{\dfrac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{(x/2)^2}{(k+1)(n+k+1)} = 0 \; (\forall x \in \mathbb{R})$$

La serie que define a $J_n(x)$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Funciones de Bessel de primera serie y orden arbitrario

La función

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

es llamada función de Bessel de primera especie y orden ν $\left(x, \nu \in \mathbb{R}\right)$.

Tenemos que la solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

Viene dada por: $$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación.

En el caso de la ecuación diferencial de Bessel, se comprueba que las soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes siempre que $\nu \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, sin embargo, para $r = 1,2,3,\ldots$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-\nu+2k}}{k!\,(k-\nu)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (x/2)^{\nu+2s}}{(\nu+s)!\, s!} = (-1)^n J_\nu(x)$$

Por lo que para $\nu = n \in \mathbb{N}, J_n(x)$ y $J_{(-n)}(x)$ no son linealmente independientes.

4.4.3 Funciones de Bessel de segunda especie

Las funciones de Bessel de segunda especie y orden ν, denotadas por $Y_\nu(x)$ vienen definidas por la fórmula:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)} \qquad (\nu \in \mathbb{R}-\mathbb{Z})$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x)$$

La función $Y_\nu(x)$ es solución de la ecuación de Bessel, ya que es combinación lineal de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ que son soluciones de la misma. Además $Y_\nu(x)$ es linealmente independiente con $J_\nu(x)$ y con $J_{-\nu}(x)$.

Ejemplos

1. La solución general de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0 \quad \text{en} \quad \langle 0,\infty\rangle \text{ es:}$$

$$y = C_1 J_{\frac{1}{3}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(x) \qquad \text{puesto que } \nu^2 = \frac{1}{9}$$

2. La solución general de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0 \quad \text{en} \quad \langle 0,\infty\rangle \text{ es:}$$

$$y = C_1 J_2(x) + C_2 J_{-2}(x) \qquad \text{puesto que } \nu^2 = 4$$

4.5 EJERCICIOS RESULTOS

4.5.1 En cada ejercicio, hallar el intervalo de convergencia:

$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n . x^n}{n^2}$

Solución

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right| = \frac{2^{n+1} . n^2}{(n+1)^2 . 2^n} = 2 \text{ ; luego } |x| < 2^{-1} \text{ entonces } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Para: $x = -\frac{1}{2}$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{converge, pues es alternada}$$

Para: $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(\frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{n^2} \quad \text{Es divergente, pues es una serie con } p = 2$$

Por lo tanto el intervalo de convergencia es: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Solución

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)\, n!}{n!} = \infty \text{ ; luego } \quad |x| < 0$$

Por lo tanto, la serie converge solo en : $x = 0$

$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100)^n (x+7)^n}{n!}$

Solución

$$L = \lim_{n \to 0} \left| \frac{\frac{(100)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(100)^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to 0} \frac{(100)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, (100)^n} = 0$$

En este caso el intervalo de convergencia es $\langle -\infty, \infty \rangle$; $\therefore$ converge $\forall x$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(x-5)^n$

Solución

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{10^{n+1}}}{\dfrac{1}{10^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{10^{n+1}}=\frac{1}{10},\text{ el radio de convergencia es } R=10$$

luego: $|x-5|<10$,entonces $-10<x-5<10$, esto es $-5<x<15$

Para $x=-5$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(-10)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1 \quad \text{entonces es divergente}$$

Para $x=15$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(10)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \quad \text{entonces diverge}$$

Luego la serie converge en: $\langle -5,15\rangle$

$(e)\ \sum_{k=0}^{\infty}k!\,(x-1)^k$

Solución

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!}{k!}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)k!}{k!}=\lim_{k\to\infty}(k+1)=\infty$$

Entonces la serie converge solo en $x=1$

$(f)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$

Solución

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(2n-1)3^{2n+1}}}{\dfrac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{9(2n-1)}=\frac{1}{9},\text{ el radio de convergencia es } R=9$$

Luego $|x|<9$, entonces $-9<x<9$

Para $x=-9$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n(-9)^n}{(2n-1)3^{2n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(9)^n}{(2n-1)3^{2n-1}}\quad \text{es divergente}$$

Para $x=9$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n(9)^n}{(2n-1)3^{2n-1}}=\frac{3(-1)^n}{(2n-1)}\quad \text{es convergente}$$

Luego la serie converge en: $\langle -9\,,9]$

$(g)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n}$

Solución

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

luego $r=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}}=e$; y $|x|<e$, es decir $-e<x<e$

Para $x=-e$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(-e)^n}{n^n}$; es divergente

Para $x=e$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(e)^n}{n^n}$; es divergente

$\therefore$ La serie converge en $\langle -e\,,e\rangle$

$(h)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\,x^n}{n!}$

Solución

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{(n+1)(n^n)(n!)}=e,\ \text{el radio de convergencia es } R=e$$

Luego: $|x|<\dfrac{1}{e}$; entonces $-\dfrac{1}{e}<x<\dfrac{1}{e}$

Para $x = -\frac{1}{e}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n; \qquad \text{es divergente}$$

Para $x = \frac{1}{e}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n; \qquad \text{es divergente}$$

Entonces: $\left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right\rangle$; es el intervalo de convergencia.

4.5.2 Resuelva la ecuación diferencial dada, suponiendo que una solución en serie de potencia es: $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

(a) $y' + y = 0$

Solución

Se conoce que la solución es de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \text{, luego: } y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

Por tanto:

$$y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \qquad = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{k=n} = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0 \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)C_{k+1} + C_k\right] x^k = 0$$

$$(k+1)C_{k+1} + C_k = 0 \quad \rightarrow \quad C_{k+1} = \frac{-C_k}{(k+1)}$$

$$C_1 = -\frac{C_0}{1} \qquad C_2 = +\frac{C_0}{2} \qquad C_3 = -\frac{C_0}{6} \qquad C_4 = +\frac{C_0}{24}$$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \ldots$$

$$y = C_0 - C_0 x + \frac{C_0 x^2}{2} - \frac{C_3 x^3}{6} + \frac{C_4 x^4}{24} + \ldots$$

$\therefore\ y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$; $y = Ce^{-x}$ es solución de la Ecuación Diferencial.

$(b)\ y' - x^2y = 0$

Sabiendo que:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n;\ \text{ entonces } y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}\ \text{, así}$$

$$y' - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \qquad = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}}_{k=n+2} = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^k \quad = C_1 + 2C_2x + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^k = 0$$

$$= C_1 + 2C_2x + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)C_{k+1} - C_{k-2}\right]x^k = 0$$

$$C_1 = 0 \quad , \quad C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{k+1}\ ,\ k \geq 2 \qquad 2C_2 = 0$$

Iterando tenemos:

$$C_3 = \frac{C_0}{3} \qquad C_5 = \frac{C_2}{5} = 0 \qquad C_9 = \frac{C_0}{162}$$

$$C_4 = \frac{C_1}{4} = 0 \qquad C_6 = \frac{C_3}{6} = \frac{C_0}{18} \qquad C_8 = 0\ , \ldots$$

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \ldots$$

$$y = C_0 + 0x + \frac{0x^2}{2} + \frac{C_0x^3}{3} + \frac{0x^4}{24} + 0x^5 + \frac{C_0x^6}{18} + 0x^7 + 0x^8 + \frac{C_0x^9}{162} + \ldots$$

$$y = \mathrm{C}_0 \left[1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6.3} + \frac{x^9}{9.18} + \ldots\right]$$

$$\therefore\ y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{x^{3n}}{3^n} \qquad \text{es solución de la ecuación diferencial}$$

$(c)\ (1-x)y' - y = 0$

Solución

Se conoce que:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad \text{derivando:} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}\ ;\ \text{luego}$$

$$(1-x)y'-y=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{k=n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k-1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k-1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^k - C_0 - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$=C_1 - C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)C_{k-1} - kC_k - C_k\right]x^k = 0$$

Así tenemos:

$$C_1 = C_0 \qquad C_{k-1} = \frac{kC_k + C_k}{(k+1)} \ ; k \geq 1$$

De donde:

$$C_1 = C_0 \qquad C_2 = C_0 \ ; \qquad C_3 = C_0 \qquad C_4 = C_0 \ , \ldots$$ luego:

$$y = C_0\left[1 + x^2 + x_3 + x_4 + x^5 + \ldots\right]$$

$\therefore \ y = C\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, es solución de la ecuación diferencial

(d) $y'' + y = 0$

Solución:

Sabiendo que:

$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ Derivando dos veces $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$, luego

$$y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{k=n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k\right]x^k$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k = 0 \qquad C_{k+2} = -\frac{C_k}{(k+2)(k+1)}$$

Dándole valores a k, con $C_0 \neq 0$ $\qquad C_1 \neq 0$

$$C_2 = -\frac{C_0}{2} \qquad C_3 = -\frac{C_1}{6} \qquad C_4 = \frac{C_0}{24} \qquad C_5 = -\frac{C_1}{120} \qquad C_6 = -\frac{C_0}{720}, \ldots$$

Luego: $\quad y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0 x^2}{2} - \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_0 x^4}{24} + \frac{C_1 x^5}{120} + \ldots$

$$y = C_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right] + C_1\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right]$$

Es la solución de la ecuación diferencial

$(e)\ y'' + (\cos x) y = 0$

Solución

Se conoce que:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Luego:

$$y'' + (\cos x) y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right] \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right]\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k + \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right]\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\right]$$

$$= 2C_2 + C_0 + (6C_3 + C_1) x + \left(12C_4 + C_2 - \frac{C_0}{2}\right) x^2 + \left(20C_5 + C_3 - \frac{C_1}{2}\right) x^3$$

$$C_2 = -\frac{C_0}{2} \qquad C_3 = -\frac{C_1}{6} \qquad C_4 = \frac{C_0}{24} - \frac{C_2}{12} \qquad C_5 = \frac{C_1}{40} - \frac{C_3}{20}$$

Luego:

$$C_0 \neq 1 \quad ; \qquad C_1 \neq 0$$

$$C_2 = -\frac{C_0}{2} \qquad C_3 = -\frac{C_1}{6} \qquad C_4 = \frac{C_0}{12} \qquad C_5 = \frac{C_1}{30}\ ; \ \ldots$$

Luego: $$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0 x^2}{2} - \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_0 x^4}{24} + \frac{C_1 x^5}{30} + \ldots$$

$$y = C_0\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \ldots\right] + C_1\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{30} + \ldots\right]$$

Es solución de la ecuación diferencial.

4.5.3 Encontrar dos soluciones en series de potencias en torno al punto ordinario $x=0$ y que sean linealmente independientes.

$(a) \quad y'' = xy$

Solución

$$y''-xy=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}}_{k=n-2}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}}_{k=n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k-\sum_{n=0}^{\infty}C_{k-1}x^k$$

$$=2C_2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2}-C_{k-1}\right]x^k=0$$

$$C_2=0$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2}-C_{k-1}=0$$

$$C_{k+2}=\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)},\qquad k=1,2,3,\ldots$$

Escogemos: $C_0\neq 1\ \wedge\ C_1\neq 0$

Tenemos:

$$C_3=\frac{C_0}{6}\qquad C_4=\frac{C_1}{12}\qquad C_5=0\qquad C_6=\frac{C_0}{180}\qquad C_7=\frac{C_1}{504}$$

Luego: $y(x)=C_0+C_1x+\dfrac{C_0x^3}{6}+\dfrac{C_1x^4}{24}+\dfrac{C_0x^6}{180}+\dfrac{C_1x^7}{504}+\ldots$

Entonces: $y(x)=C_0\left[1+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^6}{180}+\ldots\right]+C_1\left[x+\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^7}{504}+\ldots\right]$

De donde:

$$y_1=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\ldots$$

$$y_2=x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^7}{504}+\ldots$$

$(3b)$. $y''-2xy'+y=0$

Solución

$$y''-2xy'+y=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}}_{k=n-2}-\underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n}_{k=n}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n}_{k=n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k-2\sum_{n=1}^{\infty}kC_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$$

$$2C_2+C_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2}-(2k-1)C_k\right]x^k=0$$

$$2C_2 + C_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = -\frac{C_0}{2}$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} - (2k-1)C_k = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{(2k-1)C_k}{(k+2)(k+1)}, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Iterando y considerando: $C_0 \neq 1 \quad \wedge \quad C_1 \neq 0$

Tenemos :

$$C_2 = -\frac{C_0}{2} \qquad C_3 = \frac{C_1}{6} \qquad C_4 = -\frac{C_0}{8} \qquad C_5 = \frac{C_1}{24} \qquad C_6 = \frac{7C_0}{240} \qquad C_7 = \frac{C_1}{112}$$

Luego: $y(x) = C_0 + C_1x - \frac{C_0x^2}{2} + \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_0x^4}{8} + \frac{C_1x^5}{24} + \frac{C_0x^6}{240} + \frac{C_1x^7}{112} + \ldots$

$$y(x) = C_0\left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{7}{240}x^6 - \ldots\right] + C_1\left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^7}{112} + \ldots\right]$$

De donde: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{7}{240}x^6 - \ldots$ y $y_2 = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^7}{112} + \ldots$

Son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

$(3c) \quad y'' + x^2y' + xy = 0$

Solución

$$y'' + x^2y' + xy = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_nx^{n+1}}_{k=n+1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_nx^{n+1}}_{k=n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)C_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}C_{k-1}x^k$$

$$= 2C_2 + (6C_3 + C_0)x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + kC_{k-1}\right]x^k = 0$$

Tenemos: $\quad C_2 = 0$

$$6C_3 + C_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_3 = -\frac{C_0}{6}$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + kC_{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad C_{k+2} = \frac{-kC_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \; k \geq 2$$

Itinerando tenemos para $\quad C_1 \neq 0$

$$C_4 = -\frac{1}{6} \qquad C_5 = 0 \qquad C_6 = \frac{C_0}{45} \qquad C_7 = \frac{7}{252}$$

Luego: $y(x)=C_0+C_1x-\frac{C_0x^3}{6}-\frac{C_1x^4}{6}+\frac{C_0x^6}{45}+\frac{C_1x^7}{252}+\ldots$

$$y(x)=C_0\left[1-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{45}x^6-\ldots\right]+C_1\left[x-\frac{x^4}{6}+\frac{5x^7}{252}-\ldots\right]$$

De donde: $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{45}x^6-\ldots$ y $y_2=x-\frac{x^4}{6}+\frac{5x^7}{252}-\ldots$

Son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$(3d)\ (x-1)y''+y'=0$

Solución

$$(x-1)y''+y'=(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}$$

$$=x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}=0$$

$$=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-1}}_{k=n-1}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}}_{k=n-2}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}}_{k=n-1}=0$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)C_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k+1}x^k=0$$

$$=-2C_2+C_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(k+1)C_{k+1}-(k+2)(k+1)C_{k+2}+(k+1)C_{k+1}\right]x^k=0$$

Luego $-2C_2+C_1=0 \quad\rightarrow\quad C_2=\frac{C_1}{2}$

$$(k+1)(k+1)C_{k+1}-(k+2)(k+1)C_{k+2}=0 \qquad C_{k+2}=\frac{k+1}{k+2}C_{k+1};\ k=1,2,3\ldots$$

Para : $C_0\neq 1,\ C_1\neq 0$

tenemos: $C_2=\frac{C_0}{2}$ $\quad C_3=\frac{C_0}{3}$ $\quad C_4=\frac{C_0}{4}$

Así: $y_1=1$ $\quad y_2=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$

Son soluciones de la ecuación diferencial dada.

4.5.4 Use el método de las series de potencias para resolver el problemas con valores iniciales

$(a)\ (x-1)y''-xy'+y=0\ ;\quad y(0)=-2\ ;\quad y'(0)=6$

Solución

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad \text{luego:}$$

$$(x-1)y''-xy'+y=x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1}}_{k=n-1}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{k=n-2}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{k=n}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{k=n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(k+1)(k)C_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}kC_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$$

$$=-2C_2+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-(k+2)(k+1)C_{k+2}+(k+1)(k)C_{k+1}-(k-1)C_k\right]x^k=0$$

entonces $\qquad -2C_2+C_0=0 \qquad \rightarrow \qquad C_2=\dfrac{C_0}{2}$

$$-(k+2)(k+1)C_{k+2}+(k+1)(k)C_{k+1}-(k+1)C_k=0$$

$$C_{k+2}=\frac{kC_{k+1}}{k+2}-\frac{(k-1)C_k}{(k+2)(k+1)}, \qquad k=1,2,3,\ldots$$

Dando valores a k, tenemos:

$$C_0\neq 0, \quad C_1\neq 1, \quad C_2=\frac{C_0}{2}, \quad C_3=\frac{C_0}{6}, \quad C_4=\frac{C_0}{24}, \ldots$$

Así: $\qquad y=C_1\left(1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\ldots\right)+C_2x$

$$y'=C_1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\ \ldots\right)+C_2$$

De las condiciones iniciales: $\qquad C_1=-2 \qquad C_2=6$

$$\therefore\ y=-2\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\ldots\right)+6x=8x-2e^x$$

Es solución del problema con condiciones iniciales:

(b) $y''-2xy'+8y=0$, $\qquad y(0)=3$, $\qquad y'(0)=0$

Solución

$$y''-2xy'+8y=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{k=n-2}-\underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{k=n}+\underbrace{8\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{k=n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k-2\sum_{k=1}^{\infty}kC_k x^k+8\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$$

$$= 2C_2 + 8C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + (8-2k)C_k\right]x^k = 0$$

Entonces: $2C_2 + 8C_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = -4C_0$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + (8-2k)C_k = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{2(k-4)C_k}{(k+2)(k+1)} \; ; \; k = 1,2,3\ldots$$

Dando valores a k: $C_0 \neq 1$, $C_1 \neq 0$

$$C_2 = -4C_0 \; ; \; C_3 = C_1 \; ; \; C_4 = \frac{4}{3} \quad C_5 = \frac{C_1}{10}$$

Entonces:

$$y = C_1\left(1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4\right) + C_2\left(x - x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \ldots\right)$$

$$y' = C_1\left(8x + \frac{16}{3}x^3\right) + C_2\left(1 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots\right)$$

De las condiciones iniciales, se tiene: $C_1 = 3$, $C_2 = 0$

$$y = 3\left(1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4\right) = 3 - 12x^2 + 4x^4$$

Es solución del problema con condiciones iniciales dado.

4.5.6 Determine los puntos singulares y clasifíquela como regular e irregular:

(a) $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$

Solución

Como: $x^3 = 0$; $\qquad x = 0$

$$P(x) = \frac{4x^2}{x^3} = \frac{4}{x} \qquad\qquad Q(x) = \frac{3}{x^3}$$

$x = 0$ es punto singular irregular

(b) $(x^2-9)^2 y'' + (x+3)y' + 2y = 0$

Solución

$$(x^2-9)^2 = 0 \qquad \text{se tiene que:} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$P(x)=\frac{(x+3)}{(x^2-9)^2}=\frac{(x+3)}{(x+3)^2(x-3)^2}=\frac{1}{(x+3)(x-3)^2} \qquad Q(x)=\frac{2}{(x+3)^2(x-3)^2}$$

Luego, $x=3$ es punto singular irregular, y $x=-3$ es punto singular regular

$(c)\ (x^3+4x)y''-2xy'+6y=0$

Solución

$x^3+4x=x(x^2+4)=0 \qquad \rightarrow x=0\,,\ x=\pm 2i$

$$P(x)=\frac{-2x}{(x^3+4x)}=\frac{-2}{x^2+4}=\frac{-2}{(x+2i)(x-2i)}\ Q(x)=\frac{6}{x(x^2+4)}=\frac{6}{x(x+2i)(x-2i)}$$

$\therefore\ x=0\,,\ x=\pm 2i$ son puntos singular regular.

$(d)\ (x^2+x-6)y''+(x+3)y'+(x-2)y=0$

Solución

$x^2+x-6=(x+3)(x+2)=0 \rightarrow \qquad x=-3\ ,\ x=2$

$$P(x)=\frac{(x+3)}{(x^2+x-6)}=\frac{(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x-2}\ Q(x)=\frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

$\therefore\ x=-3,\ x=2$ son puntos singulares regulares

$(e)\ x^3(x^2-25)(x-2)^2y''+3x(x-2)y'+7(x+5)y=0$

Solución

$x^3(x^2-25)(x-2)^2=0 \qquad \rightarrow x=0\,,\ x=\pm 5\,,\ x=2$

$$P(x)=\frac{3x(x-2)}{x^3(x^2-25)(x-2)^2}=\frac{3}{x^3(x^2-25)(x-2)}$$

$$Q(x)=\frac{7(x+5)}{x^3(x^2-25)(x-2)^2}=\frac{7}{x^3(x-5)(x-2)^2}$$

$\therefore x=0$ es punto singular y regular;

$x=\pm 5\,,\ x=2$ son puntos singulares regulares.

Usar el método de Frobenios en torno $x_0=0$ (punto singular)

$(a)\ 2xy''-y'+2y=0$

Solución

Se sabe que:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad ; \qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-2}$$

Luego:

$$2xy''-y'+2y=2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2C_n x^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\left[2(n+r-1)-1\right]C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2C_n x^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-3)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2C_n x^{n+r}$$

$$=x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-3)C_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2C_n x^{n}\right]$$

$$=x^r\left[C_0(r)(2r-3)x^{-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)C_n x^{n-1}}_{k=n-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}2C_n x^{n}}_{k=n}\right]$$

$$=x^r\left[C_0(r)(2r-3)x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1+r)(2k+2r-1)C_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}2C_k x^k\right]$$

$$=x^r\left[C_0(r)(2r-3)x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1+r)(2k+2r-1)C_{k+1}+2C_k\right]x^k\right]$$

Para $r=0$ $\quad\rightarrow\quad$ $C_{k+1}=\dfrac{-2C_k}{(k+1)(2k-1)}\,;\ r=0$

$$C_1=2C_0 \quad , \quad C_2=-2C_0 \quad , \quad C_3=\frac{4C_0}{9}\,,\ldots.$$

Para $r=\dfrac{3}{2}\rightarrow$ $C_{k+1}=\dfrac{-C_k}{(k+5/2)(k+1)}\,;\ r=\dfrac{3}{2}$

$$C_1=\frac{-2C_0}{5} \quad , \quad C_2=\frac{2C_0}{35} \quad , \quad C_3=\frac{-4C_0}{945}$$

$$y = C_1\left(1+2x-2x^2+\frac{4}{9}x^3+\ldots\right)+C_2x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2}{5}x+\frac{2x^2}{35}-\frac{4x^3}{945}+\ldots\right)$$

$(b)\ 4xy''+\frac{1}{2}y'+y=0$

Solución

$$4xy''+\frac{1}{2}y'+y=4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\left[4(n+r-1)+\frac{1}{2}\right]C_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)C_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)C_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}\right]$$

$$=x^r\left[C_0\left(4r-\frac{7}{2}\right)(r)x^{-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\left(4n+4r-\frac{7}{2}\right)C_nx^{n-1}}_{k=n-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}}_{k=n}\right]$$

$$=x^r\left[\underbrace{C_0\left(4r-\frac{7}{2}\right)(r)x^{-1}}_{r=0\ \vee\ r=7/8}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1+r)\left(4k+4r+\frac{1}{2}\right)C_{k+1}x^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k}\right]$$

La Ecuación inicial: $r\left(4r-\frac{7}{2}\right)=0 \quad\rightarrow\quad r=0\ \wedge\ r=\frac{7}{8}$

Para $r=0 \quad\rightarrow\quad C_{k+1}=\dfrac{-C_k}{(k+1)\left(4k+\frac{1}{2}\right)}$

$C_0\neq 0,\quad C_1=-2C_0,\quad C_2=\dfrac{2C_0}{9},\quad C_3=-\dfrac{4C_0}{459}$

Para $r=\frac{7}{8} \quad\rightarrow\quad C_{k+1}=-\dfrac{C_k}{\left(k+\frac{15}{8}\right)(4k+4)}$

$C_0\neq 0,\quad C_1=-\dfrac{2C_0}{15},\quad C_2=\dfrac{2C_0}{345},\quad C_3=-\dfrac{4C_0}{32,085}$

$$\therefore\ y(x)=C_1\left(1+2x-\frac{2x^2}{9}-\frac{4}{459}x^3+\ldots\right)+C_2x^{\frac{7}{8}}\left(1+\frac{2x}{15}+\frac{2x^2}{345}-\frac{4x^3}{32{,}085}+\ldots\right)$$

$(c)\ \ 3xy''+(2-x)y'-y=0$

Solución

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}\qquad,\qquad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}$$

Luego:

$$3xy''+(2-x)y'-y=3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}+(2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)\left[(n+r-1)+2(n+r)\right]C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)C_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

$$=x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)C_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}\right]$$

$$=x^r\left[(r)(3r-1)C_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)C_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}\right]$$

$$=x^r\left[(r)(3r-1)C_0x^{-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-1)C_nx^{n-1}}_{k=n-1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n}}_{k=n}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}}_{k=n}\right]$$

$$=x^r\left[\underbrace{(r)(3r-1)C_0x^{-1}}_{r=0\ \vee\ r=1/3}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1+r)(3k+3r+2)C_{k+1}x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)C_kx^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k}\right]$$

La Ecuación inicial: $r(3r-1)=0\quad\rightarrow\quad r=0\ \wedge\ r=\frac{1}{3}$

Para $r=0\quad\rightarrow\quad C_{k+1}=\dfrac{(k+r)C_k+C_k}{(k+1)(3k+2)}=\dfrac{C_k}{(3k+2)}$

$C_0\neq 0\ ,\qquad C_1=\dfrac{C_0}{2}\qquad,\qquad C_2=\dfrac{C_0}{10}\qquad,\qquad C_3=\dfrac{C_0}{80}$

Para $r=1/3 \quad \rightarrow \qquad C_{k+1}=\dfrac{(k+1/3)C_k+C_k}{(k+4/3)(3k+2)}=\dfrac{C_k}{(3k+2)}$

$C_0 \neq 0 \ , \qquad C_1=\dfrac{C_0}{3} \qquad , \qquad C_2=\dfrac{C_0}{18}$

Entonces:

$$y=C_1x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{18}+\frac{x^3}{3^3.3!}+\ldots\right)+C_2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{80}+\ldots\right)$$

Es solución de la ecuación diferencial dada.

CAPÍTULO V:
SERIES DE FOURIER

En este capítulo desarrollaremos las SERIES DE FOURIER, que son representaciones de funciones de términos de senos y cosenos, los cuales nos permitirán resolver ecuaciones diferenciales parciales.

5.1 FUNCIONES ORTOGONALES

5.1.1 Definición. Dadas dos funciones f y g definidas en un intervalo $[a,b]$, diremos que f y g son ortogonales en $[a,b]$ si $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

5.1.2 Definición. Dadas las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_k$ definidas en $[a,b]$, se dice que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son ortogonales en $[a,b]$ si $\int_a^b f_i(x)\, f_j(x)dx = 0$, $i \neq j$.

Ejemplo 1

$f(x) = sen\,x$, $g(x) = \cos x$ son ortogonales en $[0,\pi]$.

En efecto: $\int_0^\pi sen\,x.\cos x\,dx = sen^2 x\Big|_0^\pi = 0$

Ejemplo 2

$f(x) = x, g(x) = x^2$, son ortogonales en $[-1,1]$.

En efecto: $\int_{-1}^1 x.x^2\,dx = \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_{-1}^1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$

Ejemplo 3

Las funciones $1, \cos\dfrac{\pi x}{p}, sen\dfrac{\pi x}{p}, \cos\dfrac{2\pi x}{p}, sen\dfrac{2\pi x}{p}, \ldots, \cos\dfrac{n\pi x}{p}, sen\dfrac{n\pi x}{p}$ son ortogonales en $[-p,p]$, $\forall n \geq 1$.

En efecto:

a) Probaremos que 1 y $sen\dfrac{n\pi x}{p}$ son ortogonales $\forall n\geq 1$

$$\int_{-p}^{p} 1.sen\frac{n\pi x}{p}\,dx = -\frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\bigg|_{-p}^{p} = -\frac{p}{n\pi}\cos n\pi + \frac{p}{n\pi}\cos(-n\pi) = 0$$

b) Probaremos que 1 y $cos\dfrac{n\pi x}{p}$ son ortogonales $\forall n\geq 1$, veamos:

$$\int_{-p}^{p} 1.\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\,sen\,\frac{n\pi x}{p}\bigg|_{-p}^{p} = \frac{p}{n\pi}sen\,n\pi - \frac{p}{n\pi}sen(-n\pi) = 0$$

c) Probaremos que $\cos\dfrac{n\pi x}{p}$ y $cos\dfrac{m\pi x}{p}$ son ortogonales, $m\neq n$.

Veamos:

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi x}{p}.\cos\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-p}^{p}\cos\frac{(n-m)\pi x}{p} + \int_{-L}^{L}\cos\frac{(n+m)\pi x}{p}\right] = 0$$

Puesto que $n-m\neq 0$; $n-m\in\mathbb{Z}$

d) Probaremos que $sen\dfrac{n\pi x}{p}$ y $sen\dfrac{m\pi x}{p}$ son ortogonales, $m\neq n$.

Veamos:

$$\int_{-p}^{p} sen\frac{n\pi x}{p}.sen\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-p}^{p}\cos\frac{(n-m)\pi x}{p} - \int_{-p}^{p}\cos\frac{(n+m)\pi x}{p}\right] = 0$$

Puesto que $n-m\neq 0$; $n-m\in\mathbb{Z}$

e) Probaremos que $sen\dfrac{n\pi x}{p}$ y $cos\,\dfrac{m\pi x}{p}$ son ortogonales, $n,m\in\mathbb{Z}$.

Veamos:

$$\int_{-p}^{p} sen\frac{n\pi x}{p}.\cos\frac{m\pi x}{p}dx = 0$$

Puesto que la función $sen\dfrac{n\pi x}{p}.\cos\dfrac{m\pi x}{p}$ es una función impar definida en $[-p,p]$.

5.2 SERIES DE FOURIER

5.2.1 Definición. Sean $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ .... funciones ortogonales definidas en $[a,b]$, tales que $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 0$, $\forall n\geq 1$. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$ es llamada representación de *f* en ***Series de Fourier*** de las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ...., donde los $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son llamados coeficientes de Fourier de *f* respecto a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y están definidas por:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}, \ \forall n \geq 1$$

Notación

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x), \ a \leq x \leq b$$

Ejemplo

Sea *f* una función integrable en $[-p, p]$, hallemos el desarrollo en Series de Fourier de *f* en términos de las funciones $1, sen\frac{n\pi x}{p}$ y $cos\,\frac{n\pi x}{p}$, $\forall n \geq 1$.

La $\int_{-p}^{p} \varphi_n^2(x)dx$ para $\varphi_n(x) = 1$ es $\int_{-p}^{p} dx = 2p$.

Para $\varphi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{p}$ es $\int_{-p}^{p} \cos\ \frac{2n\pi x}{p} dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left(1 + \cos\ \frac{2n\pi x}{p}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2n\pi}\ sen\ \frac{2n\pi x}{p}\right]_{-p}^{p} = p$$

Para $\varphi_n(x) = sen\frac{n\pi x}{p}$ es $\int_{-p}^{p} sen^2\,\frac{n\pi x}{p} dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left(1 - \cos\ \frac{2n\pi x}{p}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n\pi}\ sen\ \frac{2n\pi x}{p}\right]_{-p}^{p} = p$$

Luego, la Serie de Fourier de *f* en $[-p, p]$ es:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\ \frac{n\pi x}{p} + b_n\, sen\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Donde: $a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx,\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\ sen\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ \forall n\geq 1$$

5.3 SERIES DE FOURIER DE SENOS Y COSENOS

5.3.1 Teorema.

Sean *h* una función para y *k* una función impar definidas en $[-p,p]$. Entonces:

$(a)\ \int_{-p}^{p} h(x)dx = 2\int_{0}^{p} h(x)dx$ $\qquad (b)\int_{-p}^{p} k(x)dx=0$

$(c)\ \int_{-p}^{p} h(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 2\int_{0}^{p} h(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$

$(d)\ \int_{-p}^{p} k(x)sen\frac{n\pi x}{p}dx = 2\int_{0}^{p} k(x)sen\frac{n\pi x}{p}dx$

$(e)\ \int_{-p}^{p} h(x)sen\frac{n\pi x}{p} = 0$ $\qquad (f)\int_{-p}^{p} k(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx=0$

5.3.2 Teorema.

Sea *f* una función integrable en $[-p,p]$

i) Si *f* es una función par, entonces la Serie de Fourier de *f* en $[-p,p]$ está dada por: $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{p}$; donde:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \ \text{ y } \ a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ \forall n\geq 1$$

ii) Si *f* es una función impar, entonces la Serie de Fourier de *f* en $[-p,p]$ está dada por: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{p}$; donde:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\ sen\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ \forall n\geq 1$$

Nota

a) La expresión $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{p}$ es llamada el desarrollo en Series de funciones pares de *f* en $[-p,\ p]$.

b) La expresión $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,sen\frac{n\pi x}{p}$ es llamada desarrollo en Series de funciones impares de *f* en $[-p,\ p]$.

Ejemplo 1

Halle el desarrollo en Series de Fourier de $f(x)=1-3x^2$ en $[-1,1]$.

Solución:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-3x^2)dx=\frac{1}{2}(x-x^3)_{-1}^{1}=\frac{1}{2}[(1-1)-(-1+1)]=0$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-3x^2)\cos\frac{n\pi x}{p}dx=\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{p}dx-\int_{-1}^{1}3x^2\cos\frac{n\pi x}{p}dx$$

$$=-\frac{12}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-3x^2)sen\frac{n\pi x}{p}dx=\int_{-1}^{1}sen\frac{n\pi x}{p}dx-\int_{-1}^{1}3x^2sen\frac{n\pi x}{p}dx=0$$

Por tanto: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{p}=-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{n^2}$

Ejemplo 2

Determine la Serie de Fourier de $f(x)=2-x$ en $[-1,1]$.

Solución

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2-x)dx=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\right]=2$$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2-x)sen\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_{-1}^{1}sen\frac{n\pi x}{1}dx-\int_{-1}^{1}xsen\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$=\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Entonces: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p} = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n sen\, n\pi x$

Ejemplo 3

Determine la Serie de Fourier de $f(x) = 2x - 3x^2$ en $[-\pi, \pi]$

Solución

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2x - 3x^2\right)dx = -\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2x - 3x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2x - 3x^2\right)\cos nx\, dx$$

$$= -\frac{12}{n^2}(-1)^n \text{ , } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2x - 3x^2\right)sen\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2x - 3x^2\right)sen\, nx\, dx$$

$$= -\frac{4(-1)^n}{n} \text{ , } n \geq 1$$

Luego:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p} = -\pi^2 - 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n \cos nx - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n sen\, nx$$

Ejemplo 4

Determine la Serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ sen\, x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Solución

$p = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} sen\, x\, dx = \frac{1}{\pi}$$

$$a_1 = 0 \text{ ; } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen\, nx \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{1 - n^2} \text{ ; } n \geq 2$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \text{ ; } b_n = 0 \text{ ; } \forall n \geq 2$$

Luego, la Serie de Fourier de *f* es:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\, sen\, x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n - 1\right)}{1 - n^2}\cos nx$$

Ejemplo 5

Determine la Serie de Fourier de $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0\leq x<\pi \end{cases}$

Solución:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx=0\ ;\ n\geq 1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen\,nx\,dx=\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$$

Así, la Serie de Fourier de *f* es:

$$f(x)\sim\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\,sen\ nx$$

5.3.3 Teorema.

Sea *f* una función definida en $[-p,p]$. Si f y f' son seccionalmente continuas en $(-p,p)$, entonces la Serie de Fourier de *f* converge a $f(x)$ en un punto de continuidad.

Si *f* es discontinua en *x*, entonces converge hacia el valor promedio:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Ejemplo 1

Para $f(x)=2-x$, la Serie de Fourier es:

$$f(x)\ \sim 2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,sen\ n\pi x;\ \text{y}\ f(x)=\begin{cases} 3 & x=-1 \\ 2-x & -1<x<1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Para $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0\leq x<\pi \end{cases}$, la Serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\, sen\; nx\,;$$ *f* es discontinua en $x = 0$,

Luego, la Serie converge a:

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. Dada la función $f(x) = x^2;\ 0 < x < 1$

a) Hallemos la Serie de Fourier de *f* mediante la serie de cosenos:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = 2\int_0^1 x^2\, sen(n\pi x)dx = 0$$

Así $f(x) \approx \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$

b) Hallemos la Serie de Fourier de *f* mediante la serie de senos:

$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 x^2\, sen(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Así $f(x) \approx \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right\} sen(n\pi x)$

c) Hallemos la serie de Fourier de *f* mediante extensión periódica:

$$2p = 1 \rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos(2n\pi x)dx = 2\left\{\frac{1}{2n^2\pi^2}\right\} = \frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = 2\int_0^1 x^2\, sen(2n\pi x)dx = 2\left\{\frac{-1}{2n\pi}\right\} = \frac{-1}{n\pi}$$

Así: $f(x) \approx \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos(2n\pi x) - \frac{1}{n}sen(2n\pi x)\right\}$

DESARROLLO DE SERIES DE FOURIER EN LA MITAD DEL INTERVALO

Para representar mediante Series de Fourier una función *f* definida solo para $0 < x < p$ se define la función en el intervalo $-p < x < 0$ y para ello podemos distinguir los siguientes casos:

i) Reflejar la gráfica de la función respecto al eje Y en $-p < x < 0$, obteniéndose así una función par en $-p < x < p$.

ii) Reflejar la función respecto al origen en $-p < x < 0$, obteniéndose así una función par en $-p < x < p$.

iii) Definir *f* en $-p < x < 0$ como $f(x) = f(x+p)$

De aquí, como los coeficientes en el desarrollo de la Serie de Fourier se considera la función en $0 < x < p$ que es la mitad del intervalo $[-p, p]$, no hay necesidad de reflejar, solo debemos identificar el período *p*.

Ejemplo

Halle el desarrollo en Series de cosenos en medio intervalo de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

Solución

$p = 1$

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^{0} 0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2\int_0^{1/2} \cos n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi} sen\, n\pi x \int_0^{1/2} dx = \frac{2}{n\pi} sen \frac{n\pi}{2}$$

Así, el desarrollo en medio intervalo en series de cosenos de *f* es:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos n\pi x$$

CAPÍTULO VI:
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

6.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden es de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \qquad ......(*)$$

Donde a, b, c, d, e, f y g son funciones que dependen de x e y.

Si $g(x,y)=0$, la ecuación (*) es llamada homogénea.

Si $g(x,y)\neq 0$, le ecuación (*) es llamada no homogénea.

Ejemplo

(a) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$ es una ecuación diferencial lineal parcial homogénea.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xy$ es una ecuación diferencial parcial lineal no homogénea.

6.1.1 Teorema (Principio de Superposición)

Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son soluciones de la ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la función

$$u(x,y) = c_1u_1(x,y) + c_2u_2(x,y) + \ldots + c_nu_n(x,y)$$

Es también solución de la Ecuación Diferencial parcial lineal homogénea.

Método de solución

a) Por integración sucesiva se halla la solución.
b) Por separación de variables una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden se transforma en dos ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo

1. Resolver $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$, $u(x,0) = \frac{x}{2}$, $u(1,y) = sen\ y$

   Solución

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x^2 y$$

   Integrando respecto de *x*

   $$\frac{\partial u}{\partial y} = \int x^2 y\, dx + f(y)$$

   $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3} y + f(y)$$

   Integrando respecto de *y*.

   $$u(x,y) = \int \frac{x^3}{2} y\, dy + \int f(y) dy + g(x)$$

   Así $u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{4} + h(y) + g(x)$

   Es solución general de la Ecuación Diferencial parcial, donde $h(y)$ y $g(x)$ son funciones arbitrarias.

   De las condiciones iniciales:

   $\frac{x}{2} = u(x,0) = h(0) + g(x)$; luego:

   $$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{4} + h(y) + \frac{x}{2} - h(0) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

   Además: $$sen\ y = u(y) = \frac{y^2}{4} + h(y) - \frac{1}{2} - h(0)$$

   Luego:

   $$h(y) = sen\, y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + h(0) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

   Haciendo (β) en (α)

   $$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{4} + sen\, y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + h(0) + \frac{x}{2} - h(0)$$

   $$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{4} + sen\, y - \frac{y^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

2. Resolver: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 - x$

Solución

Integrando respecto de *x*:

$$u(x,y) = \int \left(y^2 - x\right)dx = y^2x - \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$\therefore \; u(x,y) = xy^2 - \frac{x^2}{2} + g(y)$$

Es solución de la ecuación diferencial parcial, donde $g(y)$ es una función arbitraria que depende de *y*.

6.1.2 Método de Separación de Variables

Se supone que la solución de la Ecuación Diferencial parcial de segundo orden es de la forma de producto:

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

Se deriva y remplaza en la ecuación, y se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo. Resolver: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\quad u(0,y) = 3e^{-y} + 2e^{-4y}$

Solución:

Sea $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$u_x = x'(x)\,y(x)$; $\; u_y = x(x)y'(y)$

Luego: $\quad x'(x)y(x) + 4x(x)y'(y) = 0$

$$\frac{x'(x)}{4x(x)} + \frac{y'(y)}{y(y)} = 0$$

$$\frac{X'(x)}{4X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \; cte$$

De aquí obtenemos dos ecuaciones ordinarias:

$X'(x) - 4\lambda X(x) = 0 \qquad \wedge \qquad Y'(y) + \lambda Y(y) = 0$

Resolviendo cada una de ellas, se tiene:

$$X(x) = C_1 e^{4\lambda x} \qquad \wedge \qquad Y(y) = C_2 e^{-\lambda y}$$

Y la solución general de la Ecuación parcial es:

$$u(x,y) = C_1 e^{4\lambda x} C_2 e^{-\lambda y} = k e^{\lambda(4x-y)}$$

De la condición inicial:

$$3e^{-y} + 2e^{-4y} = u(0,y) = ke^{\lambda(-y)}$$

Lo cual es absurdo, luego debemos suponer que hay dos soluciones de la forma:

$$u_1(x,y) = A_0 e^{\lambda(4x-y)} \ ; \ u_2(x,y) = B_0 e^{\lambda(4x-y)}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = A_0 e^{\lambda(4x-y)} + B_0 e^{\lambda(4x-y)}$$

Y así de la condición inicial:

$$3e^{-y} + 2e^{-4y} = u(0,y) = Ae^{-\lambda_1 y} + Be^{-\lambda_2 y}$$

Luego: $A = 3$; $B = 2$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$

La solución es la ecuación es:

$$\boxed{u(x,y) = 3e^{4x-y} + 2e^{4(4x-y)}}$$

6.1.3 Método de los Coeficientes Indeterminados

Dada la ecuación diferencial parcial lineal homogénea con coeficientes constantes de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad .....(*)$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Se supone que la solución es de la forma: $u(x,y) = f(y+mx)$, $m \in \mathbb{R}$ parámetro a determinarse se deriva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m^2 f''(y+mx) \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = mf''(y+mx) \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(y+mx)$$

Sustituyendo en la ecuación (*) se tiene:

$$am^2 f''(y+mx) + bmf''(y+mx) + cf''(y+mx) = 0$$

$$(am^2 + bm + c) f''(y+mx) = 0$$

Como $u(x,y)=f(y+mx)$ es solución de (*), entonces:

$\boxed{am^2+bm+c=0}$ (ecuación característica)

Analizando las raíces se presentan los siguientes casos:

Caso I: Si $a\neq 0$; $m_1\neq m_2$; entonces la solución es de la forma:

$u(x,y)=f(y+m_1x)+g(y+m_2x)$

Caso II: Si $a\neq 0$; $m_1=m_2$; entonces la solución es de la forma:

$u(x,y)=f(y+mx)+xg(y+mx)$

ó $u(x,y)=f(y+m_1x)+yg(y+m_2x)$

Caso III: Si $a=0$ y $b\neq 0$; la solución es de la forma:

$u(x,y)=f(y+mx)+g(x)$

Caso IV: Si $a=0$, $b=0$ y $c\neq 0$, la solución es de la forma:

$u(x,y)=f(x)+g(x)$

Ejemplo

Resolver $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ .....(*)

Solución

La ecuación (*) es una ecuación diferencial parcial lineal homogénea con coeficientes constantes.

Sea la solución de la forma: $u(x,y)=f(y+mx)$

Luego de (*) se transforma en:

$(m^2+4m+3)f''(y+mx)=0$

Como $f''(y+mx)\neq 0$; $m^2+4m+3=0$

Luego: $m_1=-1$; $m_2=-3$

Así, la solución es

$u(x,y)=f(y-x)+g(y-3x)$

Ejemplo 2

Resolver: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{3x-2y}$

Solución

Resolviendo la homogénea asociada, la ecuación característica es $m^2 - 4 = 0$; luego $m = \pm 2$.

Así, $u_H(x,y) = f(y-2x) + g(y+2x)$

Ahora (*) es una ecuación parcial no homogénea cuya solución es:

$u(x,y) = u_H(x,y) + u_P(x,y)$

Para hallar la solución particular $u_P(x,y)$ se supone que tiene la forma $u_P(x,y) = Ae^{3x-2y}$.

Derivando reemplazamos en (*)

$(9A - 16A)e^{3x-2y} = e^{3x-2y}$

$-7A = 1 \qquad \rightarrow \quad A = -\dfrac{1}{7}$

Así $\quad u_P(x,y) = -\dfrac{1}{7}e^{3x-2y}$

Finalmente, la solución de la ecuación (*) es:

$u(x,y) = f(y-2x) + g(y+2x) - \dfrac{1}{7}e^{3x-2y}$

6.1.4 Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales lineales de 2do orden:

Dada la ecuación:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

Donde: a, b, c, d, e, f y g son constantes reales, no todos nulos a la vez.

Luego se tiene

(i) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación es llamada ***hiperbólica***.

(ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación es llamada ***parabólica***.

(iii) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación es llamada ***elíptica***.

Ejemplos:

(1) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es ***hiperbólica***, puesto que $a=2\,;\, c=-3$ y $b^2-4ac=24>0$

(2) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$ es ***parabólica,*** puesto que $a=3\,;\, b=0\,;\, c=0$ y $b^2-4ac=0$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$ es ***elíptica***, puesto que $a=1\,;\, b=0\,;\, c=2$ y $b^2-4ac=-8<0$.

6.2 ECUACIÓN DEL CALOR

Si consideramos el flujo de calor en una barra uniforme de longitud L sobre el eje X con un extremo en el origen y el otro en L tales que:

- La barra está aislada, excepto tal vez en sus extremos.
- La temperatura es constante en cada sección transversal esto es depende sólo de la longitud x y el tiempo t.
- Las propiedades térmicas de la barra son independientes de x y t.

En estas condiciones la temperatura $u = u(x,t)$ en el tiempo t, en un punto a x unidades del origen satisface la ecuación diferencial parcial.

$$u_t = a^2 u_{xx};\; 0 < x < L\,,\; t > 0$$

donde a es una constante positiva determinada por las propiedades térmicas. Esta ecuación es llamada Ecuación del calor.

Para hallar la solución u debemos agregar la condición inicial $u(x,0) = f(x),\; 0 \le x \le L$ y las condiciones de frontera que la solución debe satisfacer en los extremos de la barra $\forall\, t > 0$. Llamaremos a éste problema con valor inicial en la frontera.

Estudiaremos con las condiciones $u(0,t) = u(L,t) = 0$, así tenemos el problema con valor inicial en la frontera siguiente.

$$\begin{array}{lll} u_t = a^2 u_{xx} \;;\; 0 < x < L\,,\; t > 0 & & \\ u(0,t) = 0\,,\; u(L,t) = 0 & t > 0 & \quad \ldots.\,(1) \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 \le x \le L & \end{array}$$

6.2.1 Método de solución:

Por separación de variables se considera la solución en forma de producto

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

donde $X(t)$es una función que solo depende de x y $T(t)$ solo depende de t y satisfacen $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(0,t) = 0$,$u(L,t) = 0$ para todo (x,t).

Derivando respecto de x y t respectivamente obtenemos:

$$u_t = XT" \qquad y \qquad u_{xx} = X"T$$

Luego $ut = a^2 u_{xx} \Leftrightarrow XT' = a^2 X'T \Leftrightarrow \dfrac{T'}{a^2 T} = \dfrac{X"}{X}$

Como tenemos las variables separadas, la última ecuación se cumplirá para todo (x,t) si son iguales a una misma constante, llamada constante de separación igual a $-\lambda$ así tenemos:

$$\frac{x"}{x} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda$$

de donde obtenemos $x" + \lambda x = 0$ y $T' = -a^2 \lambda T$

como $u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0$, $u(L,T) = X(L)T(t) = 0$ y $T \neq 0$, entonces $X(0)=0$, $X(L) = 0$

resolviendo la ecuación $x" + \lambda x = 0$, $\lambda > 0$

tenemos $X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2\, sen\sqrt{\lambda}x, C_1, C_2$ constantes; la condición $x(0) = 0$ implica por $C_1 = 0$ luego $X = C_2\, sen\sqrt{\lambda}x$, la condición de $X(L) = 0$ implica que $C_2\, sen\sqrt{\lambda}x = 0$, de donde si $C_2 \neq 0$ se tiene que $\sqrt{\lambda} = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$ luego $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ y $X_n = sen\dfrac{n\pi x}{L}, n = 1,2,\ldots$

sustituyendo $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ en $T' = -a^2\lambda T$

resulta $T' = -\left(\dfrac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}\right)T$ cuya solución está dada por

así tenemos las soluciones:

$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(n^2\pi^2a^2/L^2\right)T}\, sen\dfrac{n\pi x}{L}$, $n=1,2\ldots$ haciendo $t=0$ tenemos

$u_n(x,0) = sen\dfrac{n\pi x}{L}$ de donde $f(x) = \dfrac{n\pi x}{L}$; generalizando , si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$

son constantes y $u_m(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{m} \alpha_n^{-n^2\pi^2a^2t/L^2}\, sen\dfrac{n\pi x}{L}$, luego las funciones u_m

satisfacen (1) para $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} \alpha_n\ sen\dfrac{n\pi x}{L}$ así podemos definir.

6.2.2 Definición.- La solución del problema con valor inicial en frontera.

$$u_t = a^2u_{xx}\ ;\ 0 < x < L\ ,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ ,\ u(L,t) = 0\ ,\ t > 0$$

$$u(x,t) = f(x)\ ,\quad 0 \le x \le L$$

es $\mu(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-n^2\pi^2a^2t/L^2}\, sen\dfrac{n\pi x}{L}$ donde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, sen\dfrac{n\pi x}{L}$ es la Serie de Fourier en $feu[0,L]$ esto es $\alpha_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\,sen\dfrac{n\pi x}{L}dx$.

6.3 ECUACIÓN DE LA ONDA

Se considera al problema con valor inicial en la frontera de la forma

$$u_{tt} = a^2u_{xx}\ ;\ 0 < x < L\ ,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ ,\ u(L,t) = 0\ ,\ t > 0\ldots..(2)$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le L$$

donde *a* es una cte, f y g son funciones que dependen de x. La ecuación $u_{tt} = a^2u_{xx}$ es llamada ***ecuación de onda***.

6.3.1 Método de solución.- por separación de variables suponiendo que la solución es de la forma.

$$u(x,t) = X(x),T(t)$$

derivando y sustituyendo en la ecuación $\mu_{tt} = a^2 \mu xx$ obtenemos $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ $\forall (x,t)$, igualamos esto a una constante $-\lambda$ obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad T'' + a^2 \lambda T = 0$$

como $u(0,t) = X(0),T(t) = 0$ y $u(L,t) = X(L)\,T(t) = 0$, $T \neq 0$ entonces $X(0) = 0$, $X(L) = 0$ así tenemos el P.V.F.

$$X'' + \lambda x = 0 \,,\, X(0) = 0 \,,X(L) = 0$$

cuyas soluciones vienen dadas por $X_n = sen\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1,2,3...$ al reemplazar $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ en $T'' + a^2\lambda T = 0$ resulta $T'' + \left(\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}\right)T = 0$ cuya solución general es

$$T_n = \alpha_n \cos\frac{n\pi at}{L} + \frac{\beta_n L}{n\pi a} sen\frac{n\pi a}{L} t$$

Luego $u_n(x,t) = X(x)\,T(t) = \left(\alpha_n \cos\frac{n\pi at}{L} + \frac{\beta_n L}{n\pi a} sen\frac{n\pi a}{L} t\right) sen\frac{n\pi a}{L} t$

Entonces $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \left(-\frac{n\pi a}{L}\alpha_n sen\frac{n\pi at}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi aL}{L}\right) sen\frac{n\pi a}{L}$

donde $u_n(x,0) = \alpha_n sen\frac{n\pi x}{L}$ y $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \beta_n sen\frac{n\pi x}{L}$ luego se satisface (2) si $f(x) = \alpha_n sen\frac{n\pi x}{L}$, $g(x) = \beta_n sen\frac{n\pi x}{L}$ generalizando si $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ son constantes y

$$u_n(x,t) = \left(\alpha_n \cos\frac{n\pi at}{L} + \frac{\beta_n L}{n\pi a} sen\,\frac{n\pi at}{L}\right) sen\,\frac{n\pi x}{L}$$

entonces u_n satisface **(2)** con $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n sen\frac{n\pi x}{L}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n sen\frac{n\pi x}{L}$

así podemos definir

6.3.2 Definición.- si f y g son regulares a trozos en $[0,L]$ entonces la solución de (2) es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi at}{L}+\frac{\beta_n L}{n\pi a} sen\,\frac{n\pi at}{L}\right) sen\,\frac{n\pi x}{L}$$ donde

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\, sen\frac{n\pi x}{L}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\, sen\frac{n\pi x}{L}$ son las series Seno de Fourier *f* y *g* en $[0,L]$ es decir

$$\alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ y } \beta_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\, sen\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

6.4 ECUACIÓN DE LAPLACE

Consideramos el problema de valor inicial en la frontera de la forma

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<a\ ,\ 0<y<b$$

$$u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,b)=0,\ 0\le x\le a\ \ \ldots (3)$$

$$u(0,y)=0\ ,\ u(a,y)=0\ ,\ 0\le x\le b$$

donde a,b son constantes, f y g son funciones que dependen de x.

6.4.1 Método de solución.- por separación de variables considerando $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$ tales que $X(0)=X(a)=Y(b)=0$, derivando y separando variables se obtiene

$$X''+\lambda X=0\ ,\ X(0)=0\ ,\ X(a)=0 \text{ y } Y''-\lambda Y=0\ ,\ Y(b)=0$$

resolviendo obtenemos $x_n=sen\frac{n\pi x}{a}$, $n=1,2\ldots$ al reemplazar $\lambda=n^2\pi^2/a^2$

en la segunda ecuación obtenemos $Y''-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)Y=0,\ Y(b)=0$ resolviendo

$Y_n=\dfrac{senh\,n\pi(b-y)/a}{senh\,n\pi b/a}$ así $u_m(x,y)=X_n(x)Y_n(y)=\dfrac{senh\,n\pi(b-y)/a}{senh\,n\pi b/a}sen\dfrac{n\pi x}{a}$

donde $u_n(x,0)=sen\frac{n\pi x}{a}$ y $f(x)=sen\frac{n\pi x}{a}$; generalizando si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ son constantes arbitrarias, entonces

$$u_m(x,y)=\sum_{n=1}^{m}\alpha_n=\frac{senh\,n\pi(b-y)/a}{senh\,n\pi b/a}sen\frac{n\pi x}{a}$$

Satisface (3) con, así podemos definir

6.4.1 Definición.- si f es una función regular por partes en $[0,a]$, la solución de *(3)* es:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\frac{senh\,n\pi(b-y)/a}{senh\,n\pi b/a}sen\frac{n\pi x}{a}$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n sen\frac{n\pi x}{a}$ es la serie de Fourier seno de f en $[0,a]$; es decir

$$\alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^a f(x)\,sen\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

Si $y<b$ entonces $\frac{senh\ n\pi(b-y)/a}{senh\ n\pi b/a}\approx e^{-n\pi y/a}$ para n grande, así la serie corrige si $0<y<b$.

6.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1) Resuelva la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u \qquad \ldots\ldots\quad (*)$$

cuya condición de frontera es $u(0,y)=2e^y$

Solución

Por separación de variables supongamos que la solución en forma de producto es:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

Derivando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=X'(x)Y'(y)\,;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)Y''(y)$$

Reemplazando en $(*)$ se tiene:

$$X'(x)Y'(y)=X(x)Y''(y)+X(x)Y(y)$$

Luego, separando variables tenemos:

$$\frac{X'(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)+Y(g)}{Y'(y)}$$

Igualando a una constante λ, se tienen las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{X'}{X}=\lambda \qquad ; \qquad \frac{Y''+Y}{Y'}=\lambda$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones diferenciales; tenemos que para $X'-\lambda x=0$, la solución es:

$$X(x)=C_1 e^{\lambda x}$$

Para $Y''-\lambda Y'+y=0$, la ecuación característica es: $r^2-\lambda r+1=0$

Resolviendo: $\quad r=\dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2}$; así

$$r_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2} \qquad r_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$$

Luego la solución de esta última ecuación es:

$$Y(y)=K_1e^{r_1 y}+K_2e^{r_2 y}$$

Por tanto la solución de $(*)$ es:

$$u(x,y)=C_1 e^{\lambda x}\left[K_1e^{r_1 y}+K_2e^{r_2 y}\right]$$

Esto es:

$$u(x,y)=Ae^{\lambda x+r_1 y}+Be^{\lambda x+r_2 y}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta)$$

De la condición de frontera,
tenemos:

$$Ae^{r_1 y}+Be^{r_2 y}=2e^{y}$$

Para que se cumpla la igualdad anterior debemos suponer que

$$A=B=1 \qquad \text{y} \qquad r_1=r_2=1$$

Es decir:

$$\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2}=1$$

Y de aquí se tiene que:

$$\lambda = 2 \quad \wedge \quad A + B = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Al sustituir (α) en (Δ) se tiene que la solución para el problema con condición de frontera dado es:

$$\Rightarrow \qquad \boxed{u(x,y) = 2e^{2x+y}}$$

2) Resolver la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Cuyas condiciones de frontera son:

$$u(0,y) = 3 + 2e^{2y} + e^{4y} \qquad \ldots\ldots \quad (i)$$

$$u(x,0) = 4e^{x} + 7e^{2x} \qquad \ldots\ldots \quad (ii)$$

Solución

Por el método de separación de variables supongamos que la solución en forma de producto es:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y) \quad ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = X'(x)Y'(y);$$

Remplazando en $(*)$ obtenemos:

$$X(x)Y''(y) = 2X'(x)Y'(y)$$

Luego haciendo separación de variables tenemos:

$$\frac{Y''(y)}{2Y'(y)} = \frac{X'(x)}{X(x)}$$

Igualando a la constante de separación λ, se tienen las ecuaciones diferenciales:

$$Y'' - 2\lambda Y' = 0 \qquad ; \qquad X' - \lambda X = 0$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones obtenemos las soluciones:

$$Y(y) = C_1 + C_2 e^{2\lambda y} \quad ; \qquad X(x) = C_3\, e^{\lambda x}$$

Así, la solución de $(*)$ es:

$$u(x,y) = C_3\, e^{\lambda x}\left[C_1 + C_2 e^{2\lambda y}\right]$$

De las condiciones de frontera debemos considerar la solución en forma:

$$u(x,y) = A_1 e^{\lambda_1 x} + B_1 e^{\lambda_1 (x+2y)} + A_2 e^{\lambda_2 x} + B_2 e^{\lambda_2 (x+2y)} + \dots \qquad \dots\dots\dots\dots (\Delta)$$

De la condición de frontera (i), sustituyendo en (Δ) se tiene:

$$3 + 2e^{2y} + e^{4y} = A_1 + B_1 e^{2\lambda_1 y} + A_2 + B_2 e^{2\lambda_2 y}$$

Luego:

$$A_1 + A_2 = 3 \quad ; \qquad B_1 = 2 \quad ; \qquad B_2 = 1$$

$$2\lambda_1 = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1$$

$$2\lambda_2 = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 2$$

Reemplazando estos valores en (Δ) se tiene:

$$u(x,y) = A_1 e^{x} + 2e^{x+2y} + A_2 e^{2x} + e^{2(x+2y)} + \dots \qquad \dots\dots\dots\dots (\theta)$$

De la condición de frontera (ii) se tiene:

$$4e^{x} + 7e^{2x} = A_1 e^{x} + 2e^{x} + A_2 e^{2x} + e^{2x}$$

Entonces:

$$4 = A_1 + 2 \quad \rightarrow \quad A_1 = 2$$

$$7 = A_2 + 1 \quad \rightarrow \quad A_2 = 6$$

Finalmente, al reemplazar estos últimos valores en la expresión (θ) se obtiene la solución buscada:

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{x+2y} + 6e^{2x} + e^{2(x+2y)}}$$

3) Resolver el problema con valores en la frontera siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ en } [0, L] \qquad ....(*)$$

$$u(0,t) = 0 \,,\, u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

Solución

Por el método de separación de variables supongamos que la solución en forma de producto es:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Derivando tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

Sustituyendo en $(*)$ obtenemos:

$$XT' = a^2 X''T$$

Separando variables e igualando a la constante $-\lambda^2$ se tiene:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones diferenciales:

$$X'' + \lambda^2 x = 0 \qquad ; \qquad T' + \lambda^2 a^2 t = 0$$

Tenemos las soluciones:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \, sen \, \lambda x$$

$$T(t) = C_3 \, e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

Así la solución de $(*)$ es:

$$u(x,t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \, sen \, \lambda x) C_3 \, e^{-\lambda^2 a^2 t} \qquad .... (\Delta)$$

De la condición de frontera $u(0,t) = 0$ se obtiene:

$$u(0,t) = X(0)T(t) \qquad \to \qquad X(0) = C_1 = 0$$

Luego:

$$X(x) = C_2 \, sen \, \lambda x$$

De la condición de frontera $u(L,t)=0$ se tiene:

$$u(L,t) = X(L)T(t)=0$$

Luego:

$$X(L) = C_2\, sen\,\lambda L \qquad \rightarrow \qquad sen\,\lambda L = 0$$

Entonces:

$$\lambda L = n\pi \ ;\ n=1,2,3,........ ;\ \text{de donde} \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Así:

$$X(x) = C_2\, sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\ ;\ n=1,2,3,........$$

Sustituyendo en (Δ):

$$u_n(x,t)=\left(C_2\, sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right)C_3\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 t}$$

Luego:

$$u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 t}\, sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \qquad .... \quad (\theta)$$

De la condición de frontera:

$$u(x,0)=sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{1}{2}sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

Tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{1}{2}sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

De donde:

$$C_1=0\ ;\ C_2=0\ ;\ C_3=\frac{1}{2}\ ;\ C_4=C_5=.\,........=0$$

Finalmente, sustituyendo en (θ) se obtiene la solución:

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 t}\, sen\left(\frac{\pi}{L}\right)x+\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{3\pi a}{L}\right)^2 t}\, sen\left(\frac{3\pi}{L}\right)x}$$

del problema (3) con condiciones de fronteras dadas.

REFERENCIALES

Apostol Tom M. Calculus. (1997). Volumen I. España. Editorial Reverté. Segunda Edición.

Boyce, Diprima. (1980). Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Tercera edición. Editorial Limusa. México.

Campbell S, Haberman R. (1998). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera. México. Editorial Mc Graw – Hill.

Carmona Jover I. (2011). Ecuaciones Diferenciales. 5ta Edición. México. Editorial Filio López E.

Deminovich, B. (1978). Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Sexta edición. Editorial Pasatiempo.

Derrichk – Grossman. (1984). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. México. Editorial Fondo Educativo Interamericano.

Kells, L.M. (1976). Ecuaciones Diferenciales elementales. Quinta edición. Editorial Mc Graw- Hill.

Kiseliov, A., Krasnov, M, Makarenko, G. (1987). Problemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias. Perú. Editorial Latinoamericana.

Kryszig. E. (2000). Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Volumen I. Tercera Edición. México. Editorial Limusa Wiley.

López A, C. Álvarez P.C. Pachon R.N. (2010). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un primer curso. Segunda edición. Editorial Escuela Colombiana. Colombia.

Marsellan F., Casasus L., Zarzo A. (1990). Ecuaciones Diferenciales, problemas lineales y aplicaciones. España. Editorial Mc Graw – Hill.

Mitacc Meza, Máximo. (2011). Cálculo III. Quinta edición. Perú. Editorial thales.

Murray R. Spiegel. (1981). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. México. Editorial Prentice Hall.

O'Neil, Peter O. (1994). Matemática avanzada para ingeniería. Tercera edición. México. Editorial Continental.

Simmons, F. (1977). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Editorial Mc Graw Hill.

Stewart James. (1999). Cálculo mutivariado. Tercera Edición. México. Editorial Thompson.

Trench Willian F. (2002). Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la Frontera. España. Editorial Thompson.

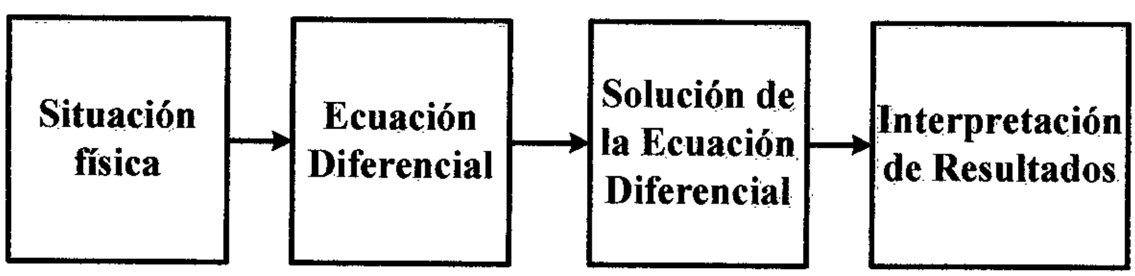
Zill D, Cullen M. (2002). Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera. México. Editorial Thomson.

APENDICE

A continuación se presentas esquemas, cuadros y/o tablas elaboradas con autoría propia, basados en los temas desarrollados en el presente trabajo de Investigación.

Cuadro 1

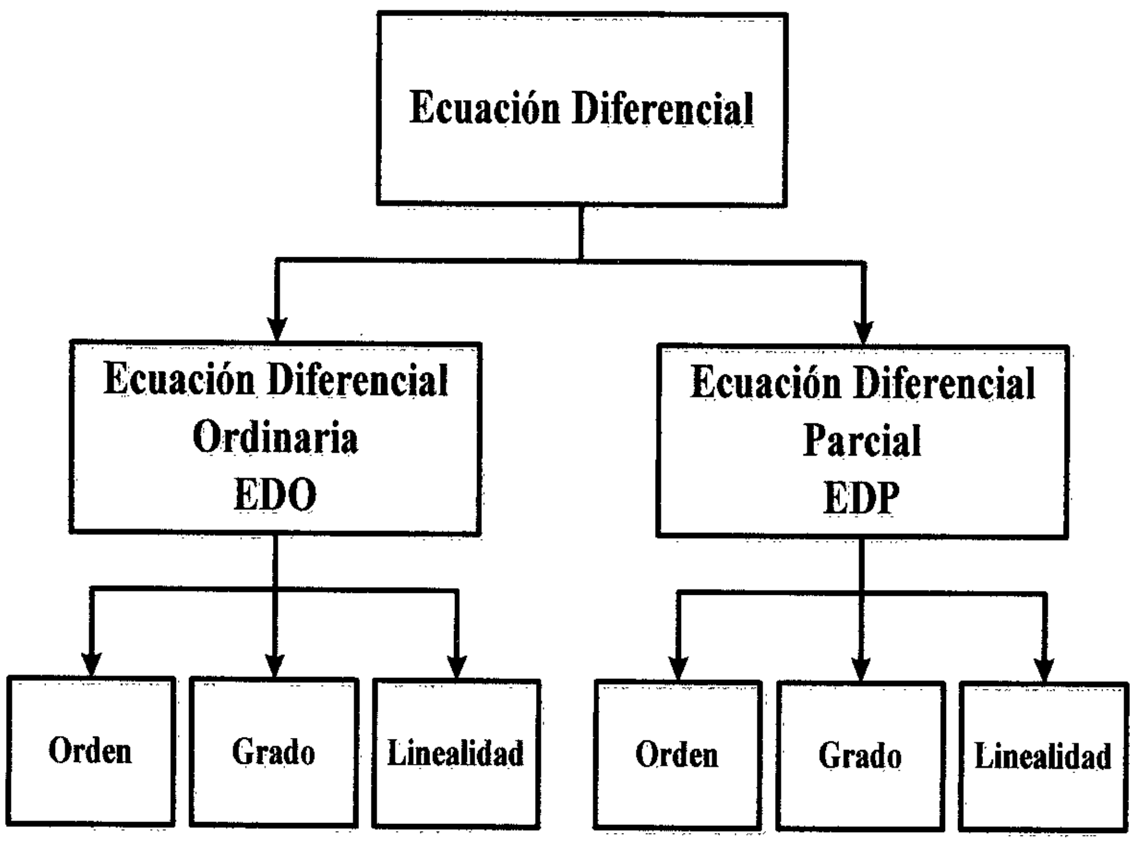
Modelo Matemático



Fuente: Autoría propia

Cuadro 2:

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales



Fuente: Autoría propia

Cuadro 3:

Solución de una Ecuación Diferencial de Primer Orden

Ecuación diferencial	Solución de la Ecuación Diferencial
$f(x)dx+g(x)dy=0$	$\int f(x)dx+\int g(x)dx=C$
$y'+p(x)y=q(x)$	$y=e^{-\int p(x)dx}\left[e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$
$y'+p(x)=q(x)y^{n},\ n\neq 1$	$y^{1-n}=e^{-\int (1-n)p(x)dx}\left[e^{\int (1-n)p(x)dx}(1-n)q(x)dx+C\right]$

Fuente: Autoría propia

Cuadro 4:

Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria, Lineal de Segundo Orden

Ecuación diferencial	**Raíces de la Ec. Característica**	**Solución**
$ay''+by'+cy=0$	$r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
	$r_1=r_2=r$	$y=C_1e^{rx}+C_2e^{rx}$
	$r=\alpha \pm \beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2 sen\beta x\right)$
$ax^2y''+bxy'+cy=0$	$r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1}+C_2e^{r_2}$
	$r_1=r_2=r$	$y=C_1x^r+C_2x^r\ln x$
	$r=\alpha \pm \beta i$	$y=x^{\alpha}\left[C_1\cos(\beta\ln x)+C_2 sen(\beta\ln x)\right]$

Fuente: Autoría propia

Cuadro 5:
Transformada de Laplace y su Inversa

Transformada de Laplace	Transformada inversa
$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
$\mathscr{L}\{s\} = \frac{1}{s^2}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
$\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$
$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ n\geq 1$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n,\ n\geq 1$
$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$
$\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$
$\mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt$
$\mathscr{L}\{sen\ t\} = \frac{s}{s^2+1}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = sen\ t$
$\mathscr{L}\{sen\ kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = sen\ kt$
$\mathscr{L}\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2-1}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} = \cos h\ t$
$\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cos h\ kt$
$\mathscr{L}\{senh\ t\} = \frac{1}{s^2-1}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = senh\ t$
$\mathscr{L}\{senh\ kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$	$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = senh\ kt$

Fuente: Autoría propia

ANEXO

FORMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1. $\int du = u + C$
2. $\int e^u du = e^u + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int sen\ u\ du = -\cos u + C$
7. $\int \cos\ u\ du = sen\ u + C$
8. $\int tg\ u\ du = \ln|\sec u| + C$
9. $\int ctg\ u\ du = \ln|sen\ u| + C$
10. $\int \sec u\ du = \ln|\sec\ u + tg\ u| + C$
11. $\int \csc\ u\ du = \ln|\csc\ u - ctg\ u| + C$
12. $\int \sec^2 u\ du = tg\ u + C$
13. $\int u dv = uv - \int v du$
14. $\int \sec^2 u\ du = tg\ u + C$
15. $\int \csc^2 u\ du = ctg\ u + C$
16. $\int \sec u\ tg\ u\ du = \sec\ u + C$
17. $\int \csc\ u\ ctg\ u\ du = -\csc\ u + C$
18. $\int senh\ u\ du = \cosh\ u + C$
19. $\int \cosh\ u\ du = senh\ u + C$
20. $\int tgh\ u\ du = \ln\ |\cosh u| + C$
21. $\int \text{sech}^2 u\ du = tgh\ u + C$
22. $\int \text{csch}^2 u\ du = -ctgh\ u + C$
23. $\int \text{sech}\ u\ tgh\ u\ du = -\text{sech}\ u + C$