**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

# ATRACTORES GLOBALES PARA UNA CLASE DE ECUACIÓN VISCOELÁSTICA CON MEMORIA Y DENSIDAD NO LINEAL

**Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática**

**Paulo Nicanor Seminario Huertas**

**Callao, Marzo, 2019**

**PERÚ**

**Hoja de Referencia del Jurado y aprobación**

Tésis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Acta ________________________________

Tesis ______________ por

________________________________

Presidente

________________________________

Vocal

________________________________

Secretaria

________________________________

Suplente

________________________________

Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Asesor

# AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quisiera agradecer a mi familia y familiares que siempre estuvieron ahí para mí, en las buenas y en las malas brindándome su apoyo a la distancia o a la cercanía. Mi esposa Úrsula Flores, mis padres Mercedes Elena Huertas Porras y Oswaldo Robles Rodriguez, mi hermana, mi abuelo, tíos, etc. gracias por todo.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis amigos, que tuve la suerte de tener y sé que puedo confiar en ellos ciegamente. Sotelo, Lito, Pelao, Perro flaco, Karol, Javi, Omar, David, Elvis, Chull, Pablo, Cristian, Kenyn, Kako, entre muchos otros más. Gracias por ser la familia que siempre se necesita.

Quisiera agradecer también a todos los profesores de la FCNM que me brindaron todo el conocimiento necesario para poder conseguir cada logro.

A la FCNM en conjunto, todo el personal, toda la institución, siempre me hicieron sentir en casa. Muchas gracias por todo.

Y a todos los que me ayudaron de alguna u otra forma en mi formación académica, en mi día a día y siempre estuvieron ahí para mi. Muchas gracias por todo.

# ÍNDICE

**RESUMEN**

ATRACTORES GLOBALES PARA UNA CLASE DE ECUACIÓN VISCOELÁSTICA CON MEMORIA Y DENSIDAD NO LINEAL

Paulo Nicanor Seminario Huertas

Diciembre - 2018

Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Título obtenido: Licenciado en Matemática

---

En este trabajo se estudia una clase de ecuaciones de ondas de la forma

$$|\partial_t u|^\rho \, \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s)\, ds + f(u) = h, \qquad (0.1)$$

definida en un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$, con condición de frontera de Dirichlet y parámetros $\alpha, \rho > 0$.

Dichas ecuaciones modelan problemas de viscoelasticidad no lineal y han sido estudiados por diversos autores a lo largo de los años. Respecto a la existencia, unicidad y dependencia continua en relación con los datos iniciales se seguirá la metodología presentada por Conti et al. [15].

Uno de los resultados importantes en la presente investigación es la prueba de la existencia de un atractor global para el sistema dinámico asociado al problema, el cual será caracterizado por las variedades inestables del conjunto de puntos estacionarios de la ecuación (0.1). Con este fin, se seguirá los trabajos de Conti et al. [17] y Araujo et al. [2].

**Palabras Claves**: Atractores globales, ecuaciones viscoelásticas, memoria, densidad no lineal.

**ABSTRACT**

GLOBAL ATTRACTORS FOR A CLASS OF VISCOELASTIC EQUATIONS WITH MEMORY AND NON-LINEAR DENSITY

Paulo Nicanor Seminario Huertas

Diciembre - 2018

Adviser: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

---

In this work we study a class of wave equations of the form

$$|\partial_t u|^\rho \, \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s)\, ds + f(u) = h,$$

defined in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$, with Dirichlet boundary condition and parameters $\alpha, \rho > 0$.

Such equations model problems from nonlinear viscoelasticity and have been considered by several authors. Regarding the existence, uniqueness and continuous dependence in relation to the initial data, follow the methodology presented by Conti et al. [15].

One of the important results of the present study is the proof of the existence of a global attractor for the dynamic system associated to the problem, which will be characterized by the unstable manifold of the set of stationary points of the equation (0.1). To this end, we following the work of Conti et al. [17] and Araujo et al. [2].

**Key words**: Global attractors, viscoelastic equations, memory, nonlinear density.

# CAPÍTULO I

# PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1. Identificación del problema

Se dividirá el trabajo principalmente en dos partes, una primera parte que se centrara en la prueba de la buena colocación –existencia, unicidad y dependencia continua con relación a los datos iniciales– de la ecuación

$$\varrho(\partial_t u)\partial_{tt}u - \Delta\partial_{tt}u - \alpha\Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)\,ds + f(u) = h, \tag{1.1}$$

y una segunda parte donde se estudiará la dinámica de la misma, así como la prueba de la existencia de un atractor global.

Esta ecuación está definida sobre una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera $\partial\Omega$ suave y satisfaciendo las condiciones de Dirichlet, esto es $u(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega$.

Respecto a $\varrho(\partial_t u)$, Conti et al. [17] proponen

$$\varrho(\partial_t u) = \rho_0 + \rho_1|\partial_t u|^\rho, \quad \rho > 0, \tag{1.2}$$

con $\rho_0 > 0$ una densidad inicial fija y $\rho_1 \in \mathbb{R}$ un parámetro lo suficientemente pequeño. Estas hipótesis sobre la densidad del material son explicadas de manera natural por los aspectos físicos del problema. Por simplicidad matemática asumiremos, sin pérdida de generalidad, que

$$\varrho(\partial_t u) = |\partial_t u|^\rho, \tag{1.3}$$

como se ven [17, 2, 8, 15, 16, 44, 45] entre otros.

Además, asumiremos las siguientes hipótesis:

$(H1)$ La ecuación (1.1) posee condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0, \quad \partial_t u(x,0) = v_0, \quad u(x,-s) = \psi_0(s), \tag{1.4}$$

para todo $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}^+$. Notar que $u_0, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ son funciones dadas, donde $\psi_0$ brinda información sobre la historia pasada de $u$.

$(H2)$ La función $h \in L^2(\Omega)$ es independiente del factor temporal y representa alguna fuerza externa al sistema.

$(H3)$ La función $f$ es localmente Lipschitz y satisface

$$|f(u) - f(v)| \leqslant c|u - v|(1 + |u|^q + |v|^q), \quad f(0) = 0, \tag{1.5}$$

donde $c$ es una constante positiva y $q \in [0,4)$. Además, satisface la condición de disipación

$$\liminf_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} > -\lambda_1, \tag{1.6}$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$. Por otro lado, si $\widehat{f}(u) = \int_0^u f(y)dy$, entonces asumiremos que

$$f(u)u - \widehat{f}(u) \geqslant -\frac{\beta}{2}u^2 - m_f \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

donde $m_f$ es una constante que solo depende de $f$ y $\beta \in (0, \lambda_1)$.

$(H4)$ El núcleo de la convolución (o memoria) $\mu$ es una función que satisface

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad 0 < \mu(s) < \infty, \quad \mu'(s) \leqslant 0, \tag{1.8}$$

y que existen $k_0$, $k_1 > 0, k_2 > 0$ tales que

$$\int_0^\infty \mu(s)ds = k_0 \in (0, \alpha), \tag{1.9}$$

$$\mu'(s) \leqslant -k_1\mu(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{1.10}$$

y

$$\int_0^\infty -\mu'(s)ds = k_2, \quad 0 < k_2 < \infty. \tag{1.11}$$

**Observación I.1.** Notemos que de (1.9)-(1.11) se cumple que $k_2 \geqslant k_0 k_1$.

**Observación I.2.** Para facilitar las operaciones matemáticas, sin pérdida de generalidad, se asumirá que

$$\alpha - k_0 = 1. \tag{1.12}$$

## 1.2. Formulación del problema

### 1.2.1. Problema general

¿Será posible probar la existencia de un atractor global para el sistema dinámico definido por el semigrupo de soluciones de la ecuación determinada anteriormente?.

### 1.2.2. Problemas específicos

1. ¿La ecuación planteada anteriormente está bien colocada en el sentido de Hadamard?.

2. ¿El semigrupo asociado a la ecuación principal es disipativo?.

3. ¿Es posible descomponer el semigrupo asociado al problema presentado en (1.1) en una parte uniformemente estable y otra parte compacta por medio de una desigualdad de estabilización?.

## 1.3. Objetivos de la investigación

### 1.3.1. Objetivos generales

Probar la existencia de un atractor global para el semigrupo de soluciones determinado por la ecuación antes presentada.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Probar la buena colocación para la ecuación presentada en (1.1).

2. Probar que el semigrupo de soluciones es disipativo.

3. Probar que el sistema dinámico referente a la ecuación presentada en (1.1) cumple una cierta desigualdad de estabilización.

## 1.4. Importancia y justificación de la investigación

En el presente trabajo se estudiara la dinámica asintótica de una ecuación de ondas no lineal como en (1.1), definida en una región acotada de $\mathbb{R}^3$, adicionado de los datos iniciales y condiciones de frontera del tipo Dirichlet. Esta clase de ecuaciones fue estudiada por primera por Cavalcanti et al. [8], asumiendo $\varrho(\partial_t u) = |\partial_t u|^\rho$, como una versión viscoelástica del problema de vibraciones

$$\varrho(\partial_t u)\partial_{tt} u - \Delta\partial_{tt} u - \Delta u = 0,$$

donde $\varrho(\partial_t u)$ representa una forma no lineal de la densidad del material. En el caso $\varrho(\partial_t u) = 1$, la ecuación modela vibraciones de varillas finas conforme a lo justificado en Love [32]. El carácter viscoelástico de la primera ecuación viene dada por la integral de convolución que modelo los efectos de la memoria del material, (cf. [9, 11, 20, 40, 34, 33, 35, 36, 37, 23, 51] entre otros).
En Cavalcanti et al. [8], el problema presentado en esta tesis fue estudiado en la forma

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta\partial_{tt} u - \alpha\Delta u + \int_0^t \mu(s)\Delta u(t-s)ds = \mathcal{F}, \tag{1.13}$$

donde $\rho \in (0, 2]$ y $\mu(t)$ decayendo exponencialmente a cero cuando $t \to \infty$. Los autores probaron que la energía del sistema decae exponencialmente cuando se acrecienta una disipación fuerte $\mathcal{F} = \Delta\partial_t u$. A partir de dicho trabajo muchos otros autores aportaron nuevas contribuciones para la ecuación anterior, por ejemplo, [2, 15, 18, 16, 17, 35, 36, 37] entre otros. De estos trabajos, se destaca el de Messaoudi y Tatar [36] donde se prueba que el decaimiento exponencial de la energía continua válido con $\mathcal{F} = 0$, explorando solamente la disipación dada por la memoria.

Obsérvese que si $\varrho(\partial_t u) = 1$ y $\Delta\partial_{tt}u$ fuera removida, entonces la ecuación principal del presente trabajo se reduce a la bien conocida ecuación de onda visco elástica. En esta dirección el problema fue estudiada por diferentes autores, por ejemplo [39, 33, 10, 48, 11, 41] entre otros, además, si solo $\varrho(\partial_t u) = 0$ el problema carece de un sentido físico al no cumplir con las leyes conservativas de la física, pero teóricamente representa un modelo altamente estudiado como se mencionó anteriormente.

Por otro lado, en los trabajos antes citados, la ecuación (1.13) la unicidad de las soluciones nunca fue tratada, debido a la aparente dificultad generada por el término $|\partial_t u|^\rho \partial_{tt}u$. La primera prueba referente a la buena colocación del problema fue establecido recientemente en Araujo et al. [2], a través de la restricción $\rho \in (1, 2)$ cuando la dimensión es 3. El resultado fue presentado en un contexto más general respecto al termino de memoria generalizada con un retardo infinito, en este es preciso conocer la historia pasada del material, es decir $u(x, t)$ para $t \in (-\infty, t_0]$ donde el instante inicial esta dado por $t = t_0$. Conti et al. [15] probaron un nuevo resultado referente a la buena colocación del problema, para el caso

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt}u - \Delta\partial_{tt}u - \gamma(-\Delta)^\theta \partial_t u - \alpha\Delta u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) = h, \quad (1.14)$$

con $\rho \in [0, 4]$ en un ambiente tridimensional y con $f(u) \approx u^5$.

Cabe resaltar que Araujo et al. [2] también muestran la existencia de un atractor global para el sistema dinámico asociado al problema anterior con $\rho \in (1, 2)$ cuando $N = 3$. Para esto se necesitó adicionar una disipación fuerte del tipo

$\Delta u_t$. Recientemente, Conti et al. [17] probaron la existencia de un atractor global con regularidad optima para el problema (1.14) con $\rho \in [0, 4)$.

Este último resultado, junto con la bibliografía antes mencionada, sirve de motivación para el estudio de la dinámica y sobre todo de la existencia de un atractor global usando únicamente la disipación de la memoria.

Se espera por lo tanto contribuir en el desenvolvimiento de la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales no lineales y en la construcción de las bases matemáticas para el desarrollo de nuevas líneas de investigación en el área de los sistemas dinámicos no lineales.

# CAPÍTULO II

# MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta algunos resultados sobre los espacios de Sobolev, los espacios de Bochner con peso, los sistemas dinámicos y el problema de Cauchy, los cuales nos brindaran una buena base teórica para el desarrollo del presente trabajo.

## 2.1. Espacios de Sobolev

Presentaremos a continuación definiciones y teoremas relacionados a los espacios de Sobolev. Para más información, el lector interesado puede consultar [1, 5].

**Definición II.1.** Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Se representará por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$, al espacio vectorial constituido por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles, cuya potencia $p$, $|f|^p$ es Lebesgue integrable, esto es:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ es medible y} \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$$

Se define en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a la relación $\sim$ dada por:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \equiv g \ \text{ casi siempre en } \Omega.$$

Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Así, tiene sentido considerar el cociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por $\sim$. La colección de las clases de equivalencia obtenida por $\frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$ forma un espacio vectorial, que denotaremos por:

$$L^p(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$$

en el cual definimos la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{donde } u \in L^p(\Omega).$$

**Definición II.2.** Una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada esencialmente acotada, si existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leqslant C$ casi siempre (c.s.) en $x \in \Omega$. La colección de las clases de equivalencia de las funciones definidas en $\Omega$ por la relación $\sim$ es esencialmente acotada es denotada por $L^\infty(\Omega)$. Se Define la norma en $L^\infty(\Omega)$ por:

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| = inf\{C > 0; |u(x)| \leqslant C \quad \text{c.s. en } x \in \Omega\}$$

Es posible mostrar que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, además, para el caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por:

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

donde $u$ y $v$ pertenecen a $L^2(\Omega)$.

**Lema II.1.** *(Desigualdad de Young). Sea $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

**Lema II.2.** *(Desigualdad de Young con $\epsilon$). Sea $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\epsilon > 0$ cualquier. Entonces,*

$$ab \leqslant \epsilon a^p + C(\epsilon)b^{p'}, \quad \forall a, b \geqslant 0,$$

*donde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{-p'}{p}} p'^{-1}$. En el caso particular cuando $p = q = 2$, dicha desigualdad se reduce a*

$$ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}b^2, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

**Teorema II.1.** *(Desigualdad de Holder). Sea $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, con $1 \leqslant p < \infty$ y $p'$ el exponente conjugado de $p$, esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces:*

$$uv \in L^1(\Omega) \qquad y \qquad \int_\Omega^t |u(x)v(x)|dx \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

**Teorema II.2.** *(Desigualdad de Holder Generalizada). Sea* $1 \leqslant p_1, p_2, ..., p_n \leqslant \infty$ *tal que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leqslant 1$*. Si* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ *para* $i = 1, ..., n$*, entonces:*

$$u := \prod_{i=1}^{n} u_i \ \in L^r(\Omega) \qquad y$$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

**Teorema II.3.** *(Lema de Imersión). Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, un conjunto abierto con medida finita,* $p$ *y* $q$ *tales que* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$*. Entonces:*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

**Definición II.3.** Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. El Espacio de Sobolev de orden $m$ modelado sobre $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, es el espacio vectorial de las funciones en $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales de orden $\alpha$ pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo multi-indice $\alpha$ con $|\alpha| \leqslant m$. Es decir:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha \text{ multi-índice tal que } \ |\alpha| \leqslant m\}.$$

Cuando $1 \leqslant p < \infty$. No es difícil mostrar que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio normado unido de la norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Análogamente, $W^{m,\infty}(\Omega)$ es un espacio normado unido de la norma:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Teorema II.4.** *Sea* $\Omega$ *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $m \in \mathbb{N}$*.*

- *Los espacios* $W^{m,p}(\Omega)$ *son espacios de Banach para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*.*
- *Los espacios* $W^{m,p}(\Omega)$ *son espacios reflexivos para* $1 < p < \infty$*.*
- *Los espacios* $W^{m,p}(\Omega)$ *son espacios separables para* $1 \leqslant p < \infty$*.*

- *En el caso particular, cuando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$\langle u, v\rangle_{W^{m,2}(\Omega)\times W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

*Dicho espacio lo denotaremos por $H^m(\Omega)$.*

**Definición II.4.** Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

esto es, como la cerradura del espacio de las funciones de prueba respecto a la norma $W^{m,p}(\Omega)$. En el caso $p = 2$, denotaremos $H_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$.

**Definición II.5.** Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' =: W^{-m,p'}(\Omega),$$

donde $p$ e $p'$ son exponentes conjugados. En el caso p=2, denotaremos $[H_0^m(\Omega)]' =: H^{-m}(\Omega)$.

**Teorema II.5.** *(Inmersiones de Sobolev). Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio y, para $1 \leqslant k \leqslant n$, sea $\Omega_k$ la intersección de $\Omega$ con el plano de dimensión $k$ en $\mathbb{R}^n$. (Si $k = n$ entonces $\Omega_k = \Omega$.) Si $j \geqslant 0$ y $m \geqslant 1$ son números enteros dados y si $1 \leqslant p < \infty$.*

- *PARTE I: Suponga que $\Omega$ cumple la condición del cono.*

    - *Caso A: Si $mp > n$ o $m = n$ y $p = 1$, entonces:*

    $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

    *Además, si $1 \leqslant k \leqslant n$, entonces:*

    $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad \textit{para } p \leqslant q \leqslant \infty,$$

    *y, en particular,*

    $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para } p \leqslant q \leqslant \infty.$$

- *Caso B: Si $mp = n$ e $1 \leqslant k \leqslant n$, entonces:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad para\ p \leqslant q < \infty,$$

*y, en particular,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para\ p \leqslant q < \infty.$$

- *Caso C: Si $mp < n$ y, o bien, $n - mp < k \leqslant n$ o $p = 1$ y $n - m \leqslant k \leqslant n$, entonces:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad para\ p \leqslant q \leqslant p* = \frac{kp}{n - mp},$$

*y, en particular,*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para\ p \leqslant q \leqslant p* = \frac{kp}{n - mp}.$$

- *PARTE II: Suponga que $\Omega$ satisface la condición fuerte local de Lipschitz. Entonces el espacio $C_B^j(\Omega)$ del caso A, puede ser sustituido por el espacio menor $C^j(\bar{\Omega})$, y las inmersiones pueden ser reescritas como:*

  - *Si $mp > n > (m-1)p$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad para\ 0 < \lambda \leqslant m - \frac{n}{p}.$$

  - *Si $n = (m-1)p$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad para\ 0 < \lambda < 1.$$

  - *Si $n = m - 1$ e $p = 1$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,1}(\bar{\Omega}).$$

  *Recordemos que $C^{j,\lambda}(\bar{\Omega})$ representa el espacio de las funciones em $C^j(\bar{\Omega})$ cuyas derivadas de orden $\lambda$ son $j$-Holder continuas.*

- *PARTE 3: Todas las inmersiones de la parte A y B son válidas para $\Omega$ un dominio arbitrario si los espacios de Sobolev envueltos en dichas partes, son sustituidos por sus correspondientes $W_0$-espacios.*

**Observación II.1.** En el caso de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, la mejor constante de dicha inmersión es dada por $\lambda_1$, siendo $\lambda_1$ el primer autovalor del operador $-\Delta$. Esto es, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

con

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

**Teorema II.6.** *(Teorema de Rellich-Kondrachov). Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0$ un subdominio acotado de $\Omega$, y $\Omega_0^k$ la intersección de $\Omega_0$ con un plano $k$-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Sea $j \geqslant 0$ y $m \geqslant 1$ enteros, y $1 \leqslant p < \infty$.*

- *PARTE I: Si $\Omega$ satisface la condición del cono y $mp \leqslant n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{si } 0 < n - mp < k \leqslant n \text{ e } 1 \leqslant q < \frac{kp}{n - mp}.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{si } n = mp, 1 \leqslant k \leqslant n \text{ e } 1 \leqslant q < \infty.$$

- *PARTE II: Si $\Omega$ satisface la condición del cono y $mp > n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C_B^j(\Omega_0)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{si } 1 \leqslant q < \infty.$$

- *PARTE III: Si $\Omega$ satisface la condición fuerte local de Lipschitz, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^j(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{si } mp > n.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{si } mp > n \geqslant (m-1)p \text{ y } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

- *PARTE IV: Si $\Omega$ es un dominio arbitrario en $\mathbb{R}^n$, entonces siguen las siguientes inmersiones compactas:*

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{si } 0 < n - mp < k \leqslant n \text{ y } 1 \leqslant q < \frac{kp}{n - mp}.$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{si } mp > n \geqslant (m-1)p \text{ y } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

**Teorema II.7.** *(Desigualdad de Poincaré). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces existe una constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\ u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

**Definición II.6.** Sea $X$ un espacio de Banach y $1 \leqslant p < \infty$. Denotaremos por:

$$(L^p(0,\tau;X); \|\ .\ \|_{L^p(0,\tau;X)})$$

al espacio de Banach de las funciones vectoriales medibles $u : (0,\tau) \to X$, tal que $\|u(t)\|_X$ pertenece a $L^p(0,\tau)$, unido de la norma

$$\|u\|_{L^p(0,\tau;X)} = \left(\int_0^\tau \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso $p = \infty$, denotaremos por $(L^\infty(0,\tau;X); \|\ .\ \|_{L^\infty(0,\tau;X)})$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales medibles $u : (0,\tau) \to X$, tal que $\|u(t)\|_X$ pertenece a $L^\infty(0,\tau)$, unido de la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau;X)} = \sup_{t\in(0,\tau)} ess\|u(t)\|_X.$$

Una herramienta que va ser fuertemente usada en el presente trabajo será el Teorema de Compacidad de Simon [47], que es una extensión del Teorema de Aubin-Lions.

**Teorema II.8.** *(Teorema de Compacidade de Simon). Sean $X, B, Y$ espacios de Banach tales que $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Supongamos que:*

- *$(u_n)$ es acotada en $L^\infty(0,\tau;X)$*
- *$(\partial_t u_n)$ es acotada en $L^r(0,\tau;Y)$, $r > 1$.*

*Entonces, $(u_n)$ es relativamente compacto en $C(0,\tau;B)$.*

**Lema II.3.** *(Desigualdad de Gronwall). Sea $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in L^1(a,b)$ y $\phi \in L^\infty(a,b)$ tales que $\beta > 0$ y $\phi \geqslant 0$. Si*

$$\phi(t) \leqslant \alpha + \int_a^b \beta(s)\phi(s)ds, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

*entonces*

$$\phi(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^b \beta(s)ds}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

## 2.2. Espacios de Bochner con peso

En esta sección haremos una revisión de los espacios de Bochner, que será fundamental para poder definir el *espacio de historia* que está envuelto en nuestra ecuación. Para mayor detalle se remite al lector consultar [1, 50, 6, 22].
Sea $X$ un espacio de Banach con norma $\| \, . \, \|_X$ y sea $f$ una función definida en el intervalo $(a, b)$ en $\mathbb{R}$ (que puede ser finito) y tomando valores en $X$. Además, sea $\nu$ una medida en $(a, b)$ dada por $d\nu(s) = \mu(s)ds$ donde $\mu$ es continua y positiva en $(a, b)$.

**Definición II.7.** (Integral de Bochner). Si $A_1, A_2, ..., A_k$ es una colección finita de subconjuntos disjuntos de $(a, b)$ teniendo cada uno medida $\nu$ finita, y si $x_1, x_2, ..., x_k$ es un conjunto de elementos de $X$, llamaremos a la función $f$ dada por

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} x_i, \quad a < t < b,$$

como *función simple* sobre $(a, b)$ en $X$. Para este tipo de funciones simples definimos la integral de $f$ como

$$\int_a^b f(s)d\nu(s) = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i)x_i = \sum_{i=1}^{k} (\int_{A_i} \mu(s)ds)x_i,$$

la cual independe de la elección de dicha partición.
Ahora, sea $f$ una función arbitraria definida sobre $(a, b)$ en $X$. Diremos que $f$ es (fuertemente) medible en $(a, b)$, si existe una sucesión $f_i$ de funciones simples con soporte en $(a, b)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j(t) - f(t)\|_X \quad \text{c.s. en } (a, b).$$

Entonces, definimos la *Integral de Bochner de $f$ en $(a, b)$* como

$$\int_a^b f(s)d\nu(s) = \lim_{j\to\infty} \int_a^b f_j(s)d\nu(s),$$

Análogamente, como la integral de las funciones simples, la integral anterior independe de la elección de la sucesión de funciones simples que aproximan $f$.

**Teorema II.9.** *Una función $f$ es Bochner integrable en $(a,b) \Leftrightarrow$ si la función $\|f(\ .\ )\|_X$ es integrable en $(a,b)$.*

**Definición II.8.** (Espacio $L^p_\mu(a,b;X)$).

- Si $1 \leqslant p < \infty$, diremos que $f \in (L^p_\mu(a,b;X); \|\ .\ \|_{L^p_\mu(a,b;X)})$ si

$$\|f\|_{L^p_\mu(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(s)\|^p_X d\nu(s)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \mu(s)\|f(s)\|^p_X ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si $p = \infty$, diremos que $f \in (L^\infty_\mu(a,b;X); \|\ .\ \|_{L^\infty_\mu(a,b;X)})$ si

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(a,b;X)} = \sup_{a<s<b} ess\|f(s)\|_X < \infty.$$

**Teorema II.10.**

- *El espacio $L^p_\mu(a,b;X)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ es de Banach.*

- *Si el espacio $X$ es de Hilbert entonces el espacio $L^2_\mu((a,b);X)$ es de Hilbert, y el producto interno es dado por*

$$\langle u,v\rangle_{L^2_\mu((a,b);X)\times L^2_\mu((a,b);X)} = \int_a^b \mu(s)\langle u,v\rangle_{X\times X} ds$$

## 2.3. Sistemas dinámicos y atractores globales

En esta sección haremos una revisión sobre algunos tópicos referentes a la teoría de los sistemas dinámicos definidos por un semigrupo fuertemente continuo de un espacio de Banach $X$. Se repasará los resultados presentados en [49, 26, 3], y se hará un estudio más profundo de los trabajos de Chueshov y Lasiecka [13, 14].

**Definición II.9.** Una familia de operadores no necesariamente lineales $S(t)_{t\geqslant 0}$, fuertemente continua en $X$, es llamado de $C_0 -$ *semigrupo* si:

- $S(0) = I$ (Operador identidad de $X$).

- $S(t+s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geqslant 0$.

- La aplicación $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \longmapsto S(t)(x) \in X$ es continua para cada $x \in X$ dado.

El par $(X, S(t))$ también es llamado sistema dinámico, definido por el semigrupo $S(t)$.

**Definición II.10.** Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico y $\mathcal{A}$ un subconjunto de $X$.

- Diremos que $\mathcal{A}$ es positivamente invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$.
- Diremos que $\mathcal{A}$ es invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$.

**Definición II.11.** (Definición de Atractor Global). Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Diremos que un subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ es un Atractor Global de $(X, S(t))$ cuando:

- $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado y acotado,
- $\mathcal{A}$ es un conjunto invariante por $S(t)$,
- $\mathcal{A}$ atrae cualquier subconjunto acotado de $X$ por la acción del semigrupo $S(t)$, esto es, para todo acotado $B \subset X$,

$$\lim_{t \to \infty} dist_H(S(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

  donde $dist_H(A, B)$ es la semi-distancia de Hausdorff entre los subconjuntos $A, B \subset X$ y es dada por

$$dist_H(A, B) := \sup_{x \in A} d_X(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

**Definición II.12.** (Conjunto Absorbente). Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Un conjunto $\mathcal{B} \subset X$ es llamado de *Conjunto Absorbente de* $(X, S(t))$ si, para cualquier subconjunto acotado $B \subset X$, existe $\tau_0 = \tau_0(B) \geqslant 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geqslant \tau_0.$$

Cuando un sistema dinámico $(X, S(t))$ posee un conjunto absorbente acotado, diremos que $(X, S(t))$ es un sistema dinámico disipativo.

**Definición II.13.** Dado un conjunto $B \subset X$, diremos que $\mathfrak{M}^u(B)$ es una variedad inestable de $B$, si es el conjunto de puntos $z \in X$ tal que contiene todas las trayectorias completas $\{y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ satisfaziendo

$$y(0) = z, \quad \lim_{t\to-\infty} d_X(y(t), B) = 0.$$

**Definición II.14.** La función $\mathcal{L} \in C(X, \mathbb{R})$ es llamada de *funcional de Lyapunov* si

(*i*) $\mathcal{L}(\zeta) \to \infty$ si y solo si $\|\zeta\|_X \to \infty$;

(*ii*) $t \to \mathcal{L}(S(t)z)$ es no-creciente para todo $z \in X$.

(*iii*) Si $\mathcal{L}(S(t)z) = \mathcal{L}(z)$ para todo $t > 0$, entonces $z$ es un punto estacionario para $S(t)$.

Un sistema dinamico $(X, S(t))$ es llamado de sistema gradiente si posee un funcional de Lyapunov.

**Teorema II.11.** *Todo sistema dinamico $(X, S(t))$ gradiente tal que el conjunto de puntos estacionarios de $S(t)$ sea acotado en $X$, es disipativo.*

**Definición II.15.** (Compacidad Asintótica). Un sistema dinámico $(X, S(t))$ es dicho *Asintóticamente Compacto* si existe un conjunto $K \subset X$ compacto tal que para cada conjunto acotado $B \subset X$,

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)B, K) = 0.$$

Ahora presentaremos un resultado conocido sobre la existencia de atractores globales que será la piedra angular para la prueba de la existencia de un atractor global en nuestro trabajo, el lector interesado puede consultar [49, 38].

**Teorema II.12.** *Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Entonces, diremos que dicho sistema dinámico posee atractor global $\mathcal{A}$ si, y solamente si, es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en caso afirmativo, si $\mathcal{B}$ denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de $X$, entonces el atractor $\mathcal{A}$ viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} w(B)$$

*donde $w(B)$ es el conjunto $w$-límite de $B$ y es dado por*

$$w(B) = \{x \in X \ : \ \textit{existen sucesiones } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ en } \mathbb{R}^+ \textit{ con } t_n \to \infty$$

$$\textit{e } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ en } B \ , \textit{ tal que } x = \lim_{n \to \infty} S(t_n)x_n\}.$$

*En particular, si el conjunto de puntos estacionario $\mathcal{N}$ de $S(t)$ es acotado en $X$, y el sistema $(X, S(t))$ es gradiente, entonces $\mathcal{A}$ esta caracterizado por las variedades inestables $\mathfrak{M}^u(\mathcal{N})$.*

El presente trabajo, debido a la densidad del material, la verificación de la compacidad asintótica puede ser bastante difícil. Por eso, introducimos el concepto de regularidad asintótica, que será usado junto a los resultados presentados por Chueshov y Lasiecka [14], donde muestran que en un sistema disipativo los conceptos de compacidad asintótica y regularidad asintótica son equivalente.

**Definición II.16.** (Regularidad Asintótica). Un sistema dinámico $(X, S(t))$ es *Asintóticamente Regular* si para cualquier conjunto acotado y positivamente invariante $B \subset X$, existe un conjunto compacto $K \subset \overline{B}^X$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} dist_H(S(t)B, K) = 0.$$

**Teorema II.13.** *(Chueshov y Lasiecka [14] 7.1.4 Proposition). Asumamos que $X$ es un espacio de Banach y $(X, S(t))$ un sistema dinámico disipativo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$(X, S(t))$ es asintóticamente compacto.*

- *$(X, S(t))$ es asintóticamente regular.*

**Teorema II.14.** *(Chueshov y Lasiecka [14] 7.1.11 Proposition) Sea $(X, S(t))$ un sistema dinámico. Supongamos que para algún conjunto acotado positivamente invariante $B \subset X$ y para algún $\epsilon > 0$, exista $T = T(\epsilon, B)$ tal que*

$$\|S(T)z^1 - S(T)z^2\|_X \leqslant \epsilon + \phi_T(z^1, z^2), \quad \forall z^1, z^2 \in B,$$

*donde $\phi_T : B \times B \to \mathbb{R}$ satisface*

$$\liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \phi_T(z^n, z^m) = 0. \tag{2.1}$$

*para alguna sucesión $(z^n)$ en $B$. Entonces, $(X, S(t))$ es un sistema dinámico asintóticamente regular.*

## 2.4. Problema de Cauchy (mild solutions)

En esta sección haremos una revisión sobre el problema de Cauchy y las *mild solutions* en el sentido de A. Pazy [43].

Consideremos el problema de valor inicial no-homogéneo

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \tag{2.2}$$

$$u(0) = x$$

con $f : [0, \tau) \to X$, donde $A$ es un generador infinitesimal de un $C_0$-semigrupo $\Sigma(t)$, tal que la correspondiente ecuación homogénea tiene una solución única para cada valor $x \in dom(A)$.

**Definición II.17.** La función $u : [0, \tau] \to X$ es una *solución clásica* de (2.2) en $[0, \tau)$, si $u$ es continua en $[0, \tau)$, continuamente diferenciable en $(0, \tau)$, $u(t) \in dom(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ y (2.2) se cumple en $[0, \tau)$.

**Teorema II.15.** *Si $f \in L^1(0, \tau; X)$, entonces para cada $x \in X$ el problema de valor inicial (2.2), tiene como máximo una solución (clásica) que es dada por*

$$u(t) = \Sigma(t)x + \int_0^t \Sigma(t-s)f(s)ds.$$

**Definición II.18.** Sea $A$ un generador infinitesimal de un $C_0$-semigrupo $\Sigma(t)$. Si $x \in X$ y $f \in L^1(0, \tau; X)$, entonces la función $u \in C([0, \tau]; X)$ es dada por

$$u(t) = \Sigma(t)x + \int_0^t \Sigma(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.3}$$

Dicha función $u$ es llamada *solución débil (mild solution)* de (2.2) en $[0, \tau]$.

**Observación II.2.**

- No toda solución débil es solución clásica.
- Es claro que si $f \in L^1(0, \tau; X)$, el problema (2.2) tiene una única solución débil.

# CAPÍTULO III

# VARIABLES E HIPÓTESIS

## 3.1. Variables de la investigación

Nuestras variables a estudiar estarán dadas por

$A =$ Semigrupo de soluciones para la ecuación dada en (1.1).

$B =$ Atractor global para el semigrupo asociado a la ecuación dada en (1.1).

## 3.2. Operacionalización de las variables

| **Variables** | **Definición** | **Dimensiones** | **Indicadores** |
|---|---|---|---|
| $A$ | A partir de la buena colocación de la ecuación presentada en (1.1), se define el semigrupo de soluciones a partir de la Definición II.9 presentada en la sección 2.3. | $(i)$ $S(0) = I$.<br>$(ii)$ $S(t + s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geqslant 0$.<br>$(iii)$ La aplicación $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \longmapsto S(t)(x) \in X$ es continua para cada $x \in X$ dado. | $(i)$ Existencia de soluciones.<br>$(ii)$ Dependencia continúa respecto a los datos iniciales.<br>$(iii)$ Unicidad de soluciones. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B$ | A partir de la variable $A$, se define $B$ por la Definición II.11 presentada en la sección 2.3. | $(i)$ Existencia de un conjunto absorbente.<br>$(ii)$ Desigualdad de estabilización. | $(i)$ $A$ genera un sistema dinámico disipativo.<br>$(ii)$ $A$ es asintóticamente compacto. |

## 3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

### Hipótesis general

Existe un atractor global para el sistema dinámico generado por la ecuación presentada en (1.1).

### Hipótesis específicas

1. La ecuación presentada en (1.1) está bien colocada en el sentido de Hadamard.

2. El semigrupo de soluciones de la ecuación presentada en (1.1) es disipativo.

3. El semigrupo de soluciones de la ecuación presentada en (1.1) satisface una desigualdad de estabilización.

# CAPÍTULO IV

# METODOLOGÍA

## 4.1. Tipo de investigación

Como explican Sanchez y Reyes [46], se llamará *Investigación básica, pura o fundamental* a aquel tipo de investigación que se orienta a la búsqueda de nuevos conocimientos sin, necesariamente, tener objetivos prácticos específicos. Este tipo de investigación busca el progreso científico acrecentando conocimientos comúnmente teóricos. Así, dada la naturaleza de la presente investigación, es del tipo básico y dada su finalidad es sustantiva. La metodología a ser usada es de tipo inductivo deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

## 4.2. Diseño de la investigación

El presente trabajo de investigacion presentará la siguiente estructura:
Primero se explicara el tratamiento previo a la ecuación sustentada en la bibliografía usando el método de Dafermos, por lo cual se dividirá en: Entorno funcional, Problema con historia. Luego se expondrá los diferentes resultados referentes a la buena colocación del problema, lo dividiremos en: Existencia de soluciones débiles, Dependencia continua y unicidad de las soluciones débiles. Por último, se probará la existencia del atractor global, la cual se dividirá en: Semigrupo gradiente, Desigualdad de estabilización, Compacidad asintótica.

## 4.3. Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

## 4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

## 4.5. Procedimientos de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

## 4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

No aplica al presente trabajo.

# CAPÍTULO V

# Resultados

## 5.1. Problema autónomo

Debido a la presencia de la memoria en (1.1) es claro que el problema es no-autónomo, lo que impide el trabajo con semigrupo, puesto que se tendría que contar un tiempo inicial y proceder a partir de la teoría de los procesos dinámicos, sin embargo, Siguiendo el método de Dafermos [20], al igual que en [2, 15, 16, 17] entre otros, se reescribirá (1.1) en función a una variable que guarde la información de la historia pasada del material, siendo una solución débil de (1.1) ahora un terna de funcionales. A seguir mostraremos la metodología antes mencionada.

### 5.1.1. Entorno funcional

Con el fin de probar la buena colocación del problema a partir del método de Dafermos [20], es preciso construir un espacio donde habiten las soluciones débiles del problema (1.1). Dado que el problema contiene una convolución referente a la historia del material, se tendrá que definir una nueva variable que estará dentro de un espacio de Bochner con peso que se presentará en esta sección.

**Observación V.1.** Para facilitar las cuentas a lo largo del trabajo, usaremos ciertas notaciones que explicaremos a continuación:

- Dado que nuestro problema envuelve al operador Laplaciano, denotaremos por

$$A := -\Delta.$$

  Además,

$$dom(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

- Se denotará a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$ como:

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in L^p(\Omega).$$

  Además, se denotará el producto interno em $L^2(\Omega)$ como

$$(u, v) := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \qquad \forall\ u, v \in L^2(\Omega)$$

- Dadas las observaciones anteriores notemos que podemos denotar a la norma en el espacio $H_0^1(\Omega)$ como

$$\|\nabla u\|_2 := \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega),$$

  y al producto interno respectivo como

$$\langle u, v \rangle_1 := \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v) = (Au, v)\,, \qquad \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

- La dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ será denotada por

$$\langle f, u \rangle := \langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall\ f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

**Definición V.1.** Dada la hipótesis (1.8), definimos la medida $\nu$ en $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ como

$$d\nu(s) = \mu(s)ds.$$

**Definición V.2.** (Espacio de Historia). Dado $\nu$ como en la definición anterior, definimos el espacio de Bochner con peso

$$\mathcal{M} := L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \tag{5.1}$$

llamado *espacio de historia*. Dado que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, el espacio $\mathcal{M}$ unido al producto interno y norma

$$\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{M}} := \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta(s), \xi(s) \rangle_1 ds, \quad \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 := \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta\|_2^2 ds, \quad \forall \eta, \xi \in \mathcal{M}$$

es un espacio de Hilbert.

Ahora, como ya se mencionó anteriormente, seguiremos el enfoque de Dafermos [20], para esto es preciso definir el siguiente semigrupo traslación a derecha

**Definición V.3.** Definimos el semigrupo $\Sigma(t)$ en $\mathcal{M}$ dado por

$$[\Sigma(t)\eta](s) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < s \leqslant t \\ \eta(s-t) & \text{se} \quad s > t \end{cases} \tag{5.2}$$

Dicho semigrupo sera llamado *Semigrupo Traslación a Derecha.*

Es claro observar que dicho semigrupo cumple con las siguientes propiedades:

- El semigrupo $\Sigma(t)$ es un $C_0$-semigrupo de operadores lineales.
- El generador infinitesimal del semigrupo $\Sigma(t)$ es dado por el operador lineal $T : dom(T) \to \mathcal{M}$ donde

$$T\eta = -\eta', \quad dom(T) = \{\eta \in \mathcal{M} \;:\; \eta' \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\}. \tag{5.3}$$

**Teorema V.1.** *Dado el semigrupo anterior $\Sigma(t)$, con el generador infinitesimal $T$, se cumple que*

$$\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} \leqslant 0, \quad \forall \eta \in dom(T). \tag{5.4}$$

*Demostración.* Sea $\eta \in dom(T)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} = \langle -\eta', \eta\rangle_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty \mu(s)\langle -\eta', \eta\rangle_1 ds \\
&= -\int_0^\infty \mu(s)\left[\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx\right] ds \\
&= -\int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} ds\right] dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s)\frac{d}{ds}(\sum_{i=1}^3 \left|\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right|^2) ds\right] dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s)\frac{d}{ds}\|\nabla\eta(s)\|^2_{\mathbb{R}^3} ds\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2_{\mathbb{R}^3} ds\right] dx - \int_\Omega \left[\mu(s)\|\nabla\eta(s)\|^2_{\mathbb{R}^3}\right]_0^\infty dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2_{\mathbb{R}^3} ds\right] dx,
\end{aligned}$$

ahora por (1.8) se tendrá que $\mu' \leqslant 0$, entonces

$$\langle T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{M}} \leqslant 0 \tag{5.5}$$

■

### 5.1.2. Problema con historia

Siguiendo con el enfoque en el marco de la historia para (1.1), se *transformará* (1.1) por medio de un *dislocamiento* que generará una nueva variable (cf. [20, 23, 41, 2, 15, 16, 17] entre otros).

**Definición V.4.** Sea $\Omega$ un dominio limitado de $\mathbb{R}^3$, con frontera $\partial\Omega$ suave. Sea $\eta$ el *Dislocamiento Relativo de la Historia del Sistema*, el cual es dado por

$$\eta = \eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \ t \geqslant 0. \tag{5.6}$$

La pregunta es, ¿por qué la necesidad de definir dicho dislocamiento? La necesidad es escribir de una mejor manera el término de la convolución para evitar la no-autonomía respecto al tiempo. Pues notemos que si derivamos dicho dislocamiento formalmente con relación a $t$ y $s$ obtenemos

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \ t \geqslant 0, \tag{5.7}$$

así el término original de la meoria es reescrito como

$$\int_0^\infty \mu(s)\Delta u(t-s)ds = \left(\int_0^\infty \mu(s)ds\right)\Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds.$$

Ahora reescribiendo la ecuación (1.1) con este cambio, quedará como

$$|\partial_t u|^\rho \, \partial_{tt} u - \Delta\partial_{tt} u - \left(\alpha - \int_0^\infty \mu(s)ds\right)\Delta u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds + f(u) = h,$$

además, por la observación (1.12) y teniendo en cuenta que $A = -\Delta$, se tiene que finalmente la ecuación (1.1) se escribe como

$$|u_t|^\rho u_{tt} + Au_{tt} + Au + \int_0^\infty \mu(s)A\eta^t(s)ds + f(u) = h \tag{5.8}$$

**Observación V.2.** Notemos que cambiamos de notación para la derivada de $u$ respecto de $t$, esto es solo para no sobrecargar las notaciones a lo largo del trabajo. Además, omitimos también el par de variables $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.

Así, para terminar de reescribir (1.1) en términos de este dislocamiento, se define la siguiente condición inicial para $\eta$.

**Definición V.5.** Sea $\phi_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como en la hipótesis **(H1)** . Definimos la condición inicial ($t = 0$) para $\eta$ como

$$\eta^0(x,s) := u_0(x,0) - u(x,-s) = u_0(x,0) - \phi_0(x,s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Ahora, ¿en qué espacio se encuentra dicho dislocamiento relativo? Es aquí donde entra el espacio de historia $\mathcal{M}$, para observar mejor esto se estudiará más de cerca la función $\eta$.

Notemos que en realidad la función $\eta$ *trabaja* de la siguiente manera

$$\eta : [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\eta(t,x,s) := \eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s).$$

Notemos que si fijamos $t \in [0,\infty)$ claramente tenemos

$$\eta^t : s \mapsto \eta^t(\cdot,s) \in H_0^1(\Omega),$$

Además, como se vé en la ecuación (5.8) se obtendrá términos del tipo

$$\int_0^\infty \mu(s) A\eta^t(x,s)ds,$$

Por lo que se precisa de un espacio donde se tenga control en las expresiones anteriores. Para esto, fijando $t \in [0,\infty)$, se tiene que $\eta^t$ pertenece al espacio de historia $\mathcal{M}$ como en (5.1). Notemos que esta es la *motivación* de definir el espacio de historia como (5.1).

Consecuentemente, el sistema correspondiente a la ecuación no-autónoma (1.1) se escribirá como el sistema autónomo:

$$|u_t|^\rho u_{tt} + Au_{tt} + Au + \int_0^\infty \mu(s)A\eta^t(s)ds + f(u) = h, \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{5.9}$$

$$\eta_t^t(s) = -\eta_s^t(s) + u_t, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{5.10}$$

con condiciones de frontera

$$u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad \eta = 0 \ \text{ sobre } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{5.11}$$

y datos iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad \eta^t(x,0) = 0, \quad \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \tag{5.12}$$

donde

$$\eta_0(x,s) = u_0(x,0) - \phi(x,s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

**Observación V.3.** Notemos que teniendo en cuenta la ecuación (5.10), notamos que $\eta_s^t \in \mathcal{M}$, además se tiene que $\eta^t(0) = 0$ para cada $x \in \Omega$. Asi, por el resultado (5.3) se obtiene que $\eta^t \in dom(T)$. Por lo tanto (5.10) también se puede escribir en términos de $T$ como:

$$\eta_t^t(s) = T\eta^t(s) + u_t, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{5.13}$$

Así, en lugar de trabajar sobre la ecuación (1.1), se trabajará sobre el sistema autónomo (5.9)-(5.10).

## 5.2. Buena colocación

En esta sección mostraremos uno de los resultados principales del presente trabajo, la *buena colocación del problema*, es decir, la existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales de las soluciones débiles para el sistema (5.9)-(5.10).

Comenzaremos definiendo lo que es una solución débil para el sistema (5.9)-(5.10), y probaremos la existencia de dichas soluciones usando el método de Faedo-Galerkin (cf. [2, 15]). Para dicha prueba se estudiará los resultados presentados por Cavalcanti et al. [8], Han y Wang [28, 29], Pata y Zucchi [41] y haremos un estudio más detallado de Conti et al. [15] y Araujo et al. [2] para la prueba de la unicidad y dependéncia continua con relación a los datos iniciales.

Comenzaremos definiendo el *espacio de fase* para las soluciones débiles respecto al sistema (5.9)-(5.10).

**Definición V.6.** (Espacio de Fase). Sea $\mathcal{M}$ como en (5.1). Definimos el *Espaço de Fase* $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M},$$

el cual es un espacio normado, con la norma dada por:

$$\|(u, v, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2, \qquad \forall (u, v, \eta) \in \mathcal{H}.$$

Ahora ya tenemos todas las herramientas para definir el una solución débil para el sistema (5.9)-(5.10).

**Definición V.7.** Sea $\tau > 0$ fijo, pero arbitrario. Dado el sistema (5.9)-(5.10), con condiciones de frontera (5.11) y datos iniciales (5.12). Si dichos datos iniciales $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ y $h \in L^2(\Omega)$, entonces diremos que la función $z = (u, u_t, \eta) \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ es una *Solución Débil* de (5.9)-(5.10) si satisface la condición inicial $z(0) = (u_0, v_0, \eta_0)$ y

$$\langle |u_t|^\rho u_{tt}, \varphi \rangle + \langle u_{tt}, \varphi \rangle_1 + \langle u, \varphi \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^t(s), \varphi \rangle_1 ds + \langle f(u), \varphi \rangle = (h, \varphi)\,, \tag{5.14}$$

$$\langle \eta_t^t + \eta_s^t, \xi \rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t(t), \xi \rangle_{\mathcal{M}}, \tag{5.15}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\xi \in \mathcal{M}$, e $t \in [0, \tau]$ casi siempre.

**Observación V.4.** Una pregunta obvia es, ¿qué sentido tienen las expresiones $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi \rangle$ e $\langle f(u(t)), \varphi \rangle$ en la ecuación (5.14)?. Para responder esto analizaremos ambos casos.

- Para el caso $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi \rangle$. Debido a que $u, u_t \in C([0, \tau], H_0^1(\Omega))$ e $\rho \in [0, 4)$, se tendrá que

  $$|u_t|^\rho u_t \in L^\infty(0, \tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$$

  pues,

  $$\int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}} dx = \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leqslant C^{\rho+2} \|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2} < \infty,$$

  donde $C$ es la constante producto de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ la cual es válida dado que $\rho + 2 < 6 = 2^*$.

Además si $\|\nabla u_t\|_2 \leqslant R$ para algún $R > 0$, se tiene que $|u_t|^\rho u_t$ es uniformemente acotada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ con respecto de $t$, pues

$$\int_0^\tau \int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}} dxdt = \int_0^\tau \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} dt \leqslant C^{\rho+2} \int_0^\tau \|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2} dt \leqslant \tau R^{\rho+2} C^{\rho+2}.$$

Así, es válida la siguiente igualdad en el sentido de las distribuciones:

$$\begin{aligned} \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} &= -\frac{1}{\rho+1}\langle |u_t(t)|^\rho u_t(t), \varphi_t(t)\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} \\ &= -\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\varphi_t(t)dx \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in D([0,\tau],\Omega)$ e para quase todo $t \in [0,\tau]$, dado que $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ y de la caracterización de las distribuciones que pertenecen a $L^1_{loc}(\Omega)$. Ahora, como $\overline{D(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, por un pasaje al límite y por la continuidad podemos generalizar dicha igualdad para todo $\varphi(t) \in H_0^1(\Omega)$, además como $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ pues $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) = (L^{\rho+2}(\Omega))'$ la expresión $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle$ se puede ver como $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$ para todo $\varphi(t) \in H_0^1(\Omega)$ y para casi todo $t \in [0,\tau]$. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= -\frac{1}{\rho+1}\langle |u_t(t)|^\rho u_t(t), \varphi_t(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &= -\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\varphi_t(t)dx \end{aligned}$$

- Para el caso $\langle f(u(t)), \varphi\rangle$, procederemos prácticamente igual al caso anterior. Notemos que $f(u(t)) \in L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega),$ para casi todo $t \in [0,\tau]$, pues:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}} dx &\leqslant \int_\Omega [c|u|(1+|u|^q)]^{\frac{q+2}{q+1}} dx \\ &\leqslant c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \left[\int_\Omega |u|^{\frac{q+2}{q+1}} dx + \int_\Omega |u|^{q+2} dx\right] \\ &= c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \|u\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} + c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \|u\|_{q+2}^{q+2} \\ &\leqslant \left(\frac{C_f^1}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}} \|\nabla u\|_2^{\frac{q+2}{q+1}} + \left(\frac{C_f^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}} \|\nabla u\|_2^{q+2} < \infty, \end{aligned}$$

donde se usó (1.5) en la primera desigualdad y las constantes $C_f^1$ y $C_f^2$ dependen de $c$, $q$ y las inmersiones $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ respectivamente, dado que $q \in [0, 4)$. Notemos además que

$$\|f(u)\|_{\frac{q+2}{q+1}} = \left(\int_\Omega |f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}} dx\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \leqslant C_f^1\|\nabla u\|_2 + C_f^2\|\nabla u\|_2^{q+1} \leqslant C_f\|\nabla u\|_2(1+\|\nabla u\|_2^q), \tag{5.16}$$

donde $C_f = \text{máx}\{C_f^1, C_f^2\} > 0$.

**Observación V.5.** Notemos que si $(u, u_t, \eta)$ es solución débil del sistema (5.9)-(5.10) tendremos que $\eta \in C([0,\tau], \mathcal{M})$ y $u_t \in L^1(0,\tau;\mathcal{M})$. Entonces se puede decir que $\eta$ es una *mild solution* para (5.10), o más claramente, de su forma equivalente (5.13), esto es para

$$\frac{d\eta}{dt} = T\eta + u_t$$

$$\eta^0 = \eta_0.$$

Ahora, como $\eta_0 \in \mathcal{M}$, por la definición de *mild solution*, tendremos que

$$\eta^t = \Sigma(t)\eta_0 + \int_0^t \Sigma(t-y)u_t(y)dy,$$

esto implica (por (5.2)) que la representación explicita para $\eta$ estará dada por

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s) & \text{se} \quad 0 < s \leqslant t \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0 & \text{se} \quad s > t \end{cases}$$

Notemos que esta última expresión es compatible con la construcción del dislocamiento $\eta^t$.

Dado que se tiene definido la idea de solución débil para el sistema (5.9)-(5.10), se comenzará a probar la existencia de dichas soluciones.

### 5.2.1. Existencia de Soluciones Débiles

Como se explicó al comienzo de la sección, probaremos la existencia de soluciones débiles usando el método de Faedo-Galerkin. Comenzaremos enunciando el teorema principal de la sección.

**Teorema V.2.** ***(Existencia de Soluciones Débiles)****.*
*Dado el sistema (5.9)-(5.10), con condiciones de frontera (5.11) y datos iniciales (5.12). Supóngase cierta las hipótesis* ***(H1)*** *-* ***(H4)*** *. Si los datos iniciales* $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ *y* $h \in L^2(\Omega)$*, entonces el sistema (5.9)-(5.10) posee una solución débil*

$$(u, u_t, \eta) \in C([0, \tau], \mathcal{H}), \quad \forall \tau > 0, \tag{5.17}$$

*satisfaciendo*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^2([0, \tau], H_0^1(\Omega)), \quad \eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}).$$

Para poder probar el teorema (V.2) comenzaremos dando ciertas herramientas que van a ayudar a aplicar el método de Faedo-Galerkin. Para mayor detalle se remite al lector revisar los trabajos de Conti et al. [15], Araujo et al. [2], Cavalcanti et al. [8], Han y Wang [28, 29] y Pata y Zucchi [41].

Como sabemos el método de Faedo-Galerkin consiste en tener una base de auto-funciones *buenas* para modelar el problema aproximado referente a la ecuación y poder trabajar sobre dicha aproximación. Comenzaremos definiendo dicha base.

Sea $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ una base de auto-funciones de $-\Delta u = \lambda u$ en $\Omega$, con condiciones de frontera de Dirichlet. Entonces, dicha base es ortonormal en $L^2(\Omega)$ y ortogonal en $H_0^1(\Omega)$. Además cumple que:

$$\begin{cases} -\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j, & x \in \Omega \\ \omega_j = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\lambda_j \geqslant 0, \ \forall j \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

**Observación V.6.** Notemos de dicha base de auto-funciones existe, pues podemos ver qué $-\Delta = A$, donde $A : dom(A) \subset L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ con

$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, y observando el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ como una forma bilineal, continua, cumpliendo que $(Au, v) = \langle u, v\rangle$ se tiene que $A$ es cerrado, no acotado, positivo definido, autoadjunto y es un isomorfismo (cf. [49, Chapter 2.]). Así, de la teoría espectral, existe la base $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$.

En el caso de $\mathcal{M}$ se tiene el siguiente resultado.

**Lema V.1.** *Existe una base $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ ortonormal para $\mathcal{M} = L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ con $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, para todo $j \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Sea $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L_\mu^2(\mathbb{R}^+) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ y $\{\bar{\omega}_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\bar{\omega}_j = \frac{\omega_j}{\|\nabla\omega_j\|_2}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Definiendo $\zeta_i = h_p\bar{\omega}_k$ e $\zeta_j = h_m\bar{\omega}_n$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle\zeta_i, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty \mu(s)\left(\int_\Omega \nabla\zeta_i\nabla\zeta_j dx\right) ds \\
&= \int_0^\infty \mu(s)h_p(s)h_m(s)\left(\int_\Omega \nabla\bar{\omega_k}\nabla\bar{\omega_n} dx\right) ds \\
&= \delta_{pm}\delta_{kn} \\
&= \delta_{ij},
\end{aligned}$$

Así, $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para $\mathcal{M}$ con $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, $\forall j \in \mathbb{N}$. ■

Dado que ya se tiene definidas las respectivas bases ortonormales para $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ y $\mathcal{M}$, podemos comenzar a probar el Teorema V.2.

*Demostración. (Teorema V.2).* La prueba será efectuada en cinco etapas: comenzaremos definiendo el *Problema Aproximado* para el sistema (5.9)-(5.10). Luego haremos tres tipos diferentes de estimativas a partir de dicho problema aproximado y finalmente procederemos a explicar em que *sentido* se aplicará el límite en el problema.

**Problema Aproximado**

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos los subespacios generados

$$Span\{\omega_1, ..., \omega_m\} \subset H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad Span\{\zeta_1, ..., \zeta_m\} \subset \mathcal{M}.$$

Para los datos iniciales $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, buscaremos las soluciones aproximadas

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{mj}(t)\omega_j \quad \text{e} \quad \eta^{t,m} = \sum_{j=1}^{m} b_{mj}(t)\zeta_j(s),$$

tales que

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, \omega_j\rangle + \langle u_{tt}^m, \omega_j\rangle_1 + \langle u^m, \omega_j\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), \omega_j\rangle_1 ds + \langle f(u^m), \omega_j\rangle = (h, \omega_j)\,, \tag{5.18}$$

$$\langle \eta_t^{t,m}, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \eta_s^{t,m}, \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t^m(t), \zeta_j\rangle_{\mathcal{M}}, \tag{5.19}$$

para $j \in [1, m]$, con condiciones iniciales

$$u^m(0) = u_0^m, \quad u_t^m(0) = v_0^m, \quad \eta^{0,m} = \eta_0^m, \tag{5.20}$$

donde $u_0^m, v_0^m, \eta_0^m$ son escogidos de forma que

$$u_0^m \to u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega), \quad v_0^m \to v_0 \text{ en } H_0^1(\Omega), \quad \eta_0^m \to \eta_0 \text{ en } \mathcal{M}. \tag{5.21}$$

Así, el sistema (5.18)-(5.19) con condiciones iniciales (5.20) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en $t$. Tal sistema posee existencia local vía Teorema de Carathéodory (cf. Han y Wang [28, 29]). Ahora, realizaremos ciertas estimativas a priori que mostraran que las soluciones locales $(u^m, u_t^m, \eta^{t,m})$ pueden ser extendidas al intervalo $[0, \infty)$.

**Primera Estimativa**

Dado que:

$$u_t^m(t) = \sum_{j=1}^{m} a'_{mj}(t)\omega_j \quad \text{e} \quad \eta^{t,m} = \sum_{j=1}^{m} b_{mj}(t)\zeta_j(s),$$

Entonces, multiplicamos por $a'_{mj}(t)$ a la ecuación (5.18) y por $b_{mj}(t)$ a la ecuación (5.19), tomando la sumatoria en ambas ecuaciones desde 1 hasta $m$, obtenemos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_t^m\rangle + \langle u_{tt}^m, u_t^m\rangle_1 + \langle u^m, u_t^m\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_t^m\rangle_1 ds + \langle f(u^m), u_t^m\rangle = (h, u_t^m)\,, \tag{5.22}$$

$$\langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t^m(t), \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{5.23}$$

**Definición V.8.** Definimos el funcional

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.24}$$

el cual será llamado como *Energía Auxiliar do Sistema (5.22)-(5.23).*

En particular, teniendo en cuenta el problema aproximado anterior, denotaremos por

$$\mathcal{E}^m(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m})\|_{\mathcal{H}}.$$

**Definición V.9.** Definimos el funcional

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}(t) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx - \int_\Omega hu(t)dx, \tag{5.25}$$

es decir,

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx - \int_\Omega hu(t)dx.$$

Dicho funcional será llamado como *Energía del Sistema (5.22)-(5.23).*

En particular, teniendo en cuenta el problema aproximado anterior, denotaremos por

$$E^m(t) := \frac{1}{\rho+2}\|\nabla u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}^m(t) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx - \int_\Omega hu^m(t)dx.$$

el cual llamaremos por *Energía Aproximada* para el sistema (5.22)-(5.23).

Ahora notemos que

$$\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} = \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), u_t^m(t)\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t)\|_2^2 &= \langle u^m(t), u_t^m(t)\rangle_1,\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 &= \langle u_{tt}^m(t), u_t^m(t)\rangle_1,\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}^2 &= \langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}},\\
\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx &= \langle f(u^m(t)), u_t^m(t)\rangle,\\
\frac{d}{dt}\int_\Omega h u^m(t)dx &= \left(h, u_t^m(t)\right),
\end{aligned}
$$

asi, se obtiene que

$$
\frac{d}{dt}E^m(t) = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} = \langle T\eta^{t,m}, \eta^{t,m}\rangle_{\mathcal{M}} \leqslant 0. \tag{5.26}
$$

Esto último es por la desigualdad (5.4).

Ahora, integrando de 0 a $t$ la desigualdad anterior, obtenemos

$$
E^m(t) \leqslant E^m(0), \tag{5.27}
$$

la cual comparando con los datos iniciales, se escribe como

$$
E^m(0) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}^m(0) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(0))dx - \int_\Omega h u^m(0)dx,
$$

de donde observamos que, si $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant R$ entonces existen funciones $Q_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ crecientes e independientes del tiempo, para $i = 1, ..., 4$ tal que

- $\mathcal{E}^m(0) \leqslant Q_1(R)$,
- $\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leqslant Q_2(R)$,
- $\int_\Omega \widehat{f}(u^m(0))dx \leqslant Q_3(R)$,
- $\int_\Omega h u^m(0)dx \leqslant Q_4(R)$.

Así, podemos decir que si $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant R$, existe una función $Q_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ creciente e independiente del tiempo, tal que

$$
E^m(0) \leqslant Q(R) \tag{5.28}
$$

**Observación V.7.** Notemos que $Q_0(R)$, no solo depende de los datos iniciales, también depende de $\|h\|, m_f, \beta, \rho, q, |\Omega|, \lambda_1$ y algunas constantes de inmersión antes mencionadas.

Ahora encontremos alguna relación entre $\mathcal{E}^m(t)$ y $E^m(0)$.
Notemos que como $\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \geqslant 0$ tenemos

$$E^m(t) \geqslant \mathcal{E}^m(t) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx - \int_\Omega hu^m(t)dx$$

además, usando la desigualdad de Young generalizada, se tiene que

$$-\int_\Omega hu^m(t)dx \geqslant -\frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2 - \frac{1}{4}\|\nabla u^m(t)\|_2^2$$

así, obtenemos que

$$E^m(t) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{E}^m(t) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2.$$

Notemos ahora que por la hipótesis (1.6), dado $\epsilon > 0$ (pequeño) existe $R > 0$ tal que

$$\frac{f(y)}{y} > -\lambda_1 + \epsilon \quad \text{se } |y| > R$$

luego, sea $\lambda = \lambda_1 - \epsilon > 0$ para $\epsilon$ lo suficientemente pequeño, entonces, existe $C > 0$ tal que

$$f(y) \geqslant -\lambda y - C,$$

notemos que esta $C$ viene de los datos referentes a $0 \leqslant |y| \leqslant R$. Integrando de 0 a $u$ respecto a $y$, tendremos que

$$\widehat{f}(u) \geqslant -\frac{\lambda}{2}u^2 - Cu,$$

ahora integrando sobre $\Omega$ se tendra que

$$\int_\Omega \widehat{f}(u)dx \geqslant -\frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 - C\|u\|_1$$

entonces, dada la inmersión $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existirá una constante $\bar{\lambda} > 0$ que depende de $\lambda$ y la constante de inmersión, tal que

$$\int_\Omega \widehat{f}(u)dx \geqslant -\bar{\lambda}\|u\|_2^2,$$

finalmente, dada a inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, tendremos que

$$\int_\Omega \widehat{f}(u)dx \geqslant -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2 \geqslant -\frac{2\bar{\lambda}}{\lambda_1}\mathcal{E}(t). \tag{5.29}$$

Así, tomando $\epsilon > 0$ muy pequeño, existirá una constante fija $\nu > 0$ tal que

$$E^m(t) \geqslant \nu\mathcal{E}^m(t) - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2,$$

o sea,

$$\mathcal{E}^m(t) \leqslant \frac{E^m(t) + C_h}{\nu}, \tag{5.30}$$

donde $C_h = \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2$.

Con esto, y por (5.27)-(5.28), si $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant R$, existe una función $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ creciente e independiente del tiempo, tal que

$$\mathcal{E}^m(t) \leqslant Q(R).$$

Con la estimativa anterior concluimos que

$$\begin{aligned} u^m(t) &\ \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),\\ u_t^m(t) &\ \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),\\ \eta^{t,m} &\ \text{ es acotado en } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}). \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} u^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),\\ u_t^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \ \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),\\ \eta^{\bullet,m} &\overset{*}{\rightharpoonup} \eta^\bullet \ \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}). \end{aligned}$$

**Observación V.8.** La expresión $\eta^{\bullet,m}$ denota a la función $\eta^{\bullet,m} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}$ tal que $\eta^{\bullet,m}(t) = \eta^{t,m}$. Análogo para $\eta^\bullet$. Esta notación se usará a lo largo del trabajo cada vez que se precise.

**Segunda Estimativa**

En esta sección se quiere estimar principalmente $\int_0^t \|\nabla u_{tt}^m(s)\|_2^2 ds$ para $t \in [0,\tau]$ con $\tau > 0$ fijo.

Comenzaremos multiplicando a la ecuación (5.18) por $a''_{mj}$ y sumando en relación a $j$, de 1 hasta $m$, así obtenemos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m\rangle + \|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 = -\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m\rangle + (h, u_{tt}^m)\,,$$

dado que $\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m\rangle \geqslant 0$, tendremos que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leqslant -\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m\rangle + (h, u_{tt}^m)\,.$$

Notemos que para estimar $\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2$, basta estimar cada término del lado derecho de la igualdad anterior.

- **Estimando** $\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1$

$$\langle u^m, u_{tt}^m\rangle_1 \leqslant \|\nabla u^m\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2.$$

- **Estimando** $\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds &= \int_0^\infty \mu(s)\left[\int_\Omega \nabla\eta^{t,m}(s)\nabla u_{tt}^m dx\right] ds \\
&\leqslant \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2 ds \\
&= \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2\right) ds \\
&= \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu^{1/2}\mu^{1/2}\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 ds\right) \\
&\leqslant \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s) ds\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^{t,m}(s)\|_2 ds\right)^{1/2} \\
&= k_0^{1/2}\|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Así

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m\rangle_1 ds \leqslant k_0^{1/2}\|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}. \tag{5.31}$$

- **Estimando** $\langle f(u^m), u^m_{tt}\rangle$

  Por la observación (5.16) tenemos que

$$\langle f(u^m), u^m_{tt}\rangle \leqslant \|f(u^m)\|_{\frac{q+2}{q+1}}\|u^m_{tt}\|_{q+2} \leqslant C\|\nabla u^m_{tt}\|_2(C^1_f\|\nabla u^m\|_2+C^2_f\|\nabla u^m\|_2^{q+1}), \tag{5.32}$$

  donde $C > 0$ es la constante de la inmersión $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, pues recordemos que $q \in [0, 4)$.

- **Estimando** $(h, u^m_{tt})$

$$(h, u^m_{tt}) \leqslant \|h\|_2\|u^m_{tt}\|_2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2\|\nabla u^m_{tt}\|_2.$$

Así, a partir de estas estimativas tendremos que

$$\|\nabla u^m_{tt}\|_2^2 \leqslant \|\nabla u^m_{tt}\|_2\left(\|\nabla u^m\|_2 + k_0^{1/2}\|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}} + CC^1_f\|\nabla u^m\|_2 + CC^2_f\|\nabla u^m\|_2^{q+1} + \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2\right).$$

Análogamente, como se trabajó en la primera estimativa, si $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant R$, existe una función $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ creciente e independiente del tiempo, tal que

$$\|\nabla u^m_{tt}\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u^m_{tt}\|_2^2 + \frac{1}{2}Q(R)$$

entonces,

$$\|\nabla u^m_{tt}\|_2^2 \leqslant Q(R).$$

Ahora, sea $\tau > 0$ fijo con $t \in [0, \tau]$. Integrando de 0 a $t$ se tiene

$$\int_0^t \|\nabla u^m_{tt}(s)\|_2^2 ds \leqslant tQ(R) \leqslant \tau Q(R), \quad t \in [0, \tau]$$

Notemos que la cota superior $\tau Q(R)$ ahora no solo depende de los datos iniciales, si no que también depende de $\tau$.

Con la estimativa anterior concluimos que

$$(u^m_{tt}) \text{ é limitada em } L^2(0, \tau; H^1_0(\Omega)),$$

es decir, se tiene la siguiente convergencia débil estrella

$$u^m_{tt} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^2(0, \tau; H^1_0(\Omega)).$$

**Tercera Estimativa**

En esta sección queremos estimar $\| |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$. Esta estimativa junto con la estimativa anterior, nos dará la convergencia para el término no lineal $|u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t)$. Así, tendremos que

$$\| |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+1} \leqslant C^{\rho+1}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^{\rho+1},$$

donde $C > 0$ es una constante que se obtiene de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$.

Procediendo igual que la segunda estimativa, tendremos que para algún $\tau > 0$ fijo se cumple que

$$(|u_t^m|^\rho u_t^m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,\tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)).$$

**Pasaje al Límite**

Con las estimativas a priori obtenidas anteriormente, podemos aplicar el límite a las soluciones aproximadas y garantizar la existencia de al menos una solución global débil satisfaciendo los datos iniciales. Notar que la principal complicación se presenta sobre los términos no lineales, por lo cual en esta sección se estudiará *en qué sentido* será el pasaje al límite para dichos términos. Los términos no lineales en la ecuación son

$$f(u^m) \quad \text{e} \quad |u_t^m|^\rho u_{tt}^m.$$

Además, será mostrará un estudio del pasaje al límite para el problema aproximado de la ecuación (5.10).

- *Límite para* $|u_t^m|^\rho u_{tt}^m$.

  Como vimos en la observación (V.4), para cada $t \in [0,\tau]$, se tiene que $|u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$. Por la inmersión compacta $W^{1,\infty}(0,\tau; H_0^1(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow}$

$C([0,\tau];L^2(\Omega))$, pasando a una sub-sucesión si fuera necesario, tendremos que

$$u_t^m \to u_t \quad \text{em } C([0,\tau];L^2(\Omega)),$$

esto es por la primera y segunda estimativa. Así, en particular, tendremos que

$$|u_t^m|^\rho u_t^m \to |u_t|^\rho u_t \ \text{ c.s. en } \Omega \times [0,\tau]$$

Además, por la tercera estimativa se tiene que

$$(|u_t^m|^\rho u_t^m) \ \text{ es acotada en } L^\infty(0,\tau;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$$

es decir $|u_t^m|^\rho u_t^m$ es uniformemente acotada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ respecto de $t \in [0,\tau]$. Así, por el teorema de convergencia dominada y por la definición de derivada distribucional, tendremos que

$$-\frac{1}{p+1}\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t), \varphi_t(t)\rangle dt \to \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle dt,$$

donde $\varphi \in D([0,\tau];H_0^1(\Omega))$. Por otro lado, se tiene que

$$-\frac{1}{p+1}\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t), \varphi_t(t)\rangle dt = \int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t)\rangle dt$$

entonces

$$\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t)\rangle dt \to \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle dt.$$

De la arbitrariedad de $\varphi$, concluimos que

$$\langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t)\rangle \to \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t)\rangle \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ y para casi todo } t \in [0,\tau].$$

- *Límite para* $f(u^m)$.

  Procederemos de manera análoga al anterior caso. Por el hecho de que $W^{1,\infty}(0,\tau;H_0^1(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} C([0,\tau];L^2(\Omega))$ y pasando a una sub-sucesión si fuera necesario, tendremos que

$$u^m \to u \quad \text{c.s. en } \Omega \times [0,\tau],$$

ahora, dado que $f$ es continua se tiene que

$$f(u^m) \to f(u) \quad \text{c.s. en } \Omega \times [0,\tau].$$

Por la observación (V.4) notamos que $f(u^m)$ es uniformemente acotada en $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ respecto de $t \in [0,\tau]$, obtenemos que

$$\int_0^\tau \langle f(u^m), \varphi\rangle dt \to \int_0^\tau \langle f(u), \varphi\rangle dt, \quad \varphi \in D([0,\tau]; H_0^1(\Omega)).$$

Dado que $\overline{D(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, por un pasaje al límite por densidad y continuidad, y dado que $\varphi$ es arbitrario, se tendrá que

$$\langle f(u^m), \varphi\rangle \to \langle f(u), \varphi\rangle \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ y para casi todo } t \in [0,\tau].$$

- *Tratamiento del Límite para la Ecuación (5.10).*

Notemos que por la primera estimativa se tiene que $\eta^{t,m} \in dom(T)$, y procediendo igual que la observación (V.5), la representación para $\eta^{t,m}$ es dada por

$$\eta^{t,m}(s) = \begin{cases} u^m(t) - u^m(t-s) & \text{se} \quad 0 < s \leqslant t \\ \eta_0^m(s-t) + u^m(t) - u_0^m & \text{se} \quad s > t \end{cases}$$

Además, como $u_0^m \to u_0$ y $\eta_0^m \to \eta_0$ fuertemente, y teniendo en cuenta nuevamente las convergencias al final de la primera estimativa, se tendrá que $\eta^{\bullet,m} \rightharpoonup \bar{\eta}^\bullet$ en la topología débil en $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$ para cierto $\bar{\eta} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$. Así obtenemos que

$$\bar{\eta}^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s) & \text{se} \quad 0 < s \leqslant t \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0 & \text{se} \quad s > t \end{cases}$$

ahora como $\eta^{\bullet,m} \overset{*}{\rightharpoonup} \eta^\bullet$ en $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$, obliga a que $\bar{\eta} = \eta$. Así $\eta^t$ es una solución suave (*mild solution*) para la ecuación (5.10), y en particular, dado que se tiene la representación de $\eta^t$, esta cumple la ecuación (5.15).

Así, dadas las diferentes estimativas y teniendo las respectivas aclaraciones respecto a los límites en el problema aproximado, podemos garantizar la existencia de soluciones débiles para el sistema (5.9)-(5.10), lo que prueba el Teorema V.2.

$\blacksquare$

### 5.2.2. Dependencia Continua y Unicidad de las soluciones débiles

En esta sección se seguira el trabajo presentado por Conti, Marchini & Pata [?], dado que en dicho trabajo se muestra la prueba de la dependencia contínua de las soluciones débiles con respecto a los datos iniciales, lo que ayudará con la prueba de la unicidad de las soluciones débiles para el sistema (5.9)-(5.10).
Sea $\tau > 0$ fijo pero arbitrário. Dado $(u^1, u_t^1, \eta^{\bullet,1}), (u^2, u_t^2, \eta^{\bullet,2}) \in C([0,\tau], \mathcal{H})$ dos soluciones débiles para el sistema (5.9)-(5.10), satisfaciendo los datos iniciales

$$(u^i(0), u_t^i(0), \eta^{0,i}) = z_i \quad \forall i = 1, 2,$$

donde $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$.
Dado que se quiere probar la unicidad de las soluciones, se denotará a la diferencia de dichas soluciones como

$$\bar{u} = u^1 - u^2, \quad \bar{\eta} = \eta^{\bullet,1} - \eta^{\bullet,2}.$$

Nótese que $\bar{u}, \bar{\eta} \in C([0,\tau], \mathcal{H})$ y que por la linealidad de la derivadas se tendrá que $\bar{u}_t = u_t^1 - u_t^2$.

#### Dependencia Continua de las Soluciones Débiles

Ahora enunciaremos y demostraremos el Teorema que garantiza la dependencia continua de las soluciones débiles con respecto a los datos iniciales, esto será de suma importancia para la prueba de la unicidad.

**Teorema V.3.** ***(Dependencia Continua de las Soluciones Débiles con respecto a los Datos Iniciales).***

*Sea $R \geqslant 0$ y dadas las definiciones anteriores. Si $\|z_i\|_{\mathcal{H}} \leqslant R$ para $i = 1, 2$ entonces se cumple que*

$$\|\nabla \bar{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(t)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (5.33)$$

*para todo $t \in [0, \tau]$, donde $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función creciente independiente de $\tau > 0$.*

*Demostración.* Comenzaremos la prueba introduciendo las siguientes variables

$$w(t) = \int_0^t u(y)dy \quad \text{e} \quad \xi^t(s) = \int_0^t \eta^y(s)dy.$$

Ademas, se definirá la siguiente función $\sigma : H_0^1(\Omega) \to L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ tal que

$$\sigma(\nu) = \frac{1}{1+\rho}\nu|\nu|^\rho. \quad (5.34)$$

**Observación V.9.**

- Se $u \in H_0^1(\Omega)$, efectivamente, $\sigma(u) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ pues

$$\int_\Omega |\sigma(u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx = \int_\Omega \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}|u|^{\rho+2}dx = \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leqslant \frac{C}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}\|\nabla u\|_2^{\rho+2} \leqslant \infty,$$

  donde $C > 0$ es una constante producto de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$.

- Igual que la observación (V.4), como $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) = (L^{\rho+2}(\Omega))'$ y dado que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega))$, pues $\rho \in [0, 4)$, tenemos que $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Asi tiene sentido la siguiente expresión

$$\langle \sigma(u), \varphi \rangle := \langle \sigma(u), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

  Ademas, va a estar dada por

$$\langle \sigma(u), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \sigma(u)\varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

Esto debido a la caracterización de las distribuciones que pertenecen a $L^1_{loc}(\Omega)$.

- Dado que $\rho \in [0,4)$, la función $\sigma$ es monótona. (Vease Zeidler [?] pag. 502.).
- Dado $u, v \in \mathbb{R}$ se tendra que

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| \leqslant c_\sigma(|u|^\rho + |v|^\rho)|u - v| \tag{5.35}$$

donde $c_\sigma > 0$ es una constante que depende de $\rho$. Comprovaremos el resultado apenas para el caso $\rho \in (0,4)$, pues si $\rho = 0$ la prueba es trivial. Entonces, notemos que

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| = \frac{1}{1+\rho}||u|^\rho u - |v|^\rho v| = \frac{1}{\rho+1}(\rho+1)|\zeta|^\rho|u-v|,$$

donde $\zeta \in [u, v]$, esto es devido al Teorema del Valor Medio. Ahora, sea $\theta \in [0,1]$ tal que $\zeta = (1-\theta)u + \theta v$, entonces tendremos que

$$\begin{aligned}
|\sigma(u) - \sigma(v)| = \frac{1}{1+\rho}||u|^\rho u - |v|^\rho v| &\leqslant |(1-\theta)u + \theta v|^\rho |u - v| \\
&\leqslant 2^\rho||u - \theta u|^\rho + |\theta v|^\rho||u - v| \\
&\leqslant 2^\rho|2^\rho|u|^\rho + \theta^\rho|u|^\rho + \theta^\rho|v|^\rho||u - v| \\
&\leqslant 2^\rho|2^\rho|u|^\rho + |u|^\rho + |v|^\rho||u - v| \\
&\leqslant 2^\rho|(2^\rho + 1)|u|^\rho + |v|^\rho||u - v| \\
&\leqslant 2^\rho(2^\rho + 1)||u|^\rho + |v|^\rho||u - v| \\
&= c_\sigma||u|^\rho + |v|^\rho||u - v|.
\end{aligned}$$

Con esto se comprueba el resultado.

Notemos que, integrando la ecuación (5.9) de 0 a $t$, se obtiene que

$$\sigma(u_t) + Aw_{tt} + Aw + \int_0^\infty \mu(s)A\xi(s)ds + \int_0^t f(u(y))dy = th + g \tag{5.36}$$

con

$$g = Au_t(0) + \sigma(u_t(0))$$

Construímos cada variable anterior para cada una de las soluciones $(u^1, u^1_t, \eta^{t,1})$ y $(u^2, u^2_t, \eta^{t,2})$. Asi, se tendra que

$$w^i(t) = \int_0^t u^i(y)dy, \quad \xi^{t,i} = \int_0^t \eta^{y,i}(s)dy, \quad \forall i = 1, 2.$$

Ademas, si

$$\bar{w}(t) = w^1(t) - w^2(t) \quad \text{e} \quad \bar{\xi}^t = \xi^{t,1} - \xi^{t,2},$$

se observa que $(\bar{w}, \bar{\xi}^t)$ satisfaze el sistema

$$\sigma(u^1_t) - \sigma(u^2_t) + A\bar{w}_{tt} + A\bar{w} + \int_0^\infty \mu(s)A\bar{\xi}^t(s)ds + F = G, \tag{5.37}$$

$$\bar{\xi}^t_t = T\bar{\xi}^t + \bar{w}_t - \bar{u}(0) + \bar{\eta}^0. \tag{5.38}$$

con

$$F(t) = \int_0^t [f(u^1(y)) - f(u^2(y))]dy, \quad G = A\bar{u}_t(0) + \sigma(u^1_t(0)) - \sigma(u^2_t(0)).$$

Esto es facil de comprobar, solo basta restar a la ecuación (5.36) y (5.10) en las respectivas variábles referentes a cada solución debil, y cambiar por las variables $\bar{w}$ y $\bar{\xi}^t$.

Ahora, aplicando $\bar{w}_{tt} = u^1_t - u^2_t$ en las ecuaciones (5.37), y por la monotonia de la función $\sigma$, se obtiene que

$$\|\nabla\bar{w}_{tt}\|_2^2 \leqslant -\langle\bar{w}, \bar{w}_{tt}\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle\bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt}\rangle_1 ds - \langle F, \bar{w}_{tt}\rangle + \langle G, \bar{w}_{tt}\rangle \tag{5.39}$$

Análogo a la prueba de la existencia de soluciones, se define una *Energia Auxiliar* para el problema.

**Definición V.10.** Definimos el funcional

$$\Lambda(t) := \frac{1}{2}\|\nabla\bar{w}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\bar{w}_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\bar{\xi}^t\|^2_{\mathcal{M}} = \|(\bar{w}(t), \bar{w}_t(t), \bar{\xi}^t)\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.40}$$

Dicho funcional sera llamado *Energia Auxiliar para el sistema (5.37)-(5.38).*

En este punto partiremos la prueba del Teorema en tres etapas, para poder estimar cada termino de la expreción (5.33).

***Prueba del Teorema: Estimación para*** $\|\nabla\bar{u}(t)\|_2^2$

Notemos que

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \langle \bar{w}(t), \bar{w}_t(t)\rangle_1 + \langle \bar{w}_{tt}(t), \bar{w}_t(t)\rangle_1 + \langle \bar{\xi}^t_t, \bar{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} \tag{5.41}$$

Entonces, aplicando $\bar{w}_{tt}$ en la ecuación (5.37), aplicando $\bar{\xi}^t$ en la ecuación (5.38) y por la igualdad (5.41), se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \langle T\bar{\xi}^t, \bar{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} - \langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t\rangle - \langle F, \bar{w}_t\rangle + \langle G, \bar{w}_t\rangle + \langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{5.42}$$

Ademas, notemos que

$$-\frac{d}{dt}\langle F, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle + \langle F_t, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle = -\langle F, \bar{w}_t\rangle - \langle F, \bar{w}_{tt}\rangle \tag{5.43}$$

$$\frac{d}{dt}\langle G, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle = \langle G, \bar{w}_t + \bar{w}_{tt}\rangle \tag{5.44}$$

ahora, por el resultado (5.4), y teniendo en cuenta las igualdades (5.43)-(5.44), se tiene que la ecuación (5.42) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Lambda(t) + \|\nabla\bar{w}_{tt}\|_2^2 \leqslant & -\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t\rangle - \frac{d}{dt}\langle F, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle + \langle F_t, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle \\ & + \frac{d}{dt}\langle G, \bar{w} + \bar{w}_t\rangle + \langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t\rangle_{\mathcal{M}} - \langle \bar{w}, \bar{w}_{tt}\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt}\rangle_1 ds.\end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que por las hipótesis existe una función $Q_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, creciente, independiente del tiempo, tal que

$$\|\nabla u^i\|_2^2 + \|\nabla u_t^i\|_2^2 + \|\eta^{t,i}\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant Q_0(R) \quad \forall i = 1, 2.$$

**Observación V.10.** Para no sobrecargar de notaciones el trabajo, a partir de ahora denotaremos por $Q(R)$ a qualquier función creciente, independiente del tiempo, que contenga a $Q_0(R)$.

Ahora comenzaremos a estimar algunos terminos de la desigualdad anterior

- ***Estimativa para*** $\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t \rangle$

  Por la observación (V.9), por el hecho de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+2}(\Omega)$ y como $\bar{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2$, se tendrá que,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), u_t^1 - u_t^2 \rangle &\leqslant c_\sigma \int_\Omega (|u_t^1|^\rho + |u_t^2|^\rho)|u_t^1 - v_t^1||\bar{w}_t| dx \\
&= c_\sigma \int_\Omega |u_t^1|^\rho |u_t^1 - v_t^1||\bar{w}_t| dx + c_\sigma \int_\Omega |u_t^2|^\rho |u_t^1 - v_t^1||\bar{w}_t| dx \\
&\leqslant c_\sigma \|u_t^1\|_{\rho+2}^\rho \|u_t^1 - u_t^2\|_{\rho+2} \|\bar{w}_t\|_{\rho+2} \\
&\quad + c_\sigma \|u_t^2\|_{\rho+2}^\rho \|u_t^1 - u_t^2\|_{\rho+2} \|\bar{w}_t\|_{\rho+2} \\
&\leqslant Q(R)\|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 + Q(R)\|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 \\
&\leqslant Q(R)\|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R)\|\nabla \bar{w}_t\|_2^2
\end{aligned}$$

  Luego,

$$\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), u_t^1 - u_t^2 \rangle \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R)\|\nabla \bar{w}_t\|_2^2 \tag{5.45}$$

  **Observación V.11.** En la estimativa anterior, fue fuertemente usado o hecho de que

$$\frac{\rho}{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2} = 1. \tag{5.46}$$

  Esta igualdad va ser usada a lo largo de todo el trabajo.

- ***Estimativa para*** $\langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}}$

$$\langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} \leqslant \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 + c\|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Donde $c > 0$ es una constante producto de la desigualdad de Young con épsilon.

- ***Estimativa para*** $\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt}\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt}\rangle_1 ds$

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt}\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt}\rangle_1 ds &\leqslant (\|\nabla \bar{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}}\|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}})\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2 \\
&\leqslant c(\|\nabla \bar{w}\|_2^2 + \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2}\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt}\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt}\rangle_1 ds \leqslant c(\|\nabla \bar{w}\|_2^2 + \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2}\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 \quad (5.47)
$$

Donde $c > 0$ es una constante producto de la desigualdad de Young que tambien depende de $k_0$.

Estas dos últimas estimativas se consiguen análogamente al proceso visto en la sección anterior, en la *Segunda Estimativa*.

Dadas estas estimativas, se obtiene que

$$
\frac{d}{dt}\Lambda(t) \leqslant Q(R)\Lambda(t) - \frac{d}{dt}\langle F, \bar{w}+\bar{w}_t\rangle + \frac{d}{dt}\langle G, \bar{w}+\bar{w}_t\rangle + \langle F_t, \bar{w}+\bar{w}_t\rangle + \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (5.48)
$$

Ahora, considerando $s \in [0, \tau]$ tal que integrando (5.48) sobre el intervalo $(0, s)$ respecto de $t$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Lambda(s) \leqslant Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt - \langle F(s), \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s)\rangle + \langle G, \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s)\rangle \\
-\langle G, \bar{u}(0)\rangle + \int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t)+\bar{w}_t(t)\rangle dt + (1+s)\|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + s\|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned} \quad (5.49)
$$

Ademas, nótese que

$$\begin{aligned}\langle F(s), \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s)\rangle &\leqslant \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla \bar{w}(s) + \nabla \bar{w}_t(s)\|_2\\ &\leqslant \epsilon\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}(\|\nabla \bar{w}(s)\|_2^2 + \|\nabla \bar{w}_t(s)\|_2^2)\\ &\leqslant \epsilon\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\Lambda(s),\end{aligned}$$

con $\epsilon > 0$ de la desigualdad de Young con épsilon. Sea $\delta > 0$ entonces, procediendo de manera análoga, se obtiene

$$\langle G, \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s)\rangle \leqslant \delta\|G(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\Lambda(s).$$

Asi, ajustando los valores para $\epsilon$ y $\delta$ se tendrá

$$\langle F(s), \bar{w}(s)+\bar{w}_t(s)\rangle+\langle G, \bar{w}(s)+\bar{w}_t(s)\rangle-\langle G, \bar{u}(0)\rangle \leqslant c\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}+c\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} +\frac{1}{2}\Lambda(s)+c\|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2, \tag{5.50}$$

donde $c > 0$ es una constante que depende de los valores escogidos para $\epsilon$ y $\delta$ de tal manera que los coeficientes de $\Lambda(s)$ sean $\frac{1}{2}$.
Substituyendo (5.50) en (5.2.2), se obtiene que

$$\Lambda(s) \leqslant Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + c\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + c\|G\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t)\rangle dt + c(1+s)\|z_1 - z_2\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.51}$$

Nuevamente, vamos a estimar termino por termino del lado derecho de la desigualdad anterior.

- ***Estimativa para*** $\|F(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$

  Notemos que como $q \in [0, 4)$, por la hipótesis (**??**) y por la imersión $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^{\frac{q+2}{q+1}} &\leqslant C\|F(s)\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} \\
&\leqslant C[\int_\Omega (\int_0^s c|u^1(y)-u^2(y)|(1+|u^1(y)|^q+|u^2(y)|^q)dy]^{\frac{q+2}{q+1}}dx \\
&\leqslant Cs^{\frac{1}{q+1}}c^{\frac{q+2}{q+1}}\int_0^s\int_\Omega (1+|u^1(y)|^q+|u^2(y)|^q)^{\frac{q+2}{q+1}}|u^1(y)-u^2(y)|^{\frac{q+2}{q+1}}dxdy \\
&\leqslant Cs^{\frac{1}{q+1}}c^{\frac{q+2}{q+1}}\int_0^s(\int_\Omega (1+|u^1(y)|^q+|u^2(y)|^q)^{\frac{q+2}{q+1}\frac{q+1}{q}}dx)^{\frac{q}{q+1}}(\int_\Omega |\bar{u}(y)|^{q+2}dx)^{\frac{1}{q+1}}dy \\
&\leqslant s^{\frac{1}{q+1}}Q(R)\int_0^s \|\nabla\bar{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}}dy,
\end{aligned}
$$

donde, $C>0$ es la constante de imersión $L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ y $c>0$ viene de la hipotesis (**??**). Notemos tambien que la ultima desigualdad se debe a que $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$. Ademas, $Q(R)$ depende de $c, C, q, |\Omega|, R$.

Ahora, como $\frac{2}{q+2}<1$

$$
\begin{aligned}
\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leqslant s^{\frac{2}{q+2}}Q(R)(\int_0^s \|\nabla\bar{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}}dy)^{\frac{2(q+1)}{q+2}} \\
&\leqslant sQ(R)\int_0^s \|\nabla\bar{u}(y)\|_2^2 dy \\
&\leqslant sQ(R)\int_0^s \Lambda(y)dy.
\end{aligned}
$$

- ***Estimativa para*** $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$

Repitiendo las cuentas de la estimativa (5.45), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(u_t^1(0))-\sigma(u_t^2(0))\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} &\leqslant c_\sigma\int_\Omega (|u_t^1(0)|^\rho+|u_t^2(0)|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}|\bar{u}_t(0)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}dx \\
&\leqslant Q(R)\|\nabla\bar{u}_t(0)\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}.
\end{aligned}
$$

Asi obtenemos que

$$
\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leqslant Q(R)\|\nabla\bar{u}_t(0)\|_2^2.
$$

- ***Estimativa para*** $\int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t)\rangle dt$

  Razonando igual que las anteriores estimativas, obtenemos que

$$\|F_t\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \leqslant c\int_\Omega (1+|u^1|^\rho + |u^2|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |\bar{u}|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leqslant Q(R)\|\nabla \bar{u}\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$$

  donde $c > 0$ es la constante de la hipóteses (**??**).

  Entonces se prueba que

$$\begin{aligned}\int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t)\rangle dt &\leqslant \int_0^s \|F_t(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} (\|\bar{w}(t)\|_{\rho+2} + \|\bar{w}_t(t)\|_{\rho+2}) dt \\ &\leqslant Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt.\end{aligned}$$

Substituyendo las estimativas anteriores en la desigualdad (5.51), se obtiene que

$$\Lambda(s) \leqslant (1+s)Q(R)\int_0^s \Lambda(t)dt + (1+s)Q(R)\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0,\tau].$$

Finalmente aplicando la desigualdad de Gronwall, se consigue

$$\Lambda(s) \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0,\tau]. \tag{5.52}$$

En particular,

$$\|\nabla \bar{u}(s)\|_2^2 \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0,\tau].$$

***Prueba del Teorema: Estimativa para*** $\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2$

La estimativa para $\bar{u}_t$ viene directamente de la igualdad (5.39), pues $\bar{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2 = \bar{u}_t$. Asi, teniendo en cuenta dicha igualdad y la estimativa (5.47), se tiene que

$$\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|\nabla \bar{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}}\|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}} + \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|G\|_{H^{-1}(\Omega)})^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2$$

y por la desigualdad (5.52) y las estimativas sobre $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$ e $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}$, se concluye que

$$\|\nabla \bar{u}_t(s)\|_2^2 \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0,\tau].$$

***Prueba del Teorema: Estimativa para*** $\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$

Finalmente, para estimar $\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$, primero aplicaremos $\bar{\eta}$ en la ecuación

$$\bar{\eta}_t = T\bar{\eta} + \bar{u}_t.$$

Procediendo de manera análoga que en la sección anterior, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle T\bar{\eta}, \bar{\eta}\rangle_{\mathcal{M}} + \langle \bar{u}_t, \bar{\eta}\rangle_{\mathcal{M}} \leqslant k_0^{\frac{1}{2}}\|\nabla \bar{u}_t\|_2\|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 + c\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2, \quad (5.53)$$

donde $c > 0$ es una constante que se obtiene de la desigualdad de Young con épsilon.

Aplicando la desigualdad de Gronwall en (5.53), y teniendo en cuenta la estimativa sobre $\|\nabla \bar{u}_t\|_2$, se obtiene que

$$\|\bar{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0,\tau].$$

Asi, sumando todas las estimativas se tendrá que

$$\|\nabla \bar{u}(s)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(s)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant (1+\tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0,\tau],$$

lo que prueba el Teorema.

$\blacksquare$

**Unicidad de las Soluciones Débiles**

**Teorema V.4.** ***(Unicidad de las Soluciones Débiles)***. *Sea $\tau > 0$ fijo pero arbitrário. Dado el sistema (5.9)-(5.10), con condiciones de frontera (5.11) y datos iniciales (5.12). Suponga cierta las hipótesis **(H1)** - **(H4)** . Se los datos iniciales $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ y $h \in L^2(\Omega)$, entonces el sistema (5.9)-(5.10) posee una única solución débil para todo $t \in [0, \tau]$.*

*Demostración.* Por el Teorema V.2, se tiene que existen soluciones débiles para el sistema con datos iniciales (5.12).

Sean $(u, u_t, \eta^t)$ y $(v, v_t, \xi^t)$ dos soluciones para el sistema (5.9)-(5.10) con datos iniciales (5.12).
Asi, por el Teorema V.3 se tendrá que

$$\|\nabla \bar{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(t)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant (1+\tau) Q(R) e^{\tau(\tau+1)Q(R)} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall t \in [0, \tau].$$

donde

$$\bar{u} = u - v, \quad \bar{\eta}^t = \eta^t - \xi^t, \quad z_1 = (u_0, v_0, \eta_0) = z_2.$$

Entonces, es claro que $(u, u_t, \eta^t) = (v, v_t, \xi^t)$ para todo $t \in [0, \tau]$, lo que prueba la unicidad. ∎

## 5.3. Existencia de un atractor global

En esta sección se probará la existencia de un atractor global para el problema (5.9)-(5.10). Comenzaremos definindo el $C_0$-semigrupo asociado a dicho sistema,

**Teorema V.5.** *Dado el sistema (5.9)-(5.10) su operador solución dado por $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que*

$$S(t)(u_0, v_0, \eta_0) = (u(t), u_t(t), \eta^t), \qquad t \geqslant 0,$$

*donde $(u(t), u_t(t), \eta^t)$ es una solución débil correspondiente al sistema (5.9)-(5.10), define un $C_0$-semigrupo.*

*Demostración.* Notemos que por la sección anterior, dicho operador solución $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ satisfaze las propiedades de semigrupo, es decir

$$S(0) = I \quad \text{e} \quad S(t+s) = S(t)S(s), \qquad s, t \geqslant 0,$$

esto es debido a la unicidad de las soluciones débiles siempre que se fija el dato inicial.

Ahora probaremos que $S(t)$ es fuertemente continuo.
Sea $z = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ entonces dado que $S(t)z = (u, u_t, \eta^t)$ tal que $(u(0), u_t(0), \eta^0) = z = (u_0, v_0, \eta_0)$ y como $(u, u_t, \eta^t) \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ para todo $\tau > 0$ (véase (5.17)), y por la dependencia continua respecto a los datos iniciales, se tendrá que

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)z - z\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

lo que prueba el Teorema. ■

Asi, por el Teorema anterior se tiene que el par $(\mathcal{H}, S(t))$ es un sistema dinámico correspondiente al sistema (5.9)-(5.10).

**Teorema V.6.** ***(Existencia de un Atrator Global)***.

*Dado el sistema (5.9)-(5.10). Suponga cierta las hipótesis* ***(H1)*** *-* ***(H4)*** *con* $h \in L^2(\Omega)$*, entonces el sistema dinámico* $(\mathcal{H}, S(t))$ *correspondiente a dicho sistema es gradiente y posee un atrator global* $\mathcal{A}$ *caracterizado por las variedades inestables* $\mathfrak{M}^u(\mathcal{N})$ *del conjunto* $\mathcal{N}$ *de soluciones estacionarias del sistema.*

*Demostración.* El método usado para la prueba del atractor global es dado por el Teorema II.12, lo que se reduce a probar que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ sea disipativo y asintóticamente compacto.

Para probar esto, dividiremos la prueba en tres etapas. Primero probaremos que el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ es gradiente y sus puntos estacionarios son acotados en $\mathcal{H}$, esto muestra que dicho sistema es disipativo, y que de existir un atractor global, este se caracteriza por las variedades inestables del conjunto de puntos estacionarios.

En la segunda etapa se mostrará uno de los resultados mas importantes de todo el trabajo, se probará que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ cumple una desigualdad de estabilización, esto ajudará a probar que $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintoticamente regular.

Finalmente, en la tercera etapa probaremos la compacidad asintótica, usando la desigualdad de estabilización, los Teoremas II.14 y II.8 y el Teorema II.13.

**Observación V.12.** Para facilitar las cuentas se tendrá las siguientes consideraciones.

- Omitiremos la variável temporal $t$. Solo se colocará en casos donde se tenga alguna confución.
- Denotaremos por $C$ a cualquier constante genérica que dependa de alguna imersión.
- Dado que $\rho \in [0, 4)$, $q \in [0, 4)$ y $2^* = 6$ se tiene las siguientes imersiones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega), \qquad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega).$$

- Dado que $\frac{p}{p+2} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1$ para $p = \rho$ o $p = q$, se usará la desigualdad de Holder generalizada con dichos exponentes directamente. Cuando sea necesário se colocará en evidencia la suma anterior.
- Debido a las estimativas realizadas en las secciones anteriores, se tendrá que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(t) = \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 &\leqslant \frac{2}{\nu} E(t) + \frac{2C_h}{\nu} \\ &\leqslant \frac{2}{\nu} E(0) + \frac{2C_h}{\nu}, \end{aligned}$$

donde $C_h = \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2$, con $\nu > 0$. Ademas, denotaremos por $C_\nu$ a cualquier constante genérica que depende de $\nu$ y por $C_{h\nu}$ a cualquier constante genérica que dependa de $\nu$ y $\|h\|_2$, asi tenemos que

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant C_\nu E(0) + C_{h\nu}.$$

### 5.3.1. Estructura gradiente

En esta sección se mostrará la estructura gradiente para el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$, es decir que posee un funcional de Lyapounov como en la Definición II.14.

**Proposición V.1.** *El semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$ es gradiente. Ademas, el conjunto de puntos estacionarios para $S(t)$, denotado por $\mathcal{N}$, es acotado en $\mathcal{H}$.*

*Demostración.* Sea $z = (u, v, \eta) \in \mathcal{H}$, definimos

$$\mathfrak{L}(z) = \frac{1}{2}\|z\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v|^{\rho+2}dx + \langle \widehat{f}, 1\rangle - (h, u).$$

Procediendo analogamento a lo explicado en la Sección V.2, y asumiendo las hipótesis $(H1) - (H4)$, se tiene que

$$\frac{\nu}{2}\|z\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2 \leqslant \mathfrak{L}(z) \leqslant c\|z\|_{\mathcal{H}}^2(1 + \|z\|_{\mathcal{H}}^q) + \|h\|_2^2.$$

Esto prueba automaticamente $(i)$ de la Definición II.14. Ahora, en luz de la desigualdad (5.5), se tiene que

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(S(t)z) = \langle T\eta^t, \eta^t\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\eta^t(s)\|_2^2 ds \leqslant 0, \tag{5.54}$$

esto claramente muestra $(ii)$ en la Definición II.14.

Con el fin de probar $(iii)$ de esta misma Definición, supongamos que $z_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ es un dato inicial para el sistema (5.9)-(5.10), tal que la aplicación $t \to \mathfrak{L}(S(t)z_0)$ es constante. Entonces, por (5.54) y (1.10) se tiene que

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\eta^t(s)\|_2^2 ds \leqslant -\frac{k_1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2, \quad \forall t > 0.$$

Asi, se tiene que $\eta^t(x,s) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$ y $t, s > 0$, en particular $\eta_0 = 0$. Luego por la ecuación (5.10) se tiene que $\partial_t u(t) = 0$, de donde se infiere que $u(t) = u_0$ para todo $t > 0$. En conclusión,

$$z_0 = (u_0, 0, 0),$$

probando que $z_0$ es un punto estacionario. Con esto se prueba que $S(t)$ posee estructura gradiente sobre $\mathcal{H}$.
Ahora se probará que el conjunto de puntos estacionarios $\mathcal{N}$ es acotado en $\mathcal{H}$. Notemos que toda solución estacionaria $(u, 0, 0)$ de $S(t)$ satisfaze

$$-\Delta u + f(u) = h.$$

Entonces, multiplicando esta expresión por $u$ e integrando sobre $\Omega$, se tiene que

$$\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega f(u)udx = \int_\Omega hudx,$$

y usando la hipótesis (1.7) y la desigualdad (5.29), se tendrá que

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + m_f|\Omega| + \frac{\nu}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \|h\|_2\|u\|_2 \leqslant \frac{2\nu+1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + 2m_f|\Omega| + \frac{1}{2\lambda_1\nu}\|h\|_2^2,$$

para $\nu > 0$ lo suficientemente pequeño. Asi, tomando $\nu < 1/4$, se tiene que

$$\|\nabla u\|_2^2 < 8m_f|\Omega| + \frac{2}{\lambda_1\nu}\|h\|_2^2.$$

Con esto concluimos que $\|\nabla u\|_2$ es acotado, lo que prueba la Proposición.

■

### 5.3.2. Desigualdad de estabilización

En esta sección probaremos una desigualdad de estabilización para dos soluciones debiles del sistema (5.9)-(5.10) con diferentes datos iniciales. Para la prueba construiremos un nuevo operador basado en el trabajo de Messaoudi & Tatar [35, 36, 37] y Araujo, Ma & Qin [2].

**Proposición V.2.** *Dado un conjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$. Sea $z_1 = (u, u_t, \eta^t)$ y $z_2 = (v, v_t, \xi^t)$ dos soluciones debiles para el sistema (5.9)-(5.10) tal que $z_1(0) = (u_0, u_1, \eta_0)$ y $z_2(0) = (v_0, v_1, \xi_0)$ pertenecen a $B$, entonces*

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_B e^{-\vartheta t}+C_B\int_0^t e^{-\vartheta(t-s)}(1+\|\nabla u_{tt}(t)\|_2+\|\nabla v_{tt}(t)\|_2)(\|w(t)\|_{p+2}+\|w_t(t)\|_{p+2})ds,$$

*donde $w = u - v$, $\vartheta$ y $C_B$ constantes positivas que dependen de $B$, y $p = \max\{\rho, q\}$.*

*Demostración.* Sea $\zeta^t = \eta^t - \xi^t$, entonces notemos que el par $(w, \zeta)$ satisface el sistema

$$Aw + Aw_{tt} + \int_0^\infty \mu(s)A\zeta^t(s)ds = -|u_t|^\rho u_{tt} + |v_t|^\rho v_{tt} - f(u) + f(v), \quad (5.55)$$

$$\zeta_t^t = -\zeta_s^t + w_t, \quad (5.56)$$

con condiciones iniciales

$$w(0) = u(0) - v(0), \qquad w_t(0) = u_1 - v_1, \qquad \zeta^0 = \eta_0 - \xi_0. \quad (5.57)$$

Definimos la *Energia Auxiliar* para el sistema (5.55)-(5.56) dada por

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Ademas, definimos el funcional $\Upsilon : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Upsilon(t) = \delta\mathcal{L}(t) + \epsilon\chi(t) + \kappa(t),$$

donde $\epsilon, \delta > 0$ seran fixados a posteriori, y

$$\chi(t) = \langle w_t, w\rangle_1, \quad (5.58)$$

$$\kappa(t) = -\int_0^\infty \mu(s)\langle w_t(t), \zeta^t(s)\rangle_1 ds - \int_0^\infty \mu(s)(\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\zeta^t(s)dx)ds$$
$$+\int_0^\infty \mu(s)(\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |v_t(t)|^\rho v_t(t)\zeta^t(s)dx)ds. \quad (5.59)$$

**Observación V.13.** Las integrales en $\kappa(t)$ son entendidas como dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

**Lema V.2.** *Exiten constantes $\beta_1, \beta_2, \delta_0 > 0$ tal que*

$$\beta_1 \mathcal{L}(t) \leqslant \Upsilon(t) \leqslant \beta_2 \mathcal{L}(t), \quad t \geqslant 0,\ 0 < \epsilon \leqslant \frac{k_0}{2},\ \delta > \delta_0,$$

*donde $k_0$ es dado por la hipótesis (1.9).*

*Demostración.* Haremos la prueba en dos etapas:

- ***Estimando*** $|\epsilon\chi(t)|$

$$|\chi(t)| = |\langle w_t(t), w(t)\rangle_1| \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 \leqslant \mathcal{L}(t),$$

entonces para $0 < \epsilon \leqslant \frac{k_0}{2}$ se tiene que

$$|\epsilon\chi(t)| \leqslant \frac{k_0}{2}\mathcal{L}(t). \tag{5.60}$$

- ***Estimando*** $|\kappa(t)|$

Notemos que al igual que (**??**), aplicando la desigualdad de Young en (5.31) se obtiene que

$$|-\int_0^\infty \mu(s)\langle w_t(t), \zeta^t(s)\rangle_1 ds| \leqslant \frac{k_0}{2}\|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leqslant \alpha_1 \mathcal{L}(t), \tag{5.61}$$

con $\alpha_1 = \text{máx}\{1, k_0\}$.

Por otro lado, observese que

$$-\int_0^\infty \mu(s)(\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\zeta^t(s)dx)ds + \int_0^\infty \mu(s)(\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |v_t(t)|^\rho v_t(t)\zeta^t(s)dx)ds$$

$$= -\int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega (\sigma(u_t) - \sigma(v_t))\zeta^t(s)dxds, \tag{5.62}$$

donde $\sigma$ es la función definida en (5.34).

Por (5.35) se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega (\sigma(u_t)-\sigma(v_t))\zeta^t(s)dxds| &\leqslant c_\sigma \int_0^\infty\int_\Omega |u_t(t)|^\rho |w_t(t)||\zeta^t(s)|dxds\\
&\quad + c_\sigma \int_0^\infty\int_\Omega |v_t(t)|^\rho |w_t(t)||\zeta^t(s)|dxds\\
&\leqslant c_\sigma \int_0^\infty \mu(s)\|u_t\|_{\rho+2}^\rho \|w_t\|_{\rho+2}\|\zeta^t(s)\|_{\rho+2}ds\\
&\quad + c_\sigma \int_0^\infty \mu(s)\|v_t\|_{\rho+2}^\rho \|w_t\|_{\rho+2}\|\zeta^t(s)\|_{\rho+2}ds\\
&\leqslant Cc_\sigma \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla u_t\|_2^\rho \|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2ds\\
&\quad + Cc_\sigma \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla v_t\|_2^\rho \|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2ds\\
&\leqslant Cc_\sigma C_{uh\nu} \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2ds\\
&\quad + Cc_\sigma C_{vh\nu} \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2ds\\
&\leqslant Cc_\sigma C_{uh\nu}(\frac{k_0}{2}\|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2)\\
&\quad + Cc_\sigma C_{vh\nu}(\frac{k_0}{2}\|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2)\\
&\leqslant \alpha_2\mathcal{L}(t),
\end{aligned}
$$

donde $C_{uh\nu}$ y $C_{vh\nu}$ son constantes positivas que dependen de $\|h\|_2$, $\nu$ y de los datos inciales $(u_0, u_1, \eta_0)$ y $(v_0, v_1, \xi_0)$ respectivamente (vide (V.12)) y $\alpha_2 = \text{máx}\{Cc_\sigma(C_{uh\nu} + C_{vh\nu})\alpha_1, 1\}$, con $\alpha_1$ como en la estimativa (5.61).

**Observación V.14.** A lo largo del trabajo se usaran las notaciones $C_{uh\nu}$ y $C_{vh\nu}$ definidas anteriormente.

Finalmente, de esta ultima estimativa y de (5.60) se obtiene que

$$|\Upsilon(t) - \delta\mathcal{L}(t)| \leqslant (\alpha_2 + \frac{k_0}{2})\mathcal{L}(t)$$

es decir,

$$(\delta - \alpha_2 - \frac{k_0}{2})\mathcal{L}(t) \leqslant \Upsilon(t) \leqslant (\delta + \alpha_2 + \frac{k_0}{2})\mathcal{L}(t)$$

,

lo que prueba el Lema, pues solo basta definir $\delta_0 = \alpha_2 + \frac{k_0}{2}$, $\beta_1 = \delta - \alpha_2 - \frac{k_0}{2}$ y $\beta_2 = \delta + \alpha_2 + \frac{k_0}{2}$, las cuales son constantes positivas para todo $\delta > \delta_0$.

$\blacksquare$

**Lema V.3.** *Existe una constante $C_0 > 0$ que depende de $(u_0, u_1, \eta_0)$, $(v_0, v_1, \xi_0)$, $\rho$ , $q$ y $c_f$, donde $c$ es dada por la hipótesis (1.5), tal que*

$$\mathcal{L}'(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t\|_2^2 ds + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w_t\|_{p+2},$$

*con $p = \text{máx}\{\rho, q\}$.*

*Demostración.* Notemos que aplicando $w_t$ e $\zeta^t$ en (5.55) e (5.56) respectivamente, se tiene que

$$\langle w, w_t\rangle_1 + \langle w_{tt}, w_t\rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s)\langle\zeta^t(s), w_t\rangle_1 ds = \langle -|u_t|^\rho u_{tt} + |v_t|^\rho v_{tt}, w_t\rangle + \langle f(v) - f(u), w_t\rangle, \tag{5.63}$$

$$\langle\zeta_t^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}} = -\langle\zeta_s^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}} + \langle w_t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}}, \tag{5.64}$$

y como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 = \langle w(t), w_t(t)\rangle_1,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_t(t)\|_2^2 = \langle w_{tt}(t), w_t(t)\rangle_1,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle\zeta_t^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}},$$

se obtiene que

$$\mathcal{L}'(t) = -\langle|u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - |v_t(t)|^\rho v_{tt}(t), w_t(t)\rangle - \langle f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t)\rangle - \langle\zeta_s^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}}. \tag{5.65}$$

Entonces para probar (V.3) bastara estimar cada término de la igualdad anterior:

- ***Estimando*** $|\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - |v_t(t)|^\rho v_{tt}(t), w_t(t)\rangle|$

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega (|u_t|^\rho u_{tt} - |v_t|^\rho v_{tt}) w_t dx| &\leqslant \int_\Omega |u_t|^\rho |u_{tt}||w_t| dx + \int_\Omega |v_t|^\rho |v_{tt}||w_t| dx \\
&\leqslant \|u_t\|_{\rho+2}^\rho \|u_{tt}\|_{\rho+2} \|w_t\|_{\rho+2} + \|v_t\|_{\rho+2}^\rho \|v_{tt}\|_{\rho+2} \|w_t\|_{\rho+2} \\
&\leqslant C\|\nabla u_t\|_2^\rho \|\nabla u_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} + C\|\nabla v_t\|_2^\rho \|\nabla v_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} \\
&\leqslant CC_{uh\nu} \|\nabla u_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} + CC_{vh\nu} \|\nabla v_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} \\
&\leqslant C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w_t\|_{\rho+2},
\end{aligned}$$

donde $C_1 = \text{máx}\{CC_{uh\nu}, CC_{vh\nu}\} > 0$.

- ***Estimando*** $|\langle f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t)\rangle|$

Repitiendo el proceso anterior con $q$ en lugar de $\rho$, se tendra que,

$$\begin{aligned}
|\langle f(u) - f(v), w_t\rangle| &\leqslant |\langle f(u), w_t\rangle| + |\langle f(v), w_t\rangle| \\
&\leqslant c\int_\Omega |u||w_t| dx + cCC_{uh\nu}\|w_t\|_{q+2} + c\int_\Omega |v||w_t| dx + cCC_{vh\nu}\|w_t\|_{q+2} \\
&\leqslant c(\|u\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|w_t\|_{q+2} + CC_{uh\nu}\|w_t\|_{q+2} + \|v\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|w_t\|_{q+2} + CC_{vh\nu}\|w_t\|_{q+2}) \\
&\leqslant (cC\|\nabla u\|_2 + cCC_{uh\nu} + cC\|\nabla v\|_2 + cCC_{vh\nu})\|w_t\|_{q+2} \\
&\leqslant (cCC_{uh\nu} + cCC_{uh\nu} + cCC_{vh\nu} + cCC_{vh\nu})\|w_t\|_{q+2} \\
&\leqslant C_2\|w_t\|_{q+2},
\end{aligned}$$

donde $C_2 = \text{máx}\{2cCC_{uh\nu}, 2cCC_{vh\nu}\} > 0$.

Notemos que se utiliza la imersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$, la cual es posible dado que $q \in [0, 4)$.

- ***Estimando*** $-\langle \zeta_s^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}}$

Notemos que por el Lema (**??**) se tiene que

$$-\langle \zeta_s^t, \zeta^t\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds.$$

Asi, dadas las estimativas anteriores, comparando con (5.65), se tendra que

$$\mathcal{L}'(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds + C_2\|w_t\|_{q+2} + C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w_t\|_{\rho+2}.$$

Ademas, si $p = \text{máx}\{\rho, q\}$, se tienen las imersiones $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ e $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, entonces

$$\mathcal{L}'(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds + CC_2\|w_t\|_{p+2} + CC_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w_t\|_{p+2},$$

por lo cual el Lema (V.3) queda probado, pues basta definir $C_0 = \text{máx}\{CC_1, CC_2\}$.

■

**Lema V.4.** *Se cumple que:*

$$\begin{aligned}\chi'(t) \leqslant & -\mathcal{L}(t) - \frac{15}{32}\|\nabla w\|_2^2 + \frac{3}{2}\|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{16k_0+1}{2k_1}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t\|_2^2 ds \\ & + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w\|_{p+2},\end{aligned}$$

*siendo $C_0 > 0$ la constante del Lema (V.3) y $p = \text{máx}\{\rho, q\}$.*

*Demostración.* Notemos que

$$\chi'(t) = \langle w_{tt}(t), w(t)\rangle_1 + \|\nabla w_t(t)\|_2^2.$$

Aplicando $w$ en (5.55) y comparando con $\chi'(t)$, se tiene que

$$\chi'(t) = -\int_0^\infty \mu(s)\langle\zeta^t(s), w\rangle_1 ds - \langle|u_t|^\rho u_{tt} - |v_t|^\rho v_{tt}, w\rangle - \langle f(u) - f(v), w\rangle - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2,$$

ahora, razonando igual que en las estimativas hechas en el Lema (V.3), Se tendra que

$$\chi'(t) \leqslant -\int_0^\infty \mu(s)\langle\zeta^t(s), w\rangle_1 ds + C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w\|_{\rho+2} + C_2\|w\|_{q+2} - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2,$$

ademas, procediendo igual que (**??**) y tomando $\epsilon = 8$ en la desigualdad de Young, se obtiene que

$$\chi'(t) \leqslant 8k_0\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{32}\|\nabla w\|_2^2 + C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\|w\|_{\rho+2} + C_2\|w\|_{q+2} - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2.$$

Por lo tanto, sumando y restando $\mathcal{L}(t)$ en la expresión anterior

$$\chi'(t) \leqslant -\mathcal{L}(t)+(8k_0+\frac{1}{2})\|\zeta^t\|^2_{\mathcal{M}}-\frac{15}{32}\|\nabla w\|_2^2+C_0(1+\|\nabla u_{tt}\|_2+\|\nabla v_{tt}\|_2)\|w\|_{p+2}+\frac{3}{2}\|\nabla w_t\|_2^2,$$

donde $p = \text{máx}\{\rho, q\}$, $C_0 = \text{máx}\{CC_1, CC_2\}$ siendo $C > 0$ la constante de las imersiones $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ y $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, esto es, la misma constante del Lema (V.3).

Finalmente, por las hipótesis (1.10) se tendrá que

$$\begin{aligned}\chi'(t) \leqslant & -\mathcal{L}(t) - \frac{15}{32}\|\nabla w\|_2^2 + \frac{3}{2}\|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{16k_0+1}{2k_1}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t\|_2^2 ds \\ & + C_0(1+\|\nabla u_{tt}\|_2+\|\nabla v_{tt}\|_2)\|w\|_{p+2},\end{aligned}$$

lo que prueba el Lema.

■

**Lema V.5.** *Existe una constante* $C_\kappa > 0$ *que depende de* $(u_0, u_1, \eta_0)$, $(v_0, v_1, \xi_0)$, $\rho$ , $q$, $c$, $k_0$ *y* $k_1$, *donde* $c, k_0, k_1$ *son dadas por las hipótesis* $(H1)$-$(H4)$, *tal que*

$$\kappa'(t) \leqslant \frac{k_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 - \frac{7k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 - C_\kappa \int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds$$

*Demostración.* Por la definición de $\kappa(t)$ (véase (5.59)), se tiene que

$$\kappa'(t) = A(t) + B(t), \tag{5.66}$$

donde

$$A(t) := \int_\Omega (|v_t(t)|^\rho v_{tt}(t) - |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - Aw_{tt}(t)) \left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s) ds\right) dx, \tag{5.67}$$

$$B(t) := \int_\Omega \left(\frac{1}{\rho+1}|v_t(t)|^\rho v_t(t) - \frac{1}{\rho+1}|u_t(t)|^\rho u_t(t) - Aw_t(t)\right) \left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t_t(s) ds\right) dx. \tag{5.68}$$

Para probar el Lema, estimaremos $A(t)$ y $B(t)$ por separado.

- ***Estimando*** $A(t)$

Substituyendo (5.55) en (5.67) se obtiene que

$$A(t) = \int_\Omega \left( Aw + \int_0^\infty \mu(s) A\zeta(s) ds + f(u) - f(v) \right) \left( \int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s) ds \right) dx.$$

Estimando término por término la igualdade anterior:

- *Estimando* $\int_\Omega Aw \left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right) dx$

$$\int_\Omega Aw \left( \int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds \right) dx = \int_0^\infty \mu(s)\langle w, \zeta^t(s)\rangle_1 ds \leqslant \frac{k_0}{32}\|\nabla w\|_2^2 + 8\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

  Para la última desigualdad se razona igual que (**??**), usando la desigualdad de Young con $\epsilon = 8$ para los términos $k_0^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_2$ y $\|\zeta^t\|$.

- *Estimando* $\int_\Omega \left(\int_0^\infty \mu(s)A\zeta(s)ds\right) \left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right) dx$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left( \int_0^\infty \mu(s)A\zeta(s)ds \right) \left( \int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds \right) dx \\
&\qquad = \int_0^\infty \mu(s) \left( \int_0^\infty \mu(y)\langle \zeta^t(s), \zeta^t(y)\rangle_1 dy \right) ds \\
&\qquad \leqslant \int_0^\infty \mu(s) \left( \int_0^\infty \mu(y)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2\|\nabla\zeta^t(y)\|_2 dy \right) ds \\
&\qquad = \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 \left( \int_0^\infty \mu(y)\|\nabla\zeta^t(y)\|_2 dy \right) ds \\
&\qquad \leqslant k_0^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 \left( \int_0^\infty \mu(y)\|\nabla\zeta^t(y)\|_2^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\qquad = k_0^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}} ds \\
&\qquad \leqslant k_0\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned}$$

- *Estimando* $\int_\Omega (f(u) - f(v)) \left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right) dx$

  Por la hipótesis (1.5) se tiene que

$$\int_\Omega (f(u) - f(v)) \left( \int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds \right) dx \leqslant c\int_\Omega (1+|u|^q+|v|^q)|w| \left( \int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds \right) dx$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
c\int_\Omega |w|\left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right)dx &= c\int_0^\infty \mu(s)\left(\int_\Omega |w|\zeta^t(s)dx\right)ds\\
&\leqslant c\int_0^\infty \mu(s)\|w\|_2\|\zeta(s)\|_2 ds\\
&\leqslant \frac{c}{\lambda_1^2}\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla w\|_2\|\nabla\zeta(s)\|_2 ds\\
&= \frac{c}{\lambda_1^2}\|\nabla w\|_2\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\zeta(s)\|_2 ds\\
&\leqslant \frac{ck_0^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1^2}\|\nabla w\|_2\|\zeta\|_{\mathcal{M}}\\
&\leqslant \frac{c^2}{\lambda_1^4}\frac{k_0}{4\epsilon}\|\nabla w\|_2^2+\epsilon\|\zeta\|_{\mathcal{M}}^2\\
&= \frac{k_0}{32}\|\nabla w\|_2^2+\frac{8c^2}{\lambda_1^4}\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2, \quad \epsilon=8.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
c\int_\Omega |u|^q\left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right)dx &= c\int_0^\infty \mu(s)\left(\int_\Omega |u|^q\zeta^t(s)dx\right)ds\\
&\leqslant c\int_0^\infty \mu(s)\|u\|_{q+2}^q\|w\|_{q+2}\|\zeta(s)\|_{q+2}ds\\
&\leqslant cCC_{uh\nu}\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla w\|_2\|\nabla\zeta(s)\|_2 ds\\
&\leqslant k_0c^2C^2C_{uh\nu}\frac{1}{4\epsilon}\|\nabla w\|_2^2+\epsilon\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}\\
&= \frac{k_0}{32}\|\nabla w\|_2^2+8C_3\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}, \quad \epsilon=8c^2C^2C_{uh\nu},
\end{aligned}
$$

donde $C_3=c^2C^2C_{uh\nu}>0$.

De manera análoga, existirá una constante $C_4=c^2C^2C_{vh\nu}>0$ tal que

$$
c\int_\Omega |v|^q\left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right)dx \leqslant \frac{k_0}{32}\|\nabla w\|_2^2+8C_4\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}.
$$

es decir,

$$
\int_\Omega (f(u)-f(v))\left(\int_0^\infty \mu(s)\zeta^t(s)ds\right)dx \leqslant \frac{3k_0}{32}\|\nabla w\|_2^2+8C_5\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2,
$$

donde $C_5 = \frac{c^2}{\lambda_1^4} + C_3 + C_4 > 0$.

Asi se tiene que

$$A(t) \leqslant \frac{k_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 + (k_0 + 8C_5 + 8)\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2, \tag{5.69}$$

pero, como

$$\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\zeta^t\|_2^2 ds \leqslant -\frac{1}{k_1}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 ds,$$

entonces se puede estimar $A(t)$ por

$$A(t) \leqslant \frac{k_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 - \frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 ds.$$

- ***Estimando*** $B(t)$

Nótese que por la ecuación (5.56) se tiene que

$$\int_0^\infty \mu(s)\zeta_t^t(s)ds = \int_0^\infty \mu'(s)\zeta^t(s)ds + k_0 w_t(t)$$

Asi, $B(t)$ se puede expresar como

$$B(t) = C(t) + k_0 D(t), \tag{5.70}$$

donde

$$C(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\rho+1}|v_t(t)|^\rho v_t(t) - \frac{1}{\rho+1}|u_t(t)|^\rho u_t(t) - Aw_t(t)\right)\left(\int_0^\infty \mu'(s)\zeta^t(s)ds\right)dx,$$

$$D(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\rho+1}|v_t(t)|^\rho v_t(t) - \frac{1}{\rho+1}|u_t(t)|^\rho u_t(t) - Aw_t(t)\right)w_t dx$$

.

Estimaremos $C(t)$ y $D(t)$.

- *Estimando $C(t)$*

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{|v_t|^\rho v_t}{\rho+1} - \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1}\right)\left(\int_0^\infty \mu'(s)\zeta^t ds\right) dx &= -\int_0^\infty \mu'(s)\int_\Omega (\sigma(u_t)-\sigma(v_t))\zeta^t(s) dx ds \\
&\leqslant -Cc_\sigma C_{uh\nu}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\quad - Cc_\sigma C_{vh\nu}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla w_t\|_2\|\nabla\zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\leqslant Cc_\sigma C_{uh\nu} k_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_t\|_2\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + Cc_\sigma C_{vh\nu} k_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_t\|_2\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant Cc_\sigma C_{uh\nu} k_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_t\|_2\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + Cc_\sigma C_{vh\nu} k_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_t\|_2\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{k_0}{32}\|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{\epsilon_1^u k_2}{k_0}\left(\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right) \\
&\quad + \frac{1}{32}\|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{\epsilon_1^v k_2}{k_0}\left(\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right) \\
&= \frac{k_0}{16}\|\nabla w_t\|_2^2 - (\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2}{k_0})\left(\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds\right),
\end{aligned}
$$

donde $\epsilon_1^u = 8C^2c_\sigma^2 C_{uh\nu}$ y $\epsilon_1^v = 8C^2c_\sigma^2 C_{vh\nu}$.

Ademas, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega -Aw_t\left(\int_0^\infty \mu'(s)\zeta^t(s)ds\right)dx &= -\int_0^\infty \mu'(s)\langle w_t,\zeta^t(s)\rangle_1 ds \\
&\leqslant \frac{k_0}{16}\|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{4k_2}{k_0}\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}
$$

Por lo que se obtiene que

$$
C(t) \leqslant \frac{k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 - (\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0})\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds. \tag{5.71}
$$

- *Estimando $D(t)$*

  Notemos que $D(t)$ se puede escribir como

$$D(t) = -\int_\Omega (\sigma(u_t(t)) - \sigma(v_t(t)))(u_t(t) - v_t(t))dx - \|\nabla w_t(t)\|_2^2,$$

  pero como $\sigma$ es monótona (véase (V.9)), es decir,

$$(\sigma(u_t(t)) - \sigma(v_t(t)))(u_t(t) - v_t(t)) \geqslant 0,$$

  entonces,

$$D(t) \leqslant -\|\nabla w_t(t)\|_2^2. \tag{5.72}$$

Substituyendo (5.71)-(5.72) en (5.70) se obtiene que

$$B(t) \leqslant -\frac{7k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 - (\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0}) \int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds. \tag{5.73}$$

Finalmente, substituyendo (5.69)-(5.73) en (5.66) se obtiene que

$$\kappa'(t) \leqslant -\frac{7k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{k_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 - C_\kappa \int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds,$$

donde, $C_\kappa = \frac{k_0+8C_5+8}{k_1} + \epsilon_1^u + \epsilon_1^v + 4 > 0$, pues por la observación (I.1), se tendrá que

$$\frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} + (\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0}) \leqslant \frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} + \epsilon_1^u + \epsilon_1^v + 4 = C_\kappa.$$

■

***<u>Conclusión</u>***.

Dados los Lemas (V.3), (V.4) y (V.5), y por la definición de $\Upsilon(t)$, se tendrá que

$$\Upsilon'(t) \leqslant \left(\frac{\delta}{2} - \frac{16k_0+1}{2k_1}\epsilon - C_\kappa\right)\int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\zeta^t(s)\|_2^2 ds + \left(\frac{k_0}{8} - \frac{15\epsilon}{32}\right)\|\nabla w\|_2^2$$
$$+\left(\frac{3\epsilon}{2} - \frac{7k_0}{8}\right)\|\nabla w_t\|_2^2 - \epsilon\mathcal{L}(t) + C_0(1+\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)(\delta\|w_t\|_{p+2} + \epsilon\|w\|_{p+2}).$$

Tomando

$$\frac{4k_0}{15} < \epsilon < \frac{k_0}{2} < \frac{7k_0}{12},$$
$$\delta > \frac{16k_0+1}{k_1}\epsilon + 2C_\kappa,$$

la expresión anterior se reduce a

$$\Upsilon'(t) \leqslant -\epsilon\mathcal{L}(t) + C_\Upsilon(1+\|\nabla u_{tt}\|_2+\|\nabla v_{tt}\|_2)(\|w_t\|_{p+2}+\|w\|_{p+2}),\ \ \forall\epsilon\in\left(\frac{4k_0}{15},\frac{k_0}{2}\right), \forall\delta>\delta_\Upsilon,$$

donde $\delta_\Upsilon = \text{máx}\{\delta_0, \frac{16k_0+1}{k_1}\epsilon + 2C_\kappa\}$, con $\delta_0$ definido en el Lema (V.2) y $C_\Upsilon = C_0\,\text{máx}\{\epsilon,\delta\}$.

**Observación V.15.** Notemos que las restricciones $\epsilon \in \left(\frac{4k_0}{15}, \frac{k_0}{2}\right)$ y $\delta > \delta_\Upsilon$, permite usar el Lema (V.2) para algun $\epsilon$ y $\delta$ fijo.

Denotemos por

$$m(t) := C_\Upsilon(1+\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)(\|w_t\|_{p+2} + \|w\|_{p+2}),$$

asi por el Lema (V.2) se obtiene que

$$\Upsilon'(t) \leqslant \frac{\epsilon}{\beta_2}\Upsilon(t) + m(t),$$

y por la desigualdad de Gronwall

$$\Upsilon(t) \leqslant \Upsilon(0)e^{-\frac{\epsilon t}{\beta_2}} + \int_0^t e^{-\frac{\epsilon(t-s)}{\beta_2}} m(s)ds.$$

Nuevamente por el Lema (V.2) se tiene que

$$\mathcal{L}(t) \leqslant \frac{\beta_2}{\beta_1}\mathcal{L}(0)e^{-\frac{\epsilon t}{\beta_2}} + \frac{1}{\beta_1}\int_0^t e^{-\frac{\epsilon(t-s)}{\beta_2}} m(s)ds,$$

es decir,

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_B e^{-\vartheta t} + C_B \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} m(s)ds,$$

con $C_B = \text{máx}\{\frac{\beta_2}{\beta_1}\mathcal{L}(0), \frac{1}{\beta_1}\} > 0$ y $\vartheta = \frac{\epsilon}{\beta_2}$ para algun $\epsilon \in \left(\frac{4k_0}{15}, \frac{k_0}{2}\right)$ y $\delta > \delta_\Upsilon$.

■

### 5.3.3. Compacidade assintótica

**Proposición V.3.** *El sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondiente al sistema (5.9)-(5.10) es asintoticamente compacto.*

*Demostración.* Para demostrar el Teorema, se comenzará probando que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintóticamente regular, para esto se usará el Teorema II.14 y II.8.

Sea $B$ un subconjunto acotado de $\mathcal{H}$ y positivamente invariante con respecto a $S(t)$. Dado $\epsilon > 0$, tómese $\tau > 0$, tal que

$$C_B^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\vartheta\tau}{2}} < \epsilon, \tag{5.74}$$

donde $C_B$ y $\vartheta$ son dados por la Proposición (V.2)

**Lema V.6.** *Existe una constante $C_{B,\tau} > 0$ tal que se cumple*

$$\|S(\tau)z_0^1 - S(\tau)z_0^2\|_{\mathcal{H}} \leqslant \epsilon + \phi_\tau(z_0^1, z_0^2), \qquad \forall z_0^1, z_0^2 \in B,$$

*donde*

$$\phi_\tau(z_0^1, z_0^2) = C_{B,\tau}\left(\int_0^\tau \|u(s) - v(s)\|_{p+2}^2 + \|u_t(s) - v_t(s)\|_{p+2}^2 ds\right)^{\frac{1}{4}},$$

*con $p = \text{máx}\{\rho, q\}$.*

*Demostración.* Consideremos $z_1(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t) = S(t)z_0^1$ y $z_2(t) = (v(t), v_t(t), \xi^t) = S(t)z_0^2$ soluciones débiles del sistema (5.9)-(5.10) respecto a los datos iniciales $z_0^1, z_0^2 \in B$.

Entonces, en el contexto de la Proposición (V.2), para todo $t \in (0,\tau)$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant C_B e^{-\vartheta\tau} + C_B \int_0^\tau e^{-\vartheta(\tau-s)}(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)(\|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2})ds, \\ &\leqslant C_B e^{-\vartheta\tau} + 2^2 C_B \left(\int_0^\tau e^{-\vartheta(\tau-s)}(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ahora, como $u_{tt}$ y $v_{tt}$ son acotados en $L^2(0,\tau; H_0^1(\Omega))$, entonces existe una constante $C_{\mathcal{B},\tau} > 0$ tal que

$$\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_B e^{-\vartheta\tau} + C_{B,\tau}^2 \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

entonces,

$$\begin{aligned}\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}} &\leqslant C_B^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\vartheta\tau}{2}} + C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leqslant \epsilon + C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2}\right)^{\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

para algun $\epsilon > 0$ que cumpla (5.74).

■

**Lema V.7.** *En el contexto del Lema anterior, se cumple que*

$$\liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \phi_\tau(z^n, z^m) = 0,$$

*para alguna sucesión* $(z^n) \subset B$.

*Demostración.* Sea $(z_0^n) = (u_0^n, v_0^n, \eta_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $B$.

Considérese $S(t)(z_0^n) = (u^n(t), u_t^n(t), \eta^{t,n})_{n\in\mathbb{N}}$, como $B$ es positivamente invariante por la acción de $S(t)$ entonces $(u^n(t), u_t^n(t), \eta^{t,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en $\mathcal{H}$, en particular se tendrá que

$$(u^n), (u_t^n) \ \text{ son acotados en } C([0,\infty); H_0^1(\Omega)).$$

Ahora, como $(u_t^n)$ es acotada en $C([0,\infty);H_0^1(\Omega))$, entonces

$$(u_{tt}^n) \text{ es acotada en } L^2(0,\tau;L^2(\Omega)), \quad \forall \tau > 0,$$

asi se tiene que

$$(u_t^n),(u_{tt}^n) \text{ son acotadas en } L^2(0,\tau;L^2(\Omega)).$$

Ahora como se tiene la cadena de imersiones

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad p = \max\{\rho,q\},$$

por el Teorema II.8 con

$$X = H_0^1(\Omega), \quad B = L^{p+2}(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega), \quad r = 2,$$

se tiene que $(u^n)$ y $(u_t^n)$ son relativamente compactos en $C(0,\tau;H_0^1(\Omega))$ para todo $\tau > 0$.

Pasando a una subsucesión se fuese necesário en cada caso, las cuales denotaremos igualmente, se tendrá que

$$(u^n),(u_t^n) \text{ convergen (fuertemente) en } C(0,\tau;L^{p+2}(\Omega)), \quad \forall \tau > 0,$$

Luego se puede concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} C_{B,\tau}\left(\int_0^\tau \|u^n(s)-u^m(s)\|_{p+2}^2 + \|u_t^n(s)-u_t^m(s)\|_{p+2}^2 ds\right)^{\frac{1}{4}} = 0,$$

lo que demuestra el Lema. ■

***<u>Conclusión</u>***.

Por el Teorema II.14 y por los Lemas (V.6)-(V.7), se concluye que el sistema dinámico $(\mathcal{H},S(t))$ correspondiente al sistema (5.9)-(5.10) es asintoticamente regular y por la Proposición (V.1) y el Teorema II.11 tambien es disipativo, entonces se tiene como resultado del Teorema II.13 que el sistema dinámico es asintoticamente compacto lo que prueba la proposición. ■

***Conclusão do Teorema V.6***.

Notemos que pela Proposição (V.1) y el Teorema II.11 se tiene que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es disipativo. Ademas, de la Proposición (V.3) se tiene que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintoticamente compacto.
Luego, por el Teorema II.12, se concluye que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un atractor global caracterizado por $\mathfrak{M}^u(\mathcal{N})$, donde $\mathcal{N}$ representa el conjunto de puntos estacionarios de $S(t)$ sobre $\mathcal{H}$.

$\blacksquare$

# CAPÍTULO VI

## Discusiones y Recomendaciones

En esta sección plantearemos un pequeño *survey* respecto a las ecuaciones de onda viscoelásticas.

(*i*) Respecto a las características geométricas del atractor global encontrado, solo se pudo rescatar la descomposición por variedades inestables respecto a los puntos estacionarios del sistema, aún no se consiguió probar la finitud del atractor global, lo cual es una pregunta en abierto para este tipo de ecuaciones. Respecto a la regularidad, está ya fue respondida recientemente en [17].

(*ii*) La condición (1.2) sobre la densidad del material es fundamental en un aspecto realista del modelaje del problema, y extrañamente recién asumido en [17], puesto que hasta el momento la mayoría de trabajo solo considera la hipótesis (1.3), lo cual es una incongruencia cuando la velocidad es nula, por ejemplo sobre los puntos estacionarios, pues en este caso la densidad del material se anularía haciendo que el material *desaparezca*. Pero como se explicó en esta tesis y en [17], la hipótesis (1.2) es principalmente de compatibilidad con el modelo, y por practicidad se puede considerar sin pérdida de generalidad en los resultados la condición (1.3).

(*iii*) Otro punto importante a destacar es respecto a las fuerzas externas, dado que la criticidad respecto a $f$ fue abordado en [17], pero no la criticidad respecto a $\rho$, es decir, respecto a la densidad. Esto aún es un problema que se encuentra en abierto.

(*iv*) En los trabajos de Messaudi & Tatar (véase [35, 36, 37]) se presenta una serie de funcionales con la finalidad de probar el decaimiento exponencial de la energía, que precisaban de un segundo damping, esto también se observa en [10, 11] entre otros. En trabajos posteriores como [2, 17] se puede notar que basta el damping de la memoria para conseguir el decaimiento exponencial de la energía y no un segundo damping, consiguiendo una compatibilidad con el modelo físico.

(*v*) Otro punto importante a destacar es la semicontinuidad de los atractores respecto al exponente de la densidad, es decir el estudio de la convergencia en un cierto sentido cuando $\rho \to 0$. La semicontinuidad superior fue probada recientemente usando la técnica presentada en [24] debido a la convergencia en el espacio de memoria. Aun la semicontinuidad inferior es un problema en abierto.

(*vi*) Respecto a la unicidad de las soluciones, recién fue probada formalmente en el trabajo de Conti et al. [15] en el 2014, por más que, para esta fecha ya había una abundante bibliografía respecto a este problema, en cuales hasta ese momento se había estudiado el problema sin unicidad o con presunta unicidad.

(*vii*) Respecto al tratamiento del problema con memoria, en este caso se optó por usar el método de Dafermos, pero este no la única forma de abordar el problema, incluso, hay en la literatura el abordaje de esta ecuación con $\rho = 0$ mediante el método del estado minimal, consiguiendo diferentes propiedades sobre el núcleo de la memoria. Aun está en abierto el estudio bajo este abordaje en la ecuación (1.1).

# CAPÍTULO VII

## Conclusiones

Como se analizó en la presente tesis, las ecuaciones de ondas viscoelásticas bajo los efectos de una memoria infinita con densidad variable dependiente de la velocidad de propagación de la onda generan una problemática reciente y de gran interes matemático, tanto en el área de las ecuaciones hiperbólicas como en el área de los sistemas dinámicos no lineales. Se espera que con este trabajo, se genere una base de futuros proyectos en estos campos.

# Bibliografía


[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces, second edition*, Pure and Applied Mathematics 140. Elsevier–Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] R.O. Araujo, T.F. Ma, Y. Qin, *Long-time behavior of a quasilinear viscoelastic equation with past history*, J. Differential Equations **254** (2013), 4066–4087.

[3] A.V. Babin, M.I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[4] I.L. Bogolubsky, *Some examples of inelastic soliton interaction*, Comput. Phys. Comm. **13** (1977), 149–155.

[5] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[6] P. L. Butzer, H. Berens,, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer–Verlag, New York, 1967.

[7] A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, *Local well posedness, asymptotic behavior and asymptotic bootstrapping for a class of semilinear evolution equations of the second order in time*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2567–2586.

[8] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), 1043–1053.

[9] M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, C.M. Webler, *Intrinsic decay rates for the energy of a nonlinear viscoelastic equation modeling the vibrations of thin rods with variable density*, Adv. Nonlinear Anal. (2016) DOI:10.1515

[10] M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho, J. A. Soriano, *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping*, Differential and Integral equations **14** (2001), 85–116.

[11] M. M. Cavalcanti, H. Portillo Oquendo, *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation*, SIAM J. Control Optim. **42** (2003), 1310–1324.

[12] V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[13] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Mem. Amer. Math. Soc. 195 **912** (2008), 1–183.

[14] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations: Well-Posedness and Long-Time Dynamics*, Springer, New York, 2010.

[15] M. Conti, E.M. Marchini, V. Pata, *A well posedness result for nonlinear viscoelastic equations with memory*, Nonlinear Anal. **94** (2014), 206–216.

[16] M. Conti, E.M. Marchini, V. Pata, *Global attractors for nonlinear viscoelastic equations with memory*, Commun. Pure Appl. Anal. **15** (2016), 1893–1913.

[17] M. Conti, T.F. Ma, E.M. Marchini, P.N. Seminario Huertas, *Asymptotics of viscoelastic materials with nonlinear density and memory effects*, J. Differential Equations (2017) DOI:10.1016/j.jde.2017.12.010.

[18] M. Conti, V. Pata, *Weakly dissipative semilinear equations of viscoelasticity*, Commun. Pure Appl. Anal. **4** (2005), 705–720.

[19] M. Conti, V. Pata, *On the regularity of global attractors*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **25** (2009), 1209–1217.

[20] C.M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **37** (1970), 297–308.

[21] F. Di Plinio, V. Pata, S. Zelik, *On the strongly damped wave equation with memory*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 757–780.

[22] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition*, Jhon Wiley & Sons, Canada, 1999.

[23] C. Giorgi, J. E. Muñoz Rivera, V. Pata, *Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity*, J. Math. Anal. Appl. **260** (2001), 83–99.

[24] M. Grasselli, V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*, in "Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis"(A. Lorenzi and B. Ruf, Eds.), pp.155–178, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. no.50, Birkhäuser, Basel, 2002.

[25] M. Grasselli, V. Pata, *Upper semicontinuous attractor for a hyperbolic phase-field model with memory*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 1281–1308.

[26] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[27] J.K. Hale, G. Raugel, *Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation*, J. Differential Equations **73** (1988), 197–214.

[28] X. Han, M. Wang, *General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping*, Math. Methods Appl. Sci. **32** (2009), 346–358.

[29] X. Han, M. Wang, *Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 3090–3098.

[30] W. Liu, *Uniform decay of solutions for a quasilinear system of viscoelastic equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 2257–2267.

[31] W. Liu, *General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 1890–1904.

[32] A.H. Love, *A treatise on mathematical theory of elasticity*, Dover, New York, 1944.

[33] S. A. Messaoudi, *General decay of solutions of a viscoelastic equation*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 1457–1467.

[34] S.A. Messaoudi, M.I. Mustafa, *A general stability result for a quasilinear wave equation with memory*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **14** (2013), 1854–1864.

[35] S.A. Messaoudi, N.-e. Tatar, *Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem*, Math. Methods Appl. Sci. **30** (2007), 665–680.

[36] S.A. Messaoudi, N.-e. Tatar, *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation*, Nonlinear Anal. **68** (2008), 785–793.

[37] S.A. Messaoudi, N.-e. Tatar, *Exponential decay for a quasilinear viscoelastic equation*, Math. Nachr. **282** (2009), 1443–1450.

[38] A. Miranville and S. Zelik, *Attractors for Dissipative Partial Differential Equations in Bounded and Unbounded Domains*, *Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations*, Volume 4, Chapter 3, C. M. Dafermos and M. Pokorny, Editors, Elsevier, 2008.

[39] J. E. Muñoz Rivera, *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. **52** (1994), 628–648.

[40] J.Y. Park, S.H. Park, *General decay for quasilinear viscoelastic equations with nonlinear weak damping*, J. Math. Phys. **50** (2009), n.083505, 10 pp.

[41] V. Pata, A. Zucchi, *Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory*, Adv. Math. Sci. Appl. **11** (2001), 505–529.

[42] A.F. Pazoto, J.C. Vila Bravo, J.E. Muñoz Rivera, *Asymptotic stability of semigroups associated to linear weak dissipative systems*, Math. Comput. Modelling **40** (2004), 387–392.

[43] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[44] Y. Qin, J. Zhang, L. Sun, *Upper semicontinuity of pullback attractors for a non-autonomous viscoelastic equation*, Appl. Math. Comput., **223** (362–376), 2013.

[45] Y. Qin, B. Feng, M. Zhang, *Uniform attractors for a non-autonomous viscoelastic equation with a past history*, Nonl. Analysis, **101** (1–15), 2014.

[46] H. Sánchez, C. Reyes, *Metodología y diseños en la investigación científica*, Visión Universitaria, Lima, 2006.

[47] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl., **146** (65–96), 1987.

[48] C. Sun, L. Yang, J. Duan, *Asymptotic behavior for a semilinear second order evolution equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 6085–6109.

[49] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer, New York, 1988.

[50] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer–Verlag, Berlin, 1965.

[51] S.-T. Wu, *Arbitrary decays for a viscoelastic equation*, Bound. Value Probl. **28** (2011), 14 pp.

# ANEXOS

## ANEXO 1: Matriz de consistencia

| Formulación del problema | Objetivos | Hipótesis | Metodología | Población |
|---|---|---|---|---|
| **PROBLEMA GENERAL** | **OBJETIVO GENERAL** | **HIPÓTESIS GENERAL** | La investigación por su naturaleza es del tipo básica y por su finalidad es sustantiva. La metodología usada es de tipo inductivo deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración | La población y muestra Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar. |
| ¿Será posible probar la existencia de un atractor global para el sistema dinámico definido por el semigrupo de soluciones de la ecuación determinada anteriormente? | Probar la existencia de un atractor global para el semigrupo de soluciones determinado por la ecuación antes presentada. | Existe un atractor global para el sistema dinámico generado por la ecuación presentada en 1.1. | | |
| **PROBLEMAS ESPECÍFICOS** | **OBJETIVOS ESPECÍFICOS** | **HIPÓTESIS ESPECIFICA** | | |
| 1. ¿La ecuación planteada anteriormente está bien colocada en el sentido de Hadamard? | 1. Probar la buena colocación para la ecuación presentada en 1.1. | 1. La ecuación presentada en 1.1. está bien colocada en el sentido de Hadamard. | | |
| 2. ¿El semigrupo asociado a la ecuación principal es del tipo gradiente?. | 2. Probar que el semigrupo de soluciones es del tipo gradiente. | 2. El semigrupo de soluciones de la ecuación presentada en 1.1. es del tipo gradiente. | | |
| 3. ¿Es posible descomponer el semigrupo asociado al problema presentado en 1.1 en una parte uniformemente estable y otra parte compacta por medio de una desigualdad de estabilización?. | 3. Probar que el sistema dinámico referente a la ecuación presentada en 1.1 cumple una cierta desigualdad de estabilización. | 3. El semigrupo de soluciones de la ecuación presentada en 1.1. satisface una desigualdad de estabilización. | | |

## ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo