

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**“GEODÉSICAS EN VARIETADES RIEMANNIANAS Y SUS
PROPIEDADES MINIMIZANTES”**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE TÍTULO
PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

FLOR ISABEL CARRILLO LARA

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN
“GEODÉSICAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS Y SUS
PROPIEDADES MINIMIZANTES”

Flor Isabel Carrillo Lara

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática con resolución decanal N°147-2018-D-FCNM, fecha de aprobación de la tesis 18 de enero del 2019.

Aprobado por:

.....

Dr. Walter Flores Vega

Presidente

.....

Lic. Elmer Alberto León Zárate

Secretario

.....

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Vocal

.....

Lic. Moisés Lázaro Carrión

Asesor

Callao – Perú

2019

A mis padres Alejandro y Dulia por todo
su amor, sus consejos y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la oportunidad y fortaleza para seguir superándome en lo personal y profesional.

A mi asesor el profesor Moisés Lázaro Carrión por su enseñanza, paciencia, dedicación y apoyo brindado para la realización de este trabajo.

A los profesores Roel Vidal, Absalón Castillo y la Sra. Heidi Carmen por su gestión en el ciclo de tesis.

A los profesores de los módulos del ciclo de tesis: Myrna Manco y Edgar Zárate por sus orientaciones oportunas.

A mis jurados de tesis los profesores Bertha Tello, Elmer León y Walter Flores por sus aportes y sugerencias para la mejora del trabajo.

A mis profesores de pregrado de la Universidad Nacional del Callao, que fueron parte de mi formación profesional, muchas gracias por su paciencia y orientaciones. Un agradecimiento muy especial para mi amiga Marisa Quispe que siempre me incentivó a realizar mi tesis.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS.....	3
RESUMEN.....	4
ABSTRACT.....	5
INTRODUCCIÓN.....	6
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.1 Descripción de la realidad problemática.....	8
1.2 Formulación del problema.....	8
1.3 Objetivos.....	9
1.4 Limitantes de la investigación.....	9
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	10
2.1 Antecedentes.....	10
2.2 Marco.....	12
2.2.1 Teórico.....	13
2.3 Definiciones de términos básicos.....	41
CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES.....	43
3.1 Hipótesis.....	43
3.1.1 Capítulo fuera de variable (cualitativa).....	43
3.2 Operacionalización de variables.....	43
CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	45
4.1 Tipo y diseño de la investigación.....	45
4.2 Población y muestra.....	45
4.3 Técnicas e instrumentos de recolección de la información documental.....	46

4.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo	46
4.5 Análisis y procesamiento de datos	46
CAPÍTULO V: RESULTADOS	47
5.1 Resultados descriptivos	47
5.1.3 Demostración de la propiedad minimizante de las geodésicas en M .	49
CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS	53
6.1 Contrastación de las hipótesis	53
6.2 Contrastación de los resultados con estudios similares	54
6.3 Responsabilidad ética	54
CONCLUSIONES	55
RECOMENDACIONES	56
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
ANEXOS	59
1. Matriz de consistencia.....	59

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2.1:</i> Distancia de dos puntos en \mathbb{R}^3	13
<i>Figura 2.2:</i> Plano tangente $T_p(S)$	14
<i>Figura 2.3:</i> Aplicación de Gauss	16
<i>Figura 2.4:</i> Derivada covariante en \mathbb{R}^3	20
<i>Figura 2.5:</i> Haz tangente TM	26
<i>Figura 2.6:</i> Parametrización $X(U)$	27
<i>Figura 2.7:</i> Curva diferenciable.....	29
<i>Figura 2.8:</i> Interpretación geométrica de la aplicación \exp	34
<i>Figura 2.9:</i> Representación de vértice de c	35
<i>Figura 2.10:</i> Representación de curvas diferenciables a trozos.....	36
<i>Figura 2.11:</i> Segmento de geodésica.....	36
<i>Figura 2.12:</i> Campo de vectores V	37
<i>Figura 2.13:</i> Interpretación geométrica del vector tangente.....	39
<i>Figura 5.14:</i> Representación de la curva γ y la curva c	50

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza un estudio de la Propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana, en el que se presenta una demostración de tipo deductivo. En ese sentido, el objetivo de nuestra investigación es realizar una demostración de manera interpretativa de dicha propiedad ya que es un tema complejo y abstracto. Con respecto a la metodología este trabajo es de tipo cualitativo. Además, presentamos los siguientes resultados: definición de una geodésica en R^3 , la definición del sistema de ecuaciones diferenciales para las geodésicas en variedades diferenciales y la demostración de la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana. Finalmente, concluimos que se demuestra de manera interpretativa que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es la longitud mínima sobre una variedad riemanniana.

Palabras claves: Geodésicas, Propiedad Minimizante, Geometría Diferencial, Variedad Riemanniana.

ABSTRACT

In the present work a study of the minimizing property of the geodesics in a Riemannian variety is carried out, in which a demonstration of deductive type is presented. In this sense, the objective of our research is to perform an interpretative demonstration of said property since it is a complex and abstract subject. Regarding the methodology, this work is qualitative. In addition, we present the following results: definition of a geodesic in R^3 , the definition of the differential equations system for the geodesics in differential varieties and the demonstration of the minimizing property of the geodesics in a Riemannian variety. Finally, we conclude that it is demonstrated in an interpretative way that the differentiable curve $l(\gamma)$ is the minimum length over a Riemannian variety.

Keywords: Geodetic, Minimizing Property, Differential Geometry, Riemannian Variety.

INTRODUCCIÓN

El objetivo general de nuestra investigación es realizar una demostración de manera interpretativa de la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana debido a que es complejo y abstracto. Además, la demostración es de tipo deductivo. Con respecto a la metodología este trabajo es de tipo cualitativo.

La noción básica y elemental del objeto matemático llamado “geodésica” se desarrolla en la geometría plana bidimensional al definir un segmento de recta: como la mínima distancia entre dos puntos y para ello aplicamos la norma euclidiana de distancia entre dos puntos de R^2 . Para definir las geodésicas en una superficie de R^3 se necesitan de dos métricas conocidas con el nombre de primera forma fundamental y segunda forma fundamental, además de los coeficientes de Christoffel. Con dichos conceptos se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que definen a las geodésicas de una superficie en R^3 .

Por otro lado, para definir una geodésica en una variedad riemanniana, se necesita el concepto de conexión afín para relacionar los campos vectoriales mediante tres propiedades, que luego nos conlleva a definir la conexión riemanniana. Finalmente, mediante la definición de flujo geodésico y el concepto de la aplicación geodésica se demuestra una proposición relativa a una propiedad minimizante de las geodésicas.

Para llevar a cabo este trabajo de investigación, vamos a desarrollar los siguientes capítulos: En el capítulo I, presentamos la descripción de la realidad problemática, el problema de investigación, los objetivos y algunas limitaciones de nuestro trabajo. En este primer capítulo explicaremos la problemática a trabajar a lo largo de toda nuestra investigación, así como el objetivo general y los dos objetivos específicos. En el capítulo II, presentamos: los antecedentes siendo estos las bases de nuestro trabajo, el marco teórico donde se desarrolla la parte central de nuestra investigación y las definiciones previas siendo estas las que hicieron posible la comprensión de lo presentado en nuestro marco teórico. Con respecto a los capítulos III y IV se presenta: la hipótesis, la variable de estudio, la metodología, el tipo de diseño, la población y muestra, y finalmente los métodos y técnicas de la

investigación. Después de ello, se manifiesta los resultados obtenidos y la discusión de los mismos en los capítulos V y VI respectivamente. Finalmente, presentamos las conclusiones y algunas recomendaciones para trabajos futuros.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Partimos del concepto de una geodésica, y decimos que es una curva que minimiza la distancia entre dos puntos. Con respecto a las superficies en tres dimensiones, según Do Carmo (1992) definimos las geodésicas, donde estas se pueden representar e interpretar como aquellas curvas $\alpha(s)$, llamamos a s la longitud de arco, donde la aceleración $\alpha''(s)$ en R^3 es perpendicular a la superficie (entonces, la aceleración de α como vista de la superficie es nula). Las características mencionadas con respecto a las geodésicas para superficies convexas ya eran conocidas desde 1697 por J. Bernoulli, y las ecuaciones de las geodésicas de las superficies definidas por $f(x, y, z) = 0$ ya eran conocidas por Euler desde 1721. Con el trabajo de Gauss en 1827, fue establecida una relación entre las geodésicas y la curvatura de una superficie, esta relación es la más importante. Luego, en base a ello, es posible definir una geodésica en variedades riemannianas (dimensión n). Estos modelos físicos se mantienen en la actualidad.

En esta investigación nuestro problema es la complejidad del objeto matemático Propiedad minimizante de las geodésicas en variedades riemannianas, esto debido a que por su naturaleza es un objeto abstracto.

1.2 Formulación del problema

De acuerdo con nuestro problema de investigación, nos formulamos las siguientes preguntas de investigación.

- ¿De qué manera se puede demostrar la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana para que sea interpretativa?

Para resolver la pregunta general, se debe resolver las siguientes preguntas:

- ¿De qué manera se define una geodésicas sobre una superficie en R^3 para que sea expositiva?

- ¿De qué manera se define un sistema de ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en variedades diferenciables de dimensión n para que sea explicativa?

1.3 Objetivos

Para responder a las preguntas de investigación, nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general

- Demostrar de manera interpretativa la propiedad minimizante de las geodésicas sobre una superficie en una variedad riemanniana.

Objetivos específicos

- Definir de manera expositiva el concepto de una geodésicas sobre una superficie en R^3 .
- Definir de manera explicativa el sistema de ecuaciones diferenciables parciales para las geodésicas en variedades diferenciables de dimensión n .

1.4 Limitantes de la investigación

1.4.1 Teórico

Una de las limitaciones teóricas de este trabajo es que no se encontraron trabajos de investigación en el Perú afines sobre el estudio de las geodésicas en R^3 , la propiedad minimizante de una geodésica en variedades riemannianas ni relacionadas a sus aplicaciones, es por ello que no tenemos información sobre los avances de investigación en nuestro país. Cabe mencionar que en una universidad pública de Perú se halló el resumen de una monografía técnica para optar el grado de licenciatura en Física, pero lamentablemente no se encuentra en el sistema el trabajo completo de Mendoza (2018) con título Medidas del desplazamiento de estaciones geodésicas GPS en el Perú.

En general hay escasa bibliografía en el área de geometría diferencial, geometría riemanniana y en particular de las geodésicas. Tampoco, ninguno de estos relacionados con el área de investigación sobre la didáctica de la matemática con respecto a la propiedad minimizante de las geodésicas en variedades riemannianas.

Otra limitación de nuestro trabajo es que solo se estudia la propiedad minimizante de las geodésicas sobre una variedad riemanniana de manera local.

1.4.2 Temporal

Con respecto a la limitación temporal, podemos manifestar que el tiempo de dedicación al desarrollo de la tesis fue reducido en un inicio por motivos de trabajo.

1.4.3 Espacial

Debido a que nuestra investigación es netamente teórica no se presentan limitaciones espaciales.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

En esta sección presentamos investigaciones internacionales con respecto a las geodésicas, sus aplicaciones en una superficie (dimensión 3) y en variedades riemannianas.

En la tesis doctoral de Ruiz, G. (2006) titulada *Subvariedades hélice, frontera de sombra y totalmente geodésicas* en México. El autor presenta un estudio de subvariedades Riemannianas, frontera de sombra y geodésicas. Este trabajo es de corte cualitativo de tipo descriptivo-bibliográfico. El autor, realiza una descripción de Geometría Riemanniana, luego desarrolla subvariedades de un espacio Euclidiano y finalmente una generalización de una variedad y subvariedad Riemanniana, donde manifiesta que la propiedad de ser mínima de las subvariedades Riemannianas ha sido estudiada a detalle y concluye su trabajo con las condiciones de una frontera de sombra puede ser una subvariedad mínima.

Por otro lado, Nieto J., Saucedo J. y Villanueva V. (2007) presentan un artículo titulado Geodesic deviation equation for relativistic tops and the detection of gravitational waves en la Revista Mexicana De Física. Los autores realizan una investigación sobre la derivación de la ecuación de geodésicas para trompos relativistas, donde presentan una generalización de la ecuación de geodésicas para

un par de puntos cercanos; además, manifiestan la importancia de la ecuación de desviación geodésica (GDE) para las partículas sin puntas son evidentes cuando estudiamos la onda gravitacional fenómenos y su detección. En el trabajo, los autores desarrollan la ecuación de desviación geodésica y la parte superior relativista; luego la ecuación de desviación superior relativista y las ondas gravitacionales. La investigación es de corte cualitativa, de tipo deductiva.

Luego, en Colombia, en su tesis de maestría Ramírez, J. (2012) desarrolla el título *Superficies desarrollables y geodésicas en las imágenes médicas*, en el que tiene por objetivo abordar el problema de la visualización de imágenes médicas usando superficies desarrollables, y se basa en la geometría diferencial sobre R^3 . El autor, manifiesta que hoy en día se emplean las resonancias magnéticas y tomografías computarizadas, estas nos permiten observar, estudiar y analizar el cuerpo humano; además, de que hace posible la reconstrucción en 3D de cualquier estructura atómica. El investigador, presenta los conceptos básicos de geometría diferencial clásica, diseño geométrico e imágenes médicas que emplea en su trabajo; también realiza algoritmos básicos y construye algunas superficies desarrollables. El autor, comenta que se debe diferenciar entre una geodésica y su traza, mencionando que en las aplicaciones lo importante es la traza.

En España, Pámpano, A. (2014) en su tesis de maestría realiza una investigación titulada *Geodésicas en Variedades de Riemann* y cuyo objetivo es generalizar las geodésicas en superficies regulares. El autor, presenta la demostración detallada del concepto de variación de una curva, además de tratar las fórmulas de variación y un acercamiento a los campos de Jacobi. De acuerdo al desarrollo del trabajo podemos manifestar que es de corte cualitativo de tipo descriptivo-bibliográfico. Por otro lado, el autor organiza su trabajo con una aplicación práctica a otras áreas del conocimiento, donde manifiesta que la geometría de Riemann es fundamental en: la Teoría de la Relatividad General, navegación marítima, etc. Finalmente, el investigador concluye su trabajo con los enunciados y demostraciones sobre las propiedades minimizadoras.

En base a estos antecedentes, vamos a elaborar y fortalecer los aspectos teóricos de nuestro estudio ya que estudian geodésicas, propiedades minimizantes y nos muestran las diversas aplicaciones e importancia en las diversas áreas de estudio.

En la siguiente sección presentamos el desarrollo del marco teórico de nuestra investigación. Dicho marco se basa principalmente en la literatura de los textos de Do Carmo (1992) titulado Geometría Riemanniana y Do Carmo (1988) titulado Geometría Diferencial de curvas y superficies, entre otros.

2.2 Marco

En esta sección, se presenta el marco teórico de nuestra investigación *Geodésicas en Variedades Riemannianas y sus propiedades minimizantes* y está situado dentro de la línea de investigación *Geometrías y Topología Diferencial*.

Declaramos que el marco de nuestro trabajo tiene dos libros de texto base: Geometría diferencial de curvas y superficies de Do Carmo (1992) y Geometría Riemanniana de Do Carmo (1988); de dichos textos consideramos algunas definiciones, propiedades, lemas y teoremas para el desarrollo de nuestros objetivos.

En primer lugar, consideramos los siguientes conceptos: el plano tangente de una superficie en R^3 en el punto p , y la definición de un campo vectorial W a lo largo de una curva obtendremos que $W = a(t)X_u + b(t)X_v$, donde X_u, X_v es la base que genera al subespacio vectorial $T_p(S)$. Además, de la proyección ortogonal de la $\frac{dW}{dt}$ sobre el plano tangente que define la derivada covariante, y luego queda expresado en términos de los Γ_{ij}^k , $i = 1,2; j = 1,2, k = 1,2$ que son los símbolos de Cristoffel. A partir de la derivada covariante se obtienen un sistema de ecuaciones diferenciales que corresponden a las geodésicas.

En segundo lugar, de acuerdo a Do Carmo (1988) estudiamos la variedad diferenciable $M, \{X_\alpha(U_\alpha)\}$ y su correspondiente métrica riemanniana. Todo esto debido a que en este trabajo pretendemos presentar el flujo geodésico, para luego hallar una curva γ que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales y así

desarrollar la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana.

En la siguiente subsección vamos a desarrollar las definiciones previas para lograr nuestros objetivos del trabajo.

2.2.1 Teórico

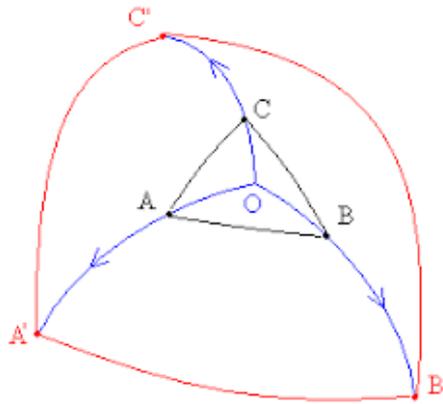
Esta sección la vamos a dividir en tres momentos ya que se desarrolla los dos objetivos específicos y el objetivo general.

En un primer momento presentamos las definiciones básicas para poder definir una *geodésica en R^3* , luego en un segundo momento definimos los conceptos básicos de una variedad riemanniana la que nos permite definir un sistema de *ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en R^n* , para finalmente en un tercer momento demostrar la *propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana*.

A) La geodésica en R^3

Para definir una geodésica en R^3 , es necesario recordar que en R^2 estudiamos la métrica euclidiana; es decir, la distancia de dos puntos (P y Q) que la denotamos como $d(P, Q) = \|Q - P\|$. Pero esta métrica, no es adecuada para hallar la distancia de dos puntos (por ejemplo: la distancia entre los puntos C y B) sobre una superficie de R^3 , como podemos ver en la figura 1.

Figura N° 2.1
Distancia de dos puntos en R^3 .

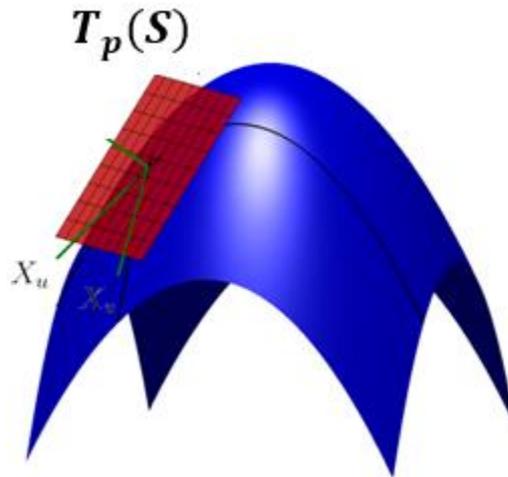


Para poder realizar dicha medición, es necesario hacer uso de dos métricas denominadas primera forma fundamental y segunda forma fundamental, pero antes presentamos la definición de un plano tangente a la superficie S en el punto p , aplicación de Gauss, el diferencial de la aplicación de Gauss y su derivada covariante entre otras.

Definición (2.1): Plano tangente $T_p(S)$

De acuerdo a la definición de superficie regular S garantiza que, para cada $p \in S$, el conjunto de vectores tangentes a las curvas parametrizadas de S que pasan por p , constituyen un plano $T_p(S) = \text{gen}\{X_u, X_v\}$, donde $p \in S$, $S \subset R^3$, como se muestra en la siguiente figura. (Do Carmo, 1992, p. 93)

Figura N° 2.2
Plano tangente $T_p(S)$.



Fuente: Adaptado de Ramírez (2012, p. 5)

Podemos decir que, si $w \in T_p(S)$, entonces $w = u'X_u + v'X_v$. Donde u', v' son las componentes del vector w en la base X_u, X_v , siendo $X_u = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}\right)$ y $X_v = \left(\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}\right)$

Además, debemos tener en cuenta la definición de la aplicación X , la denotamos de la siguiente manera:

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v)$$

donde $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Ahora, es necesario definir la métrica de la Primera Forma Fundamental.

Definición (2.2): Primera Forma Fundamental

La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación

$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0$, se denomina la primera forma fundamental de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

Entonces se tiene:

$$I_p: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

donde $w = u'X_u + v'X_v$.

Luego,

$$I_p(w) = \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle$$

$$I_p(w) = u'^2 \langle X_u, X_u \rangle + u'v' \langle X_u, X_v \rangle + v'u' \langle X_v, X_u \rangle + v'^2 \langle X_v, X_v \rangle$$

$$I_p(w) = u'^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle X_u, X_v \rangle + v'^2 \langle X_v, X_v \rangle$$

Sea $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ y $G = \langle X_v, X_v \rangle$, entonces

$$I_p(w) = \mathbf{u}'^2 \mathbf{E} + 2\mathbf{u}'\mathbf{v}'\mathbf{F} + \mathbf{v}'^2 \mathbf{G} \quad (2.1)$$

También podemos escribir de la siguiente manera

$$I_p(w) = [u' \ v'] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

que corresponde a la forma cuadrática de la primera forma fundamental. (Do Carmo, 1992, p. 102)

Para definir la segunda forma fundamental es necesario definir la aplicación de Gauss y su diferencial.

Definición (2.3): Aplicación de Gauss

Dada la superficie orientada S , la aplicación de Gauss es el campo de vectores normales N que define la orientación de S , y lo denotamos de la siguiente manera

$$N: S \rightarrow S^2$$

$$p \rightarrow N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(p)$$

(Do Carmo, 1992, p. 142)

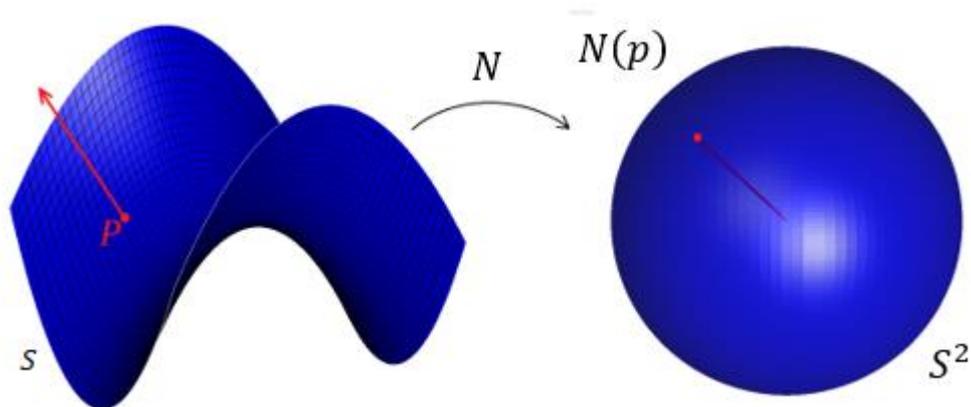
Se lee: “a cada punto $p \in S$, corresponde el vector $N(p)$ de S^2 ”

Donde $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera unidad.

S : una superficie en R^3

A continuación, se muestra la figura 3 donde se presenta una interpretación gráfica de la aplicación de Gauss:

Figura N° 2.3
Aplicación de Gauss



Fuente: Adaptado de Ramírez (2012, p. 6)

Es importante comentar que la aplicación N es diferenciable.

Otra definición importante es el diferencial de la aplicación de Gauss.

Definición (2.4): Diferencial de la aplicación de Gauss

Denotamos de la siguiente manera:

$$dN_p: T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$$

$$\alpha'(0) \rightarrow N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$$

Sea la curva

$$\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \rightarrow S^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) \rightarrow N(\alpha(t)) = N \circ \alpha$$

Entonces tenemos la composición $N(t) = (N \circ \alpha)(t) = N(\alpha(t))$

Derivar en $t = 0$, se obtiene $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$

donde:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\alpha'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$$

Se lee: “al vector $\alpha'(0) \in T_p(S)$ le corresponde el vector $N'(0) \in T_{N(p)}(S^2)$ ”.

Luego, es necesario definir la métrica Segunda Forma Fundamental. (Do Carmo, 1992, p. 144)

Definición (2.5): Segunda Forma Fundamental

La forma cuadrática II_p , definida en $T_p(S)$ por $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$

Se denomina la segunda forma fundamental de S en p .

Denotamos de la siguiente manera

$$II_p: T_p(S) \rightarrow R$$

$$w \rightarrow II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$$

Como $w \in T_p(S) = \text{gen}\{X_u, X_v\}$, entonces $w = u'X_u + v'X_v$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(u'X_u + v'X_v), u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= -\langle u'dN_p(X_u) + v'dN_p(X_v), u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= -\langle u'N_u + v'N_v, u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= -\{u'^2\langle N_u, X_u \rangle + u'v'\langle N_u, X_v \rangle + v'u'\langle N_u, X_u \rangle + v'^2\langle N_v, X_v \rangle\} \end{aligned} \quad (*)$$

De $\langle N, X_u \rangle = 0$

$$\text{Derivar respecto a } u: \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, X_u \rangle = -\langle N, X_{uu} \rangle$$

$$\text{Derivar respecto a } v: \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle$$

De $\langle N, X_v \rangle = 0$

$$\text{Derivar respecto a } u: \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle$$

$$\text{Derivar respecto a } v: \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_v, X_v \rangle = -\langle N, X_{vv} \rangle$$

Sustituir en (*):

$$II_p(w) = u'^2\langle N, X_{uu} \rangle + u'v'\langle N, X_{vu} \rangle + v'u'\langle N, X_{uv} \rangle + v'^2\langle N, X_{vv} \rangle$$

$$II_p(w) = u'^2\langle N, X_{uu} \rangle + 2u'v'\langle N, X_{uv} \rangle + v'^2\langle N, X_{vv} \rangle$$

Aquí usamos las siguientes notaciones

$$\begin{cases} e = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle \end{cases}$$

A quienes llamamos los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Entonces

$$II_p(w) = u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g = \begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Siguiendo con el desarrollo de los conceptos necesarios para definir una geodésica, vamos a definir la derivada covariante sobre el campo vectorial de los vectores tangentes de las curvas contenidos sobre una superficie S . (Do Carmo, 1992, p. 148)

Definición (2.6): Campo vectorial

Sea W un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$.
Sea $y \in T_p(S)$.

Consideramos una curva parametrizada $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$, y sea $W(t), t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, la restricción del campo vectorial W a la curva α .

El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente la $\left(\frac{dW}{dt}\right)(0)$ sobre el plano tangente $T_p(S)$ se denomina la derivada covariante en p del campo vectorial W con respecto al vector y . (Do Carmo, 1992, p. 181)

Definición (2.7): Derivada covariante

La derivada covariante se denota por $\left(\frac{DW}{dt}\right)(0)$ o por $(D_y W)(p)$, que es equivalente a la proyección ortogonal de $\frac{dW}{dt}$ sobre $T_p(S)$.

Ahora presentamos el desarrollo de la derivada covariante, para ello es necesario mencionar el campo vectorial de los vectores tangentes a una curva $\alpha(t)$ contenida en una superficie S . (Do Carmo, 1992, p. 241)

Consideramos las siguientes notaciones:

- Si $X(u, v)$ es la parametrización de la superficie S y $\alpha(t)$ una curva contenida en S , entonces la ecuación de la curva α se puede expresar de la siguiente manera $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$.
- Sea $w \in T_p(S)$, entonces $w = aX_u + bX_v$ donde las componentes a y b son funciones que dependen de (u, v) donde a su vez $u = u(t)$ y $v = v(t)$; esto es:

$$a = a(u(t), v(t))$$

$$b = b(u(t), v(t))$$

además, podemos decir que a es función de t y b es función de t .

En consecuencia, el vector w es:

$$w = a(t)X_u + b(t)X_v, w: \text{ es un campo vectorial, que es función de } t.$$

Luego, al derivar respecto a t :

$$\frac{dw}{dt} = a'X_u + aX'_u + b'X_v + bX'_v$$

$$\frac{dw}{dt} = a'X_u + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b'X_v + b(X_{vu}u' + X_{vv}v')$$

$$\frac{dw}{dt} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v \quad (*)$$

donde
$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{cases} \quad (**)$$

pero “la derivada covariante: $\frac{Dw}{dt}$,” es la componente en el plano tangente del vector $\frac{dw}{dt}$, entonces al sustituir (**) en (*), suprimimos la componente normal (N) y obtenemos la derivada covariante:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & a\{[\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v]u' + [\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v]v'\} \\ & + b\{[\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v]u' + [\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v]v'\} + a'X_u + b'X_v \\ & + [aeu' + av'f + bu'f + bv'g]N \end{aligned}$$

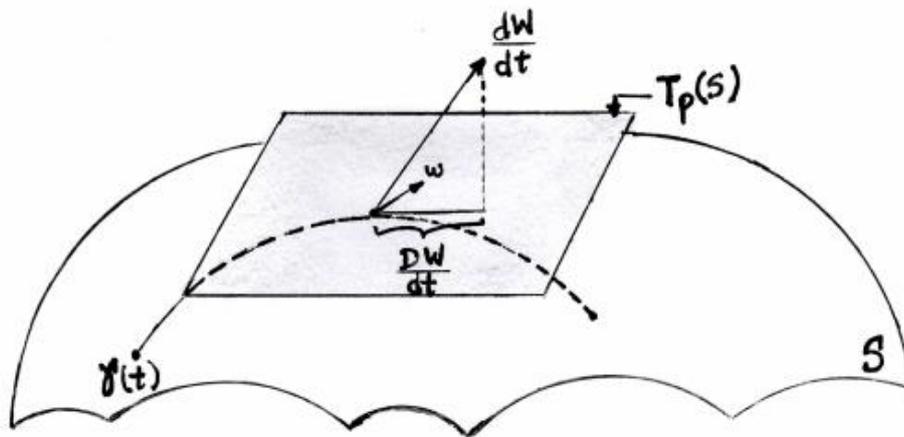
pero: $aeu' + av'f + bu'f + bv'g = 0$

Al asociar respecto a los vectores X_u, X_v respectivamente, se tiene la derivada covariante:

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = & [a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1]X_u + [b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + \\ & bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2]X_v \end{aligned} \quad (2.3)$$

Presentamos una interpretación geométrica de la derivada covariante en la siguiente figura:

Figura N° 2.4
Derivada covariante en R^3 .



Algunos comentarios:

- La derivada covariante $\left(\frac{Dw}{dt}\right)$ solo depende del vector $(u', v') = y$, y no a la curva α .
- a' y b' no dependen de la curva α .
- u' y v' no dependen del punto p .
- La diferenciación covariante es un concepto de la geometría intrínseca, que no depende de la elección de la curva α .

Finalmente, manifestamos que la *derivada covariante* nos va a permitir definir una geodésica; este resultado lo presentamos en el capítulo V, sección 5.1, página 47.

B) Ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en R^n

Para realizar el segundo objetivo específico, que corresponde a definir el sistema de ecuaciones diferenciables parciales para las geodésicas en variedades riemannianas; debemos tener en cuenta algunos conceptos como variedad diferenciable, métrica riemanniana, campo vectorial, conexiones afines, geodésicas en M , etc. A continuación, presentamos el desarrollo de los conceptos mencionados entre otros.

Definición (2.8): Variedad diferenciable

Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de mapeos inyectivos $x_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tal que

- a. $U_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
- b. para cada par α, β con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y los mapeos $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ son diferenciables
- c. la familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es maximal relativa a las condiciones (a) y (b)

Una familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfacen (a) y (b) es llamada una estructura diferenciable sobre M . (Do Carmo, 1988, p.1)

Definición (2.9): Métrica Riemanniana

Una métrica riemanniana sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia la cual asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sobre el espacio tangente $T_p M$, la cual varía diferencialmente en el siguiente sentido: si $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas alrededor de p , con

$$x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U) \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

entonces

$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ es una función diferenciable sobre U . (Do Carmo, 1988, p. 22)

Definición (2.10): Campo vectorial

Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X_{(p)} \in T_p M$. En términos de mapeos, X es un mapeo de M en el haz tangente TM . El campo es diferenciable si el mapeo $X: M \rightarrow TM$ es diferenciable.

Considerando una parametrización $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sobre U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ es la base asociada a X , $1 \leq i \leq n$. (Do Carmo, 1988, p. 14)

Definición (2.11): Espacio tangente

Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es llamada una curva (diferenciable) sobre M . Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de funciones sobre M que son diferenciables en p , denotamos $D = \{f/f \text{ es diferenciable}\}$ (Adaptado Do Carmo, 1988, p.3)

El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0): D \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)|_{t=0}, \forall f \in D.$$

Entonces a partir de dicha ecuación, se obtiene el plano tangente

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \\ \alpha'(0)f &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) f \\ \Rightarrow \alpha'(0) &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{t=0}, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{t=0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_{t=0}, \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

entonces $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0}$ es el vector tangente en p de la curva coordenada. De la ecuación (2.4) consideramos que el conjunto $T_p M$, con las operaciones comunes de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n y que la elección de una parametrización $X: U \rightarrow M$ determina una base asociada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{t=0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_{t=0} \right) \right\}$

; es decir,

$$T_p M = \text{gen} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \quad (2.5)$$

Al espacio $T_p M$ se llama espacio tangente de M en p . (Adaptado de Do Carmo, 1988, p. 4)

Para las siguientes definiciones usamos algunas denotaciones: $X(M)$ es el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ sobre M y $D(M)$ el anillo de las funciones con valores reales de clase C^∞ definidas sobre M .

Definición (2.12): Conexiones afines

Una *conexión afín* ∇ sobre una variedad diferenciable M es un mapeo

$$\nabla: X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

la cual es denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ y que satisface las siguientes propiedades:

- a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- b) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- c) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

(2.6)

Con $X, Y, Z \in X(M)$ y $f, g \in D(M)$. (Do Carmo, 1988, p. 29)

Proposición (2.13)

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Existe una correspondencia única la cual asocia a un campo vectorial V a lo largo de la curva diferenciable $c: I \rightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c , llamado la *derivada covariante* de V a lo largo de c , tal que

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
- b) $\frac{DV}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde V es un campo vectorial a lo largo de c y f es una función diferenciable sobre I .
- c) Si V está inducido por un campo vectorial $Y \in X(M)$, esto es, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$. (Do Carmo, 1988, p. 61)

Lo último tiene sentido, puesto que $\nabla_X Y(p)$ depende del valor de $X(p)$ y del valor Y a lo largo de la curva, tangente a X en p . En efecto, la definición de una conexión afín nos permite mostrar que la noción de conexión afín es realmente una noción

local. Escogiendo un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) alrededor de p y lo denotamos

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

usando las propiedades definidas en (2.5), tenemos que

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i (y_j) X_j$$

Haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ concluimos que Γ_{ij}^k son funciones diferenciables y que

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X_{(y_k)} \right) X_k,$$

lo cual prueba que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ y de las derivadas $X(x_k)(p)$ de y_k por X .

La proposición anterior muestra que la elección de una conexión afín sobre M nos conduce a una derivada de campos vectoriales a lo largo de curvas (esto es que satisfacen las condiciones enunciadas). Por lo tanto, la noción de conexión nos da una manera de derivar vectores a lo largo de curvas; en particular, es posible hablar de la aceleración de una curva en M . (Adaptado de Do Carmo, 1988, p.29)

En esta subsección finalmente, definimos geodésica en un punto y segmento geodésico lo que nos permitirá definir el sistema de ecuaciones parciales en una variedad riemanniana.

Consideramos a M como una variedad riemanniana junto con una conexión riemanniana.

Definición (2.14): Geodésica en M

Una curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow M$ es una geodésica en el punto $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ en el punto t_0 ; si γ es una geodésica en t , para todo $t \in I$, decimos que γ es una geodésica, la restricción de γ a $[a, b]$ es llamada un segmento geodésico que une a $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

Si $\gamma: I \rightarrow M$ es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

esto es, la longitud del vector tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ es constante. Suponemos, de ahora en adelante, que $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = c \neq 0$; esto es, excluimos a las geodésicas que se reducen a puntos. La longitud de arco s de γ , empezando en $t = t_0$, está dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt = c(t - t_0),$$

por lo tanto, el parámetro t de una geodésica es proporcional a la longitud de arco. Cuando el parámetro es realmente la longitud de arco, esto es, $c = 1$, decimos que la geodésica está normalizada. (Do Carmo, 1988, p. 62)

Definición (2.15): Haz tangente (TM)

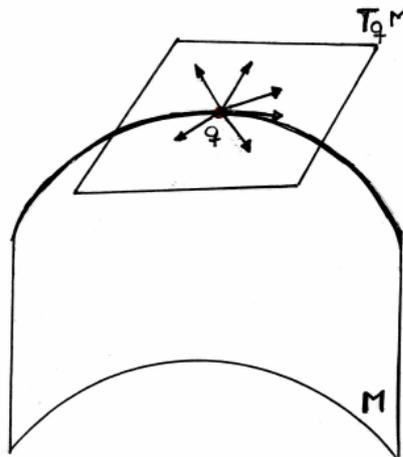
Es el conjunto de pares que denotamos de la siguiente manera

$$TM = \{(q, v) / q \in M, v \in T_q(M)\}$$

donde $T_q(M)$ es el espacio tangente. (Adaptado de Do Carmo, 1988, p. 62)

Visualicemos una idea intuitiva mediante la figura 4:

Figura N° 2.5
Haz tangente TM .



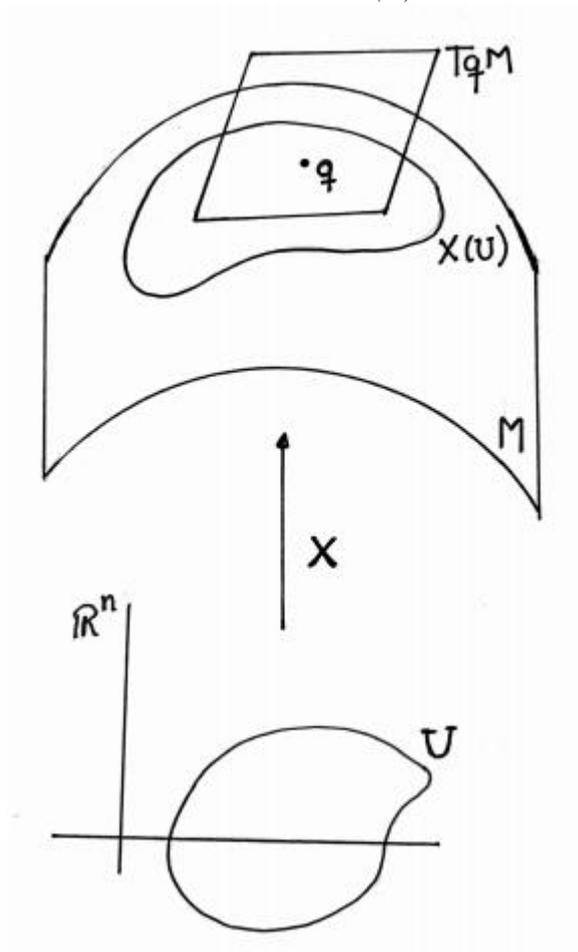
Luego, elegimos una parametrización X , donde (U, X) es un sistema de coordenadas sobre M , entonces cualquier vector v en $T_q(M)$ cuando $q \in X(U)$

podemos denotar $v = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, consideramos $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ son las coordenadas de $(q, v) \in TU$. Además, aclaramos que (y_1, y_2, \dots, y_n) son las componentes del vector v en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$

donde $TU = \{(q, v) / q \in X(U), v \in T_q(M)\}$

Para una mejor interpretación veamos la figura 2.6:

Figura N°2.6
Parametrización $X(U)$.



La definición del haz tangente es necesario para el estudio de la ecuación (5.2.1), que corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales para las geodésicas en variedades diferenciables.

Como consecuencia de todo lo presentado, se va a determinar las ecuaciones locales que satisface una geodésica γ en un sistema de coordenadas (U, X) alrededor de $\gamma(t_0)$. Este resultado se muestra en el capítulo V, sección 5.2, página 48.

Ahora, presentamos el desarrollo de los conceptos previos que forman parte del marco para lograr el objetivo general de nuestro trabajo de investigación.

C) Propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana

En esta subsección, nuestro objetivo es demostrar de manera explicativa la propiedad minimizante de la geodésica en una variedad riemanniana; es por ello que es necesario presentar algunas definiciones previas e importantes para nuestro trabajo, como curva diferenciable, mapeo exponencial, lema de simetría de la conexión, lema de Gauss entre otras. A continuación, el desarrollo de los conceptos mencionados entre otros que nos permitirán el desarrollo de nuestro objetivo general.

Definición (2.16): Curva diferenciable

Sea $t \rightarrow \gamma(t)$ en M determina una curva $t \rightarrow \left(\gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt}\right)$ en TM .

Si γ es una geodésica entonces, en TU , la curva

$$t \rightarrow \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right)$$

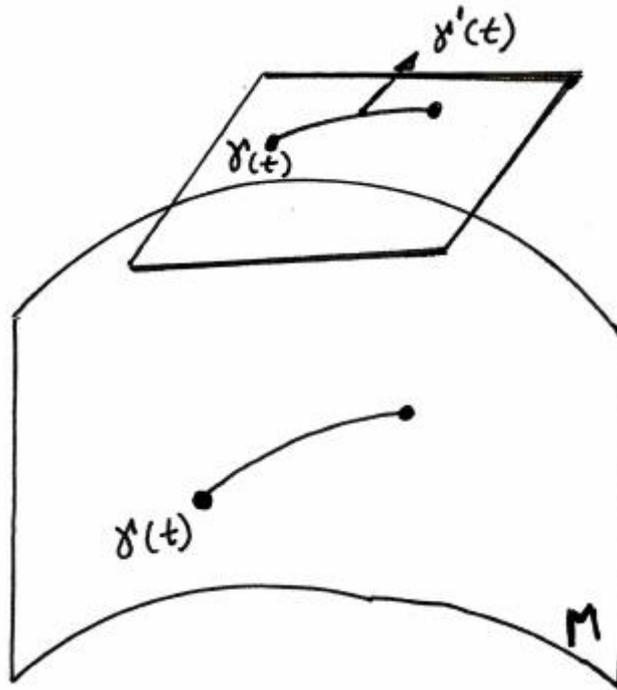
satisface el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

en términos de las coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de TU . Por tanto, el sistema de segundo orden en la ecuación (5.2) en U es equivalente al sistema de primer orden (2.7) en TU . (Do Carmo, 1988, p. 62)

Veamos la siguiente figura, para una mejor interpretación:

Figura N° 2.7
Curva diferenciable



Teorema (2.17)

Si X es un campo C^∞ sobre el conjunto abierto V en una variedad M y $p \in V$, entonces existe un abierto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$; un número $\delta > 0$ y un campo C^∞ , además

sea

$$\begin{aligned} \varphi: (-\delta, \delta) \times V_0 &\rightarrow V \\ (t, q) &\rightarrow \varphi(t, q) \end{aligned}$$

tal que la curva $t \rightarrow \varphi(t, q), t \in (-\delta, \delta)$ es la única trayectoria de X que en el instante $t = 0$ pasa por el punto q , para cada $q \in V_0$.

Donde llamamos, la función $\varphi_t: V_0 \rightarrow V$ dada por

$$q \rightarrow \varphi_t(q) = \varphi(t, q)$$

$\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ es llamado el flujo de X sobre V (flujo del campo vectorial X en V). (Do Carmo, 1988, p. 63)

Lema (2.18)

Existe un único campo vectorial G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ donde γ es una geodésica sobre M . (Do Carmo, 1988, p. 63)

Demostración:

En primer lugar, probaremos la unicidad de G

Supongamos su existencia, consideremos un sistema de coordenadas (U, X) en M .

por hipótesis: las trayectorias de G en TM , son dadas por $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ donde γ es una geodésica.

De acuerdo a ello que $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.7), por la unicidad de trayectorias de tal sistema, concluimos que si G existe, entonces es único.

Para probar la existencia de G , lo definimos localmente por el sistema (2.7).

Usando la unicidad, concluimos que G esta bien definida en TM .

Definición (2.19)

El campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$

donde γ es una geodésica en M , se llama campo geodésico en TM y su flujo es el flujo geodésico de TM . (Do Carmo, 1988, p. 63)

Aplicando el teorema (2.17) al campo geodésico G en el punto $(p, 0) \in TM$, obtenemos el siguiente resultado:

Para cada $p \in M$ existe un abierto \mathcal{U} en TU , donde (U, X) es un sistema de coordenadas en p y $(p, 0) \in \mathcal{U}$, un número $\delta > 0$ y una aplicación C^∞ , $\varphi: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$, tal que $t \rightarrow \varphi(t, q, v)$ es la única trayectoria de G que satisface la condición inicial $\varphi(0, q, v) = (q, v)$, para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

Es posible escoger \mathcal{U} de la forma $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ y } v \in T_q M \text{ con } |v| < \varepsilon_1\}$

donde $V \subset U$ es una vecindad de $p \in M$.

Consideramos $\gamma = \pi \circ \varphi$ donde $\pi: TM \rightarrow M$ es la proyección canónica, podemos escribir el enunciado anterior como la siguiente proposición.

Proposición (2.20)

Dado $p \in M$, existe un abierto $V \subset M, p \in V$, números $\delta > 0$ y $\varepsilon_1 > 0$ y una función C^∞ .

$$\gamma: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ y } v \in T_qM \text{ con } |v| < \varepsilon_1\}$$

tal que la curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, es la única geodésica de M que en el intervalo $t = 0$ pasa por q con velocidad v , para cada $q \in V$ y cada $v \in T_qM$ con $|v| < \varepsilon_1$.

La proposición 2.20, afirma que: si $|v| < \varepsilon_1$, la geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe en un intervalo $(-\delta, \delta)$ es única. En verdad, es posible aumentar la velocidad de una geodésica disminuyendo a su intervalo de definición o viceversa. Esto nos conduce al siguiente lema de homogeneidad. (Do Carmo, 1988, p. 63)

Lema de Homogeneidad de una geodésica (2.21)

Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida en el intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t, q, av), a \in R, a > 0$, esta definida en el intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ y $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$. (Do Carmo, 1988, p. 63)

Demostración:

Sea $h: (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$ una curva dada por

$$h(t) = \gamma(at, q, v) \tag{2.8}$$

por demostrar que $h(t)$ es una geodésica. Basta probar que $\frac{D}{dh} \left(\frac{dh}{dt} \right) = 0$

Veamos, de (2.8) obtenemos $h(0) = q$ y $\frac{dh}{dt}(0) = av$

Además de lo mencionado, como $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left(\frac{dh}{dt} \right) &= \nabla_{h'(t)} h'(t) = \nabla_{a\gamma'(at, q, v)} a\gamma'(at, q, v) \\ &= a \nabla_{\gamma'(at, q, v)} a\gamma'(at, q, v) = a \cdot a \nabla_{\gamma'(at, q, v)} \gamma'(at, q, v) = a^2(0) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual prueba que h es una geodésica que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad av .

Por unicidad, $h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av)$

Proposición (2.22)

Dado $p \in M$, existe una vecindad V de $p \in M$, un número $\varepsilon > 0$ y una aplicación C^∞ .

$$\gamma: (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V \text{ y } w \in T_q M \text{ con } |w| < \varepsilon\}$$

$$t \rightarrow \gamma(t, q, w), t \in (-2, 2)$$

y la única geodésica de M que en el intervalo $t = 0$ pasa por q con velocidad w , para cada $q \in V$ y cada $w \in T_q M$ con $|w| < \varepsilon$. (Do Carmo, 1988, p. 64)

Demostración:

Se debe probar, a partir de la proposición 2.20 la geodésica $\gamma(t, q, v)$ esta definida para $|t| < \delta$ y para $|v| < \varepsilon_1$, por el lema de homogeneidad, $\gamma\left(t, q, \frac{\delta v}{2}\right)$ donde $a = \frac{\delta}{2}$, esta definida para $|t| < 2$.

Tomando $\varepsilon < \frac{\delta \varepsilon_1}{2}$ la geodésica $\gamma(t, q, w)$ esta definida para $|t| < 2$ y $|w| < \varepsilon$.

Observación: por un argumento análogo, podemos hacer la velocidad de una geodésica uniformemente grande en una vecindad de p .

La proposición (2.22) nos permite introducir el concepto de aplicación exponencial de la siguiente manera:

Definición (2.23)

Sea $p \in M$ y $\mathcal{U} \subset TM$ un abierto dado por la proposición (2.22) Entonces la aplicación

$exp: \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$(q, v) \rightarrow exp(q, v) = \gamma(1, q, w) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$

Entonces, $exp(q, v) = \gamma(1, q, w) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$, $(q, v) \in \mathcal{U}$ es llamado la aplicación exponencial en \mathcal{U} . (Do Carmo, 1988, p. 65)

Es claro que la exp es diferenciable. En la mayoría de las aplicaciones debemos utilizar la restricción de exp a un subconjunto abierto del espacio tangente $T_q M$, esto es, definimos:

$$exp_q: B_\varepsilon \subset T_q M \rightarrow M$$

$$v \rightarrow exp_q(v) = exp(p, v)$$

Aquí, y en lo que sigue, denotaremos por $B_\varepsilon(0)$ una bola abierta con centro en el origen $0 \in T_q M$ y cada radio $\varepsilon > 0$.

Es fácil verificar que $\exp_q(v)$ es un punto de M obtenido por hacer la longitud igual a $\|v\|$, iniciando desde q , a lo largo de una geodésica que pasa por q con velocidad igual $\frac{v}{\|v\|}$.

Proposición (2.24)

Dado $q \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q: B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre un subconjunto abierto de M . (Do Carmo, 1988, p. 65)

Demostración:

Por demostrar: $d(\exp)_0(v) = v$, realizamos los cálculos

$$\begin{aligned} d(\exp)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))|_{t=0} \\ &= 1 \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, v))|_{t=0} \\ &= v \text{ (es la identidad)} \end{aligned}$$

Puesto que $d(\exp)_0$ es la identidad de $T_q M$, se sigue del teorema de la función inversa que \exp_q es un difeomorfismo local sobre una vecindad de 0.

Mostramos dos ejemplos para aclarar lo antes mencionado:

Ejemplo 1: Si $M = R^n$ la derivada covariante coincide con la derivada usual, las geodésicas son rectas parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco. La exponencial es claramente la identidad, la identidad usual del espacio tangente de R^n en p con R^n . (Do Carmo 1988, p. 66)

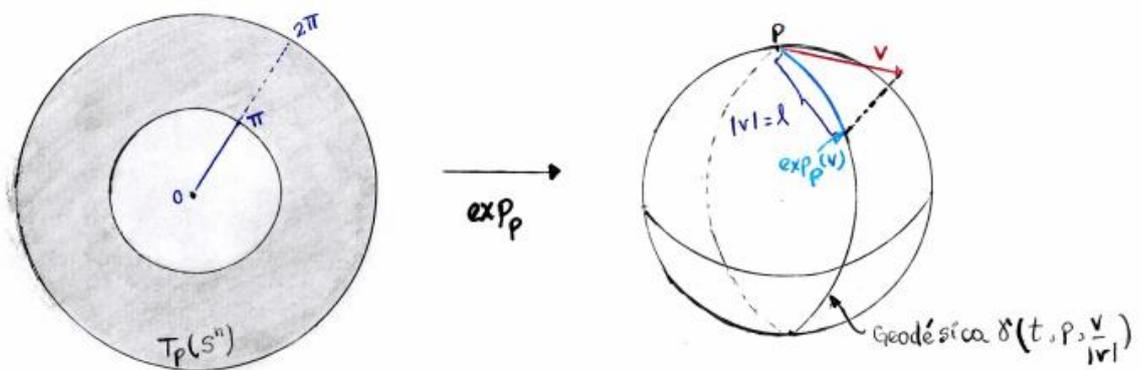
Ejemplo 2: Si $M = S^n \subset R^{n+1}$ la esfera unitaria de dimensión n , los círculos máximos de S^n , parametrizados por longitud de arco, son geodésicas. (Do Carmo 1988, p. 66)

Ahora, presentamos la interpretación geométrica de la aplicación exp .

Dado un punto $(p, v) \in TM$, el punto $exp_p(v) \in M$ se obtiene al recorrer a lo largo de la geodésica $\gamma\left(t, p, \frac{v}{|v|}\right)$ una longitud igual a $|v|$, empezando desde p .

Figura N° 2.8

Interpretación geométrica de la aplicación exp .



Fuente: Adaptado de Do Carmo (1988, p. 67)

En este caso, exp_p está definido sobre todo espacio tangente y puede ser descrito de la siguiente manera:

exp_p transforma inyectivamente a $B_\pi(0)$ en $S^n - \{q\}$, donde q es el punto antípodal de p ; la frontera de $B_\pi(0)$ se transforma en q ; el anillo abierto $B_{2\pi}(0) - B_\pi(0)$ es transformado inyectivamente en $S^n - \{p, q\}$; la frontera de $B_{2\pi}(0)$ es transformada en p .

Observamos que si consideramos la variedad Riemanniana $S^n - \{q\}$, exp_p estaría definido solo sobre $B_\pi(0) \subset T_p(S^n - \{q\})$

Además, como queremos estudiar las propiedades minimizante de las geodésicas, por ello consideramos las siguientes definiciones.

Definición (2.25)

Una curva diferenciable por trozos es una aplicación continua $c: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ que satisface la siguiente condición:

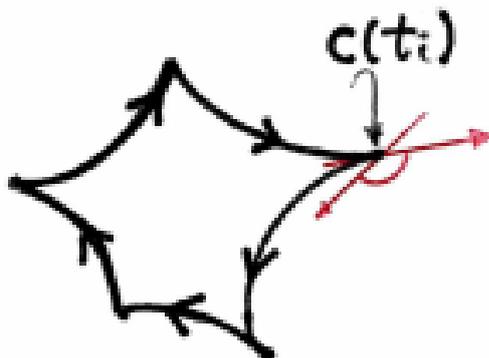
Existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ tal que las restricciones $c|_{[t_i, t_{i+1}]}, i = 1, 2, \dots, k - 1$ son diferenciables.

Decimos que c une los puntos $c(a)$ y $c(b)$, a $c(t_i)$ llamamos un vértice de c y el ángulo formado por $\lim_{t \rightarrow t_i^+} c'(t)$ con $\lim_{t \rightarrow t_i^-} c'(t)$ es llamado ángulo de vértice en $c(t_i)$.

(Do Carmo, 1988, p. 66)

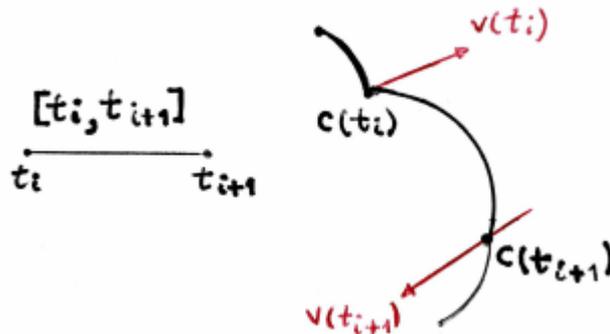
Veamos la siguiente figura:

Figura N° 2. 9
Representación de vértice de C .



La idea de transporte paralelo puede ser fácilmente extendida a curvas diferenciables a trozos: dado $V_0 \in T_{c(t)}M, t \in [t_i, t_{i+1}]$ extendiendo V_0 obtenemos un campo paralelo $V(t), t \in [t_i, t_{i+1}]$; tomando $V(t_i)$ y $V(t_{i+1})$ como nuevos valores iniciales, podemos extender $V(t)$ en una manera similar sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_{i+2}]$ y así en adelante. Veamos la siguiente figura:

Figura N° 2.10
Representación de curvas diferenciables a trozos.



Definición (2.26)

Un segmento de geodésica $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es llamado minimizante si $l(\gamma) \leq l(c)$, donde $l(c)$ denota la longitud de una curva c y c es cualquier curva diferenciable a trozos que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$. (Do Carmo, 1988, p. 67)

Veamos la figura 10, para una mejor interpretación

Figura N° 2.11
Segmento de geodésica.



En la demostración del lema de Gauss que presentamos más adelante, usamos la siguiente terminología.

Definición (2.27)

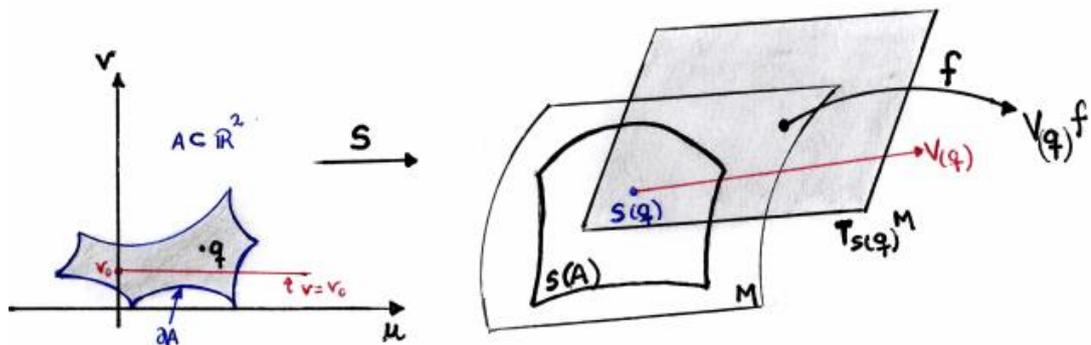
Sea A un conjunto conexo de R^2 tal que la frontera ∂A de A sea una curva diferenciable por trozos de ángulos de vértices diferentes de π .

Una superficie parametrizada en M es una aplicación diferenciable $S: A \subset R^2 \rightarrow M$.

Un campo de vectores V a lo largo de S es una aplicación que asocia a cada $q \in A$ un vector $V(q) \in T_{s(q)}M$ que es diferenciable en el siguiente sentido: Si f es una función diferenciable en M , entonces la aplicación $q \rightarrow V(q)f$ es diferenciable. (Do Carmo, 1988, p. 67)

Veamos la siguiente figura:

Figura N°2.12
Campo de vectores V .



Ahora consideramos (u, v) coordenadas cartesianas en R^2 , para definir un campo vectorial.

Para v_0 fijo, la aplicación $u \rightarrow (u, v_0)$, donde u pertenece a una componente conexa de $A \cap \{v = v_0\}$ es una curva en M y $ds \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$, que denotaremos por $\frac{\partial s}{\partial u}$, es un campo vectorial a lo largo de esta curva. Esto define $\frac{\partial s}{\partial u}$ para todo $(u, v) \in A$ y $\frac{\partial s}{\partial u}$ es un campo vectorial a lo largo de S . El campo vectorial $\frac{\partial s}{\partial v}$ se define de manera análoga. Si V es un campo vectorial a lo largo de $S: A \subset R^2 \rightarrow M$, definamos a la derivada covariante $\frac{Dv}{\partial u}$ y $\frac{Dv}{\partial v}$ de la siguiente manera $\frac{Dv}{\partial u}(u, v_0)$ es la derivada covariante a lo largo de la curva $u \rightarrow (u, v_0)$ de la restricción de V a la curva. Esto define $\frac{Dv}{\partial u}(u, v_0)$ para todo $(u, v) \in A$. Análogamente se define $\frac{Dv}{\partial v}$.

Lema de Simetría (2.28)

Si M es una variedad diferenciable con una conexión simétrica y $s: A \rightarrow M$ es una superficie parametrizada, entonces

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

(Do Carmo, 1988, p.68)

Demostración:

Sea $X: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ un sistema de coordenadas en una vecindad de un punto $s(A)$.

Podemos escribir $X^{-1} \circ s(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$

por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \nabla_{\sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.9) \end{aligned}$$

Por la simetría de conexión $\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)} \frac{\partial}{\partial x^j}$ se calcula $\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)$ y obtenemos la misma expresión que tenemos en (2.9). Así queda probado el lema.

Lema de Gauss (2.29).

Sea $p \in M$ y sea $v \in T_p M$ tales que $\exp_p v$ está definido. Sea $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$. Entonces

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad (2.10)$$

(Do Carmo, 1988, p.69)

Demostración:

Debemos probar, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(1,0)} = 0 \dots (i)$

Sea $w = w_T + w_N$, donde w_T es paralelo a v y w_N es normal a v .

Como $d\exp_p$ es lineal y por definición de \exp_p ,

$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_T) \rangle = \langle v, w_T \rangle$ es suficiente probar el lema 2.31 para

$w = w_T$.

Es claro que podemos suponer $w_N \neq 0$.

Como $\exp_p(v)$, está definido, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p(u)$ esta definido por

$$v = tv(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon < s < \varepsilon$$

donde $v(s)$ es una curva en T_pM con $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ y $\|v(s)\| = \alpha$, donde α es constante.

Por lo tanto, consideramos la superficie parametrizada

$$f: A \rightarrow M, \quad A = \{(t, s): 0 \leq t \leq 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

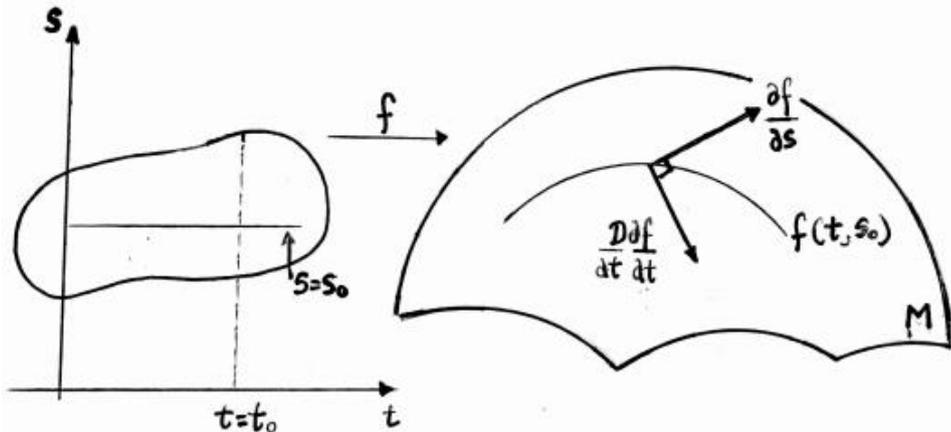
dada por $f(t, s) = \exp_p tv(s)$

Obsérvese que las curvas $t \rightarrow f(t, s_0)$ son geodésicas.

En la siguiente figura, presentamos una interpretación geométrica del vector tangente de la geodésica:

Figura N°2.13

Interpretación geométrica del vector tangente.



Para probar (2.10) para $w = w_N$ observamos primero que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(1,0)} = \langle (d\exp_p)_v(w_N), (d\exp_p)_v(v) \rangle \quad (2.11)$$

además de esto, de probar (i), para todo (t, s) aplicar $\frac{\partial}{\partial t}$ al producto escalar $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \dots (ii)$$

Resulta que en (ii) se cumple $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$ porque $\frac{\partial f}{\partial t}$ es el vector tangente de la geodésica.

Por la simetría de la conexión, se cumple que: $\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$

Ahora analicemos $\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$, a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle &= \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \quad (\text{los términos que se suman son simétricos}) \\ &= 2 \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{al despejar } \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{D}{\partial s} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$$

En consecuencia, de (ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle &= \langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \\ &= \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{\partial s} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + 0 \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\text{entonces: } \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$$

Se sigue que $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ es independiente de t . Puesto que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} (d \exp_p)_{tv} \tau w_N = 0$$

Concluimos que:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle(1, 0) = 0$$

Algunos comentarios:

- Es conveniente usar la siguiente terminología, si \exp_p es un difeomorfismo de una vecindad V del origen en $T_p M$, $\exp_p V = U$ es llamada una vecindad normal de p . Si $B_\varepsilon(0)$ es tal que $B_\varepsilon(0) \subset V$, llamaremos a $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ la bola normal (o bola geodésica) con centro en p y radio ε .
- Del lema de Gauss (2.29), la frontera de una bola normal es una hipersuperficie (subvariedad de codimensión 1) en M ortogonal a las geodésicas que empieza en p , es denotado por $S_\varepsilon(p)$ y se llama esfera normal (o esfera geodésica) en p . Las geodésicas en $B_\varepsilon(p)$ que comienzan en p son llamadas geodésicas radiales.

Después de todo lo mencionado, en el capítulo V, sección 5.3, página 49 presentamos la demostración que las geodésicas minimizan localmente la longitud de arco en una variedad riemanniana.

2.3 Definiciones de términos básicos

En nuestro trabajo empleamos los siguientes términos básicos.

Geodésica: es la curva más corta que une dos puntos sobre una superficie.

Minimizante: Reducir o disminuir a su grado mínimo.

Parametrizar: describir o estudiar algo mediante parámetros.

Parametrización de una superficie: Si S es una superficie, la parametrización $\vec{r}(u, v)$ tiene la propiedad de recubrir todo S , esto es, $\vec{r}(D) = S$ o recubre parte de S , esto es $\vec{r}(D) \subset S$.

Geometría diferencial: la geometría diferencial de curvas y superficies, presenta dos aspectos: geometría diferencial elástica (estudia las propiedades locales, que dependen del comportamiento de la curva o superficie en torno de un punto) y la geometría diferencial global (estudia propiedades locales sobre el comportamiento total de la curva o superficie) (Do Carmo, 1992)

Superficie regular: Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable, entonces el grafo de $f = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in U\}$ es una **superficie regular**.

Curva parametrizada diferenciable: es una aplicación diferenciable

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$I(a, b)$ de la recta \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 , donde $x(t), y(t), z(t)$ son diferenciables y t es el parámetro de la curva.

Variedades Riemannianas: Una forma sencilla de construir variedades riemannianas es buscar subconjuntos "suaves" del espacio euclidiano. De hecho, cada subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^n tiene una métrica de Riemann inducida: el producto interior en cada fibra tangente es la restricción del producto interno en \mathbb{R}^n .

Ahora presentamos algunas notaciones empleadas en el desarrollo de nuestro trabajo.

R^2 : espacio euclidiano bidimensional.

R^3 : espacio euclidiano tridimensional.

S : superficie en R^3 .

$T_p(S)$: plano tangente de la superficie S , a partir del punto p .

X : aplicación de R^2 a R^3 .

X_u : base que genera al subespacio vectorial $T_p(S)$, con respecto al vector u .

X_v : base que genera al subespacio vectorial $T_p(S)$, con respecto al vector v .

W : campo vectorial diferenciable.

U : conjunto abierto incluido en una superficie de R^3 .

M : una variedad diferenciable.

\mathcal{X} : campo vectorial diferencial.

∇ : conexión afín.

$\mathcal{X}(M)$: campo vectorial diferencial sobre una variedad diferenciable M .

V : campo vectorial.

c : curva diferenciable.

$\frac{DV}{dt}$: derivada covariante de V .

T_qM : plano tangente de la variedad diferenciable M , a partir del punto q .

TM : haz tangente.

γ : segmento de geodésica.

C^∞ : Una función es denominada *continuamente diferenciable* si es de clase C^n para todo n , o lo que es lo mismo, es de clase C^∞ .

$\varphi(t, q)$: flujo de campo vectorial \mathcal{X} sobre V .

$h(t)$: una aplicación sobre M .

$\exp_p(V)$: función exponencial en p sobre V .

$l(\gamma)$: longitud de una curva γ .

$l(c)$: longitud de una curva c .

CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis general

- Se demuestra de manera interpretativa la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana.

Hipótesis específica

- Se demuestra de manera expositiva la definición de una geodésica en una superficie de dimensión 3.
- Se define de manera explicativa un sistema de ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en variedades diferenciables de dimensión n .

3.1.1 Capítulo fuera de variable (cualitativa)

De acuerdo con el tipo de investigación que estamos desarrollando se tiene variables cualitativas, por ser una investigación descriptiva, de análisis y generalizaciones de teorías existentes.

3.2 Operacionalización de variables

Consideramos como variable de estudio la longitud de cualquier curva diferenciable en una variedad riemanniana, y la denotamos de la siguiente manera:

$l(c)$: longitud de una curva diferenciable, que une los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

Donde c : cualquier curva diferenciable que une los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, en una variedad riemanniana.

A continuación, presentamos el cuadro N°3.1 en el que se presenta la variable, dimensión e indicadores empleados en nuestra investigación:

Cuadro N°3.1

OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Variable	Dimensión	Indicadores
$l(c)$: longitud de cualquier curva diferenciable, que une los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, en una variedad riemanniana.	El conjunto M , una variedad riemanniana.	La derivada covariante en R^n .

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Tipo y diseño de la investigación

Con respecto al tipo de investigación, el presente trabajo es una investigación básica, pura o fundamental según Ávila (2001), debido a que está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos basados en la geometría diferencial y riemanniana. Además, el autor manifiesta que dicho tipo de investigación se preocupa por recoger información de la realidad para enriquecer el conocimiento teórico científico, orientada al descubrimiento de principios y leyes; para nosotros en el área mencionada.

Para el diseño de la investigación, manifestamos que, de acuerdo a la naturaleza de nuestra investigación, es un estudio no experimental ya que se realiza sin la manipulación deliberada de variables y en los que solo se observan los fenómenos en su ambiente natural para luego analizarlos (Lara y Valenzuela, 2017). Según su enfoque es cualitativa, ya que tiene como propósito la descripción de las cualidades del fenómeno a estudiar; y de acuerdo a que no solo describe y relaciona, sino requiere encontrar las causas de un fenómeno que es explicativo según su alcance.

Finalmente, manifestamos que las demostraciones presentes en nuestro trabajo son de clase directa, de acuerdo a Gortari (1972), ya que se prueba la validez de una tesis estableciendo que esta necesariamente se da a partir de ciertas proposiciones que han sido probadas como verdaderas.

4.2 Población y muestra

En esta investigación el método de investigación es deductivo, dado que se reduce a la hipótesis, que consiste en la interpretación de la demostración de la propiedad minimizante de las geodésicas en una variedad riemanniana.

Por ello, es un trabajo netamente abstracto no existe población para el estudio. Sin embargo, nuestro trabajo se encuentra en el área de la Geometría Riemanniana.

4.3 Técnicas e instrumentos de recolección de la información documental

También, decimos que en nuestro trabajo se sigue la técnica mediante el razonamiento lógico debido a que realizamos expresiones del tipo deductivo, ya que a partir de la definición de una geodésica en R^3 , vamos a deducir las derivadas parciales en R^n y así definir la propiedad minimizante de una geodésica en variedades riemannianas.

Ya que según Klimovsky (citado en Caramuti, 2004) el método de las ciencias formales, en particular Matemática, es el método deductivo. Porque a partir de axiomas-verdades simples y evidentes, y deducir de ello todas las demás verdades, usando las leyes y reglas del razonamiento correcto que la lógica proporciona se demuestra lo planeado (la hipótesis).

4.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

En nuestro de trabajo de investigación se realizó la técnica de lectura analítica, en las diferentes bases de datos bibliográficos revisados, ya que estos son bases de nuestro marco teórico.

Para realizar este trabajo se revisaron fuentes primarias y la técnica documental a través de la revisión de bibliografía especializada (tesis de licenciatura, maestría y doctorales); específicamente los siguientes repositorios: Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Complutense De Madrid, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Universidad del País Vasco, Universidad de Colombia-Sede Medellín y Centro de Investigación en Matemáticas A.C. México; y bases de datos bibliográficas (libros digitales, artículos), Dialnet, Google académico, Redalyc y Scielo.

4.5 Análisis y procesamiento de datos

Debido a que nuestro trabajo es netamente abstracto, no se necesitó procesamientos de recolección de datos.

CAPÍTULO V: RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados que corresponden al tipo descriptivo esto de acuerdo a la metodología cualitativa de nuestro trabajo.

Para ello, consideramos nuestro problema de investigación que se resume con la siguiente pregunta:

Dados dos puntos A y B sobre una superficie en una variedad riemanniana, ¿cuál es la curva diferenciable de longitud mínima que une los puntos $\alpha(a) = A$ con $\alpha(b) = B$?

Además, consideramos la variable de estudio:

$l(c)$: longitud de cualquier curva diferenciable, que une los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, en una variedad riemanniana. Donde c : cualquier curva diferenciable que une los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, en una variedad riemanniana.

Ahora, mostramos todos los resultados obtenidos en nuestro trabajo para luego realizar el análisis de nuestros resultados.

5.1 Resultados descriptivos

5.1.1 Definición de una geodésica en R^3

De acuerdo a lo desarrollado en el capítulo II subsección 2.2.1, ítem A), en la que corresponde a lo trabajado con respecto a las definiciones previas de una geodésica en R^3 , ahora definimos una geodésica en una superficie de dimensión 3.

Si elegimos dos puntos P y Q sobre una superficie S , podemos unir P y Q mediante una curva que pueden ser: α, β o γ , ¿cuál de estas curvas tiene la menor longitud? Aquella curva que tiene la mínima longitud se llama geodésica.

La definición formal de una geodésica se hace usando la derivada covariante.

Definición formal de una Geodésica en R^3 .

(Do Carmo, 1971, p. 128)

Se define a una curva parametrizada no constante $\gamma: I \rightarrow S$ es geodésica en $t_0 \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t_0 , es decir

$$\frac{D\gamma'(t_0)}{dt} = \mathbf{0} \quad (5.1.1)$$

Se dice que γ es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo $t \in I$. (Do Carmo, 1971, p. 128)

5.1.2 Definición del sistema de ecuaciones diferenciables para las geodésicas en variedades diferenciables.

Ahora de acuerdo a lo trabajado en el capítulo II subsección 2.2.1, ítem B), vamos a determinar las ecuaciones locales que satisface una geodésica γ en un sistema de coordenadas (U, X) alrededor de $\gamma(t_0)$. En U , una curva γ ,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

es geodésica, si y solo si

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

entonces, el sistema de segundo orden

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5.2.1)$$

nos conduce a las ecuaciones deseadas. (Adaptado de Do Carmo, 1971, p.36)

Para estudiar el sistema (5.2.1), es conveniente considerar el haz tangente TM , se define como el conjunto de pares

(q, v) con $q \in M$ y $v \in T_q M$. Si (U, X) es un sistema de coordenadas sobre M , entonces cualquier vector en $T_q M$, $q \in X(U)$, puede ser escrito como $\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Tomando $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ como coordenadas de $(q, v) \in TU$, es fácil mostrar que podemos obtener una estructura diferenciable para TM .

Cualquier curva diferenciable $t \rightarrow \gamma(t)$ en M determina una curva $t \rightarrow \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ en TM . Si γ es una geodésica entonces, sobre TU , la curva

$$t \rightarrow \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$$

satisface el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

en términos de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de TU , donde $TU = U \times R^n$, siendo (U, X) un sistema de coordenadas en la variedad riemanniana M . Por lo tanto, el sistema de segundo orden (5.2.1) sobre U es equivalente al sistema de primer orden (5.2.2) sobre TU . (Adaptado de Do Carmo, 1971, p. 36)

Como consecuencia de los resultados presentamos en la siguiente sección la demostración de la propiedad minimizante de las geodésicas en M .

5.1.3 Demostración de la propiedad minimizante de las geodésicas en M

Ahora de acuerdo a lo trabajado en el capítulo II subsección 2.2.1, ítem C), vamos a demostrar el siguiente teorema.

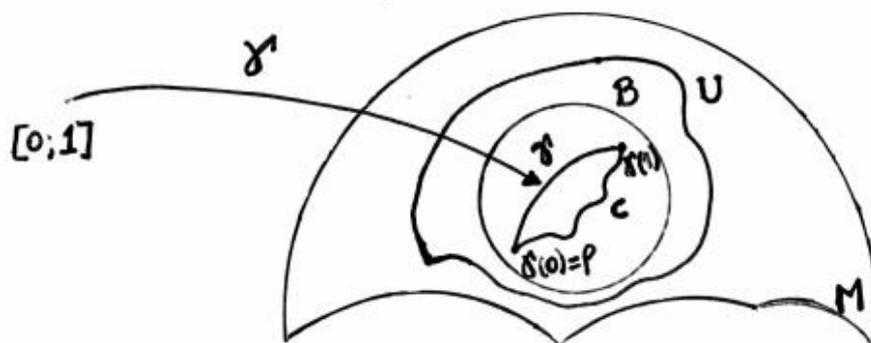
Teorema (5.3.1): Sea $p \in M, U$ una vecindad normal de p y $B \subset U$ una bola normal de centro p . Sea $\gamma: [0,1] \rightarrow B$ un segmento de geodésica con $\gamma(0) = p$.

Si $c: [0,1] \rightarrow M$ es cualquier curva diferenciable por secciones uniendo a $\gamma(0)$ con $\gamma(1)$ entonces $l(\gamma) \leq l(c)$, la igualdad se cumple cuando $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

(Adaptado de Do Carmo, 1971, p. 41-42)

Veamos la figura N°5.14, para una mejor comprensión

Figura N°5.14
Representación de la Curva γ y la curva c .



Demostración:

Consideramos que $c([0,1]) \subset B$.

Como exp_p es un difeomorfismo en U , la curva $c(t)$, para $t \neq 0$, podemos escribir de manera única como

$c(t) = exp_p(r(t).v(t)) = f(r(t), t)$, donde $t \rightarrow v(t)$ es una curva en T_pM con $\|v(t)\| = 1$ y $r:]0, 1] \rightarrow R$ es una función positiva diferenciable en secciones (suponemos que si $t_1 \in]0, 1]$ entonces $c(t_1) \neq p$; caso contrario, ignoraremos el intervalo $[0, t_1[$).

Entonces, excepto para un número finito de puntos, tenemos:

$$c(t) = f(r(t), t)$$

$$c \rightarrow f \begin{matrix} \nearrow r \rightarrow t \\ \searrow t \end{matrix}$$

Por regla de cadena obtenemos la siguiente derivada:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{5.3.1}$$

además del lema de Gauss,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$$

Donde $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1, \Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 = 1 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1$

luego,

$$\left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 = \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle \quad (5.3.2)$$

Sustituir (5.4) en (5.5)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 &= |r'(t)|^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle + |r'(t)| \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + |r'(t)| \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Aplicamos el lema de Gauss $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$ y $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 &= |r'(t)|^2(1) + |r'(t)|(0) + |r'(t)|(0) + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \\ \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 &= |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2 \quad (5.3.3) \\ &\Rightarrow \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2 \\ &\Rightarrow \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \geq |r'(t)| \end{aligned}$$

al integrar tenemos:

$$\int_{\varepsilon}^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 |r'(t)| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 r'(t) dt = r(t)|_{\varepsilon}^1 = r(1) - r(\varepsilon)$$

ahora resulta

$$\int_{\varepsilon}^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq r(1) - r(\varepsilon)$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene:

$$\int_{\varepsilon}^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq r(1)$$

entonces

$$l(c) \geq l(\gamma) \quad (5.3.4)$$

Es claro que si la desigualdad (5.6) o la desigualdad (5.7) son estrictas, entonces $l(c) > l(\gamma)$. Si $l(c) = l(\gamma)$, entonces $\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\| = 0$; es decir, $v(t) = \alpha$, α constante, y $\|r'(t)\| = r'(t) > 0$.

Luego c es una reparametrización monótona de γ y $c: [0,1] = \gamma([0, 1])$.

Si $c[0,1]$ no está contenida en B , considere el primer punto $t_1 \in]0, 1[$ para el cual $c(t_1)$ pertenezca a la frontera de B . Si ρ es el radio de la bola geodésica, se tiene

$$l(c) \geq l_{[0,t_1]}(c) \geq \rho \geq l(\gamma)$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$l(c) \geq l(\gamma)$$

Este resultado corresponde al desarrollo de nuestro objetivo general.

CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de las hipótesis

En esta sección realizamos la contrastación de las hipótesis declaradas en el capítulo III con los resultados obtenidos en el capítulo V. Para ello, consideramos las dos hipótesis específicas y una hipótesis general.

Con respecto a la primera hipótesis específica planteamos que se demuestra de manera expositiva la definición de una geodésica en R^3 . Para ello, a partir de la definición de derivada covariante (se usó diferentes representaciones algebraicas, simbólicas y figurales) se logró definir a una geodésica sobre una superficie en R^3 . Donde se puede demostrar de manera sencilla que una geodésica en R^3 es aquella curva con menor longitud entre dos puntos distantes sobre dicha superficie.

Con respecto a la segunda hipótesis específica planteamos que se define de manera explicativa un sistema de ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en R^n . Es por ello que, a partir de definiciones básicas como variedad diferenciable, métrica riemanniana, espacio tangente entre otras se define una geodésica sobre una variedad riemanniana, de manera análoga como se definió sobre R^3 . A partir de una geodésica sobre R^n y las definiciones previas, como el haz tangente, podemos deducir de manera explicativa el sistema de ecuaciones diferenciables para las geodésicas en variedades diferenciables.

Luego, consideramos la hipótesis general donde se plantea demostrar de manera interpretativa la propiedad minimizante de las geodésicas de una variedad riemanniana. Para ello, se empleó diferentes representaciones figural, simbólica y algebraica; logrando demostrar de manera interpretativa que la longitud mínima entre dos puntos distantes sobre una superficie M , es definida como una geodésica en M . Además, se verifico las proposiciones, lemas y teoremas previos usando el método deductivo; también se emplearon figuras que nos permiten la visualización de las interpretaciones geométricas.

6.2 Contrastación de los resultados con estudios similares

Con respecto al primer objetivo específico, se ha considerado el resultado de la primera forma fundamental, la aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental ya que son necesarios para la definición formal de una geodésica en R^3 , de acuerdo con Ramírez (2012).

Con respecto al segundo objetivo específico, se ha considerado los resultados de campo de vectores, conexión afín y derivada covariante sobre una variedad diferenciable, debido a que son importantes para la definición del sistema de ecuaciones diferenciables para las geodésicas en variedades diferenciables, de acuerdo con Pámpano (2014).

Para el desarrollo del objetivo general, se ha considerado los resultados de una derivada covariante, lema de simetría y lema de Gauss para así apoyados en los aportes de Pámpano (2014) y Do Carmo (1988) lograr nuestro objetivo de demostrar de manera interpretativa el teorema de la propiedad minimizante de las geodésicas.

6.3 Responsabilidad ética

Por ser nuestro estudio estrictamente abstracto y teórico no se considera la responsabilidad ética.

CONCLUSIONES

De acuerdo a cada hipótesis en nuestro trabajo redactamos los siguientes resultados:

Se demuestra de manera interpretativa que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es una geodésica sobre R^3 .

Se define de manera expositiva un sistema de ecuaciones diferenciables parciales de las geodésicas en R^n .

Se demuestra de manera interpretativa que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es la longitud mínima sobre una variedad Riemanniana.

En base a la forma de presentación de los resultados expuestos podemos concluir que se obtiene la demostración de la propiedad de geodésicas en una variedad riemanniana de una manera más interpretativa.

Además, podemos manifestar que se espera la comprensión de la noción de variedad diferencial, así como la importancia de sus aplicaciones en otras ciencias. Por otro lado, se tiene la expectativa que adquieran herramientas básicas de trabajo, interpretando nociones fundamentales de campos, etc.

RECOMENDACIONES

Sugerimos las siguientes recomendaciones:

En este trabajo de investigación se ha demostrado la propiedad minimizante de una geodésica sobre una variedad diferenciable de manera local, se sugiere desarrollar un trabajo en el que complete la demostración de manera global ya que es muy importante debido a la variedad de aplicaciones en las diferentes áreas.

Se sugiere investigar sobre las diversas aplicaciones de las geodésicas y su propiedad minimizante ya que en este trabajo se pueden encontrar las siguientes aplicaciones: las geodésicas en las imágenes médicas, Variaciones Temporales Del Nivel Del Mar, Medidas del desplazamiento de estaciones geodésicas GPS, entre otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ávila, R. (2001). Metodología de la Investigación. Estudios y Ediciones S. A., Lima, Perú.
- Besse, A. (1978). Manifolds all of whose geodesics are closed. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Caramuti, L. (2004). Klimovsky, Gregorio: Las ciencias formales y el método axiomático, Buenos Aires, A-Z editora, 2000. Recuperado de: <http://revele.uncoma.edu.ar/htdoc/revele/index.php/filosofia/article/view/401/391>
- De Gortari, E. (1972). Introducción a la lógica dialéctica. México, Universidad Nacional Autónoma de México/Fondo de Cultura Económica. Recuperado de: <https://ymibosquemadura.files.wordpress.com/2015/09/eli-de-gortari-introduccion-a-la-logica-dialectica.pdf>
- Do Carmo, M. (1971). Elementos de Geometría Diferencial. Impreso en Brazil. Rio de Janeiro, 1971.
- Do Carmo, M. (1988). Geometría Riemanniana. Grafica Portinho Cavalcanti Ltda, 1988.
- Do Carmo, M. (1992). Geometría Diferencial de curvas y superficies. Ed. Alianza Editorial S.A. Madrid, 1992.
- Gil, E. (2002). *Variaciones Temporales Del Nivel Del Mar: Aplicaciones Geodésicas, Geofísicas Y Oceanográficas*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense De Madrid. España. Recuperado en: <https://core.ac.uk/download/pdf/19709436.pdf>
- Lara, L. y Valenzuela, C. (2017). Guía para redacción de un proyecto de Investigación. Espacio Editorial. Buenos Aires. Recuperado en: <http://biblioteca.usat.edu.pe/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=31401>
- Mendoza M. (2018). Medidas del desplazamiento de estaciones geodésicas GPS en el Perú. Tesis de Licenciatura. Universidad Mayor de San Marcos. Perú. Recuperado de: <http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/7758>

- Nieto J., Saucedo J. y Villanueva V. (2007). Geodesic deviation equation for relativistic tops and the detection of gravitational waves. *Revista Mexicana De Física S* 53 (2) 141–145. México. Recuperado en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v53s2/v53s2a19.pdf>
- Pámpano, A. (2014). *Geodésicas en Variedades de Riemann*. Tesis de Maestría. Universidad del País Vasco. España. Recuperado en: https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/14897/TFG_P%C3%A1mpano%20Llarena?sequence=1
- Ramírez, J. (2012). *Superficies desarrollables y geodésicas en las imágenes médicas*. Tesis de Maestría. Universidad de Colombia-Sede Medellín. Colombia. Recuperado de: http://bdigital.unal.edu.co/9054/1/Superficies_desarrollables_y_geod%C3%A9sicas_en_las_im%C3%A1genes_m%C3%A9dicas.pdf
- Rofatto, Matsuoka y Klein (2018). Planejamento de redes geodésicas baseado no critério de identificação de outlier: um exemplo aplicado à rede de nivelamento. Recuperado en: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1982-21702018000200152
- Ruiz, G. (2006). *Subvariedades hélice, frontera de sombra y totalmente geodésicas*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Matemáticas A.C. México. Recuperado en: <https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1008/61/2/TE%20213.pdf>
- Velasco, J., Herrero T. y Prieto, J. (2014). Metodología de diseño, observación y cálculo de redes geodésicas exteriores para túneles de gran longitud. *Informes de la Construcción*, 66(533): e010. Recuperado en: <https://core.ac.uk/download/pdf/20052004.pdf>
- Ventura, P. (1996). *Geometría Diferencial*. Impreso en Perú. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, IMCA.
- Vera, Julio. *Geometría Riemanniana* (1988), Traducción de Do Carmo Manfredo. Recuperado de: <http://www.nekonekno.x10.mx/doc/doCarmo.pdf>

ANEXOS

1. Matriz de consistencia

Problema General	Objetivo General	Hipótesis	Metodología	Población
Dados dos puntos A y B sobre una variedad Riemanniana, ¿cuál es la curva α diferenciable que une los puntos $\alpha(a) = A$ con $\alpha(b) = B$ y que tenga longitud mínima?	Demostrar que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es la longitud mínima sobre una variedad Riemanniana.	Se demuestra que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es la longitud mínima sobre una variedad Riemanniana.	Tipo de investigación: Investigación básica, pura o fundamental, de tipo deductiva. Diseño de investigación: estudio no experimental, método deductivo, demostraciones de clase directa.	Conjunto arbitrario M donde se define una variedad riemanniana
Problemas Específicos	Objetivos Específicos	Hipótesis Específicas		
Dados dos puntos A y B sobre R^3 , ¿cuál es la curva α diferenciable que une los puntos $\alpha(a) = A$ con $\alpha(b) = B$ y que tenga longitud mínima?	Demostrar que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es la longitud mínima sobre R^3 .	Se demuestra que la curva diferenciable $l(\gamma)$ es una geodésica sobre R^3 .		
¿Es posible definir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de las geodésicas en R^n ?	Definir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de las geodésicas en R^n .	Se define un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de las geodésicas en R^n .		