UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“ALGUNAS PROPIEDADES DEL CUERPO DE LOS NÚMEROS P-ÁDICOS”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

IRMA LEONOR BELLIDO ROJAS

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"ALGUNAS PROPIEDADES DEL CUERPO DE LOS NÚMEROS P-ÁDICOS"

Bellido Rojas, Irma Leonor

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Walter Flores Vega

Presidente

Lic. Elmer Alberto León Zárate

Secretario

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Vocal

Mg. Ruth Medina Aparcana

Asesora

Callao – Perú

2019

DEDICATORIA

A mis padres, Fernando y Rosa, por el apoyo incondicional.

A mi abuela, Amelia, por estar siempre conmigo.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Mg. Ruth Medina Aparcana, por sus sugerencias y observaciones oportunas durante el proceso de elaboración de este trabajo, además por su motivación y paciencia que me ayudaron a concluir con éxito este trabajo.

A los profesores de la especialidad de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, por la enseñanza de conocimientos tan valiosos que fueron de gran ayuda en la elaboración de este trabajo de investigación.

A mis compañeros de clases, por los momentos de estudio, las experiencias vividas y el apoyo constante a siempre seguir adelante con nuestros proyectos.

ÍNDICE

RESUMEN

La presente investigación se refiere al estudio del cuerpo de los números *p*-ádicos $\mathbb{Q}_p$ (con p número primo) y algunas de sus propiedades.

El cuerpo $\mathbb{Q}_p$, al igual que el cuerpo de los números reales es una compleción de los números racionales, a partir de una norma diferente del valor absoluto usual: **la norma *p*-ádica.**

Este estudio surge ante la inquietud de saber si el análisis realizado en el cuerpo de los números *p*-ádicos será similar al cuerpo ya conocido de los números reales $\mathbb{R}$, ya que ambos son compleciones de $\mathbb{Q}$.

Considero que, es la oportunidad de visitar una parte importante de la matemática que es un punto de encuentro entre el análisis y el álgebra: el universo *p*-ádico.

El trabajo de investigación es de tipo básico, con un diseño no experimental y se usó el método deductivo – demostrativo y pertenece a la línea de Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

El objetivo principal de este trabajo de tesis fue identificar algunas de las propiedades en el cuerpo de los números *p*-ádicos considerando que $\mathbb{Q}_p$ es una compleción de los racionales.

ABSTRACT

The present investigation refers to the study of the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ (with p prime number) and some properties.

The field $\mathbb{Q}_p$ as well as the field of the real numbers is a completeness of the rational numbers, starting from a norm different from the usual absolute value: the p-adic standard.

This study arises in the interest of knowing if the analysis made in the field of the p-adic numbers will be similar to the field already known of the real numbers $\mathbb{R}$, since both are completions of $\mathbb{Q}$.

I believe that it is the opportunity to visit an important part of mathematics that is a meeting point between analysis and algebra: the p-adic universe.

The research work is of a basic type, with a non-experimental design and the deductive - demonstrative method was used and belongs to the line of Functional Analysis and Partial Differential Equations.

The main objective of this thesis work was to identify some of the properties in the field of p-adic numbers considering that $\mathbb{Q}_p$ is a completion of the rational ones.

INTRODUCCIÓN

Hace muchos años el matemático Pierre de Fermat alegó que no había espacio en el margen de su libro para escribir la demostración "maravillosa" de un teorema que había enunciado, conocido como "El último teorema de Fermat". En uno de los intentos de demostrar este teorema, Kummer hace uso de números con características especiales: los números p-ádicos.

Es así como al investigar estos números, encontramos algunas similitudes con los números reales. Es por ello, que nuestra investigación se centró en el estudio de algunas propiedades como la convergencia de sucesiones y series de los números p-ádicos.

Es importante resaltar que los números p-ádicos tienen aplicaciones en varias áreas de las matemáticas pues son una herramienta fundamental en la teoría de números actual, además relacionan la topología y geometría con la aritmética. También tienen aplicaciones a la física, básicamente en la Mecánica Cuántica.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Siendo que los números reales y los números racionales son los cuerpos estudiados de manera usual durante los cursos de matemática, y que el cuerpo de los números reales se caracteriza por su riqueza de propiedades topológicas que se desprenden de su valor absoluto usual; surge la problemática de saber si la compleción del cuerpo de los números racionales con otra métrica generaría otro cuerpo con las mismas propiedades o propiedades más fuertes o semejantes que nos permitirían hacer un análisis como el que se tiene en los reales.

En la demostración sobre el último teorema de Fermat, como nos cuentan Andradas y Corrales (1999), Kummer hizo uso de un concepto muy profundo aun no estudiado en ese entonces: todos sus cálculos se expresaban de forma clara y natural en términos de los números *p*-ádicos. Se sabe que Kummer mantuvo contacto constante con su alumno Kronecker, a su vez maestro de Kurt Hensel; y es Hensel quien a partir de sus conocimientos sobre la definición de Cantor de número real y las ideas de Weber y Dedekind sobre analogías entre los cuerpos de números y cuerpos de funciones, desarrolla el concepto de cuerpo *p*-ádico y la notación de norma *p*-ádica. Más adelante, a partir del trabajo de Helmut Hasse, alumno de Hensel, los números *p*-ádicos se situaron en el centro de la teoría algebraica de números del siglo XX.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

¿Qué propiedades importantes existen en el cuerpo de los números *p*-ádicos?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Es el cuerpo de los números *p*-ádicos una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica?
- ¿Qué propiedades tienen las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos?
- ¿Qué propiedades tienen las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos?

1.3. Objetivo

1.3.1. Objetivo general

Identificar propiedades importantes en el cuerpo de los números *p*-ádicos.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Mostrar que el cuerpo de los números *p*-ádicos es una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica.
- Analizar las propiedades de las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos.
- Analizar las propiedades de las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórico

Una de las limitaciones teóricas de esta investigación fue el aún no terminado estudio del cuerpo de los números *p*-ádicos.

Además, dado que en los cursos presentados en el plan curricular de la carrera de Matemática no se expanden los conocimientos sobre álgebra y análisis, este aporte puede ayudarnos a ampliar el campo de conocimientos de nuestros estudios de pregrado.

1.4.2. Temporal

La presente investigación se llevará a cabo en un período de 3 meses, el cual estará comprendido del mes de setiembre al mes de noviembre del 2018.

1.4.3. Espacial

La presente investigación se llevará a cabo en la Universidad Nacional del Callao, con el apoyo del asesor de tesis y el profesor del ciclo de tesis.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Los números *p*-ádicos fueron descritos por primera vez en 1897 por el matemático alemán Kurt Hensel donde los describe como series de potencias de Laurent.

Fue recién en 1912 que Kürschák define los valores absolutos, es así como esta nueva definición permite interpretar el cuerpo de los números *p*-ádicos en términos de espacios métricos y topológicos.

Fueron usados en 1921 con el principio local-global de H. Hasse, que explica que una ecuación puede resolverse en los números racionales, si y solo si, se puede resolver en los números reales y en los números *p*-ádicos para todo primo *p*.

El presente trabajo de investigación toma aportes de los siguientes trabajos de tesis:

2.1.1. Internacional

Dimitriadis (2016) en su tesis *"El cuerpo de los números p-ádicos: Propiedades algebraicas y topológicas"* se planteó el objetivo de estudiar el cuerpo de los números *p*-ádicos como compleción de los números racionales para la norma *p*-ádica, así como también las propiedades algebraicas y topológicas de este; utilizó una metodología deductiva y concluyó estableciendo comparaciones con los números reales.

Este trabajo de investigación relaciona los números racionales con los números *p*-ádicos, lo cual hace que define propiedades y realice una comparación; esto nos ayuda a tener una visión más amplia de estos números.

Lalín (1999) en su tesis *"Introducción a las curvas elípticas"* se planteó el objetivo de estudiar el siguiente problema: "Un entero positivo n se dice congruente cuando es igual al área de un triángulo rectángulo de lados racionales"; utilizó una metodología deductiva y concluyó que la ecuación de una curva elíptica nos dará información acerca de si un número es congruente o no.

De este trabajo de investigación se tomarán algunas definiciones de la norma *p*-ádica que el autor menciona como preliminares para introducir a los números *p*-ádicos y poder hablar de curvas elípticas.

2.1.2. Nacional

Rojas (2016) en su tesis *"Completitud y clausura algebraica de campos P-ádicos"* se planteó el objetivo de construir y analizar campos de extensión de $\mathbb{Q}$ usando los valores absolutos *p*-ádicos, utilizó una metodología deductiva y concluyó reconociendo las características topológicas y algebraicas encontradas en dichos campos.

Este trabajo de investigación se realizó de manera más algebraica, considerando una construcción interesante y detallada del cuerpo de los números *p*-ádicos, así como también reconociendo características importantes de dicho cuerpo. Esto nos ayuda a ampliar la visión que tenemos sobre el cuerpo *p*-ádico y sus características algebraicas.

Mas (2015) en su tesis "Raíces *p*-ádicas de la unidad" se planteó el objetivo de estudiar la ecuación $x^n - 1 = 0$ en los números *p*-ádicos, utilizó una metodología deductiva y concluyó que es posible conseguir una extensión que nos permita descomponer completamente el $f(x) = x^n - 1$ y mostrar el comportamiento algebraico de las raíces.

De este trabajo de investigación se tomaron las definiciones relacionadas a los números *p*-ádicos con las que el autor basa el estudio de su problema, para conseguir información sobre las raíces de la ecuación planteada.

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

En esta sección presentaremos definiciones, proposiciones, lemas y teoremas importantes extraídos de García (2008), De Burgos (2006), y Willard (1970).

- **Relaciones de equivalencia**

Definición 2.2.1. Dado un conjunto E, con $\mathcal{R} \subseteq E^2$, entonces diremos que $\mathcal{R}$ es una relación definida en E. Una relación puede satisfacer las siguientes propiedades

i. $\mathcal{R}$ es reflexiva: $(x, x) \in \mathcal{R}, \forall x \in E$
ii. $\mathcal{R}$ es simétrica: Si $(x, y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$
iii. $\mathcal{R}$ es transitiva: Si $(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$
iv. $\mathcal{R}$ es antisimétrica: Si $(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x = y$

Definición 2.2.2. Dada $\mathcal{R} \subseteq E^2$, diremos que:

i. $\mathcal{R}$ es una relación de orden si $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
ii. $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y simétrica. La denotaremos como $\sim$.

Teorema 2.2.3. Una relación de equivalencia $\sim$ definida en E, determina una partición de E en clase de equivalencia.

Definimos la clase de e, $(e \in E)$ como el siguiente conjunto $C_e = \{x \in E / \, x \sim e\}$

Definición 2.2.4. Dada la relación de equivalencia $\sim$ en E, definimos el conjunto cociente como el conjunto formado por todas las clases de equivalencia disjuntas de E, y denotamos

$$\frac{E}{\sim} = \{C_e \ / \ e \in E\}$$

Teorema 2.2.5. (De partición). Dada $\sim$ definida en E. $\sim$ es una relación de equivalencia en E sí y solo si existe una partición de E.

Definición 2.2.6. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que b es divisible por a o que a divide a b si y solo si $b = aq$, donde q es algún entero. Y denotaremos $a \mid b$.

Definición 2.2.7. Sean $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$. Diremos que a es congruente a b módulo m, y denotaremos $a \equiv b \bmod m$, si m divide a $b - a$; es decir, $m \mid b - a$.

- **Anillos y cuerpos**

Definición 2.2.8. Un anillo A con unidad es un conjunto que consta de dos operaciones binarias

$$+ : A \times A \to A \qquad \cdot : A \times A \to A$$

denominadas suma y producto que satisfacen los siguientes axiomas:

i. $\forall a, b \in A, a + b = b + a$ (conmutatividad de la suma).
ii. $\forall a, b, c \in A, a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociatividad de la suma).
iii. $\exists 0 \in A$ tal que $\forall a \in A, a + 0 = 0 + a = a$ (elemento neutro para la suma).
iv. $\forall a \in A, \exists b \in A$ tal que $a + b = b + a = 0$. Al elemento b se le llama inverso aditivo de a y es denotado generalmente por $-a$ (inverso aditivo).
v. $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociatividad del producto).

vi. $\exists\, 1 \in A$ tal que $\forall a \in A, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (elemento neutro para el producto).

vii. $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (propiedad distributiva de · respecto de +).

Denotaremos a un anillo como una terna $(A, +, \cdot)$ con dichas operaciones ya definidas.

Si el producto · es conmutativo, diremos que A es un anillo conmutativo.

Definición 2.2.9. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Diremos que un subconjunto no vacío $B \subset A$ es un subanillo de A, si $(B, +, \cdot)$ es un anillo, donde $+$ y $\cdot$ son las mismas operaciones que en A.

Proposición 2.2.10. Un subconjunto no vacío B de un anillo A es un subanillo si y solo si cumple las siguientes propiedades:

i. $b_1 - b_2 \in B, \forall\, b_1, b_2 \in B$
ii. $1 \in B$
iii. $b_1 b_2 \in B, \forall\, b_1, b_2 \in B$

Definición 2.2.11. El conjunto de unidades $\mathcal{U}(A)$ de un anillo A es el conjunto formado por los elementos con inverso multiplicativo en el anillo, es decir

$$\mathcal{U}(A) = \{a \in A \,/ \exists b \in A : a \cdot b = b \cdot a = 1\}$$

Definición 2.2.12. Un ideal de un anillo conmutativo A es un subconjunto I de A tal que

i. $x + y \in I$, para todo $x, y \in I$
ii. $\kappa \cdot x \in I$, para todo $\kappa \in A$ y $x \in I$

Definición 2.2.13. Los subconjuntos $\{0\}$ y A de un anillo A son ideales de A. A estos ideales se les llama triviales.

Definición 2.2.14. Un ideal I es maximal si I es no trivial y si J es otro ideal de A tal que $I \subseteq J$, entonces $I = J$ o $J = A$. Esto quiere decir que, un ideal maximal no está contenido en ningún ideal que no sea trivial.

Definición 2.2.15. Sea A un anillo conmutativo e I un ideal de A. Dado $x \in A$, denotamos por $x + I$ al conjunto dado por $\{x + a \;/\; a \in I\}$. Claramente, $x + I = y + I$ si y solo sí $x - y \in I$. Así, se define el conjunto cociente A/I como

$$\frac{A}{I} = \{x + I \;/\; x \in A\}$$

A/I resulta un anillo conmutativo con las operaciones definidas por $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$ y $(x + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I$

Definición 2.2.16. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un anillo conmutativo tal que $\forall a \in \mathbb{K} - \{0\}$, existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Al elemento b se le llama inverso multiplicativo de a y se denota como a^{-1}.

Lema 2.2.17. Un anillo conmutativo es un cuerpo si y solo sí todos sus elementos no nulos son unidades. Es decir, $\mathcal{U}(A) = A \setminus \{0\}$

Lema 2.2.18. Si A es un anillo conmutativo e I es un ideal maximal, entonces A/I es un cuerpo.

- **Métricas y normas**

Definición 2.2.19. Sea X un conjunto no vacío. Una métrica o distancia sobre X es una función $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall z \in X$ (desigualdad triangular)

A un par (X,d) con X un conjunto no vacío y d una métrica en X, se le denomina espacio métrico.

Definición 2.2.20. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. La norma en $\mathbb{K}$ es una aplicación:

$$\|\cdot\|: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisface las siguientes condiciones: $\forall\ x, y \in \mathbb{K}$

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$
iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Definición 2.2.21. Diremos que una distancia d está inducida por una norma $\|\cdot\|$ si

$$d(x,y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$$

Definición 2.2.22. Una norma se dice no arquimediana, si para todo $x, y \in \mathbb{K}$ satisface además la siguiente condición adicional:

iv. $\|x + y\| \leq max\{\|x\|; \|y\|\}$ (desigualdad triangular fuerte)

Al cumplirse solo las tres primeras condiciones diremos que la norma es arquimediana.

Definición 2.2.23. Una métrica en un conjunto X se dice no arquimediana si

$$d(x,y) \leq máx\{d(x,z), d(z,y)\} \qquad \forall x, y, z \in X$$

En particular, una métrica sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es no arquimediana si está inducida por una norma no arquimediana.

Veamos algunos ejemplos:

1. El valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$ es una aplicación definida como
$$|\cdot|_\infty : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad \text{tal que}$$
$$|x|_\infty = \begin{cases} x; si\ x \geq 0 \\ -x; si\ x < 0 \end{cases}$$

2. El valor absoluto trivial en un cuerpo $\mathbb{K}$ es una aplicación definida como
$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad \text{tal que}$$
$$|x| = \begin{cases} 1; si\ x \neq 0 \\ 0; si\ x = 0 \end{cases}$$

Podemos observar que el valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$ es una norma arquimediana en $\mathbb{Q}$, pues cumple las condiciones i, ii y iii de la Definición 2.2.20. Análogamente, el valor absoluto trivial $|\cdot|$es una norma no arquimediana en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, pues cumple la condición adicional iv de la Definición 2.2.22.

Proposición 2.2.24. Si los elementos a, x de un cuerpo no arquimediano $\mathbb{K}$ satisfacen la condición $\|x - a\| < \|a\|$, entonces $\|x\| = \|a\|$.

Prueba: Usando la desigualdad triangular fuerte,

$$\|x\| = \|x - a + a\| \leq max\{\|x - a\|, \|a\|\} = \|a\| \Longrightarrow \|x\| \leq \|a\|$$

Probando la otra desigualdad,

$$\|a\| = \|a - x + x\| \leq max\{\|x - a\|, \|x\|\}$$

Si $\|x - a\| > \|x\|$ esto implicaría que $\|a\| \leq \|x - a\|$ lo que es una contradicción con la hipótesis.

Esto quiere decir que $\|x-a\| \leq \|x\|$, por lo tanto $max\{\|x-a\|, \|x\|\} = \|x\|$. Con lo cual se tiene que $\|a\| \leq \|x\|$.

De las dos desigualdades probadas se concluye que $\|x\| = \|a\|$. ∎

2.3. Definiciones de términos básicos

Sucesión: Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión en X es una función $f: \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow X$. Si, para cada n, $f(n) = a_n$, entonces escribiremos la sucesión f como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Decimos que a_n es el n-ésimo término de la sucesión.

Sucesión de Cauchy: Sea una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d).

Se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para todo ϵ positivo existe un n_0 natural tal que para todo $n, m \geq n_0$, $d(a_n, a_m) < \epsilon$.

Sucesiones convergentes: Sea una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio mètrico (X, d).

Decimos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$, y escribiremos $a_n \longrightarrow x$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}_{+}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$.

Espacio métrico completo: Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que X es completo si en él toda sucesión de Cauchy es convergente.

Compleción: Se dice que un espacio métrico X es una compleción de A, si A es denso en X y X es completo.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Capítulos fuera de variables (cualitativo)

Hipótesis general

Existen propiedades importantes en el cuerpo de los números *p*-ádicos.

Hipótesis Específicas

- El cuerpo de los números *p*-ádicos es una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica.
- Existen propiedades importantes que cumplen las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos.
- Existen propiedades importantes que cumplen las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos.

3.2. Operacionalización de las variables

Las variables de la investigación son las propiedades del cuerpo de los números p-ádicos.

Variable	Dimensiones	Indicadores
Propiedades del cuerpo de los números p-ádicos.	Compleción de los números reales.	La norma p-ádica.
	Sucesiones en el cuerpo de los números p-ádicos.	Propiedades de sucesiones.
	Series en el cuerpo de los números p-ádicos.	Propiedades de series.

IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la investigación

Según Valderrama (2013), la presente investigación es de tipo Básica, Pura o fundamental porque está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos a la línea de Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales; y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata.

El presente trabajo de investigación posee un diseño no experimental, pues es complicado manipular las variables que presenta, como lo señala Merterns (2005).

El método a utilizar es de tipo deductivo - demostrativo, pues el partir de axiomas y definiciones nos permitirá establecer la teoría del cuerpo de los números *p*-ádicos de una manera clara y precisa, para que sirva de motivación en la investigación de la línea de Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

El presente trabajo de investigación se desarrollará de la siguiente manera:

En primer lugar, se realizará la construcción de una compleción de los números racionales.

En segundo lugar, introducimos la definición de las normas y sus propiedades. Así como la construcción de un cuerpo normado.

Seguidamente, estudiaremos el cuerpo de los números *p*-ádicos $\mathbb{Q}_p$, en función de la norma definida en este cuerpo: la norma *p*-ádica.

Luego de ello, centraremos nuestro estudio en las propiedades topológicas del cuerpo de los números *p*-ádicos, estudiaremos sucesiones y series en $\mathbb{Q}_p$ para finalmente obtener similitudes con el cuerpo de los números reales.

4.2. Población y muestra

La abstracción del trabajo nos indica que no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla dentro del universo del cuerpo de los números p-ádicos.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización de nuestro trabajo se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer el texto en forma pausada, reflexiva y minuciosa, con el propósito de comprender los resultados encontrados. Se reunió bibliografía especializada y recopilación de investigaciones relacionadas con el cuerpo de los números p-ádicos, obtenidos de bases de datos como Scopus, Repositorio de la Pontificia Universidad Católica del Perú y Repositorio de la Universidad de Valladolid.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

La presente investigación no requiere técnicas para la recolección de la información de campo.

4.5. Análisis y procesamiento de datos

La presente investigación no requiere plan de análisis estadístico de datos.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

A) Compleción de los números racionales

Trabajaremos la compleción (o completación) del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, con una norma arbitraria. Como resultado de esta compleción, construiremos un cuerpo que será objeto de nuestro estudio en los capítulos siguientes.

Existen diferentes métodos para completar un cuerpo, en esta ocasión usaremos el método de Cantor de las sucesiones de Cauchy.

Partiremos del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales que es no completo, y construiremos un cuerpo R, completo que contenga a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo.

Usaremos algunas definiciones importantes mostradas en el capítulo anterior y nos basaremos en la prueba mostrada en Linés (1991).

- **Anillo de las sucesiones de Cauchy**

Sea el cuerpo $\mathbb{Q}$ con una norma cualquiera $\|.\|$. Designaremos por S al conjunto de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, con respecto a la norma $\|.\|$.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en S. Se define la suma y el producto de sucesiones de Cauchy de la siguiente manera:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$$

Luego $\{a_n + b_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$ también son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, con respecto a la norma $\|.\|$, podemos ver esta prueba en las páginas 46-47 de Linés (1991).

- Como la suma y el producto son elementos de $\mathbb{Q}$, la operación suma y la operación producto de sucesiones es asociativa y conmutativa.
- El elemento neutro es la sucesión $\{0\}$ definida de tal forma que todos sus elementos son 0.
- El opuesto de $\{a_n\}$ es $-\{a_n\}$ definida por el inverso aditivo de cada elemento de la sucesión $\{a_n\}$.
- Se cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma, por verificarse entre los elementos de $\mathbb{Q}$.
- El elemento neutro del producto de sucesiones es la sucesión constante $\{1\}$ definida de tal forma que todos sus enésimos elementos son 1.

Todas estas propiedades verifican que S es un **anillo conmutativo unitario.**

Nota 5.1.1. S no es un cuerpo, pues una sucesión de Cauchy con uno o más elementos nulos no tiene inversa respecto a la operación de producto de sucesiones:

$$(1; 0; 0; \dots) \cdot (0; 1; 0; 0; \dots) = \{0\}$$

El conjunto de las sucesiones constantes S', verifica que es un subanillo del anillo S, por la definición 2.2.9.

Proposición 5.1.2. Como $\mathbb{Q}$ un cuerpo ordenado, entonces la aplicación en la que a cada $a \in \mathbb{Q}$ le corresponde $\{a\} \in S'$ es un isomorfismo entre el cuerpo $\mathbb{Q}$ y el anillo S' (que también es cuerpo).

- **Sucesiones nulas, positivas y negativas**

Definición 5.1.3. Una sucesión nula en el cuerpo $\mathbb{Q}$ es una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de $\mathbb{Q}$, con respecto a una norma $\|.\|$, que converge hacia 0.

Es decir, para cada $\varepsilon \epsilon \mathbb{Q}^{+}$, existe un número natural $\mathscr{v}$ tal que

$$\|a_n\| < \varepsilon, \text{para todo}\, n \geq \mathscr{v}\ ; n \in \mathbb{N}$$

Negando esta definición, podemos tener como se define una sucesión no nula:

Definición 5.1.4. Si una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$ no es nula, existe un $\eta \in \mathbb{Q}^{+}$y un $\mathscr{v} \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|a_n\| \geq \eta \text{ para todo}\, n \geq \mathscr{v}\ ; n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es nula en $\mathbb{Q}$, pues para cada $\varepsilon > 0$, basta tomar $\frac{1}{\mathscr{v}} < \varepsilon$ para que $\frac{1}{n} < \varepsilon$; $\forall\, n \ \geq \mathscr{v}$

Proposición 5.1.5. Una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$, para cada $\varepsilon \epsilon \mathbb{Q}^{+}$, existen infinitos términos de la sucesión que verifican $\|a_n\| < \varepsilon$, es una sucesión nula.

Demostración:

Como $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, para cada $\varepsilon \epsilon \mathbb{Q}^+$, por definición existe un $\mathcal{v} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|a_p - a_q\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \forall\, p, q \geq \mathcal{v}$$

Además, por hipótesis se tiene que infinitos términos de la sucesión que verifican $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe un a_q tal que

$$\left\|a_q\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{con } q \geq \mathcal{v}$$

Por lo que satisface

$$\left\|a_p\right\| = \left\|a_p - a_q + a_q\right\| \leq \left\|a_p - a_q\right\| + \left\|a_q\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Es decir, $\left\|a_p\right\| < \varepsilon; \text{para todo } p \geq \mathcal{v}$. Por lo tanto, la sucesión es nula. ■

Definición 5.1.6.

i. Una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$, es positiva, si existe un $\mathcal{w} > 0 \; en \; \mathbb{Q}$ y un número natural $\mathcal{v}$, tales que

$$a_n > \mathcal{w}, para\ todo\ n \geq \mathcal{v}\ ;\ n\, \epsilon \mathbb{N}$$

ii. Una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$, es negativa, si existe un $\mathcal{w} > 0 \; en \; \mathbb{Q}$ y un número natural $\mathcal{v}$, tales que

$$a_n < -\mathcal{w}, para\ todo\ n \geq \mathcal{v}\ ;\ n\, \epsilon \mathbb{N}$$

Proposición 5.1.7. Una sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ en $\mathbb{Q}$, es positiva, o nula o negativa, excluyéndose estas tres posibilidades.

Nota 5.1.8. Denotaremos

S^+ al conjunto de las sucesiones de Cauchy positivas

S^- al conjunto de las sucesiones de Cauchy negativas

I al conjunto de las sucesiones de Cauchy nulas

Resulta así la siguiente partición del conjunto S.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^+ \cup \boldsymbol{S}^- \cup \boldsymbol{I}$$

Esto satisface la propiedad de tricotomía.

Proposición 5.1.9. Si $\{a_n\} \in S^+$ y $\{b_n\} \in S^+$ entonces $\{a_n + b_n\} \in S^+$ y $\{a_n \cdot b_n\} \in S^+$

Demostración: Por definición

Si $\{a_n\} \in S^+$, existe un $w_1 \epsilon \mathbb{Q}^+$ y un $v_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > w_1$ para todo $n \geq v_1$.

Si $\{b_n\} \in S^+$, existe un $w_2 \epsilon \mathbb{Q}^+$ y un $v_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > w_2$ para todo $n \geq v_2$.

Tomando $v = máx\{v_1; v_2\}$ se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a_n + b_n > w_1 + w_2 \\ a_n \cdot b_n > w_1 \cdot w_2 \end{array}\right. \qquad \text{para todo } n \geq v$$

Esta proposición satisface la propiedad de estabilidad. ■

Nota 5.1.10. Dado que no se puede comprobar la propiedad antisimétrica, no se puede definir una estructura de orden en S.

Conseguiremos una ordenación estableciendo en S una relación de equivalencia y considerando el conjunto de clases.

- **Equivalencia de sucesiones fundamentales, cuerpo cociente.**

Como I es un subconjunto de S formado por las sucesiones nulas, este conjunto I cumple las siguientes propiedades:

Proposición 5.1.11.

i. La diferencia de dos sucesiones nulas en $\mathbb{Q}$, es una sucesión nula en $\mathbb{Q}$.
ii. El producto de una sucesión nula en $\mathbb{Q}$, por otra sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, es una sucesión nula en $\mathbb{Q}$.

Demostración:

i. Como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son nulas, entonces convergen a 0.

   Para cada $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un $\mathscr{v} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \|-b_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } n \geq \mathscr{v} \text{ ; } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|a_n - b_n\| \leq \|a_n\| + \|-b_n\| < \varepsilon$$

   Es decir, la diferencia de las dos sucesiones también converge a 0.

ii. Sea $\{a_n\}$ nula y $\{c_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Como $\{c_n\}$ es de Cauchy está acotada, entonces existe un $A \in \mathbb{Q}$ tal que

$$c_n < A \quad ; \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}$$

   Y como $\{a_n\}$ es nula, para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un $\mathscr{v} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{A} \;\; ; \;\; \text{para todo } \; n \geq \upsilon$$

De donde

$$\|a_n \cdot c_n\| = \|a_n\| \cdot \|c_n\| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon \;\; ; \;\; \text{para todo } n \geq \upsilon$$

Por lo tanto, hemos probado que el producto es una sucesión nula en $\mathbb{Q}$. ■

Veremos ahora la relación de equivalencia en S.

Definición 5.1.12. Dos sucesiones de Cauchy $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ en $\mathbb{Q}$, son equivalentes si su diferencia es una sucesión nula. Notación $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$

Es decir, $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ si $\{a_n\} - \{a'_n\} = \{a_n - a'_n\} \in I$

Proposición 5.1.13. $\sim$ es una relación de equivalencia en S.

Prueba: Probaremos las propiedades enunciadas en ii de la Definición 2.2.2.

Propiedad reflexiva: $\{a_n\} \sim \{a_n\}$, pues $\{a_n\} - \{a_n\} = \{a_n - a_n\} = \{0\} \in I$

Propiedad simétrica: Si $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, entonces $\{a'_n\} \sim \{a_n\}$, pues

si $\{a_n - a'_n\} \in I$ entonces $\{a'_n - a_n\} \in I$

Propiedad transitiva: Si $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ y $\{a'_n\} \sim \{a''_n\}$, entonces $\{a_n\} \sim \{a''_n\}$

pues si $\{a_n - a'_n\} \in I$ y $\{a'_n - a''_n\} \in I$, entonces tenemos que

$$\{a_n - a'_n\} - \{a'_n - a''_n\} = \{a_n - a''_n\} \in I$$

Esta relación de equivalencia I origina una partición de S en clases de equivalencia, que serán denotadas con las letras $\alpha, \beta, \gamma, ...$

El conjunto de todas estas clases de equivalencia será

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{I}} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots\}$$

cuyos representantes serán las sucesiones de Cauchy.

Proposición 5.1.14. Si $\{a_n\}$ es un elemento o representante de la clase de equivalencia α, un elemento cualquiera de α es de la forma $\{a_n\} + \{c_n\} = \{a_n + c_n\}$, con $\{c_n\}$ sucesión nula. El recíproco también se cumple.

Demostración:

Si $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, entonces $\{a'_n - a_n\} \in I$, tomando $\{a'_n - a_n + c_n\}$, con $\{c_n\} \in I$

Esto equivale a decir que $\{a'_n\} = \{a_n\} + \{c_n\}$

La prueba del recíproco es similar. ■

- **Operaciones en $\boldsymbol{R}$**

En R, el conjunto de las clases de equivalencia, se definen las operaciones de suma y producto.

Definición 5.1.15. Si α y β son dos clases de equivalencia de R y $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sus respectivos representantes, entonces

$\alpha + \beta$ es la clase de R, que tiene por representante a $\{a_n + b_n\}$.

$\alpha \cdot \beta$ es la clase de R, que tiene por representante a $\{a_n \cdot b_n\}$.

Proposición 5.1.16. Si $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ y $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$

i. $\{a_n + b_n\} \sim \{a'_n + b'_n\}$

ii. $\{a_n \cdot b_n\} \sim \{a'_n \cdot b'_n\}$

Demostración: Usando la proposición 5.1.14. y definición 5.1.12.

Nota 5.1.17. Observamos que las propiedades de suma y producto de las sucesiones de Cauchy se conservan en el conjunto de las clases de equivalencia. Así, de forma análoga al análisis de S, podemos concluir que R es un anillo conmutativo unitario.

Teorema 5.1.18. El anillo $R = \frac{S}{I}$ de las clases de equivalencia respecto de I, es un cuerpo. Es decir, debemos probar que todo elemento no nulo de R posee inverso.

Demostración:

Sea α un elemento no nulo de R

Tomemos $\{a_n\}$ un representante de α, como $\alpha \neq 0$ entonces $\{a_n\}$ es una sucesión no nula. Por lo tanto, por definición, existe un $\eta \in \mathbb{Q}^+$ y un $\vartheta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n\| \geq \eta \text{ para todo } n \geq \vartheta \,; n \in \mathbb{N}$$

Si en la sucesión obtenida, sustituimos los $\vartheta - 1$ primeros términos por η, y como $\eta \neq 0$, la nueva sucesión no tendrá ningún término nulo.

A esta nueva sucesión la llamaremos $\{\hat{a}_n\}$, con $\{\hat{a}_n\} \neq 0$, y como vemos es equivalente a $\{a_n\}$ pues $\{a_n - \hat{a}_n\} = \{0\}; \text{para todo } n \geq \vartheta \,; n \in \mathbb{N}$. Es decir, la diferencia entre ambas es una sucesión de términos nulos a partir del $\mathscr{v}$-ésimo término y por tanto nula.

Afirmación: $\left\{\frac{1}{\hat{a}_n}\right\}$ es de Cauchy.

Por lo tanto $\{\hat{a}_n\}$ es una sucesión de Cauchy perteneciente a la clase α tal que

$$\|\hat{a}_n\| \geq \eta \text{ para todo } n \geq \mathscr{v} \text{ ; } n \in \mathbb{N}$$

Como $\{\hat{a}_n\}$ es de Cauchy, para cada $\varepsilon \in \mathbb{N}$ existe $\mathscr{v} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|a_p - a_q\right\| < \eta^2 \varepsilon \text{ ; para todo } p \geq \mathscr{v}, q \geq \mathscr{v}$$

Entonces

$$\left\|\frac{1}{\hat{a}_p} - \frac{1}{\hat{a}_q}\right\| = \left\|\hat{a}_p - \hat{a}_q\right\| \cdot \frac{1}{\left\|\hat{a}_p \cdot \hat{a}_q\right\|} < \frac{1}{\eta^2} \cdot \eta^2 \varepsilon = \varepsilon$$

para todo $p \geq \mathscr{v}$ y $q \geq \mathscr{v}$

Sea α^{-1} la clase de equivalencia a la que pertenece $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$. Designaremos por 1 al elemento unidad del anillo R, pues

$$\{a_n\} \cdot \left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \{1\}$$

Con lo que queda demostrado que R es un cuerpo.

Proposición 5.1.19. En el anillo S de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, I es ideal maximal.

Prueba:

Supongamos que existe $I' \supset I$ en S. Entonces, alguna sucesión de Cauchy $\{a_n\} \in I'$ sería no nula. Por lo cual, $\|a_n\| > \eta > 0$

Análogamente a la demostración anterior $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \in S$. Luego, $\{a_n\} \cdot \left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \{1\} \in I'$

Entonces, toda $\{b_n\} \in S$, pertenece a I' y $\{b_n\} \cdot \{1\} = \{b_n\}$

Por lo tanto, $I' = S$

Entonces I es maximal en S.

Demostrar que R es un cuerpo equivale a demostrar que I es maximal, pues para construir un anillo R de las clases de equivalencia y demostrar después que es un cuerpo, bastará la siguiente propiedad: el anillo de las clases de restos de un anillo S respecto de un ideal maximal I es un cuerpo.

Ahora, denotaremos por R' $(R' \subset R)$ al conjunto formado por las clases de equivalencia que tienen por representantes sucesiones constantes: $\{a\}, \{b\}$ ...

Si dos clases de equivalencia de R' tienen por representantes $\{a\}$ y $\{b\}$, la suma y producto de clases tendrán por representantes $\{a + b\}$ y $\{a \cdot b\}$, donde sus clases de equivalencia pertenecen a R'.

Entonces, a cada elemento $a \in \mathbb{Q}$ le corresponde la sucesión constante $\{a\} \in S'$, y cada una de estas sucesiones es representante de una clase de equivalencia de R'.

Así se define una aplicación de $\mathbb{Q}$ en R' biyectiva, pues si $a \neq b$, las clases de equivalencia en R'que tienen por representantes $\{a\}$ y $\{b\}$ también son distintas, pues $\{a\}$ y $\{b\}$ no son equivalentes.

Por lo tanto, podemos decir que

Proposición 5.1.20. Existe un isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y R', que es un subcuerpo de R.

Como el comportamiento formal del cuerpo $\mathbb{Q}$ y del cuerpo R'son idénticos, se identifican, y entonces es lícito afirmar que $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de R. Tomando en cuenta lo anterior, se designará con la misma letra que en $\mathbb{Q}$, el elemento correspondiente en R; es decir, si $a \in \mathbb{Q}$ es elemento del cuerpo $\mathbb{Q}$, pero en R representa la clase de equivalencia que tiene por representante la sucesión constante $\{a\}$.

- **Ordenación del cuerpo cociente**

Definición 5.1.21. Un elemento $\alpha \in R$ es positivo, si cualquiera de sus representantes $\{a_n\}$ es una sucesión positiva.

Para justificar esta definición bastaría probar que toda sucesión $\{a'_n\}$ equivalente a la sucesión positiva $\{a_n\}$ es también positiva. ***Definición 5.1.22.*** El conjunto de todos los elementos positivos de R se denomina parte positiva y se representa como R^+.

Definición 5.1.23. Un elemento $\alpha \in R$ es negativo si $-\alpha$ es positivo.

Proposición 5.1.24. Un elemento $\alpha \in R$ es negativo si y solo si, uno cualquiera de sus representantes $\{a_n\}$ es una sucesión negativa.

Prueba: Si α es negativo y $\{a_n\}$ uno de sus representantes, entonces $\{-a_n\}$ será representante de $-\alpha$, que es positivo.

Por lo tanto, $\{-a_n\}$ es una sucesión positiva. Esto quiere decir que existe $\eta \in \mathbb{Q}^+$ y un $\upsilon \in \mathbb{N}$ tales que $-a_n > \eta$; para todo $n \geq \upsilon$

Esto es $a_n < -\eta$; para todo $n \geq \upsilon$

Lo que por definición es que $\{a_n\}$ es una sucesión negativa representante de α.

La prueba del recíproco es similar. ■

Definición 5.1.25. El conjunto de todos los elementos negativos de R se denomina parte negativa, y se representa como R^-.

Proposición 5.1.26. En el cuerpo R, R^+, R^- y $\{0\}$ constituyen una partición de R. Es decir; $R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$

Prueba: Bastará tomar un $\alpha \in R$, entonces pertenece solo a una de las partes anteriores; pues su representante $\{a_n\}$ será una sucesión positiva, negativa o nula.

Proposición 5.1.27. (Estabilidad de la ordenación). Para todo $\alpha, \beta \in R^+$ se tiene $\alpha + \beta \in R^+$ y $\alpha \cdot \beta \in R^+$.

Prueba:

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son representantes de α y β, entonces son sucesiones positivas, y además también lo serán $\{a_n + b_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$. ■

Con las proposiciones 5.1.26 y 5.1.27 se pueden enunciar y verificar los axiomas para la ordenación de un cuerpo.

Teorema 5.1.28. El cuerpo R de las clases de equivalencia de restos respecto del ideal I, es un cuerpo ordenado.

Definida la parte positiva de R, α es estrictamente menor que β, y se escribe $\alpha < \beta$, si $\beta - \alpha \in R^+$.

Si $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$, se escribe $\alpha \leq \beta$.

Se consideran como equivalente: $\alpha < \beta$ y $\beta > \alpha$, así como $\alpha \leq \beta$ y $\beta \geq \alpha$

Proposición 5.1.29. Sean $\alpha, \beta \in R$, y $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ representantes de dichos elementos. Si $a_n \leq b_n$, para $n \geq \mathscr{v}$, entonces $\alpha \leq \beta$.

Prueba:

El elemento $\beta - \alpha$ tiene como representante a $\{b_n - a_n\}$, cuyos términos por hipótesis son todos no negativos para $n \geq \mathscr{v}$. Por lo cual la sucesión $\{b_n - a_n\}$ será no negativa, y por lo tanto $\beta - \alpha \geq 0$; es decir, $\beta \geq \alpha$. ■

Teorema 5.1.30. Si $\alpha, \beta \in R$ con $\alpha \neq \beta$, existe un $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < c < \beta$ o $\beta < c < \alpha$.

Demostración:

Supongamos que $\alpha < \beta$, esto equivale a $\beta - \alpha > 0$; es decir $\beta - \alpha \in R^+$. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ representantes de α y β respectivamente, entonces

$\{b_n - a_n\}$ será representante de $\beta - \alpha$, y por lo tanto una sucesión positiva. Entonces existen $\eta \in \mathbb{Q}^+$ y un $\mathcal{v}_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$b_n - a_n > \eta; \ \forall\, n \geq \mathcal{v}_1$$

Además, como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy, existirán $\mathcal{v}_2,\ \mathcal{v}_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\|a_p - a_q\right\| < \frac{\eta}{4} \quad \text{, para } p, q \geq \mathcal{v}_2$$

$$\left\|b_p - b_q\right\| < \frac{\eta}{4} \quad \text{, para } p, q \geq \mathcal{v}_3$$

Tomando $\mathcal{v} = máx\{\mathcal{v}_1, \mathcal{v}_2, \mathcal{v}_3\}$, sea la sucesión constante

$$c = \frac{a_{\mathcal{v}} + b_{\mathcal{v}}}{2}$$

Probaremos que $c < \beta$, es decir que $\beta - c \in R^+$, para lo cual basta comprobar que $\{b_n\} - c = \{b_n - c\}$ es positiva. En efecto, para todo $n \geq \mathcal{v}$

$$b_n - \frac{a_{\mathcal{v}} + b_{\mathcal{v}}}{2} = b_n - b_{\mathcal{v}} + b_{\mathcal{v}} - \frac{a_{\mathcal{v}} + b_{\mathcal{v}}}{2} = b_n - b_{\mathcal{v}} + \frac{b_{\mathcal{v}} - a_{\mathcal{v}}}{2}$$

$$b_n - \frac{a_{\mathcal{v}} + b_{\mathcal{v}}}{2} \geq \frac{b_{\mathcal{v}} - a_{\mathcal{v}}}{2} - \|b_n - b_{\mathcal{v}}\| > \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{4}$$

De manera análoga se probará que $\alpha < c$. ■

- **Teorema de completitud**

$\mathbb{Q}$ no es completo; por ello hemos extendido $\mathbb{Q}$ a R con la finalidad de que este nuevo cuerpo R si sea completo.

Proposición 5.1.31. Las sucesiones $\{a_n\}$ que son convergentes o de Cauchy en el cuerpo $\mathbb{Q}$, también lo son en el cuerpo completado R.

Demostración:

Como ya hemos visto, los elementos a_n y a tienen distinto significado según se consideren de $\mathbb{Q}$ o R, pero dada la biyección encontrada, tiene el mismo comportamiento formal. Sin embargo, las convergencias en $\mathbb{Q}$ y en R difieren en que el elemento positivo ε, una vez pertenece a $\mathbb{Q}^+$ y la otra a R^+.

Así, teniendo en cuenta las propiedades de orden en R, para cada $\varepsilon \in R^+$ existe siempre un $\varepsilon' \in \mathbb{Q}^+$, tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, con lo cual basta que $\|a_n - a\| < \varepsilon'$, para $n \geq \mathcal{v}$; de donde por transitividad se cumple que $\|a_n - a\| < \varepsilon$, para $n \geq \mathcal{v}$.

De manera análoga se prueba que las sucesiones de Cauchy en el cuerpo $\mathbb{Q}$, también lo son en R. ∎

Proposición 5.1.32. Una sucesión $\{a_n\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$ es convergente en R, y su límite es el elemento $\alpha \in R$, cuyo representante es la sucesión $\{a_n\}$.

Demostración:

Nuestro objetivo es probar que para cada $\varepsilon \in R^+$, existe un $\mathcal{v} \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|a_n - \alpha\| < \varepsilon, \forall\, n \geq \mathcal{v}$$

En efecto, tomando un $\varepsilon' \in \mathbb{Q}^+$ tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Como la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{Q}$, existe un $\mathcal{v}_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon'; \quad \forall\, n, m \geq \mathcal{v}_1$$

Existe un $\vartheta=\vartheta_1$ tal que: sea n fijo, con $n \geq \vartheta_1$, el elemento $a_n - \alpha$ de R tiene por representante a la sucesión

$$a_n - a_1, a_n - a_2, \dots, a_n - a_m, \dots \quad \text{de donde}$$

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon' \Rightarrow -\varepsilon' < \|a_n - a_m\| < \varepsilon' \;\; ; \forall\, m \geq \vartheta_1$$

Como el elemento $a_n - \alpha$ de R tiene por representante a la sucesión $\{a_n - a_m\}$, cuyos términos están entre $-\varepsilon'$ y ε', por la proposición 5.1.29. se tiene que

$$-\varepsilon' < \|a_n - a_m\| < \varepsilon' \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \varepsilon' < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Teorema 5.1.33. (De completitud) El cuerpo R es completo, o sea, toda sucesión de Cauchy en R tiene límite en R.

Demostración:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en R.

Primer caso: Tomaremos dos elementos consecutivos de dicha sucesión que son distintos: $a_p \neq a_{p+1}$ con $p \in \mathbb{N}$. Entonces, por el teorema 5.1.30. existirá un elemento entre ellos que denotaremos $a^{(p)} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a_p < a^{(p)} < a_{p+1} \quad \text{ó} \quad a_p < a^{(p)} < a_{p+1} \qquad con\; p \in \mathbb{N}$$

Afirmación 1: La sucesión $\{a^{(n)}\}$ de elemento de $\mathbb{Q}$ es de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

En efecto, como $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy en R, dado un $\varepsilon \in R^+$, existe un $\vartheta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_p - a_q\| < \varepsilon \;\; ; \forall\, p, q \geq \vartheta$$

Y dada la definición de $\{a^{(n)}\}$ se tiene que

$$\left\|a^{(p)} - a^{(q)}\right\| < \left\|a_{p'} - a_{q'}\right\| < \varepsilon \quad ; \forall\, p, q \geq \mathcal{v}$$

con $p' = p$ ó $p + 1$ y $q' = q$ ó $q + 1$

Con lo cual se tiene que $\left\|a^{(p)} - a^{(q)}\right\| < \varepsilon \quad ; \forall\, p, q \geq \mathcal{v}$.

Afirmación 2: La sucesión $\{a^{(n)}\}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$ es representante de un elemento $\alpha \in R$ que es el límite de la sucesión $\{a_n\}$.

En efecto,

$$\|a_n - \alpha\| < \left\|a_n - a^{(n)}\right\| + \left\|a^{(n)} - \alpha\right\| \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por la proposición 5.1.32. se tiene que $\lim a^{(n)} = \alpha$. Es decir, para cada $\varepsilon \in R^+$, existe un $\mathcal{v}_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|a^{(n)} - \alpha\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall\, n \geq \mathcal{v}_1$$

Y por ser $\{a_n\}$ de Cauchy, existe un $\mathcal{v}_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|a_n - a^{(n)}\right\| < \|a_n - a_{n+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall\, n \geq \mathcal{v}_2$$

Por lo tanto, tomando $\mathcal{v} = \max\{\mathcal{v}_1, \mathcal{v}_2\}$ se tiene que

$$\|a_n - \alpha\| < \varepsilon \quad , \forall\, n \geq \mathcal{v}$$

Segundo caso: Tomando el caso contrario, es decir, a partir de un elemento a_p todos los elementos son iguales: $a_n = a_p \quad , n \geq p$. Se tendría que el $\lim a_n = a_p$. ■

Nota 5.1.34.

$\|\cdot\| = |\cdot|$ es el valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$. Entonces $R = \mathbb{R}$ es el cuerpo de los números reales.

$\|\cdot\| = |\cdot|_p$ es la norma p-ádica en $\mathbb{Q}$. Entonces $R = \mathbb{Q}_p$ es el cuerpo de los números p-ádicos.

B) El cuerpo de los números p-ádicos

Como se ha visto en la sección anterior, el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es la compleción de $\mathbb{Q}$ mediante el valor absoluto usual $|\cdot|$. En esta sección veremos el cuerpo de los números *p*-ádicos como compleción de $\mathbb{Q}$, basándonos en las definiciones, proposiciones y teoremas de Gouvêa (1989) y Katok (2007).

- **Orden p-ádico y norma p-ádica**

Definición 5.2.1. Sea cualquier número primo $p \in \mathbb{Z}$. Se define el orden *p*-ádico en $\mathbb{Z}$ (o también llamado valuación p-ádica) como la función

$$v_p: \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, si $m \in \mathbb{Z}^*, v_p(m)$ es la máxima potencia de p que divide a m. Es decir, se cumple la condición

$$m = p^{v_p(m)} \cdot m' , \qquad \text{donde } p \text{ } no \text{ divide a } m'$$

Además, como consecuencia de esta definición se tiene

$$v_p(m) \geq 0,\ p^a \big| m \ \Rightarrow a \leq v_p(m)\ ;\ p^{v_p(m)} \big| m$$

Ejemplos:

1) $v_2(80) = 4$ y $v_5(80) = 1$. Es decir, el orden 2-ádico de 80 es 4 y el orden 5-ádico de 80 es 1, pues $80 = 2^4 \cdot 5$

2) $v_2(49) = 0$ y $v_7(49) = 2$. Es decir, el orden 2-ádico de 49 es 0 y el orden 7-ádico de 49 es 2, pues $49 = 7^2$

Ahora extenderemos v_p al cuerpo de los números racionales de la siguiente manera:

Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*, \text{con } a, b \in \mathbb{Z}^*$, entonces

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$$

Nota 5.2.2. Por convención se toma $v_p(0) = \infty$. En general, entonces $v_p: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$

Ejemplos:

1) $v_3\left(\frac{123}{48}\right) = v_3(123) - v_3(48) = 1 - 1 = 0$

Pues: $v_3(123) = 1;\quad 123 = 3^1 \cdot 41 \quad y \quad v_3(48) = 1;\quad 48 = 3^1 \cdot 16$

2) $v_{103}\left(-\frac{1}{309}\right) = v_{103}(-1) - v_{103}(309) = 0 - 1 = -1$

Pues, $v_{103}(-1) = 0;\; -1 = 103^0 \cdot (-1) \quad y \quad v_{103}(309) = 1;\; 309 = 103^1 \cdot 3$

Ahora veamos algunas propiedades básicas del orden p-ádico.

Lema 5.2.3. Sean $x, y \in \mathbb{Q}^*$

i. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$

ii. $v_p(x+y) \geq mín\{v_p(x); v_p(y)\}$

Demostración:

Probaremos (i) y (ii) para los enteros

I. Si $x = 0$ ó $y = 0$, se cumple (i) de manera trivial.

II. Si $x, y \in \mathbb{Z}^*$, por definición se tiene

$$v_p(x) = m \ \ si \ \ x = p^m \cdot x' \ \ \text{donde} \ \ p \nmid x'$$

$$v_p(y) = n \ \ si \ \ y = p^n \cdot y' \ \ \text{donde} \ \ p \nmid y'$$

Entonces

$$x \cdot y = p^m \cdot p^n \cdot y' \cdot x' = p^{m+n} \cdot x' \cdot y' \quad \text{donde} \quad p \nmid x' \cdot y'$$

Con lo cual $\qquad v_p(x \cdot y) = m + n$

Por lo tanto,

$$v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y)$$

III. Si $x, y \in \mathbb{Z}^*$, por definición se tiene

$$v_p(x) = m \ \ si \ \ x = p^m \cdot x' \ \ \text{donde} \ \ p \nmid x'$$

$$v_p(y) = n \ \ si \ \ y = p^n \cdot y' \ \ \text{donde} \ \ p \nmid y'$$

Tomando $t_p = mín\{m; n\}$, se tiene que

$$p^{t_p} | p^m \quad ; \quad p^{t_p} | p^n \Longrightarrow p^{t_p} | x \quad ; \quad p^{t_p} | y$$

Entonces $\qquad p^{t_p} | x + y$

Luego, por definición $\qquad t_p \leq v_p(x+y)$

Por lo tanto,

$$v_p(x+y) \geq min\{v_p(x); v_p(y)\}$$

Extendiendo la prueba de (i) y (ii) a los números racionales.

I. Si $x = 0$ ó $y = 0$, la prueba es trivial.

II. Si $x, y \in \mathbb{Q}^*$, por definición se tiene que

$$\begin{array}{ll} x = \frac{a}{b}; & a, b \in \mathbb{Z}^* \\ y = \frac{c}{d}; & c, d \in \mathbb{Z}^* \end{array} \quad \Rightarrow x \cdot y = \frac{ac}{bd}; \qquad ac \in \mathbb{Z}^*; bd \in \mathbb{Z}^*$$

Entonces

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$$
$$v_p(y) = v_p(c) - v_p(d)$$

Sumando y usando lo probado en (II)

$$v_p(x) + v_p(y) = v_p(a) + v_p(c) - [v_p(b) + v_p(d)]$$

$$v_p(x) + v_p(y) = v_p(ac) - v_p(cd)$$

$$v_p(x) + v_p(y) = v_p(x \cdot y)$$

III. Sean $x, y \in \mathbb{Q}^*$, por definición se tiene que

$$\begin{array}{ll} x = \frac{a}{b}; & a, b \in \mathbb{Z}^* \\ y = \frac{c}{d}; & c, d \in \mathbb{Z}^* \end{array} \quad \Rightarrow x + y = \frac{ad+bc}{bd}; \qquad ac \in \mathbb{Z}^*; bd \in \mathbb{Z}^*; bc \in \mathbb{Z}^*$$

Y como $x + y \in \mathbb{Q}^*$, aplicando definición se tiene

$$v_p(x+y) = v_p(ad+bc) - v_p(bd)$$

y usando lo probado en (II)

$$v_p(x+y) \geq min\{v_p(ad); v_p(bc)\} - v_p(bd)$$

$$= min\{v_p(a) + v_p(d); v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d)$$

$$= min\{v_p(a) - v_p(b); v_p(c) - v_p(d)\}$$

$$= min\{v_p(x); v_p(y)\}$$

Por lo tanto,

$$v_p(x+y) \geq min\{v_p(x); v_p(y)\}$$

Observación 5.3.4. Es importante ver que esta definición del orden p-ádico sobre $\mathbb{Q}$, no depende de la escritura de x, pues

$$\text{Si } x = \frac{ac}{bc} \in \mathbb{Q} \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Se tiene que

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{ac}{bc}\right) = v_p(ac) - v_p(bc)$$

$$= v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(c)$$

$$= v_p(a) - v_p(b)$$

Ejemplo

$$v_2\left(\frac{25}{4}\right) = v_2(25) - v_2(4) = 0 - 2 = -2$$

$$v_2\left(\frac{50}{8}\right) = v_2(10) - v_2(8) = 1 - 3 = -2$$

Como observamos, el orden 2-ádico de estos dos números racionales es igual.

El lema 5.2.3. nos muestra que v_p se comporta de manera similar a los ítems (ii) y (iv) de la definición 2.2.19 y 2.2.20, la diferencia está en que en (i) el producto se convirtió a suma y en (ii) la desigualdad está invertida.

Es así como, observando lo ocurrido, daremos una definición de norma.

Definición 5.2.4. Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$ y p un número primo fijo, definimos la norma p-ádica como una función $\|\cdot\|_p: \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|x\|_p = p^{-v_p(x)}\,; \text{si } x \neq 0$$

Nota 5.2.5. Estableceremos $\|0\|_p = 0$, pues coincide con la convención utilizada $v_p(0) = +\infty$ (podemos interpretar $\|0\|_p$ como $p^{-\infty}$)

Proposición 5.2.6. $\|\cdot\|_p$ es una norma no arquimediana en $\mathbb{Q}$.

Prueba: Usaremos el lema anterior y probaremos los 4 ítems requeridos.

i. $\|x\|_p = 0$ sii $x = 0$. Esto se cumple de manera trivial por la definición.

ii. $\|xy\|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-v_p(x)-v_p(y)} = p^{-v_p(x)} \cdot p^{-v_p(y)} = \|x\|_p\|y\|_p$

iii. $\|x+y\|_p = p^{-v_p(x+y)}$

Pero, por el lema 5.2.3. se tiene que $v_p(x+y) \geq min\{v_p(x); v_p(y)\}$, entonces, $-v_p(x+y) \leq máx\{-v_p(x); -v_p(y)\}$

Luego,

$$\|x+y\|_p \leq máx\{\|x\|_p; \|y\|_p\} \qquad \text{... (iv)}$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Observamos que en el proceso de probar (iii) ya hemos probado el ìtem (iv) referido a la desigualdad triangular fuerte, por lo tanto, es una norma no arquimediana en $\mathbb{Q}$.

Veamos algunos ejemplos de cómo calcular normas p-ádicas.

$$\|35\|_7 = 7^{-v_7(35)} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$\left\|\frac{56}{12}\right\|_7 = 7^{-v_7\left(\frac{56}{12}\right)} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$\left\|\frac{18}{125}\right\|_3 = 3^{-v_3\left(\frac{18}{125}\right)} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\left\|\frac{3}{686}\right\|_7 = 7^{-v_7\left(\frac{3}{686}\right)} = 7^{3} = 343$$

- **Propiedades topológicas de los números p-ádicos**

Después de estudiar la norma *p*-ádica $\|\cdot\|_p$, podemos definir la topología de $\mathbb{Q}_p$.

Definición 5.2.7. Una bola abierta en $\mathbb{Q}_p$ está definida por el conjunto

$$B(a;r) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \text{ tal que } \|x-a\|_p < r\right\} \quad \text{donde } a \in \mathbb{Q}_p\,, r > 0$$

Recordemos que la norma *p*-ádica toma valores pertenecientes al conjunto

$$\{p^n \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

Definición 5.2.8. Consideramos la esfera en $\mathbb{Q}_p$

$$S(a;r) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \text{ tal que } \|x-a\|_p = r\right\} \quad \text{donde } a \in \mathbb{Q}_p\,, r > 0$$

Proposición 5.2.9. La esfera $S(a;r)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{Q}_p$.

Prueba:

Sea $x \in S(a;r)$; tomaremos un $\varepsilon < r$. Debemos probar que $B(x;\varepsilon) \subset S(a;r)$

En efecto,

Sea $y \in B(x;\varepsilon) \Rightarrow \|x-y\|_p < \varepsilon < r = \|x-a\|_p$

$\Rightarrow \|y-x+a-a\|_p = \|y-a-(x-a)\|_p < \|x-a\|_p$

Y por la proposición 2.2.24. se tiene que $\|y-a\|_p = \|x-a\|_p = r$, entonces $y \in S(a,r)$. ■

Nota 5.2.10. Esta proposición nos muestra una diferencia importante con $\mathbb{R}$, pues dado un punto del borde de la bola (es decir $\|x-a\| = r$), no existe ninguna bola abierta que contenga a dicho punto y que esté contenida en la bola cerrada.

Proposición 5.2.11. Las bolas abiertas en $\mathbb{Q}_p$ son a la vez conjuntos abiertos y cerrados.

Prueba:

Cualquier bola abierta $B(a,r)$ es abierta ya que cualquier punto $x \in B(a,r)$ está contenido en $B(a,r)$

Por lo cual, para probar que $B(a,r)$ es un conjunto cerrado, probaremos que su complemento es un conjunto abierto. Denotaremos el complemento de $B(a,r)$ como

$$C(B(a,r)) = \{x \in \mathbb{Q}_p \text{ tal que } \|x-a\|_p \geq r\} \quad \text{donde } a \in \mathbb{Q}_p\,, r > 0$$

Notamos que $\complement\big(B(a,r)\big) = S(a.r) \cup D$, de donde

$$D = \{x \in \mathbb{Q}_p \text{ tal que } \|x-a\|,p > r\}$$

Entonces, bastará probar que D es un conjunto abierto, pues la unión de dos conjuntos abiertos es un abierto.

En efecto,

Sea $y \in D \Longrightarrow \|y-a\|_p = r_1 > r \Longrightarrow r_1 - r > 0.$

Probaremos que $\exists\ B(y, r_1 - r)$ abierta incluida en D.

Supongamos que esto no es cierto, es decir

$$x \in B(y, r_1 - r) \text{ tal que } \|x-a\|_p \leq r \ \Longrightarrow \|x-y\|_p < r_1 - r$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow r_1 = \|y-a\|_p = \|a-x+x-y\|_p &\leq \|a-x\|_p + \|x-y\|_p < r + r_1 - r \\ &= r_1\end{aligned}$$

De donde $r_1 < r_1$. Lo cual es un absurdo. Por lo tanto D es un conjunto abierto y se prueba la proposición.

Definición 5.2.12. Denotaremos a la bola cerrada

$$\bar{B}(a;r) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \text{ tal que } \|x-a\|_p \leq r\right\} \quad \text{donde } a \in \mathbb{Q}_p\,, r > 0$$

Por definición de norma *p*-ádica vemos que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p^k \leq r < p^{k+1}$, con lo cual se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{B}(a;r) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \ / \ \|x-a\|_p \leq r\right\} &= \left\{x \in \mathbb{Q}_p \ / \ \|x-a\|_p < p^{k+1}\right\} \\ &= B(a, p^{k+1})\end{aligned}$$

Nota 5.2.13. Entonces una bola cerrada es al mismo tiempo abierta, y por lo tanto, todas las propiedades probadas para bolas abiertas también se cumplen para bolas cerradas en $\mathbb{Q}_p$.

Proposición 5.2.14. Si $b \in B(a,r)$ entonces $B(b,r) = B(a,r)$. Es decir, cualquier punto de una bola es su centro.

Prueba: Probaremos la igualdad por doble inclusión.

i. $B(b,r) \subseteq B(a,r)$

Sea $x \in B(b,r) \Longrightarrow \|a - b\|_p < r$

Y como por hipótesis se tiene que $b \in B(a,r) \Longrightarrow \|b - x\|_p < r$

Luego, $\|a - x\|_p = \|(a - b) + (b - x)\|_p \leq máx\{\|a - b\|_p, \|b - x\|_p\} < r$

Es decir, $\|a - x\|_p < r$, con lo cual se tiene que $x \in B(a,r)$

ii. $B(a,r) \subseteq B(b,r)$

Sabemos que $a \in B(a,r)$ y como $b \in B(a,r) \Longrightarrow \|a - b\|_p < r$, pero esto se cumple también para $a \in B(b,r)$

Por lo tanto, las bolas son iguales. ■

Proposición 5.2.15. Dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ tienen una intersección no vacía si y solo sí una está contenida en la otra.

Prueba: Consideraremos las bolas $B(a,r)$ y $B(b,s)$ con $a, b \in \mathbb{Q}_p$ y $r, s > 0$.

Debemos probar que $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \emptyset \Longleftrightarrow B(a,r) \subset B(b,s)$ ó $B(b,s) \subset B(a,r)$

Cuando una bola está contenida en otra, la intersección es diferente del vacío. Así, solo probaremos la otra implicancia, es decir

$$B(a,r) \cap B(b,s) \neq \emptyset \Longrightarrow B(a,r) \subset B(b,s) \text{ ó } B(b,s) \subset B(a,r)$$

Primer caso: $r \leq s$

Como $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \emptyset$, sea $y \in B(a,r) \cap B(b,s) \Rightarrow y \in B(a,r) \wedge y \in B(b,s)$

Luego, por la proposición 5.2.15. $B(a,r) = B(y,r) \wedge B(b,s) = B(y,s)$

Pero, como $r \leq s \Longrightarrow B(y,r) \subset B(y,s)$, pues si

$$w \in B(y,r) \Longrightarrow \|x - y\|_p < r \leq s \Longrightarrow w \in B(y,s)$$

Con lo cual, $B(a,r) \subseteq B(b,s)$

Segundo caso: $r > s$. La prueba es análoga. ■

Proposición 5.2.16. La esfera $S(a,r)$ es a la vez un conjunto abierto y cerrado.

Prueba: Bastará probar que es un conjunto cerrado.

Observamos que,

$$\complement\big(B(a,r)\big) \cap \bar{B}(a,r) = S(a,r)$$

Pero, como $B(a,r)$ es abierto, entonces $\complement\big(B(a,r)\big)$ por ser su complemento es cerrado y, $\bar{B}(a,r)$ es cerrado. Entonces, la intersección será un cerrado.

Por lo tanto, la esfera $S(a,r)$ es un conjunto cerrado.

Proposición 5.2.17. El conjunto de todas las bolas en $\mathbb{Q}_p$ es numerable.

Prueba: Consideraremos los radios que son potencias de p.

Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $w \in \mathbb{Z}$, escribiremos el centro de la bola $B(a, p^w)$ en su forma canónica.

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n$$

Y tomando un número racional

$$a_o = \sum_{n=-m}^{w} a_n p^n$$

$$\Longrightarrow \|a - a_o\|_p = \left\| \sum_{w+1}^{\infty} a_n p^n \right\|_p < p^{-w}$$

$\Longrightarrow a_o \in B(a, p^{-w})$ y esto quiere decir

Y por la proposición $B(a_o, p^{-w}) = B(a, p^{-w})$

Con lo cual existe una aplicación sobreyectiva

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \{B(a, r) \ / \ a \in \mathbb{Q}_p; r > 0\}$$

$$(a_o; w) \longrightarrow B(a_o; p^w)$$

Y como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ es numerable, entonces el conjunto de todas las bolas abiertas es numerable y por lo tanto el conjunto de todas las bolas es numerable.

C) Sucesiones y series en $\mathbb{Q}_p$

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas de convergencia de sucesiones y series en $\mathbb{Q}_p$, basándonos en Katok (2007)

- **Sucesiones**

Dado que $\mathbb{Q}_p$ es un espacio métrico completo cada sucesión de Cauchy converge. Es así como el siguiente teorema muestra una característica importante de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 5.3.1. Una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{Q}_p$ es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto convergente, si y solo sí satisface

$$\lim_{n\to\infty} \|a_{n+1} - a_n\|_p = 0$$

Demostración:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces se tiene que

$$\lim_{m,n\to\infty} \|a_m - a_n\|_p$$

Y, tomando en particular $m = n + 1$, se obtiene lo que se quiere probar.

Ahora, probemos el recíproco. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|a_{n+1} - a_n\|_p = 0$$

Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para cualquier $n > N$ se tiene $\|a_{n+1} - a_n\|_p < \varepsilon$.

Luego, tomando cualquier $m > n > N$, trabajaremos en $\|a_m - a_n\|_p$ usando la desigualdad triangular fuerte.

$$\|a_m - a_n\|_p = \|a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} + \cdots + a_n\|_p$$

$$\leq máx\{\|a_m - a_{m-1}\|_p, \|a_{m-1} - a_{m-2}\|_p, \dots, \|a_{n+1} - a_n\|_p\} < \varepsilon$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$ es de Cauchy. ■

- **Series**

Consideremos ahora una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Definición 5.3.2. Una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ en $\mathbb{Q}_p$ converge si la sucesión de sus sumas parciales, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge en $\mathbb{Q}_p$.

Definición 5.3.3. Una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ en $\mathbb{Q}_p$ converge absolutamente si $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|_p$ converge en $\mathbb{R}$.

Proposición 5.3.4. Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|_p$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge en $\mathbb{Q}_p$.

Prueba:

Sea $t_n = \sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_p$ la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|_p$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|_p$ converge, entonces $\{t_n\}$ es converge y por lo tanto es de Cauchy.

Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$ $(m > n > N)$.

Consideremos $m = n + b$

$$\sum_{i=n+1}^{m} \|a_i\|_p < \varepsilon$$

Por la desigualdad triangular

$$\|S_m - S_n\|_p = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right\|_p = \|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+b}\|_p$$

$$\leq \|a_{n+1}\|_p + \|a_{n+2}\|_p \ldots + \|a_{n+b}\|_p = \sum_{i=n+1}^{m} \|a_i\|_p = t_m - t_n < \varepsilon$$

Y como $\{t_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{S_n\}$ es de Cauchy, y por lo tanto es convergente en $\mathbb{Q}_p$. Es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge en $\mathbb{Q}_p$. ■

Esta proposición nos muestra que la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia en $\mathbb{Q}_p$.

Veamos ahora una consecuencia del teorema 5.3.1.

Proposición 5.3.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \in \mathbb{Q}_p$ converge en $\mathbb{Q}_p$ sí y solo sí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y se cumple

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\|_p \leq \max_n \|a_n\|_p$$

Prueba:

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{Q}_p$ sí y solo sí S_n converge en $\mathbb{Q}_p$.

Pero, $a_n = S_n - S_{n-1}$ y usando el teorema, la serie converge si y solo sí $a_n \longrightarrow 0$, es decir, sii $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto S_n es de Cauchy, y entonces convergente, así hemos probado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Nota 5.3.6. La proposición anterior no se cumple en $\mathbb{R}$, pues si tomamos la serie $\sum \frac{1}{n}$, vemos que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$, pero dicha serie diverge.

Definición 5.3.7. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge incondicionalmente si para cualquier reordenamiento de los términos $a_n \longrightarrow a'_n$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ también converge.

Nota 5.3.8. Observamos que la convergencia incondicional implica la convergencia, y viceversa. Esta última hace la diferencia con $\mathbb{R}$.

Teorema 5.3.9. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, converge incondicionalmente, y la suma no depende de la reordenación.

Demostración:

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ un número arbitrario y $N \in \mathbb{Z}$ tal que para cualquier $n > N$ se tiene

$$\|a_n\|_p < \varepsilon \qquad ; \qquad \|a'_n\|_p < \varepsilon$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n \right\|_p < \varepsilon \qquad (**)$$

Tomemos

$$S = \sum_{n=1}^{N} a_n \qquad \text{y} \qquad S' = \sum_{n=1}^{N} a'_n$$

Y denotamos S_1 y $S_1{}'$ la suma de todos los términos de S y S' respectivamente, tal que

$$\|a_n\|_p > \varepsilon \quad \text{y} \quad \|a'_n\|_p > \varepsilon$$

Como S_1 y $S_1{}'$ tienen los mismos términos, entonces $S_1 = S_1{}'$.

Además, la suma S difiere de S_1 en los términos que cumplen $\|a_n\|_p < \varepsilon$.

Análogamente, la suma S' difiere de $S_1{}'$ en los términos que cumplen $\|a'_n\|_p < \varepsilon$

Por lo tanto,

$$\|S - S_1\|_p < \varepsilon \wedge \|S' - S_1{}'\|_p < \varepsilon \Longrightarrow \|S - S'\|_p < \varepsilon$$

Y uniendo este resultado con (**), se tiene:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a'_n \right\|_p < \varepsilon$$

Ya que $\varepsilon > 0$ y $N \to \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ converge y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

Teorema 5.3.10. Existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\mathbb{Q}_p$, que converge, pero no converge absolutamente.

Demostración:

Consideremos los siguientes términos consecutivos de la serie: 1; p que se repite p veces; p^2 que se repite p^2 veces; etc.

Estos términos tienden a 0, por lo que la serie es convergente.

Veamos ahora la convergencia absoluta,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_p = 1 + p \cdot p^{-1} + p^2 \cdot p^{-2} + \cdots = \infty$$

Como vemos, la serie no converge absolutamente. ■

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

De acuerdo con los resultados de compleción, de sucesiones y de series de los números *p*-ádicos, verificamos, con los teoremas demostrados, que las hipótesis específicas planteadas son verdaderas.

6.2. Contrastación de los resultados con estudios similares

En Rojas (2016) observamos que el autor realizó una demostración de la compleción de $\mathbb{Q}$ no tan detallada, en nuestro trabajo en cambio, se realizó una demostración más didáctica de dicho resultado.

En Dimitriadis (2016) observamos que la autora realizó un estudio detallado de algunas propiedades algebraicas y topológicas de $\mathbb{Q}_p$, pero nuestro trabajo se diferencia en trabajar las propiedades de sucesiones y series.

En Mas (2015) se hace uso de definiciones importantes del cuerpo de los números *p*-ádicos y sus propiedades, con las cuales también coincidimos en nuestro trabajo y hacemos uso de ellas.

En Lalín (1999) se hace uso de definiciones importantes del cuerpo de los números *p*-ádicos y sus propiedades, con las cuales también concordamos en nuestro trabajo y hacemos uso de ellas.

6.3. Responsabilidad ética

La presente investigación no requiere realizar una explicación sobre la responsabilidad ética.

CONCLUSIONES

a) Los números racionales se pueden completar haciendo uso de diferentes normas, para los fines de este trabajo se probó que la compleción haciendo uso de la norma *p*-ádica es un nuevo cuerpo llamado cuerpo de los números *p*-ádicos y que se denota por $\mathbb{Q}_p$.

b) En el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ se cumple que una bola abierta es al mismo tiempo una bola cerrada, y además, una bola abierta (o cerrada) es al mismo tiempo un conjunto abierto y cerrado. Dicho resultado no se cumple en $\mathbb{R}$.

c) Dada una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{Q}_p$ basta que $\lim_{n\to\infty} \|a_{n+1} - a_n\|_p = 0$ para decir que la sucesión es convergente, y viceversa.

d) En las series en $\mathbb{Q}_p$ están definidas la convergencia, convergencia absoluta y convergencia incondicional de manera similar a $\mathbb{R}$, sin embargo, observamos que la convergencia incondicional implica la convergencia, y viceversa. Esta última hace la diferencia con $\mathbb{R}$.

RECOMENDACIONES

Se recomienda ampliar el estudio de este trabajo a las funciones y sus propiedades en el cuerpo $\mathbb{Q}_p$, y ver como este estudio se puede comparar con las funciones que estudiamos en $\mathbb{R}$.

Se recomienda, además, ampliar el estudio de este trabajo a las propiedades de derivación e integración en el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ y compararlo con el análisis en $\mathbb{R}$, pues se ha observado que hay mucha similitud y propiedades aún más fuertes que se cumplen en el cuerpo $\mathbb{Q}_p$.

Se recomienda también estudiar la aplicación de estos números en ramas importantes como la física, pues se han encontrado estudios que revelan que los números p-ádicos tienen aplicaciones en dicha área.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andradas, C. y Corrales, C. (1999) *Cuatrocientos años de matemáticas en torno al último teorema de Fermat*. Madrid, España: Complutense.

Bachman, G. (1964) *Introduction to p-adic analysis*. New York, Estados Unidos: Springer – Verlag.

De Burgos, J. (2006) *Álgebra lineal y geometría cartesiana.* España, Madrid: Mc. Graw Hill.

Dimitriadis, E. (2016) *El cuerpo de los números p-ádicos: Propiedades algebraicas y topológicas*. (tesis de pregrado). Recuperado de: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/19053

García, G. A. (Agosto 2008) Números p-ádicos. *elENA IV*. Conferencia llevada a cabo en el *IV Encuentro Nacional de Álgebra.* Córdoba, Argentina.

Gouvêa, F. Q. (1989) *p-adic Numbers: An Introduction*. Berlín, Alemania: Springer – Verlag.

Gouvêa, F. Q. (1989) *Primeiros Passos P-ádicos*. Río de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Hamilton, A. G. (1982) *Numbers, Set and Axioms*. New York, Estados Unidos: Cambridge University Press.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación* (5° Ed.). México: McGraw Hill.

Katok, S. (2007) *P-adic Analysis compared with real*. Rhode Island, Estados Unidos: American Mathematical Society.

Koblitz, A. (1984) *P-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions*. New York, Estados Unidos: Springer.

Lalín, M. N. (1999) *Introducción a las curvas elípticas* (tesis de pregrado). Recuperado de: http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/tesis.pdf

Linés, E. (1991) *Principios de Análisis Matemático*. España: Reverté.

Mas, R. (2015) *Raíces p-ádicas de la unidad* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* Thousand Oaks: Sage.

Robert, A. M. (2000) *A course in p-adic analysis*. New York, Estados Unidos: Springer – Verlag.

Rojas, J. (2016) *Completitud y clausura algebraica de campos P-ádicos* (tesis de pregrado). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Schikhof, W. H. (1984). *Ultrametric Calculus an Introduction to p-adic analysis*. New York, Estados Unidos: Cambridge University Press.

Valderrama, S. (2013). *Pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica*. Lima, Perú: San Marcos

Willard, S. (1970) General Topology. New York, Estados Unidos: Addison – Wesley Publishing Company.

ANEXO

Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA Y POBLACIÓN
Problema General ¿Qué propiedades importantes existen en el cuerpo de los números *p*-ádicos? **Problema Específico** ¿Es el cuerpo de los números *p*-ádicos una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica? ¿Qué propiedades tienen las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos? ¿Qué propiedades tienen las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos?	**Objetivo General** Identificar propiedades importantes en el cuerpo de los números *p*-ádicos. **Objetivo Específico** Mostrar que el cuerpo de los números *p*-ádicos es una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica. Analizar las propiedades de las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos. Analizar las propiedades de las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos	**Hipótesis General** Existen propiedades importantes en el cuerpo de los números *p*-ádicos. **Hipótesis Específica** El cuerpo de los números *p*-ádicos es una compleción de los números racionales mediante la norma *p*-ádica. Existen propiedades importantes que cumplen las sucesiones en el cuerpo de los números *p*-ádicos. Existen propiedades importantes que cumplen las series en el cuerpo de los números *p*-ádicos. .	**Tipo de investigación** El presente trabajo de investigación es de tipo básica. **Diseño de investigación** La presente investigación tiene un diseño no experimental. El método a utilizar es el método deductivo – demostrativo. **Población y muestra** La abstracción del trabajo nos indica que no existe población ni muestra que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla dentro del universo del cuerpo de los números *p*-ádicos. **Técnicas e instrumentos de recolección de datos** Para la realización de nuestro trabajo se reunió bibliografía especializada y recopilación de investigaciones relacionadas con el cuerpo de los números *p*-ádicos, **Plan de análisis estadísticos de datos** La presente investigación no requiere plan de análisis estadístico de datos.