

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**“UNA REPRESENTACIÓN DEL TEOREMA DE
WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES DE LORENTZ”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICA**

CARMEN LUCÍA FERNÁNDEZ YANA

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN
“UNA REPRESENTACIÓN DEL TEOREMA DE
WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES DE LORENTZ”

Fernández Yana, Carmen Lucía

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Secretario

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Mg Moisés Simón Lázaro Carrión
Asesor

Callao – Perú

2019

DEDICATORIA

A mis amorosos padres Lucía y Humberto por el apoyo continuo y la confianza.

A mi querida hermana Evelyn por su apoyo

A Juan Carlos por todo su apoyo, amor y comprensión.

AGRADECIMIENTOS

A los docentes del ciclo de tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por su valiosa enseñanza y permanente orientación.

Al Mg Moisés Simón Lázaro Carrión por su asesoramiento, tiempo y dedicación a lo largo de la realización de la presente investigación, también por su motivación y paciencia que fueron de gran ayuda para concluir con éxito este trabajo.

A los señores miembros del Jurado Evaluador de la presente tesis, por sus oportunas observaciones que permitieron mejorar la elaboración del informe final.

Asimismo, mi reconocimiento a todas mis amistades de la universidad con quienes compartimos momentos inolvidables.

A mis compañeros del trabajo que colaboraron de una u otra manera en la ejecución de esta investigación.

Gracias a mi familia por apoyarme en cada decisión y desarrollo de esta investigación.

Gracias a Juan Carlos Quesada por estar a mi lado en cada momento apoyándome incondicionalmente.

ÍNDICE

RESUMEN.....	3
ABSTRACT.....	4
INTRODUCCIÓN.....	5
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	6
1.1 Descripción de la realidad problemática.....	6
1.2 Formulación del problema.....	7
1.3 Objetivos.....	7
1.4 Limitantes de la investigación.....	7
II. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1 Antecedentes.....	9
2.2 Marco.....	11
2.2.1 Teórico.....	11
2.3 Definiciones de términos básicos.....	23
III. HIPÓTESIS Y VARIABLES.....	25
3.1 Hipótesis.....	25
3.1.1 Capítulos fuera de variables.....	25
3.2 Operacionalización de variables.....	25
IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	27
4.1 Tipo y diseño de la investigación.....	27
4.2 Población y muestra.....	28

4.3	Técnicas e instrumentos para la recolección de información documental.....	28
4.4	Técnicas e instrumentos para la recolección de información de campo.....	28
4.5	Análisis y procesamiento de datos.....	28
V.	RESULTADOS.....	29
5.1	Resultados descriptivos.....	29
	A) Números de Lorentz.....	21
	B) Superficies de Lorentz.....	37
	C) Teorema de Representación.....	38
	D) Inmersión Minimal.....	41
	E) Inmersión Minimal Conforme.....	44
	F) Representación del teorema de Weierstrass.....	49
VI.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	53
6.1	Contrastación de la hipótesis.....	53
6.2	Contrastación de los resultados con estudios similares.....	53
6.3	Responsabilidad ética.....	54
	CONCLUSIONES.....	55
	RECOMENDACIONES.....	56
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	57
	• ANEXOS	
	Matriz de consistencia.....	59

RESUMEN

En la presente investigación “Una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz”, el uso del teorema de Weierstrass es de suma importancia como en muchas de las demostraciones trabajadas en matemática. En nuestra investigación la representación clásica del teorema de Weierstrass se usa en la relación entre las funciones holomorfas y las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales elípticos exactos, temas poco estudiados en pre grado.

Una característica de la investigación es el uso del álgebra “ L ” de los números de Lorentz los cuales tienen muchas propiedades similares con los números complejos. Consideraremos las funciones L –diferenciables y una variedad modelada en L .

El interés se centra en motivar el estudio de los temas trabajados, donde existen teorías que serán útiles para futuras investigaciones.

Las superficies de Lorentz están orientadas en dos dimensiones reales de variedades pseudo - Riemanniana, las cuales están naturalmente modeladas en el álgebra de los números de Lorentz. Usaremos funciones L diferenciables para obtener las soluciones de las variedades minimales en \mathbb{R}^3 .

Nuestra investigación está en el área de las Matemáticas, es así como seguiremos la línea de investigación correspondiente a la Geometría y topología diferencial.

ABSTRACT

In the present investigation "A representation of the Weierstrass theorem for Lorentz surfaces", the use of the Weierstrass theorem is of great importance as in many of the demonstrations worked in mathematics, in our research the classical representation of the Weierstrass theorem is used in the relation between the holomorphic functions and the solutions of the exact elliptic partial differential equations, subjects little studied in pre grade.

A feature of the research is the use of the " L " algebra of Lorentz numbers which have many similar properties with complex numbers. We will consider the L -differentiable functions and a variety modeled in L .

The interest focuses on motivating the study of the topics studied, where there are theories that will be useful for future research.

The Lorentz surfaces are oriented in two real dimensions of pseudo-Rimannian varieties, which are naturally modeled in the algebra of the Lorentz numbers. We will use differentiable L functions to obtain the solutions of the minimum varieties in.

Our research is in the area of Mathematics is how we will follow the line of research corresponding to Geometry and differential topology.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las superficies minimales en R^3 se remonta a los orígenes del cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial clásica, en tiempos de Euler y Lagrange (s. XVIII). Por aquellas fechas, estas superficies se veían como los puntos críticos del funcional área, lo que lleva a que, si $z = u(x, y)$ es la expresión local de la superficie como grafo, entonces la superficie será minimal si se cumple:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

(1)

(La cual llamaremos ecuación de los grafos minimales), donde los subíndices x, y denotan las correspondientes derivadas parciales.

Posteriormente, Meusnier interpreto geoméricamente estas superficies diciendo que en ellas, la curvatura media es constantemente cero; y esto es lo que se ha tomado posteriormente como definición.

La investigación en esta tesis es importante pues aplicaremos nuestra representación del teorema para construir inmersiones explicitas minimales, es decir para realizar la representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

En el desarrollo de la tesis cubrimos temas como los números de Lorentz y superficies minimales. Es así como se amplía el campo de conocimiento de los estudios de pre grado por lo que este trabajo permitirá conocer, aprender y despertar el interés de los estudiantes de nuestra facultad.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática.

En 1866, Karl Weierstrass nos presentó un método de representación de superficies mínimas a través de integrales que involucran un par de funciones complejas que se denominan Representación de Weierstrass de superficies mínimas, este método requiere de funciones holomorfas. Se han realizado estudios sobre la representación de Weierstrass sobre superficies minimales, sin embargo, los estudios han sido realizados sobre los complejos o sobre espacios como Minkowsky.

Es entonces que Jerzy Konderak en 1999, realizó una investigación para realizar la representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

En nuestra investigación los números de Lorentz, los cuales tienen muchas propiedades similares con los números complejos, serán usados de manera intensiva, junto con la teoría de las inmersiones minimales y los mapas armónicos.

Las superficies de Lorentz están orientadas en dos dimensiones reales de variedades pseudo-Riemannianas o semi-Riemannianas, las cuales están naturalmente modeladas en el álgebra de los números de Lorentz.

Usaremos funciones L – diferenciables para obtener las soluciones de las variedades minimales en \mathbb{R}^3 , nos preguntamos entonces si es posible obtener un resultado global, ya que estudios locales ya se han realizado, es así como nuestra problemática gira entorno a encontrar una representación global nos preguntamos entonces, ¿es posible encontrar dicha representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz?.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass para las superficies de Lorentz?

1.2.2. Problemas Específicos

- ¿Es posible realizar una inmersión minimal en la superficie de Lorentz?
- ¿Es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad semi-Riemanniana $(M, [g])$.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Determinar una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Determinar una inmersión minimal en la superficie de Lorentz
- Verificar la representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad semi-Riemanniana $(M, [g])$.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórico

Las limitaciones de esta investigación se dan a raíz de la poca bibliografía y que no hay muchos estudios sobre una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

Por lo que nosotros realizaremos una demostración de la representación de teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

Tenemos también que los conceptos desarrollados no han sido estudiados en pregrado, sin embargo, ello nos motiva a realizar un mayor esfuerzo.

1.4.2. Temporal

La presente investigación se llevará a cabo en un plazo de 3 meses, este periodo estará comprendido del mes de setiembre al mes de noviembre del 2018.

1.4.3. Espacial

La presente investigación se llevará a cabo en la Universidad Nacional del Callao en la Facultad de Ciencias naturales y Matemática en la escuela profesional de Matemática, con el apoyo del asesor de tesis y los profesores de cada módulo del ciclo de tesis.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

El presente trabajo de investigación trabaja con los siguientes aportes.

2.1.1 Antecedentes internacionales

Ritoré (1994) en su tesis “Superficie con curvatura media constante” se planteó que las superficies minimales y con curvatura media constante constituyen un campo muy activo de investigación.

Para superficies compactas conseguimos probar: Sea $M \subset N$ es una superficie minimal compacta orientable sin auto intersecciones con índice uno en un cociente orientable de R^3 . Si el género de M es cuatro o cinco, o M es una superficie hiper elíptica de género tres, entonces N es un toro llano tridimensional [9].

Nos apoyaremos en este antecedente por el uso del concepto y demostración de las superficies minimales con índice uno.

Fernández (2006) en su tesis “Superficies maximales con singularidades aisladas” se planteó el objetivo principal de esta investigación, al estudio de las superficies minimales propiamente embebidas (esto es, sin auto-intersecciones) con singularidades aisladas en L^3 y más generalmente en 3-variedades Lorentzianas completas y llanas. Es así como se concluye concretamente que clasificamos las singularidades aisladas en espaciales y luminosas, dependiendo del comportamiento de la estructura conforme de las superficies en la singularidad. [3]

Nos apoyaremos en este antecedente por el uso del concepto del espacio de Lorentz.

Mezzerà (2014) en su tesis "Geometría Lorentziana y singularidades" quien se planteó como objetivo principal de esta monografía el estudiar un resultado de la relatividad general, para ello estudiaremos variedades semi-riemanniannas y las características principales a ser utilizadas como geodésicas y curvatura, finalmente demostraremos el teorema de Hawking y Penrose desde un punto de vista matemático. [8]

Nos apoyaremos en este antecedente por el uso de los conceptos y demostraciones de la geometría Lorentziana y las variedades semi-Riemannianas.

Alarcón (2008) en su tesis "Superficies Minimales Completas en el Espacio Euclideo". Las aportaciones más importantes son el teorema de Densidad para superficies minimales completas y de tipo hiperbólico y también se estudió el helicoides simplemente periódico de género uno.

Nos apoyaremos en este antecedente por el uso del concepto y demostración de las superficies minimales. [1]

2.1.2. Antecedentes Nacionales

Berrocal (2007) en su tesis "Representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas". Uno de los objetivos de su investigación mostrar la representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas, ello entonces nos da inicio al estudio de las superficies mínimas desde un enfoque más amplio y utilizando técnicas de la teoría compleja para mostrar resultados más avanzados en esta área que son desenvueltas en temas más avanzados.

Nos apoyaremos en esta investigación en la demostración que ha realizado de la representación canónica.

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

Forma Bilineal

Definición 2.2.1. La aplicación $g : V \times V \rightarrow R$ se denomina

- Forma bilineal, si es lineal en cada una de sus variables, es decir

$$g(\alpha u + \beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w)$$

$$g(u, \alpha v + \beta w) = \alpha g(u, v) + \beta g(u, w)$$

para cualesquiera u, v y $w \in V$ y cualesquiera $\alpha, \beta \in R$.

- Simétrica, si $g(v, w) = g(w, v)$ para todo $v, w \in V$.
- No degenerada, si para $v \in V$ fijo y para todo $w \in V$

$$g(v, w) = 0 \text{ entonces } v = \theta$$

- Definida positiva (respectivamente negativa)

$$\text{Si } u \neq 0, \text{ entonces } g(u, u) > 0 \text{ (resp } g(u, u) < 0), \forall u \in V$$

- Indefinida:

$$\text{Si } \exists u, v \in V \text{ tal que } g(u, u) > 0, g(v, v) < 0$$

Definición 2.2.2. Una forma bilineal, simétrica y no degenerada $\phi : V \times V \rightarrow R$, se denomina producto escalar en V .

Primera forma fundamental

Estudiamos la estructura geométrica de una superficie regular. Hasta ahora, hemos visto las superficies desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Ahora introducimos la Primera Forma Fundamental, que es una forma cuadrática en los diferenciales de las coordenadas en la superficie y determina la geometría intrínseca de la superficie en una vecindad de un punto dado. La Primera Forma Fundamental es la métrica

que la superficie hereda del producto interno de R^3 : Más precisamente, cuando una superficie S sea parametrizada por $X(u; v)$; y $W \in T_p S$ es un vector tangente a S en P , entonces W es de la forma:

$W = aX_u + bX_v$, para algunos números reales $a; b$: La norma al cuadrado de W como vector en R^3 está dada por:

$$\begin{aligned} W \cdot W &= (aX_u + bX_v) \cdot (aX_u + bX_v) \\ &= a^2(X_u \cdot X_u) + 2ab(X_u \cdot X_v) + b^2(X_v \cdot X_v) \\ &= a^2E + 2abF + b^2G \end{aligned} \tag{1}$$

Donde $E = X_u \cdot X_u$, $F = X_u \cdot X_v$, $G = X_v \cdot X_v$

La ecuación (1) define una forma cuadrática en $a; b$ con coeficientes $E; F; G$: Esta forma se llama La Primera Forma Fundamental. A menudo es conveniente expresar estos coeficientes como entradas de una matriz simétrica.

$$a^2E + 2abF + b^2G = [a, b] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

O como una forma diferencial de orden 2

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

La curvatura

La curvatura de una curva es una medida de qué tan rápido está girando la curva. Para ser más precisos, es la tasa de cambio, con respecto al parámetro de longitud de arco, del vector tangente unitario de la curva. Entonces podemos expresar la curvatura de una curva $\alpha(s)$ como $k(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right| = |\alpha''(s)|$, donde s es la longitud del arco y T es el vector tangente unitario.

Definición 2.2.3. Sea C una curva suave con vector $\alpha(s)$ de posición, donde s es el parámetro de longitud de arco. La curvatura k de C en el

punto $\alpha(s)$ se define por $k(s) = |\alpha''(s)| = \left| \frac{dT}{ds} \right|$, donde $T = \alpha'(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}$ es un vector unitario.

Observe que la curvatura de α en cualquier punto dado, es igual a la magnitud de la aceleración de una partícula que atraviesa la curva α con una velocidad de 1.

Teorema 1 Sea C una curva suave con el vector de posición $\alpha(t)$ donde t es cualquier parámetro. Luego la curvatura,

$$1. k = \left| \frac{T'(t)}{|\alpha'(t)|} \right|$$

$$2. k = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

Prueba de 1: Aplicando la regla de la cadena $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt}$

Por definición se tiene $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$, así tenemos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} |\alpha'(t)| \Rightarrow \frac{dT}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{|\alpha'(t)|}$$

Por lo tanto, $\frac{dT}{ds} = \frac{T'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Usando la definición tenemos:

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|}$$

Prueba 2: ya que: $|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} \Rightarrow |\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{ds}{dt} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \frac{ds}{dt} T$

Tenemos que $T = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}$, ahora tomaremos la segunda derivada de $\alpha'(t) =$

$\frac{ds}{dt} T$ para obtener

$$\alpha''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T(t) + \frac{ds}{dt} T'(t)$$

Aplicando el producto cruzado entre α' y α'' para obtener

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{ds}{dt} T(t) \times \left(\frac{d^2s}{dt^2} T(t) + \frac{ds}{dt} T'(t) \right)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{ds}{dt} T(t) \frac{d^2s}{dt^2} T(t) \frac{d^2s}{dt^2} T(t) \times \left(\frac{ds}{dt} T(t) \frac{d^2s}{dt^2} T(t) + \frac{ds}{dt} T'(t) \right)$$

Usando las propiedades del producto cruz tenemos

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} (T(t) \times T(t)) \times \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (T(t) \times T'(t))$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (T(t) \times T'(t)) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |T(t)| |T'(t)| \text{sen}\theta$$

Donde θ es un ángulo entre $T(t)$ y $T'(t)$ y también tenemos que $T(t) \times T'(t) = 0$ ya que son perpendiculares, y $|T(t)| = 1$ ya que es el vector tangente unitario, así que ahora tenemos,

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |T'(t)| = (\alpha'(t))^2 |T'(t)|$$

Así,

$$|T'(t)| = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \text{ así que } k = \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} \text{ por lo tanto}$$

$$k = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

Geometría y curvatura

El ejemplo más sencillo del espacio tiempo lo constituye el llamado espacio Lorentz –Minkowski, modela la teoría de la relatividad espacial. En dimensión 3, dicho espacio lo denotamos con $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}_1^3$ y lo podemos visualizar geoméricamente como el espacio euclideo usual $(\mathbb{R}^3, <, >)$ con sus coordenadas habituales (x, y, z) pero es donde la coordenada z juega aquí el papel de de coordenada temporal, de longitud negativa. La métrica Lorentziana de \mathbb{L}^3 se escribe entonces de la siguiente manera:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2$$

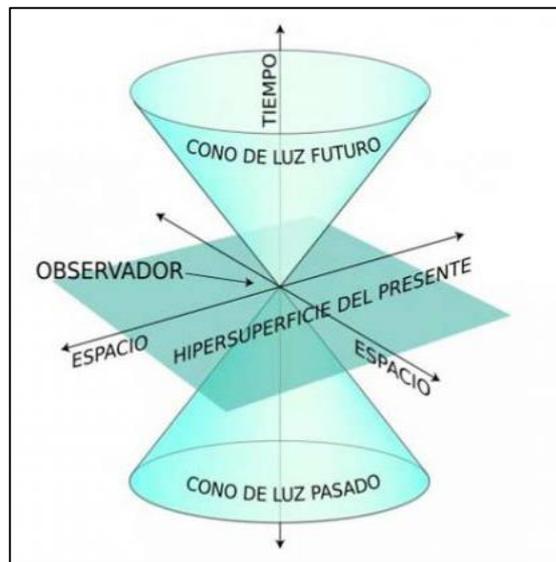
en contraste con la métrica usual euclidea de \mathbb{R}^3 , que vendría dada por:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En esta métrica Lorentziana, la luz esta confinada a viajar en direcciones luminosas en lo que constituye el llamado cono de luz. (ver fig.)

$$\Lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Fig 1: Cono de luz



Formas diferenciales

Una 1-forma (uno forma) definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo:

$$w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

Donde $f_1, \dots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales diferenciables.

Las expresiones $dx_i, i = 1, \dots, n$ es una 1-forma w de clase C^∞ definido en \mathbb{R}^n si $f_j = 1$ y $f_i = 0$ con $j \neq i$

Un 2-forma (dos forma) definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo

$$w = \sum_{i,j}^n f_{ij} dx_i dx_j$$

Donde $f_{ij}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \leq j, j \leq n$, son funciones diferenciables.

Las formas diferenciables aparecen las integrales de línea:

$$\int_{\lambda} F \cdot dx$$

Superficie Regular

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y un mapa $x: U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. x es diferenciable, es decir de clase C^∞
2. x es un homeomorfismo.
3. Para cada $q \in U$, la diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

Llamamos al mapa x una parametrización o un sistema de coordenadas (locales) de S en p y a $x(U) \subset S$ una vecindad coordenada de p . Nos referimos a las derivadas parciales de $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$, por x_u, x_v , respectivamente. Hay otro tipo de superficies, las superficies parametrizadas, que definiremos a continuación.

Superficie parametrizada

Una superficie parametrizada $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un mapa diferenciable x de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 . El conjunto $x(U) \subset \mathbb{R}^3$ se llama la traza de x .

La superficie parametrizada x es regular si la diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno para que todo $q \in U$ (esto es, los vectores $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ son linealmente independientes para todo $q \in U$). Un punto $p \in U$ donde dx_q no es uno a uno se llama punto singular de x .

Superficie mínima

Se dice que una superficie parametrizada regular es mínima si la curvatura media (H) se anula en todos los puntos ($H = 0$).

Para demostrar que $H = 0$ necesitaremos de los conceptos de:

- Parametrización regular de una superficie
- Variación normal
- Los coeficientes de la primera forma fundamental: E, F, G
- Area de una región contenida en una superficie

Sea

$$\begin{aligned} X: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

Una superficie parametrizada regular

Tomemos un conjunto acotado $D \subset U$ y una función diferenciable

$$h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

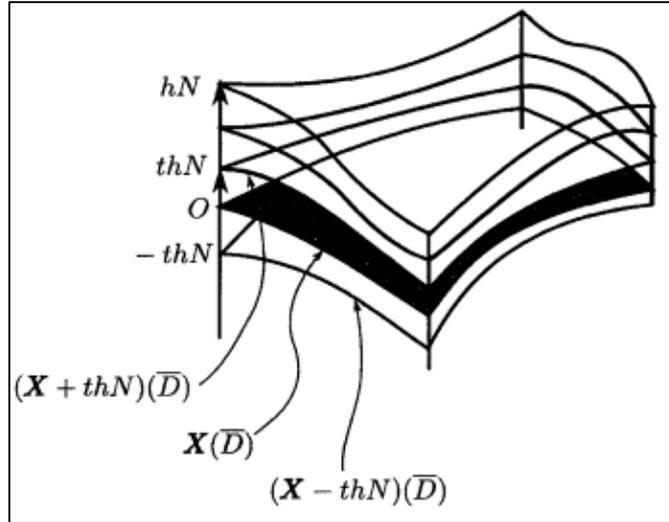
La variación normal de $X(\bar{D})$ determinada por h es la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((u, v), t) &\rightarrow \phi(u, v, t) \end{aligned}$$

Para $(u, v) \in \bar{D}$ y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Definido por $\phi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$

Fig 2: Una Variación normal de $X(D)$



La nueva parametrización para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, es la aplicación $X^t: D \rightarrow \mathbb{R}^3$,
definida por:

$$\begin{aligned} X^t(u, v) &= \phi(u, v, t) \\ &= X(u, v) + th(u, v)N(u, v) \end{aligned}$$

Y ahora derivar con respecto a u y a v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^t}{\partial u} &= X_u + thN_u + th_u N \\ \frac{\partial X^t}{\partial v} &= X_v + thN_v + th_v N \end{aligned}$$

Ahora hallaremos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E^t &= \left\langle \frac{\partial X^t}{\partial u}, \frac{\partial X^t}{\partial u} \right\rangle = \langle X_u + thN_u + th_u N, X_u + thN_u + th_u N \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle + th\langle X_u, N_u \rangle + th_u\langle X_u, N \rangle + th\langle N_u, X_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle \\ &\quad + t^2 h h_u \langle N_u, N \rangle + th_u \langle N, X_u \rangle + th h_u \langle N, N_u \rangle + t^2 h_u^2 \langle N, N \rangle \\ E^t &= E + th(\langle X_u, N_u \rangle + \langle N_u, X_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u \end{aligned}$$

Realizando un similar producto interno se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F^t &= \left\langle \frac{\partial X^t}{\partial u}, \frac{\partial X^t}{\partial v} \right\rangle = F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v \\
 G^t &= \left\langle \frac{\partial X^t}{\partial v}, \frac{\partial X^t}{\partial v} \right\rangle = G + th(\langle X_v, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v
 \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizando las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \langle X_u, N_u \rangle = -e \\ \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f \\ \langle X_v, N_v \rangle = -g \end{cases} \tag{2}$$

y sabiendo que la curvatura media H está dado por:

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2} \tag{3}$$

Para la parametrización X^t y mediante (1), (2) y (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2fF + Ge) + R \\
 &= EG - F^2 - 4thH(EG - F^2) + R \\
 &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R
 \end{aligned}$$

donde, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$

Como ε es pequeño, X^t es la parametrización de una superficie regular, donde el área $A(t)$ de la región $X^t(\bar{D})$ es:

$$A(t) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, dudv$$

$$A(t) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \cdot \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

donde: $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$

Derivamos respecto a t $A'(t) = \frac{dA}{dt}$

$$A'(t) = \iint_{\bar{D}} \frac{-4hH}{2\sqrt{1-4thH+\bar{R}}} \sqrt{EG-F^2} dudv$$

Como ε es pequeño, $A(t)$ es una función diferenciable y su derivada en $t = 0$ es:

$$A'(0) = \iint_{\bar{D}} -2hH\sqrt{EG-F^2} dudv$$

Por el cálculo diferencial $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es mínima si y solo si $A'(0)$, de aquí se obtiene que $H = 0$.

Variedades semi-riemannianas

A continuación, se muestran resultados sobre variedades semi-riemannianas que, en el caso particular de los espacios de Lorentz, son de gran utilidad en el análisis posterior en este trabajo.

Definición 2.2.4. Sea M una variedad diferenciable. Un tensor métrico g en M es un campo tensorial $(0,2)$ no degenerado, simétrico y de índice constante.

Es decir, g asigna a cada $p \in M$ un producto escalar g_p sobre el espacio tangente $T_p(M)$, y el índice de g_p es igual para todo p .

No degenerado significa que para cada vector $v \neq 0$ y $v \in T_p(M)$, existe $w \in T_p(M)$ tal que $g_p(v, w) \neq 0$.

Definición 2.2.5. Una variedad semi-riemanniana es un par (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g un tensor métrico.

En adelante, salvo en los casos en que se pueda generar confusión, nos referiremos a la variedad semi-riemanniana (M, g) y a M indistintamente.

Definición 2.2.6. Sean M una variedad semi-riemanniana y $p \in M$. El índice v de g_p es llamado el índice de M : $0 \leq v \leq n = \dim M$.

En otras palabras, una métrica semi-riemanniana en una variedad diferenciable M es un campo tensorial simétrico del tipo $(0,2)$ sobre M que asigna a cada punto $p \in M$ un producto interno no degenerado g_p de

$T_p(M) \times T_p(M)$ en \mathbb{R} de signatura $(\underbrace{+, \dots, +}_{n-v}, \underbrace{-, \dots, -}_v)$.

Observación 1

En particular, si $v = 0$, M es una variedad riemanniana; si $v = 1$ y $n \geq 2$, M es una variedad de Lorentz.

Recordemos que dadas M y N variedades diferenciables, $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y h un campo tensorial $(0, s)$ sobre N , con $s \geq 1$, entonces $\phi^*(h)$ queda definido por

$$\phi^*(h)(v_1, \dots, v_s) = h(d\phi_p v_1, \dots, d\phi_p v_s)$$

para todo $v_i \in T_p(M), p \in M$. $\phi^*(h)$ es llamado *pullback* de h por ϕ .

Isometría

Una isometría es un tipo especial de aplicación que vincula los tensores métricos de variedades semi-riemannianas.

Definición 2.2.7. Sean (M, g^M) y (N, g^N) dos variedades semi-riemannianas en el sentido de la Definición 5. Una isometría de M en N es un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que preserva los tensores métricos en el siguiente sentido: $\phi^*(g^N) = g^M$

Explícitamente, para todos $v, w \in T_p(M)$ y $p \in M$

$$\begin{aligned} \phi^*(g^N)(v, w) &= g^N(d\phi(v), d\phi(w)) = \langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = \langle v, w \rangle_p \\ &= g^M(v, w) \end{aligned}$$

Dado que ϕ es un difeomorfismo, cada diferencial $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal de $T_p(M)$ en $T_{\phi(p)}(N)$.

El espacio de Lorentz-Minkowski

El espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 es el espacio \mathbb{R}_1^3 , es decir, \mathbb{R}^3 con el producto escalar Lorentziana o la métrica Lorentziana:

$$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

Decimos que un vector $u \in \mathbb{L}^3$ es:

- Temporal si $\langle u, u \rangle < 0$
- Espacial si $\langle u, u \rangle > 0$
- Nulo si $\langle u, u \rangle = 0$

Si $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ definimos la norma de v por

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|} = \sqrt{|v_1^2 + v_2^2 - v_3^2|}$$

Se dice que los vectores u y v en \mathbb{L}^3 son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$. Un vector u en \mathbb{L}^3 que satisface $\langle u, u \rangle = \pm 1$ es llamado un vector unitario.

El producto vectorial de Minkowsky entre los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ de \mathbb{L}^3 se define

por

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{-k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

O bien,

$$\langle u \times v, w \rangle = \det[u, v, w], \text{ para todo } w \in \mathbb{L}^3.$$

Observe que $u \times v = -v \times u$. Además, tenemos lo siguiente:

Lema 2.2.8. Sean $u, v, w, z \in L^3$. Se cumple lo siguiente:

$$i. \langle u \times v, w \times z \rangle = \langle u, z \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle,$$

$$ii. (u \times v) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v.$$

OBSERVACIÓN 3

Tenemos que una superficie lorentziana M es una variedad lorentziana de dimensión 2. Heredando la notación clásica utilizada para superficies en R^3 , las componentes g_{ij} del tensor métrico en M respecto del sistema de

coordenadas u, v son:

$$E = g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$$

$$F = g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

$$G = g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

El elemento de arco queda expresado

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

2.1 Definiciones de términos básicos

Los números de Lorentz:

Se define como el conjunto $L = \{u + \tau v \mid u, v \in R\}$, asumiendo que la unidad “ τ ” imaginaria tiene la propiedad $\tau^2 = -1$. En el conjunto L se definen dos operaciones internas: suma y producto. Se define como se muestran [12]:

$$(u_1 + \tau v_1) + (u_2 + \tau v_2) := (u_1 + u_2) + \tau(v_1 + v_2)$$

$$(u_1 + \tau v_1) \cdot (u_2 + \tau v_2) := (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \tau(u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

Superficie de Lorentz:

Se define como un espacio completo orientado con un conjunto de cartas que consisten en aplicaciones y orientaciones que preserva las funciones de transición y son L- diferenciables.

El espacio vectorial $R_1^3 = \mathbb{L}$ asociados a un producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle$ con signos $(+, +, -)$ y el producto $*$ (x, y) . [12]

Si $X: M \rightarrow R_1^3$, se define una inmersión isométrica e inmersión conforme.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Capítulos fuera de variables (cualitativo)

Hipótesis general

Si es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass para las superficies de Lorentz.

Hipótesis Específicas

- Si es posible realizar una inmersión minimal en L
- Si es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad Riemanniana M , con una pseudo-métrica $[g]$.

3.1 Variables

La variable de la investigación es el Teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

3.2 Operacionalización de las variables

La variable de la investigación es el Teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

Variable	Dimensiones	Indicadores
Teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz	Superficie Regular	Números de Lorentz Superficie de Lorenz
	Inmersión Minimal	Inmersión Isométrica Superficie Conexa
	Inmersión Minimal conforme	Teorema de representación

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación es de tipo básica, Valderrama (2013), nos manifiesta que: “Es conocida también como investigación teórica, pura o fundamental. Se preocupa por recoger información de la realidad para enriquecer el conocimiento teórico –científico, orientado al descubrimiento de principios y leyes”. (p.164) [10]

La presente investigación tiene un diseño no experimental, ya que las variables no pueden o no deben ser manipuladas o resulta complicado hacerlo, ello también es indicado por Mertens (2005).

Debido a que nuestra investigación está en el área de las Matemáticas siguiendo como línea de investigación la Geometría y topología diferencial, tenemos que el método a utilizar es el Método deductivo- demostrativo.

En primer lugar, revisaremos la teoría de las variedades Riemannianas, para lo cual consultaremos Manfredo (1976). [7]

En segundo lugar, estudiaremos el conjunto L de los números de Lorentz y consideramos funciones con valores en el álgebra de los números de Lorentz, los cuales son diferenciables con respecto a la estructura del álgebra de Lorentz y son análogos a las funciones holomorfas. Para ello revisaremos a Weinstein, (1996). [11]

Luego aplicaremos estas funciones para probar un teorema de representación de Weierstrass para superficies de Lorentz inmerso en el espacio. En la demostración aplicaremos el modelo de los números complejos.

4.2. Población y muestra

Debido a la abstracción de la tesis por el uso de conceptos de geometría Riemanniana, superficies minimales, y números de Lorentz, la presente investigación no presenta población por lo tanto tampoco muestra.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Se revisará bibliografía especializada, trabajos de investigación, libros digitales y físicos siguiendo la línea de investigación de la Geometría y Topología Diferencial, así como recopilación de información obtenida en la base de datos de SCOPUS, y el repositorio de la Universidad de Granada relacionada con la representación del teorema de Weierstrass.

Para la realización de nuestro trabajo se utilizó la lectura analítica, que consisten en leer el texto de forma pausada, reflexiva y minuciosa en el propósito de comprender e interpretar los resultados encontrados.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

La presente investigación no requiere técnicas para la recolección de la información de campo.

4.5. Análisis y procesamiento de datos

Debido a la abstracción de la tesis, la presente investigación no requiere algún plan de análisis estadístico de datos.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1 Resultados descriptivos

A) Números de Lorentz

Consideremos el álgebra de los números L de Lorentz y mostraremos aquí algunas propiedades de L . Deseamos enfatizar su similitud geométrica con el campo de los números complejos. El álgebra L se define en el conjunto

$L = \{u + \tau v \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ Asumiendo que la unidad “ τ ” imaginaria tiene la propiedad $\tau^2 = -1$. Más preciso en el conjunto L se definen dos operaciones internas: suma y producto.

$$(u_1 + \tau v_1) + (u_2 + \tau v_2) := (u_1 + u_2) + \tau(v_1 + v_2)$$

$$(u_1 + \tau v_1) \cdot (u_2 + \tau v_2) := (u_1 u_2 - v_1 v_2) + \tau(u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

Con estas operaciones el conjunto L es un álgebra asociativa, conmutativa sobre \mathbb{R} con unidad; este álgebra es llamada el álgebra de los números de Lorentz.

Hay una conjugada natural definida en L del siguiente modo: $\overline{u + \tau v} := u - \tau v$ además definimos $Re(u + \tau v) = u$ y $Im(u + \tau v) = v$.

El conjunto L de los números de Lorentz se puede considerar como un espacio vectorial real. En efecto, se puede sumar dos números de Lorentz obteniéndose otro número de Lorentz; y se puede multiplicar un número de Lorentz por un escalar real, obteniéndose otro número de Lorentz. Es decir,

- Suma: $(u_1 + \tau v_1) + (u_2 + \tau v_2) := (u_1 + u_2) + \tau(v_1 + v_2)$
- Producto por un escalar real: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda(u_1 + \tau v_1) = \lambda u_1 + \lambda v_1 \tau$

La suma y el producto por un escalar cumplen todas las propiedades requeridas. En este caso el número de Lorentz cero se denota de la siguiente manera $0 + \tau 0$

La L -norma de $z = u + \tau v \in \mathbb{L}$ se define como:

$$|z| = |z\bar{z}|^{\frac{1}{2}} = |a^2 - b^2|^{\frac{1}{2}}.$$

En el álgebra L tenemos un conjunto de divisores de cero, definido por

$$K = \{z \in \mathbb{L} : |z| = 0\} \setminus \{0\}$$

Donde K son los números del tipo $u \pm \tau u \in \mathbb{L}$ donde $u \in R \setminus \{0\}$, y el $0 \in \mathbb{L}$.

Todo elemento $z = u + \tau v$, de L que no tiene un divisor cero, tiene inversa de z definido por $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Los elementos de L que poseen inversa lo denotaremos por L^* donde $L^* = L - K$.

El espacio vectorial L es isomorfo, al conjunto $R \oplus R$ vía la aplicación,

$\Phi: L \rightarrow R \oplus R$, definido como:

$$\Phi(u + \tau v) := (u + v; u - v)$$

La inversa de este isomorfismo está dada por:

$$\Phi^{-1}(x; y) = \left(\frac{1}{2}\right)(x + y) + \left(\frac{1}{2}\right)\tau(x - y).$$

El álgebra L es un álgebra de Clifford asociado con el espacio de los reales provisto con el producto escalar estándar diferente a los números complejos el cual es álgebra de Clifford asociado con los reales provisto con signo menos en el producto estándar. El álgebra L también es visto como el grupo de álgebra asociado con el grupo cíclico Z_2 .

- **Funciones elementales sobre los Números de Lorentz**

Consideraremos funciones cuyo dominio está contenido en L y con valores en L . Usaremos después estas funciones para construir ejemplos de inmersiones minimales. En lo sucesivo escribiremos funciones de la variable z para distinguirlos de las funciones complejas evaluadas.

Ejemplo 1

Sea $a_0, a_1, \dots, a_n \in L$ tenemos la siguiente función polinomial:

$$P(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n, \text{ definido en } L$$

Ejemplo 2

Sea $z \in L$ consideramos las series

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Pueden ser probados que estas series convergen para todo $z \in L$, por lo tanto denotaremos la suma de las series por $exp(z)$. Además tenemos que:

$$exp(u + \tau v) = \frac{1}{2} [exp(u + v) + exp(u - v) + \tau(exp(u + v) - exp(u - v))],$$

donde exp es la función exponencial clásica.

Ejemplo 3

Definimos las funciones trigonométricas del siguiente modo: si $z \in L$ tenemos que

$$sen(z) = \frac{[exp(\tau z) - exp(-\tau z)]}{2\tau}$$

$$cos(z) = \frac{[exp(\tau z) + exp(-\tau z)]}{2\tau}$$

$$senh(z) = \frac{[exp(z) - exp(-z)]}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{[\exp(z) + \exp(-z)]}{2}$$

Probamos que $\operatorname{sen} = \operatorname{senh}$ y $\operatorname{cos} = \operatorname{cosh}$. Además para cada $z = u + \tau v$ tenemos las siguiente expresiones explicitas.

$$\operatorname{senh}(u + \tau v) = \frac{\operatorname{senh}(u + v) + \operatorname{senh}(u - v)}{2} + \tau \frac{\operatorname{senh}(u + v) - \operatorname{senh}(u - v)}{2}$$

$$\operatorname{cosh}(u + \tau v) = \frac{\operatorname{cosh}(u + v) + \operatorname{cosh}(u - v)}{2} + \tau \frac{\operatorname{cosh}(u + v) - \operatorname{cosh}(u - v)}{2}$$

Observamos las respectivas parejas de funciones $\operatorname{senh}, \operatorname{senh}$ y $\operatorname{cosh}, \operatorname{cosh}$ coinciden con las restricciones en los reales.

- **Funciones diferenciables en los Números de Lorentz**

L tiene una estructura de un espacio vectorial real de dimensión 2 y tiene una topología natural. Sea $\Omega \subset L$ un subconjunto abierto. $Z_0 \in \Omega$ y $f: \Omega \rightarrow L$ una aplicación:

Definición 5.1.1.

Se define que f es L –diferenciable en z_0 si existe limite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z - z_0 \in \mathbb{L}^*}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si existe este límite lo llamamos la L –derivada de f en z_0 y lo denotamos por $f'(z_0)$. Se dice que la función f es L – diferenciable en Ω si f es L –derivable en cada punto de Ω . Es sencillo probar la siguiente proposición:

Sea f, g funciones definidas en Ω con valores en L . Supongamos que f y g son L -diferenciables en $z_0 \in \Omega$ y $a, b \in L$.

Tenemos que $af(z) + bg(z), f(z) \cdot g(z)$ y $f(z)/g(z)$ son L –diferenciables en z_0 ; en el último caso se supone que $g(z_0) \notin K$. Además tenemos que:

$$(af + bg)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

Ejemplo 4:

Los polinomiales en z , exp , sen y cos son aplicaciones L – diferenciables y tenemos las siguientes fórmulas.

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

$$exp(z)' = exp(z)$$

$$sen'(z) = cos(z)$$

$$cos'(z) = -sen(z)$$

Mostraremos las derivadas formales (operadores)

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

En general si f es L –diferenciable en z_0 entonces no implica que f sea continua en z_0 .

En efecto,

Sea $f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ una función definida como:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \in \mathbb{L}^* \cup \{0\} \\ 1 & z \in K \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{L}^*}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{L}^*}} \frac{0}{z} = 0$$

Es decir f es L –diferenciable en 0 , pero f no es continua en 0 .

Teorema 2

Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $f(u + \tau v) = (a(u, v) + \tau b(u, v))$ y a, b son de clase C^1 . Entonces f es \mathbb{L} -diferenciable en Ω sí y solo sí $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. La ecuación $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ es equivalente a la siguiente versión de las ecuaciones de Cauchy-Rieman

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial u} \quad (2)$$

Probemos

Sea $z_0 \in f$ tal que $z_0 = u_0 + \tau v_0$ como f es diferenciable tenemos:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \tau v_0 + h) - f(u_0 + \tau v_0)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + h + \tau v_0) - f(u_0 + \tau v_0)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0 + h, v_0) + \tau b(u_0 + h, v_0) - (a(u_0, v_0) + \tau b(u_0, v_0))}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0 + h, v_0) - a(u_0, v_0)}{h} + \text{tlim}_{h \rightarrow 0} \frac{b(u_0 + h, v_0) - b(u_0, v_0)}{h} \\ & = a_u(u_0, v_0) + \tau b_u(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Veamos ahora si $th \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \tau v_0 + \tau h) - f(u_0 + \tau v_0)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \tau(h + v_0)) - f(u_0 + \tau v_0)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0, h + v_0) + \tau b(u_0, h + v_0) - (a(u_0, v_0) + \tau b(u_0, v_0))}{\tau h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0, h + v_0) - a(u_0, v_0)}{\tau h} + \text{tlim}_{h \rightarrow 0} \frac{b(u_0, h + v_0) - b(u_0, v_0)}{\tau h} \\ & = \tau a_v(u_0, v_0) + b_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Como f es diferenciable tenemos:

$$a_u(u_0, v_0) = b_v(u_0, v_0) \quad (1)$$

$$b_u(u_0, v_0) = a_v(u_0, v_0) \quad (2)$$

←) Sea $z = u + \tau v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f(u + \tau v)}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial a(u, v) + \tau b(u, v)}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial a(u, v)}{\partial \bar{z}} + \tau \frac{\partial b(u, v)}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a(u, v)}{\partial u} - \tau \frac{\partial a(u, v)}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b(u, v)}{\partial u} - \tau \frac{\partial b(u, v)}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} \right) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial u} - \tau \frac{\partial a}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

De (1) y (2) tenemos: $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$

Proposición 1

Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $f(u + \tau b) = a(u, v) + \tau b(u, v)$, donde a, b son de clase C^1 . Si f es L -diferenciable, usando el teorema 1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} \right) + \tau \left(\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{\partial a}{\partial u} + \tau \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} + \tau \frac{\partial a}{\partial v} \end{aligned}$$

Obtenemos entonces una equivalencia en el corolario siguiente:

Corolario 1

Sea $f: \Omega \rightarrow L$ tal que $f(u + \tau v) = (a(u, v) + \tau b(u, v))$ y a, b son de clase C^1 . Si f es L -diferenciable en Ω , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \tau \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2)$$

Definición 5.1.2. (Dominio)

Se dice dominio al conjunto Ω , si dicho conjunto es abierto y conexo

Definición 5.1.3. (Función primitiva)

Una función L –diferenciable $F(z)$ es llamada primitiva de f si $F'(z) = f(z)$ para cada z en el dominio de f . Si podemos probar que el dominio de f es simplemente conexo y f es L – diferenciable entonces existe una primitiva de f

Entonces definimos L –diferenciable y L –anti-diferenciable 1 –forma como sigue:

$$dz = du + \tau dv ; \quad d\bar{z} = du - \tau dv$$

Proposición 2:

Sea γ una curva en L . Si f es una función L –diferenciable con $\frac{\partial f}{\partial z}$ continua, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(z)|_{\gamma}$$

Además, la integral no depende del camino elegido.

Demostración.

Como f es L –diferenciable, de la proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} dz &= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} (du + \tau dv) = \int_{\gamma} (a_u + \tau b_u) du + \tau (b_v + \tau a_v) dv \\
&= \int_{\gamma} (a_u du + a_v dv) + \tau (b_u du + b_v dv) \\
&= \int_{\gamma} d(a + \tau b) = a + \tau b|_{\gamma} = f(z)|_{\gamma}
\end{aligned}$$

Si una función $f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$ en un dominio Ω entonces

$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ y en particular esta integral no depende del camino γ conectado en los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

B) Superficies de Lorentz

Si tuviéramos una teoría suficientemente rica de funciones sobre un álgebra entonces podríamos definir una variedad modelado localmente sobre tal álgebra y sus poderes cartesianos. En particular hay una teoría bien desarrollada de variedades para-complejos (cf. [12,13])

Nos interesamos en las variedades pseudo-riemánicas que corresponden a las superficies de Rieman. Sea M una variedad orientada real de dimensión dos; entonces M es llamado superficie de Lorentz si tuviera una clase equivalente de proyecciones pseudo-riemánicas métricas $[g]$. La métrica g tanto como todas las otras métricas en la clase equivalente $[g]$ son de signatura $(1,1)$. De manera equivalente la superficie de Lorentz puede ser definido como variedad equipado con un atlas de cartas los cuales consiste de aplicaciones que preservan orientación tal que la transición son funciones L -diferenciables (cf[11]).

Si $(M, [g])$ es una superficie de Lorentz entonces puede ser construido un atlas de cartas refinadas. Consiste en que las cartas (U, φ) tal que con

respectivo a las coordenadas locales (u, v) determinado por φ la métrica $g|_U$ es igual a $\lambda^2(du^2 - dv^2)$ para alguna función λ con valores positivos en U .

Puede probarse que tales atlas consisten de aplicaciones L -diferenciables. Para más detalle revisar la superficie de Lorentz (cf [11])

Sea M una superficie de Lorentz y hacemos la siguiente definición.

Definición 5.1.4.

Si tenemos una 1-forma α en una superficie de Lorentz M con valores en L entonces son del género $(1; 0)$ si localmente con respecto a un carta refinada, es de la forma ϕdz para alguna función ϕ L -valor. Decimos que α es L -diferenciable si el coeficiente de la función ϕ es L -diferenciable en M . Esta definición no depende de la elección de la carta refinada.

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow R$ una curva seccionada C^1 y α una 1-forma en M con valores en L . Entonces se define una integral de α a lo largo de γ de la siguiente manera $\int_\gamma \alpha := \int_a^b \gamma^* \alpha dt$. Es claro que cada integral puede no existir porque $\gamma^* \alpha$ no es integrable en un sentido razonable. Es suficiente asumir que la forma de α es continua para asegurar la existencia de cada integral.

C) Un teorema de representación

Sea R_1^3 el espacio vectorial R^3 completo con producto escalar $\langle ., . \rangle$ de signos $(+, +, -)$. En otras palabras, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ entonces definimos al producto interno de la siguiente manera:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

En el espacio R_1^3 tenemos una orientación natural dado por 3- forma canónica $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Observar que:

$$dx_1 = e_1^b, dx_2 = e_2^b, dx_3 = -e_3^b$$

donde e_1, e_2, e_3 son las bases canónicas de R^3 y b es el isomorfismo musical entre R_1^3 y $(R_1^3)^*$ definido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por lo tanto, la orientación canónica de R_1^3 esta dada por la triple ordenada $e_1, e_2, -e_3$. Se demuestra que el operador estrella de Hodge $*$: $R_1^3 \wedge R_1^3 \rightarrow R_1^3$ está determinado por la identidad:

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle e_1 \wedge e_2 \wedge (-e_3)$$

para cada $\alpha, \beta \in R_1^3 \wedge R_1^3$ Es sencillo verificar que si $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ entonces

$$*(x \wedge y) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos un producto vector natural en R_1^3 definido por $X \times Y := *(X \wedge Y)$ (cf.[19]).

Definición 5.1.5. Sean M y N dos variedades variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. A una aplicación diferenciable $X: M \rightarrow N$

La llamaremos inmersión si $dX_p: T_p(M) \rightarrow T_{X(p)}(N)$ es inyectiva para todo $p \in M$.

Definición 5.1.6. Sean (M, g^M) y (N, g^N) dos variedades semi-riemannianas en el sentido de la Definición 3. Una aplicación $X: M \rightarrow N$ es conforme si $X^*(g^N) = hg^M$, para alguna función $h: M \rightarrow R$ diferenciable tal que $h > 0$ o $h < 0$.

Sea (M, g) una variedad orientada semi-riemana de dimensión dos y sea $X: M \rightarrow R_1^3$ una inmersión.

Supongamos que X es una inmersión isométrica.

Entonces se cumple que:

$dX_p: T_p(M) \rightarrow T_{X(p)}(R_1^3)$ es inyectiva para todo $p \in M$.

$X: M \rightarrow R_1^3$ es un difeomorfismo tal que $g = X^* \langle \cdot, \cdot \rangle$.

la aplicación X es una inmersión conforme

si $hg = X^* \langle \cdot, \cdot \rangle$, para alguna función $h: M \rightarrow R$ diferenciable tal que $h > 0$

Por cada inmersión se define un vector unitario en el campo normal $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ (el cual es espacial) donde se cumple $\langle N, N \rangle = 1$, donde la primera y la segunda forma fundamental de x se denota respectivamente por I y II son definidos de la siguiente manera:

$$I = \langle dX, dX \rangle$$

$$II = -\langle dN, dX \rangle$$

La superficie M se dice que minimal si $H = 0$ (cf. [11])

Observamos que $(M, [g])$ es una superficie de Lorentz. Considerar una carta local refinado (U, φ) y las coordenadas (u, v) determinadas por esta carta.

Entonces en estas coordenadas tenemos que:

$$g|_U = \lambda^2(du^2 - dv^2)$$

Significa que:

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0 \quad (*)$$

y

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \lambda^2 \quad (**)$$

Donde λ es una función diferenciable positiva en U . Para cada función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se define el Laplaciano de f por la fórmula

$\Delta f = - \star d \star df$ de donde se obtiene que:

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$$

Lema:

$$\Delta f = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Prueba:

Sea f diferenciable, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \right) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) + \tau \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \right) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \tau \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \tau \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ &= \Delta f \end{aligned}$$

Además, tenemos que $\Delta X = 2HN$, y podremos utilizarlo en las siguientes demostraciones.

D) Inmersión minimal

Una inmersión X es minimal sí y solo si $\frac{\partial X}{\partial z}$ es L - diferenciable.

Prueba.

De hecho, X es minimal sí y solo si $H = 0$ esto es:

$$0 = \Delta X = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial \partial X}{\partial \bar{z} \partial z}$$

El cual es equivalente a la propiedad que $\frac{\partial X}{\partial z}$ es diferenciable.

Ahora definiremos lo siguiente:

Definición 5.1.7.

Sea $X = (X_1, X_2, X_3)$, y definimos $\phi := \frac{\partial X}{\partial z}$; en particular

$$\phi_1 := \frac{\partial X_1}{\partial z}, \phi_2 := \frac{\partial X_2}{\partial z} \quad y \quad \phi_3 := \frac{\partial X_3}{\partial z}$$

Si X es una inmersión minimal de M en R_1^3 entonces:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0 \quad (3)$$

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle > 0 \quad (4)$$

Prueba. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 &= \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + t \frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u} + t \frac{\partial x_2}{\partial v}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + t \frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Que se comprueba (3). De otro lado tenemos:

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + 2t \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} + 2t \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u} + 2t \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \\
= & \frac{1}{4} \left(\left[\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right] \right) \\
& -\frac{1}{2} t \left[\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right] \\
= & \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \frac{1}{2} t \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle
\end{aligned}$$

de (*) y (**) tenemos que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$$

Probemos ahora $\langle \phi, \bar{\phi} \rangle > 0$

Sea

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \bar{\phi} \rangle &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial \bar{z}}; \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial u} - t \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} - t \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + t \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial u} - t \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - t \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + t \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - t^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left[\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - t \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + t \overline{\left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle} \right] \text{ de (*) y (**)} \\
&= \frac{1}{4} \left[\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \lambda^2
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\langle \phi, \bar{\phi} \rangle$ es siempre positivo y (4) se comprueba.

Proposición:

Supongamos que X es minimal. Entonces la fórmula:

$$\alpha|_U = \frac{\partial X}{\partial z} dz$$

Define una 1-forma L –diferenciable global sobre M .

Prueba. Siguiendo las propiedades de las aplicaciones L –diferenciables cuya definición de α está bien definido entonces no depende de la elección de las coordenadas refinadas en M . Es una formalidad la misma prueba como en el caso complejo.

E) Inmersión minimal conforme

TEOREMA 3

Sea $(M, [g])$ una superficie de Lorentz conexa junto con las cartas locales refinadas. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ L –diferenciable 1- forma en M tal que si α tiene la siguiente expresión $\alpha_j = \phi_j dz$ ($j = 1,2,3$) en una carta local refinada, entonces

$$(i) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$$

$$(ii) \quad \phi_1 \bar{\phi}_1 + \phi_2 \bar{\phi}_2 - \phi_3 \bar{\phi}_3 > 0$$

Además, asumimos que:

(iii) Las integrales $Re \int_{z_0}^z \alpha_j$ ($j = 1,2,3$) no dependen de la elección de una curva diferenciable seccionada conectando un punto z_0 de M y algún punto z de M .

Entonces la aplicación está definida por la siguiente fórmula.

$$X(z) = (Re \int_{z_0}^z \alpha_1, Re \int_{z_0}^z \alpha_2, Re \int_{z_0}^z \alpha_3) \quad (5)$$

Es una inmersión minimal conforme.

Prueba

Denotemos por $X_j = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_j}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_j \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Como $\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw$ es L – diferenciable

Denotemos $\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw = f(z)$

Por el corolario 1 tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \tau \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3)$$

Por (2) tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) \\ &= \operatorname{Re}(\phi_j(z)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial X_j}{\partial u} = \operatorname{Re}(\phi_j(z)) \quad \dots (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_j}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_j \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Por (3) se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) &= \operatorname{Re} \left(\tau \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{z_0}^z \phi_j(w) dw \right) \right) \\ &= \operatorname{Re}(\tau \phi_j(z)) \end{aligned}$$

$$= \text{Im}(\phi_j(z))$$

Reemplazando en (5): $\frac{\partial X_j}{\partial v} = \text{Im}(\phi_j(z)) \dots (6)$

De (4) y (6) se sigue que :

$$\phi_j(z) = 2 \frac{\partial X_j}{\partial z}$$

Como $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 &= \left(2 \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)^2 + \left(2 \frac{\partial X_2}{\partial z}\right)^2 - \left(2 \frac{\partial X_3}{\partial z}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_1}{\partial v}\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial X_2}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_2}{\partial v}\right)\right)^2 - \left(\left(\frac{\partial X_3}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u} + 2\tau \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \\ &2\tau \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial u} + 2\tau \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \frac{\partial X_3}{\partial v} \frac{\partial X_3}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial u} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial u} + \frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial v} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \\ &\quad + 2\tau \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

$$0 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + 2\tau \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle$$

Como $0 = 0 + \tau \cdot 0$

Esto implica que

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle, \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0 \dots (*)$$

Luego , como $\phi_1 \bar{\phi}_1 + \phi_2 \bar{\phi}_2 - \phi_3 \bar{\phi}_3 > 0$

$$\phi_1 \bar{\phi}_1 + \phi_2 \bar{\phi}_2 - \phi_3 \bar{\phi}_3 = 4 \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_1}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} - \tau \frac{\partial X_1}{\partial v}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + 4\left(\frac{\partial X_2}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_2}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial X_2}{\partial u} - \tau \frac{\partial X_2}{\partial v}\right) - 4\left(\frac{\partial X_3}{\partial u} + \tau \frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial X_3}{\partial u} - \tau \frac{\partial X_3}{\partial v}\right) \\
= & 4\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u} - \frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial u} - \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial u} - \frac{\partial X_3}{\partial v} \frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\right) \\
= & 4\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \frac{\partial X_2}{\partial u} - \frac{\partial X_3}{\partial u} \frac{\partial X_3}{\partial u} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial X_2}{\partial v} - \frac{\partial X_3}{\partial v} \frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\right) \\
\phi_1 \bar{\phi}_1 + \phi_2 \bar{\phi}_2 - \phi_3 \bar{\phi}_3 = & 4\left[\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle\right] > 0
\end{aligned}$$

Entonces se tiene:

$$\left[\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle\right] > 0 \dots (**)$$

Como $\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}; \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle$ por (*)

Luego, reemplazando en (**)

Se sigue que $\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle > 0 \dots (***)$

Veamos que sea una inmersión

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left| \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right|}$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle$$

Por (*) y (***)

$$\left| \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right| > 0, \text{ entonces } \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\| > 0$$

El cual implica que $\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$ entonces X es inmersión

Y por (*) se tiene que X es una inmersión conforme

Veamos que sea minimal

Para ello utilizaremos lo siguiente

Una inmersión X es minimal sí y solo si $\frac{\partial X}{\partial z}$ es L - diferenciable

tenemos $\phi_j = 2 \frac{\partial X_j}{\partial z}$, por hipótesis ϕ_j es L - diferenciable

entonces $\frac{\partial X_j}{\partial z}$ es L -diferenciable, en consecuencia X es minimal.

Por lo tanto, X es inmersión minimal conforme.

Teorema 4

Sea $(M, [g])$ una superficie conexa de Lorentz, ϕ un L -diferenciable 1-forma en M y g una aplicación L -diferenciable tal que $\phi\bar{\phi} < 0$ y $Img \neq 0$.

Supongamos también las que 1-formas $g\phi, \frac{1}{2}(1-g^2)\phi, \frac{1}{2}(1+g^2)\phi$ no tienen periodos reales. Nosotros fijamos un punto $z_0 \in M$ entonces la aplicación $X: M \rightarrow R_1^3$ definida por:

$$X(z) := \left(Re \int_{z_0}^z g\phi, Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1-g^2)\phi, Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1+g^2)\phi \right) \quad (10)$$

Es una inmersión minimal conforme.

Los diferenciales α_1, α_2 y α_3 satisfacen (i) del teorema 2 puede ser descritos de manera diferente que en (8). Supongamos que $(\alpha_2 - \alpha_3)_x(\xi) \notin K$ para todo $x \in M$ y $\xi \in T_x M$ con $\xi \neq 0$. Entonces tenemos

$$\phi := \alpha_2 - \alpha_3 \text{ y } g := \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3} \quad (11)$$

Recordemos las 1-formas:

$$\alpha_1 = g\phi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1-g^2)\phi, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}(1+g^2)\phi$$

Estas formas satisfacen (ii) del teorema 2 si y solo si otra vez

$$\phi\bar{\phi} < 0 \text{ y } Img \neq 0$$

Por otro lado las 1-formas α_1, α_2 y α_3 se describen de otra manera que es la siguiente; supongamos que $(\alpha_2 \pm \tau\alpha_3)_x(\xi) \notin K$ para todo $x \in M$ y $\xi \in T_x M$ con $\xi \neq 0$. Entonces ponemos

$$\phi := \alpha_2 \pm \tau\alpha_3 \text{ y } g := \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \pm \tau\alpha_3} \quad (12)$$

Recordando que las 1-formas: $\alpha_1 = g\phi, \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\phi, \alpha_3 = \pm \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\phi$ y verificando que $\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) \rangle = \frac{1}{2}\phi\bar{\phi}(1 + g\bar{g})^2$

Por lo tanto, la condición (ii) del teorema 2 es satisfecha si y solo si $\phi\bar{\phi} > 0$ y $(1 + g\bar{g}) \neq 0$. Tenemos la siguiente versión de nuestro teorema de representación.

F) Representación del teorema de Weierstrass

Teorema 5

Sea $(M, [g])$ una superficie conexa de Lorentz, ϕ una L diferenciable 1-forma en M y g una aplicación L – diferenciable tal que $\phi\bar{\phi} > 0$ y $(1 + g\bar{g}) \neq 0$. Supongamos también las 1-formas: $g\phi, \frac{1}{2}(1 - g^2)\phi$ y $\frac{\tau}{2}(1 + g^2)\phi$ no tienen periodos reales. Fijamos un punto $z_0 \in M$, entonces la aplicación $X: M \rightarrow R_1^3$ definida por

$$X(z) := \left(\operatorname{Re} \int_{z_0}^z g\phi, \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2)\phi, \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\phi \right) \quad (13)$$

es una inmersión minimal conforme.

Observación 4

Si $\alpha_2 \pm \alpha_3 \equiv 0$ o $\alpha_2 \pm \tau\alpha_3 \equiv 0$ entonces $\alpha_1 \equiv 0$ y la inmersión definida por la fórmula (5) tiene sus valores en un plano paralelo del plano $x_1 = 0$.

Observación 5

Consideremos una aplicación dada por (13) y suponiendo que

$1 + g(x)\bar{g}(x) = 0$, entonces x es un punto singular de X . De otro lado si $\phi\bar{\phi} < 0$ y un punto es no singular, entonces la restricción métrica $X^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ es conforme para $(-g)$

Aplicamos el teorema 4 para construir ejemplos de inmersiones minimales.

Ejemplo 5: (una analogía del helicoides)

Tenemos $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$, $g(z) = -\tau \exp(z)$ y $\phi = \exp(-z)dz$

Entonces g y ϕ son L -diferenciable. Además

$$\exp(-z) \overline{\exp(-z)} = \exp(-2\operatorname{Re} z) > 0$$

y entonces $\phi \bar{\phi} > 0$, por otro lado

$$1 + g(z) \overline{g(z)} = 1 - \exp(2\operatorname{Re} z) \neq 0$$

Para $z \in L$ aplicaremos (13) y obtenemos: $\alpha_1 = z dz, \alpha_2 = -\operatorname{sen} z dz,$

$$\alpha_3 = -\tau \operatorname{cos} z dz.$$

Tenemos que las 1-formas son L -diferenciables en un dominio simplemente conexo. Por tanto, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ no tienen periodos reales imaginarios.

Tenemos que:

$$\int_0^z \alpha_1 = -\tau z, \int_0^z \alpha_2 = -\operatorname{cos} z, \int_0^z \alpha_3 = \tau \operatorname{sen} z$$

Aplicamos la fórmula (13) y tenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \operatorname{Re}(-\tau z, -\operatorname{cos} z, \tau \operatorname{sen} z) \\ &= (-\operatorname{Im} z, -\operatorname{Re}(\operatorname{cos} z), \operatorname{Im}(\operatorname{sen} z)) \end{aligned}$$

La aplicación del ejemplo 3 nos permite tener la siguiente fórmula explícita para la inmersión minimal

$$X(u + \tau v) = \left(-v, -\frac{\cosh(u + v) + \cosh(u - v)}{2}, \frac{\operatorname{senh}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)}{2} \right)$$

EJEMPLO 6 (Un análogo del catenoide)

Suponiendo que $M = \mathbb{L}$, $\phi = -\exp(z) dz$ y $g(z) = -\exp(z)$ entonces para cada $z \in \mathbb{L}$ tenemos que $\phi \bar{\phi} = \exp(-2\operatorname{Re} z) > 0$, $1 + g \bar{g} = 1 + \exp(2\operatorname{Re} z) \neq 0$.

Observamos las siguiente 1-formas

$$\alpha_1 = g\phi = dz$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\phi = \text{senz}dz$$

$$\alpha_3 = \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\phi = -\text{cosz}dz$$

Son L –diferenciables en todo L y sin periodos. Integrando tenemos que

$$\int_0^z \alpha_1 = z, \int_0^z \alpha_2 = \text{cosz}, \int_0^z \alpha_3 = -\tau \text{senz}$$

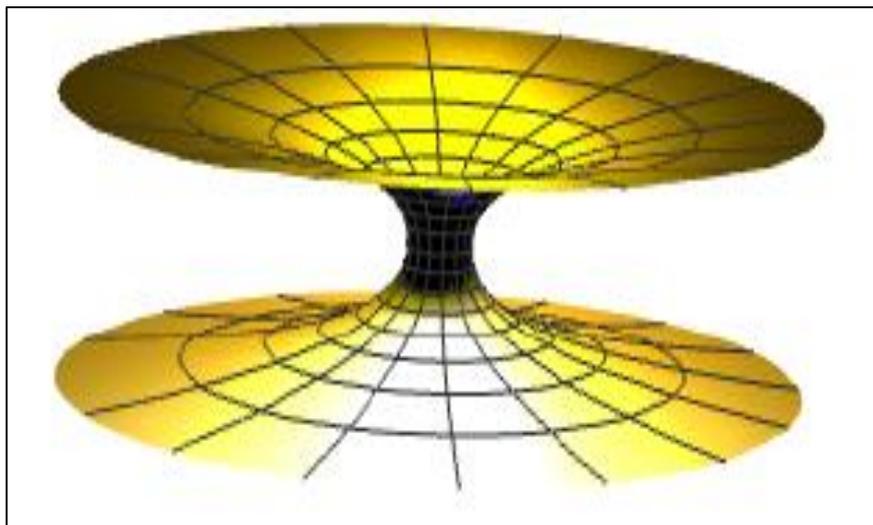
Aplicando la fórmula (13) tenemos la siguiente inmersión minimal conforme

$$\begin{aligned} X(z) &= \text{Re}(z, \text{cosz}, -\text{senz}) \\ &= (\text{Rez}, \text{Re}(\text{cosz}), -\text{Im}(\text{senz})) \end{aligned}$$

Aplicando el ejercicio 3 tenemos

$$X(u + \tau v) = \left(-u, -\frac{\cosh(u + v) + \cosh(u - v)}{2}, \frac{\sinh(u - v) - \text{sen}(u + v)}{2} \right)$$

Fig. 3 Helicoide



EJEMPLO 7 (un análogo de la superficie de Enneper)

Consideramos $M = \{z \in L: z\bar{z} \neq 0\}$, y definimos $g(z) := z$, $\phi := dz$.

Entonces para cada $z \in M$ tenemos

$$\phi\bar{\phi} = \exp(-2\operatorname{Re}z) > 0,$$

$$\phi\bar{\phi} = 1, \quad 1 + g(z)\bar{g}(z) \neq 0.$$

Usando la igualdad (12) obtenemos:

$$\alpha_1 = g\phi = z dz$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\phi = \frac{1}{2}(1 - z^2) dz$$

$$\alpha_3 = \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\phi = \frac{\tau}{2}(1 + z^2) dz$$

Las 1-formas mostradas arriba son L-diferenciables en todo L, por tanto, no tienen periodos reales ni imaginarios. Por tanto, tenemos

$$\int_0^z \alpha_1 = \frac{z^2}{2}, \quad \int_0^z \alpha_2 = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{6}, \quad \int_0^z \alpha_3 = \tau \frac{z}{2} - \tau \frac{z^3}{6}$$

De la fórmula (13) tenemos la inmersión inducida minimal conforme es:

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} \frac{z^2}{2}, \operatorname{Re} \left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{6} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{z}{2} + \frac{z^3}{6} \right) \right)$$

La fórmula explícita para esta superficie es la siguiente:

$$X(u + \tau v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6} - \frac{uv^2}{2}, \frac{v}{2} + \frac{v^3}{6} - \frac{u^2v}{2} \right)$$

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de la hipótesis

De acuerdo con los resultados estudiados en los teoremas 1, 2, 3 y 4 de diferenciabilidad en los números de Lorentz, superficies minimales conforme, verificamos gracias a los teoremas probados, que las hipótesis específicas planteadas son verdaderas.

6.2 Contrastación de los resultados con estudios similares

Fernández (2006) en su tesis se planteó el objetivo principal de esta memoria, al estudio de las superficies minimales propiamente embebidas, en nuestra investigación determinamos una inmersión minimal en L y observamos que al realizar definiciones diferentes concordamos en la condición necesaria de la curvatura media igual a cero.

Mezzera (2014) en su tesis "Geometría Lorentziana y singularidades se planteó como objetivo principal el estudiar un resultado de la relatividad general, para ello estudiaremos variedades semi-Riemannianas y las características principales a ser utilizadas como geodésicas y curvatura, fue un gran aporte en nuestra investigación, pues nos mostró resultados de la geometría lorentziana.

Berrocal (2007) en su tesis "Representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas" realiza una demostración de la representación canónica teniendo como bases teóricas las superficies mínimas funciones armónicas y coordenadas isotérmicas, las cuales son utilizadas en la presente investigación, siendo ellas adaptadas para trabajar sobre el espacio de Lorentz.

Alarcón (2018) en su tesis “Superficies minimales completas en el Espacio Euclideo”, se hace uso de definiciones importantes de las superficies minimales y sus definiciones, con las cuales también concordamos en nuestro trabajo y hacemos uso de ellas.

6.3 Responsabilidad ética

Responsabilidad ética personal

La responsabilidad ética presentada es el compromiso personal de compartir una investigación clara, precisa e íntegra, que fomente la investigación y aporte a la cultura.

Como una persona que promueve los valores, este trabajo ha sido realizado con esfuerzo y dedicación.

Responsabilidad ética social

La presente investigación por su carácter básico tiene la responsabilidad de brindar un aporte a la sociedad, brindando herramientas que ayuden en posteriores investigaciones, presentando conceptos y bibliografía útil para los estudiantes.

Responsabilidad ética profesional

La presente investigación busca incentivar la investigación, es por eso que se acredita que la presente investigación es genuina, no habiendo usado de manera irregular los textos que han sido necesarios, siendo estos textos debidamente citados y declarados en la bibliografía.

CONCLUSIONES

Primera

Por los teoremas demostrados concluimos que es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

Segunda

Por el teorema dos decimos que si es posible realizar una inmersión minimal en superficies de Lorentz.

Tercera

Por el teorema 4 decimos que si es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad pseudo-Riemannianas M , con una pseudo-métrica.

Cuarta

La representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz, nos muestra que condiciones debemos tener en cuenta para construir más ejemplos de superficies mínimas de los pocos ya conocidos.

RECOMENDACIONES

Primera

Se recomienda ampliar y seguir promoviendo la investigación en el tema una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz, en el cual se ha encontrado aplicaciones útiles.

Segunda

En futuras investigaciones se recomienda ampliar la investigación sobre otros espacios para poder encontrar más ejemplos de superficies minimales, ya que hasta ahora se han encontrado pocos.

Tercero

La representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz es un buen ejemplo en la cual podemos ver la interacción entre dos campos de la matemática que son la teoría Compleja y la Geometría, es por ello que se recomienda continuar con investigaciones que permitan utilizar la interacción de diversos campos en pre grado.

Cuarta

Se recomienda que en el curso de geometría se imparta temas afines a inmersión minimal y superficies de Lorentz, temas que ayudarán a tener un mayor panorama de las aplicaciones de la matemática del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alarcón, A. (2008). *Superficies Minimales Completas en el Espacio Euclídea (tesis doctoral)*. Universidad de Granada. Granada, España.
- [2] Barbosa, J.L.M., Colares A.G.,(1986) *Minimal submanifolds in R^3* . Barcelona, España: Springer-Verlag.
- [3] Fernández, I. (2006). *Superficies maximales con singularidades aisladas (tesis doctoral)* Universidad de Granada. Granada, España.
- [4] Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación (5ª Ed.)*. México: McGraw Hill.
- [5] Hoffman D. y Karcher, H. (1997) *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. New York, Estados Unidos: Springer-Verlag.
- [6] Berrocal N. (2017) *"Representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas"(tesis licenciatura)*. Universidad Nacional de San Cristobal de Huamanga. Ayacucho, Perú.
- [7] Manfredo, P. (1988). *Geometría Riemanniana*. Rio de Janeiro, Brazil: Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA).
- [8] Manfredo, P (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Mineola, Nueva York: Dobler publications.
- [9] Mezzera, C. (2014). "Geometría Lorentziana y singularidades" (tesis de pregado). Universidad de la Republica, Montevideo, Uruguay.
- [10] Ritoré, M.(1994). *Superficie con curvatura media constante* (tesis doctoral) Universidad de Granada. Granada, España.
- [11] Valderrama, S. (2013). Pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica. Lima, Perú: San Marcos.
- [12] Weinstein, T., *An introduction to Lorentz* (1996). Nueva York, Estados Unidos: De Gruyter expositions in math.

[13] Birman, G y Desideri G (2012) Una introducción a la geometría de Lorentz, instituto de matemática (INMABB) CONICET / Universidad Nacional del Sur Bahía Blanca – Argentina.

[14] Chadic, J (2017) Weierstrass Representation for Minimal Surfaces A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts in Mathematics.

[15] Neto, L , A., (2008) Fungoes de uma varidvel complexa. Brasil, Projeto Euclides.

[16] Teneblat, K. , (2008) Introdugdo a geometria diferencial, Brasil, Editora Edgard Blucher Ltda.

[17] Osserman, R., (1896) A Survey of Minimal Surfaces, USA, Dover Publications, Inc.

[18] Do Carmo, M., (2007) Geometria Diferencial de Curvas y Superficies, Espana, Alianza Universidad Textos.

ANEXO

Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA Y POBLACIÓN
<p>Problema Principal</p> <p>¿Es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass para las superficies de Lorentz?</p> <p>Problema Específico</p> <p>¿Es posible realizar una inmersión minimal en L?</p> <p>¿Es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad Riemanniana M, con una pseudo-métrica $[g]$?</p>	<p>Objetivo General</p> <p>Determinar una representación del teorema de Weierstrass para superficies de Lorentz.</p> <p>Objetivo Específico</p> <p>Determinar una inmersión minimal en L</p> <p>Verificar la representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad Riemanniana M, con una pseudo-métrica $[g]$.</p>	<p>Hipótesis General</p> <p>Si es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass para las superficies de Lorentz</p> <p>Hipótesis Específica</p> <p>Si es posible realizar una inmersión minimal en L</p> <p>Si es posible realizar una representación del teorema de Weierstrass sobre una variedad Riemanniana M, con una pseudo-métrica $[g]$.</p>	<p>Tipo de investigación</p> <p>El presente trabajo de investigación es de tipo básica.</p> <p>Diseño de investigación</p> <p>La presente investigación tiene un diseño no experimental.</p> <p>El método a utilizar es el Método deductivo</p> <p>Población y muestra</p> <p>Debido a la abstracción de la tesis, la presente investigación no presenta población por lo tanto tampoco muestra.</p> <p>Técnicas e instrumentos de recolección de datos</p> <p>Para la realización de nuestro trabajo se revisará bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada con la representación del teorema de Weierstrass.</p> <p>Plan de análisis estadísticos de datos</p> <p>Debido a la abstracción de la tesis, la presente investigación no requiere plan de análisis estadístico de datos.</p>