UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACION DE LA FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE ARQUÍMEDES HASTA LEIBNIZ, COMO UN PROCESO DE APRENDIZAJE PARA ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO"

AUTOR:

ANA MARIA REYNA SEGURA

Callao, 2019.

PERÚ

ÍNDICE

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

ÍNDICE

DE GRAFICOS

ÍNDICE

DE FIGURAS

RESUMEN

En el avance de la ciencia, el modelamiento de todos los procesos hoy en día constituye una herramienta fundamental e imprescindible en la ingeniería, de allí la importancia del estudio de los teoremas para lograr la comprensión de los mismos y su aplicación en problemas reales, uno de esos teoremas es el Teorema Fundamental del Cálculo.

El objetivo general de esta investigación es la caracterización de los conocimientos de procesos de aprendizaje del cálculo integral, mediante el Teorema Fundamental del Cálculo para la formación de profesionales en ingeniería.

La determinación de los conocimientos aportados por la investigación en el aprendizaje del cálculo se hace mediante estudios documentales de un estudio histórico - epistemológico orientado hacia la reconstrucción de los significados parciales de la integral y su articulación para los alumnos de la carrera de ingeniería de la Universidad Nacional del Callao los cuales necesitan de este conocimiento, porque al contribuir con las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz llevaremos a este a una comprensión por parte de los estudiantes.

Se trata de una investigación cualitativa- cuantitativa, basada en el estudio de un contenido matemático y un contexto educativo, que aplica y pone de manifiesto la importancia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La comprensión de este Teorema, llevará al alumno de la carrera de ingeniería que los cursos impartidos en lo correspondiente al área de las matemáticas, no están aislados sino son un solo conocimiento, el cual lo validaran en el transcurso de su carrera y vida profesional.

Palabras claves: Modelamiento. Aprendizaje, Enseñanza, epistemológico.

ABSTRACT

In the advancement of science, the modeling of all processes today is a fundamental and essential tool in engineering, hence the importance of the study of theorems to achieve understanding of them and their application in real problems, one of these theorems is the Fundamental Theorem of Calculus.

The general objective of this research is the characterization of the knowledge of learning processes of integral calculus, by means of the Fundamental Theorem of Calculus for the training of professionals in engineering.

The determination of the knowledge contributed by the investigation in the learning of the calculation is done through documentary studies of a historical - epistemological study oriented towards the reconstruction of the partial meanings of the integral and its articulation for the students of the engineering career of the University National del Callao which need this knowledge, because when contributing with the ideas of genesis of the Fundamental Theorem of Calculus from Archimedes to Newton and Leibniz we will take this to an understanding by the students.

It is a qualitative-quantitative research, based on the study of a mathematical content and an educational context, which applies and highlights the importance of teaching and learning processes in mathematics.

The understanding of this Theorem will lead the student of the engineering career that the courses taught in the area of mathematics, are not isolated but are a single knowledge, which will validate in the course of his career and professional life.

Keywords: Modeling. Learning, Teaching, epistemological.

INTRODUCCIÓN

El Teorema Fundamental del cálculo, es uno de esos teoremas y juega un rol importante en el estudio de la matemática, pues es el que, relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral.

Desde el punto de vista académico tiene gran importancia, pues dado que los cursos de las diversas carreras de ingeniería carrera es un tópico fundamental, se pueden generar artículos de investigación inéditos, para las diversas formas de operación que participan en los procesos que ayuden a modelar estos.

Esta falta de comprensión se manifiesta en el alto porcentaje de desaprobados en las asignaturas de matemática en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao y en la no aplicación de los teoremas dentro del curso de su carrera profesional esto lleva a plantearnos diversos problemas los cuales debemos afrontar como educadores.

Los resultados de la investigación permitirán ampliar los conocimientos sobre este tema, principalmente en la integral definida, que se aplicara en los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química y en la cual para nuestro estudio y en particular para la aplicación de técnicas de nuestros docentes.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática.

El proceso del estudio del cálculo en general es complejo y se requiere de estudios que aporten nuevos conocimientos sobre estos temas, en particular aquellos que contribuyan con el proceso de aprendizaje sobre los contenidos matemáticos para los estudiantes universitarios.

La Universidad Nacional del Callao dentro de su nuevo modelo educativo contempla el aprendizaje por competencias; una de ellas es el entender los conceptos, definiciones, teoremas y poderlos aplicar en el transcurso de toda su carrera y vida profesional.

Los alumnos de los cursos de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, una de las dificultades que presentan es la comprensión, entendimiento y aplicación de muchos de los teoremas que se exponen dentro del dictado de las asignaturas correspondientes al área de la matemática. El Teorema Fundamental del cálculo, es uno de esos teoremas y juega un rol importante en el estudio de la matemática, pues es el que, relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral y que presentan los estudiantes con respecto a este tema.

Esta falta de comprensión se manifiesta en el alto porcentaje de desaprobados debido a las en las asignaturas de matemática en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao y en la no aplicación de los teoremas dentro del curso de su carrera profesional.

1.2 Formulación y planteamiento del problema

1.2.1 Problema General

¿Cómo es el proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao?

1.2.2 Problemas Específicos

¿Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz contribuirán a esa comprensión? .

¿Los diversos mecanismos cognitivos proporcionados a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo convertirán a este en un conocimiento útil?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

Determinar el proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Determinar el proceso de aprendizaje antes de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

2. Determinar el proceso de aprendizaje después de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

1.4 Limitantes de la investigación

1.4.1 Limitantes teóricas

Existe abundante material sobre el aprendizaje a nivel de estudios primarios y secundarios, pero en referencia a la enseñanza y/o aprendizaje de Cálculo a nivel universitario, en particular a las ideas genéricas del Teorema Fundamental del Calculo como un aprendizaje para los alumnos es escasa, en particular como aplicación para las carreras de ingeniería que es lo que hace falta en nuestros alumnos.

1.4.2 Limitantes temporales

Uno de los limitantes al cual considerar es el tiempo pues para la implementación de la investigación y el poder ejecutar esta es necesario más periodos de estudio en particular unos cuatro semestres académicos para considerar un estudio profundo con implicancias a futuro, tanto para los docentes como los alumnos en particular en las carreras de ingeniería.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

2.1.1 Internacionales

Robles, Tellechea y Font (2014) en su trabajo de investigación: *Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo,* presenta el diseño de una secuencia didáctica de tareas orientada a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en los primeros cursos universitarios que, asumiendo la complejidad y la articulación de nociones y objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), promueva, mediante la utilización de ambientes interactivos que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura, el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial que desempeña en el estudio del Cálculo. Para el diseño de las tareas, se han tenido en cuenta los criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Con esta propuesta, lo que quiere propiciar que el estudiante descubra, con base en su propia intuición, los elementos que le permitirán entender el papel fundamental del TFC en la articulación del Cálculo, buscando ir más allá de lo que, con frecuencia, constituye el único logro al final de un curso de Cálculo Integral desde el contexto exclusivo de las representaciones analíticas: si se deriva la función integral se obtiene la función que se integra. Pero además de tener en cuenta la complejidad y la articulación, con las tareas diseñadas buscamos favorecer el desarrollo de procesos esenciales de las Matemáticas.

Edson Crisóstomo Dos Santos (2012), en su artículo *As ideias envolvidas da gênese do Teorema Fundamental do Calculo de Arquimides a Newton y Leibniz* estudia casos de un contenido matemático y un contexto educativo particulares, que aplica y desarrolla las categorías de análisis del enfoque que articula diversas aproximaciones y modelos teóricos del conocimiento y la instrucción matemática, y de manera más específica la noción de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concluyendo que la interacción entre los estudiantes universitarios que van a cumplir deberes y va a tener derechos (discentes), se produce, por medio de la realización de actividades asignadas por sus profesores; estas actividades suelen ser realizadas en clase. Cuando se trata del desarrollo de un proyecto por los estudiantes, sin embargo; necesitan los estudiantes dedicarles, además, un considerable tiempo extra de clase. Los profesores-formadores, en sus comentarios sobre el proceso de aprendizaje discente han dado a notar la importancia del desarrollo de actividades en grupo por parte de los estudiantes.

2.1.2 Nacionales

Brian Joel Valenzuela Pagaza (2018) en su trabajo: *Una perspectiva del Teorema Fundamental del Cálculo basado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica con estudiantes de Ingeniería,* tiene como objetivo analizar la coordinación de las representaciones en los Registros de Representación Semiótica: gráfico-algebraico-lengua natural, que los estudiantes de Ingeniería, realizan cuando desarrollan una situación problema relacionada al TFC. La Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995), les proporciona herramientas valiosas y necesarias para comprender e interpretar las transformaciones realizadas por los sujetos de investigación cuando desarrollan una situación problema relacionada al Teorema Fundamental del cálculo. Finalmente, para analizar los resultados obtenidos de la situación problema, confrontamos el análisis a priori con el análisis a posteriori, característica de la investigación didáctica, para observar si los resultados fueron o no los previstos por el investigador.

2.2 Bases Teóricas

2.2.1 Génesis del Teorema Fundamental del Cálculo

Newton y Leibniz abordaron los cuatro principales problemas, pero basados en dos conceptos generales (conocidos actualmente como Derivada e Integral) (Grabiner, 1983, p.199). Su mayor contribución dentro del Cálculo

fue, el hecho de haber reconocido con claridad las relaciones de reciprocidad entre los problemas de cuadraturas y de tangentes. Es por esta razón que, el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), suele atribuirse a estos dos grandes matemáticos.

No se puede entender el nacimiento del Teorema fundamental del Calculo sin antes tener un conocimiento de ciertos preceptos que nos darán luz sobre la existencia de este teorema (Reyna, 2017).

Se plantean pensamientos filosóficos que aparecerán surgirán en Grecia a partir del siglo VI A.C.; aquí se podrán distinguir cuatro tendencias o escuelas filosóficas que tendrán mucha influencia en la formación de los conocimientos matemáticos que de alguna manera contribuyeron a la construcción de este teorema (Reyna, 2017).

En este estudio se tratará sobre, las grandezas inconmensurables, el cual es un estudio filosófico con respecto a la mediada y su evolución en el cálculo, así como las contribuciones de Eudoxo (390. a.C. a 320 a.C.) el cual define una igualdad entre dos razones de una manera engañosa, esta es una contribución al cálculo (Reyna, 2017).

Es en este periodo del siglo VI. a.C. que tienen origen los tres grandes problemas de construcción geométrica y cuya tentativa de solución contribuirán al desarrollo de la matemática en el transcurso de estos periodos de tiempo, así la cuadratura del círculo es una aplicación del *método de exautación* de Eudoxo (390. a.C. a 320 a.C.). Una tentativa de respuesta a la cuadratura del círculo responde a un problema que cuestiona la comparación entre segmentos de recta y segmentos curvilíneos (Reyna, 2017).

En el transcurso de este estudio llegamos a Arquímedes (287. a.C. a 212 a.C.). y Apolonio (262. a.C. a 190a.C.) que nos resolverán dos problemas que son la base del teorema fundamental del Cálculo.
En Arquímedes buscamos los elementos que nos van a dar los gérmenes del concepto de integral a partir de la cuadratura del círculo y con Apolonio las trazadas las rectas tangentes, que más adelante nos llevaran al estudio de las rectas tangentes trazadas a una curva como una forma natural y luego nos llevara el estudio de la derivada como las inclinaciones de las tangentes a las curvas (Reyna, 2017).

Pasando luego al renacimiento en Europa que nos lleva al estudio más profundo de la matemática y su contribución y esto desde la aparición de la imprenta en 1450 y a partir de 1453 con la creación de un centro cultural en Constantinopla dominado por los turcos el cual permite la fuga de talentos a Europa (Reyna, 2017).

2.2.2 Precepción del teorema Fundamental del Cálculo desde Leibniz hasta Newton

- **Gotfried Wilhem Leibniz** (1646-1716) era hijo del vice-presidente de la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig. De joven, estudió filosofía, derecho y lenguas clásicas. Su principal interés estuvo centrado en desarrollar una especie de lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados. Esta idea filosófica, que tiene relación con la combinatoria, fue ya algo en parte elaborada por franciscano mallorquín Ramón Llull (1235-1316) en su *Arte Luliano.*

Poco después de acabar sus estudios, Leibniz empezó en 1672 una misión diplomática en Paris donde permanecería unos cuatro años hasta 1676. Allí conoció a numerosos filósofos y miembros de la alta sociedad, en particular al holandés C. Huygens (1629-1695), entonces miembro de la recién creada *Académie Royale des Sciences.* Como curiosidad Huygens le planteó a Leibniz que hallara la suma de los inversos de los números triangulares. Mediante sumas y diferencias Leibniz fue capaz de hallar la suma de esta serie y entonces creció su interés en estudiar matemáticas, cuya formación hasta entonces había sido muy escasa. Huygens le recomendó que leyera la renovada edición en latín de van Schooten de la *Géometrie* de Descartes y los trabajos de Pascal. La entrada matemática de Leibniz fue entonces impresionante, ya que le llevó al descubrimiento del cálculo en 1675 y su elaboración y publicación de los artículos del *Acta Eruditorum (2)* después en 1684 y 1686, el primero sobre cálculo diferencial y el segundo sobre cálculo integral.

Leibniz pasó la mayor parte del resto de su vida en Alemania, como consejero del duque de Hannover. Aparte de la invención y del desarrollo de su cálculo y en la solución de problemas geométricos y de ecuaciones diferenciales, Leibniz tiene otros trabajos en *solvabilidad de ecuaciones y determinantes*, así contribuyó enormemente en prácticamente todos los campos del conocimiento humano, religión, política, historia, física, mecánica, tecnología, lógica, geología, lingüística e historia natural.

Los artículos de *Acta de Leibniz* de 1684 y 1686 fueron leídos por los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, ellos comprendieron notablemente el simbolismo y los conceptos de Leibniz y a partir de 1690 publicaron varios artículos en *Acta*. En pocos años numerosos problemas en los que el nuevo cálculo demostró toda su fuerza, Leibniz y los hermanos Bernoulli, al publicar sus trabajos tales como el de la *isocrona*, la *catenaria*, la *tractriz*, la *isocrona paracéntrica* o la *braquistocrona.(* Frank J. Swetz- 1999)

El cálculo de Leibniz en el Teorema Fundamental.

Leibniz aplico a la geometría sus observaciones: que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro.
Consideremos una curva como la de la figura donde aparece una sucesión de ordenadas equidistantes $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

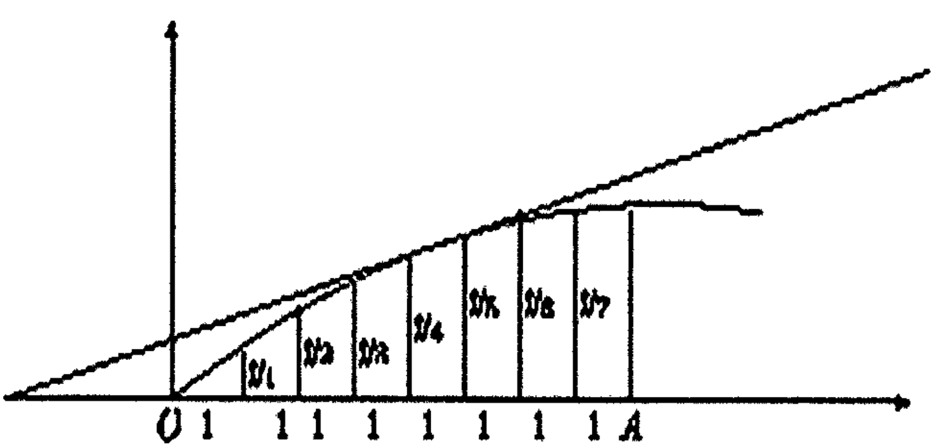


Grafico 1: Sucesión de ordenadas
Fuente: Elaboración propia

Si suponemos que la distancia entre estas ordenadas es 1, entonces su suma $y_1,+ y_2 + y_3 + \cdots +$ es una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas y'_i da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanta más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir *infinitamente pequeña*, entonces las aproximaciones serían exactas, la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. De esta forma y por su analogía con las sucesiones numéricas, Leibniz observa que la determinación de cuadraturas y el cálculo de tangentes son operaciones inversas la una de la otra; Con sus propias palabras Leibniz aborda el problema de la cuadratura como:

"Demostrare *ahora que el problema general de cuadraturas puede ser reducido al de encontrar una línea que tiene una ley de tangencia dada*" (Struik 1969)

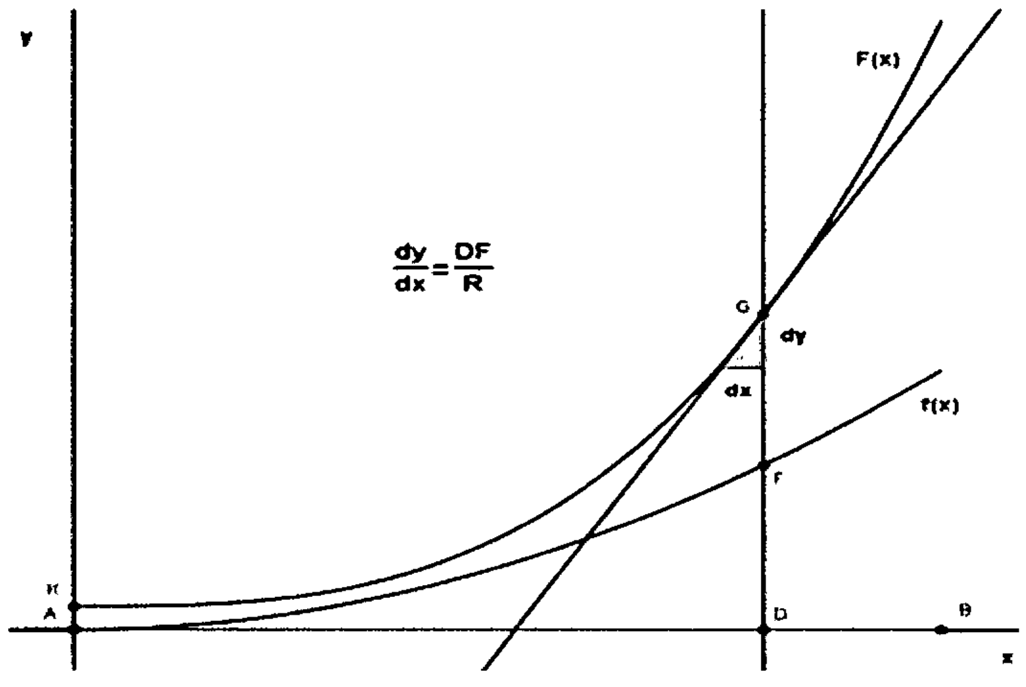


Gráfico 2 Construcción de triangulo proporcional
Fuente: Elaboración propia

Las interpretaciones modernas de las ideas de Leibniz se pueden expresar como:

Newton y la versión del Teorema Fundamental del Cálculo

Leibniz abordo el problema de las cuadraturas para llevarnos al Teorema fundamental del Cálculo, Newton este problema lo abordo como un método para calcular el área bajo la curva el cual lo estableció en su trabajo De *analysi per a equationes numero terminorum infinitas*, lo que manifestó de la siguiente manera:

Tomemos en el eje y la ordenada $\overline{BD}$ perpendicular a la base $\overline{AB}$ de alguna curva AD y sean $AB = x$ y $BD = y$. Sean *a, b, c, ...* cantidades dadas y *m, n* enteros.
Regla 1. Si $y = a\,x^{m/n}$, entonces el área de la región ABD es $\frac{an}{m+n}x^{m+n/n}$
(Whiteside, 1968, p. 207)

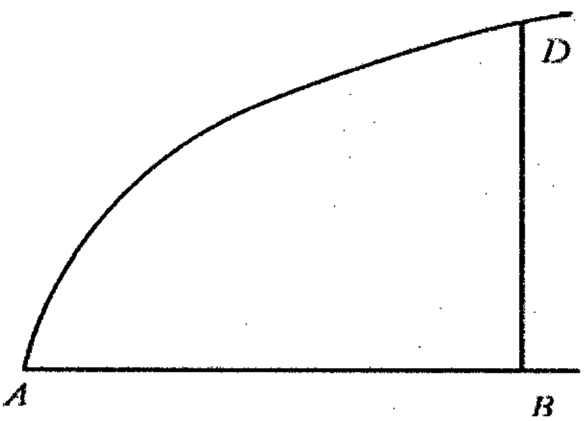


Gráfico 4. Construcción de curva
Fuente: Elaboración propia

Podemos establecer una correspondencia con la matemática moderna estableciendo la relación, al punto A como el origen, es decir A=(0,0),,mientras que al punto B como el punto (x,0) y la curva AD. Como $y = a\,x^{m/n}$.

Desde este punto de vista se pude establecer el enunciado de Newton:

$$\int_0^x a\,t^{m/n}\,dt = \frac{a\,x^{(m/n)+1}}{(m/n)+1} = \frac{am}{m+n}x^{(m+n/n)}$$

Esta demostración de la Regla 1, Newton la presenta en su trabajo hasta el final de la misma.

Forma general de los argumentos de Newton para el Teorema Fundamental del Calculo En el grafico siguiente se tiene:

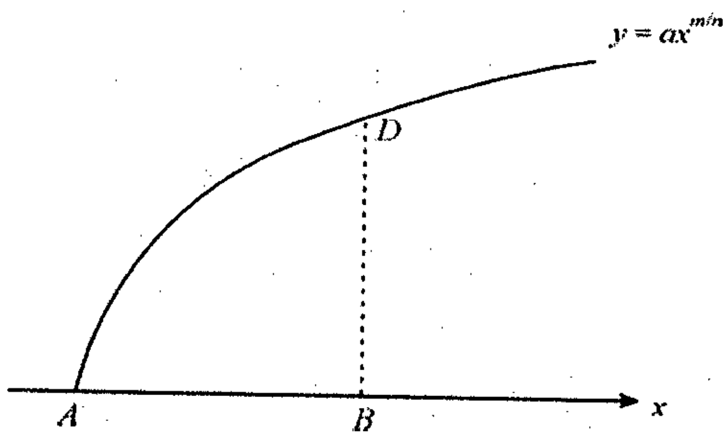


Gráfico 5. Construcción de curva y función
Fuente: Elaboración propia

Sea AD la curva con $AB = x$; Newton asumió que el área ABD bajo la curva estaba dada por la expresión:

$$z(x) = \int_0^x y(t)\,dt$$

A partir de esta expresión, Newton procedió a demostrar: $y \ = a\ x^{m/n}$

Newton, con este estudio, introdujo otra técnica para resolver problemas de cuadraturas, el uso la deducción, pues a partir de casos particulares dedujo que la cuadratura de un fluente (una curva expresada analíticamente), se podía calcular encontrando una fórmula cuya fluxión correspondía a ese fluente.

Podríamos decir que esta demostración se puede interpretar; como que Newton calculó el área de una función f continua en el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, encontrando primero una primitiva de f , talque se encuentra primero una primitiva de f es decir una F , talque $F'(x) = f(x)$ para todo x que pertenece a $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, para después establecer que el área es igual a:

$$. F(b) - F(a)$$

Newton fue capaz de desarrollar esta técnica debido a que se había percatado de las interrelaciones de los conceptos de fluentes y fluxiones. Sin embargo, no dio una demostración rigurosa de tal hecho. (Edwards, 1979, p. 196).

El Teorema Fundamental del Cálculo

El inicio del Teorema fundamental del Cálculo, se dio mediante un aspecto dinámico a partir de las investigaciones medievales y en un contexto puramente geométrico. En los siglos XVII y XVIII, se convirtió en una herramienta eficaz para el cálculo de áreas bajo curvas de funciones continuas ya que en ese siglo se realizaron estudios sobre este tema. Así, Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1726) de manera independiente cada uno descubrió la relación recíproca entre la derivada y la integral y se estudió esto para fundamentar el cálculo diferencial y el cálculo integral (Reyna, 2017).

Pero aun en los siglos XVIII y XIX el problema de integración era considerado como un problema de anti derivación, que en términos modernos era el cálculo de funciones primitivas. Durante el siglo XVIII se había considerado la integración como la operación inversa de la diferenciación y se abandonó el sentido geométrico de integral como área. Louis Cauchy (1789-1857) quien observó que una función podía tener un área bien definida aun de no ser derivable en un punto e incluso no continua. Esto le llevó a definir la integral definida como el límite analítico, no geométrico, de las sumas integrales así:

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x_n - x_n - 1)f(x_n - 1).$$

Para Cauchy, la integral definida es el límite, S, de las sumas S_n cuando las longitudes de los intervalos disminuyen indefinidamente.

En el siglo XIX en que se estableció formalmente el Teorema Fundamental del Calculo con base en la definición de integral definida como límite de sumas y finalmente se extendió su uso para funciones más generales en el siglo XX, así nombres como Darboux, Riemann, Lebesgue son sobradamente conocidos y su aporte constituye la base del análisis actual.

El Teorema Fundamental del Calculo (**TFC**) es de gran importancia para nuestros estudiantes, pues este teorema nos relaciona el cálculo integral con el cálculo diferencial; de allí la importancia del teorema en el estudio de la matemática y su comprensión por parte de los estudiantes (Reyna, 2017).

El TFC establece las condiciones que debe cumplir una función para que sea integrable y eso nos lleva a enunciar ell teorema:

Teorema (TFC)

Sea $f: [a, b] \to R$ ***una función integrable, si*** f ***es continua entonces una función*** $F(x) = \int_a^x dt$ ***para*** x ***en*** $[a, b]$***, entonces es derivable en*** $F'(x) = f(x)$.

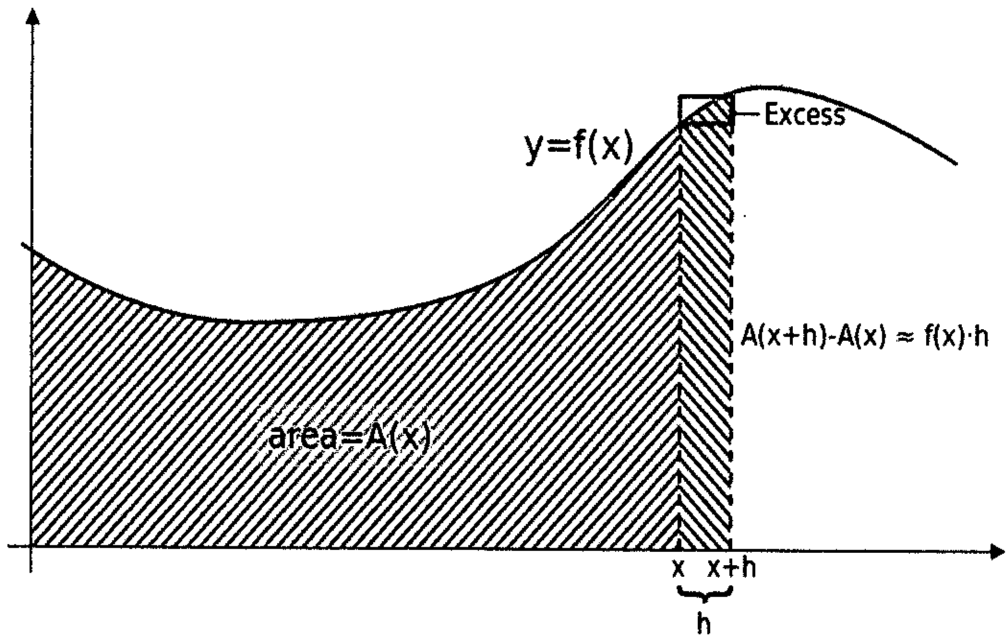


Gráfico 6. Interpretación Geométrica del TFC
Fuente: Elaboración propia

En otras palabras, el teorema afirma que en esas condiciones F es una primitiva de f .

El teorema afirma que si una función es continua esta tendrá una primitiva y además estas se difieren en una constante.

Demostración. Sea $P = \{x0, x1, x2, \ldots, xn\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$.

$$\sum_1^n G(x_i) - G(x_i - 1)] = G(x_1) - G(x_0) + G(x_2) - G(x_1) + \ldots + G(x_n) - G(x_n - 1) = G(b) - G(a)$$

Por el teorema del valor medio, en cada sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe un a_i, interior, tal que $G(x_i) - G(x_i - 1) = G'(\alpha i)\Delta v$ y, por ser G una primitiva de f, entonces $G(x_i) - G(x_i - 1) = f(\alpha i)\Delta\, x_i$. Por tanto,n

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(\alpha\, i\,)\Delta x_i = G(b) - G(a)$$

Como las sumas de Riemann están acotadas, entonces,

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f\,(\alpha\, i\,)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S\,(P, f\,)$$

Por otra parte, como P es una partición arbitraria

$$Inferior \int f(x)dx \le G(b) - G(a) \le Superior \int f(x)dx$$

Finalmente, el hecho de que f es integrable termina la prueba.

2.3. Conceptual

Mecanismos Cognitivos

El estudio de los mecanismos cognitivos nos lleva al estudio de la ampliamente conocida y utilizada taxonomía de objetivos educativos de Bloom fue presentada en 1956 por su autor, Benjamín Bloom, psicólogo y Doctor en Educación, y en ese tiempo Director Asociado del Consejo de Examinación de la Universidad de Chicago (Reyna, 2017).

Según el estudio de Bloom cualquier tarea formativa inclina al individuo al desarrollo de uno de los siguientes dominios:

- El dominio cognitivo utiliza la información como una destreza para relacionar el pensamiento y el aprendizaje;
- el dominio afectivo aquellos que intervienen en el proceso de aprendizaje en el orden emocional; y
- el dominio psicomotor donde se destaca la capacidad de manipular el entorno físico u objetos.

Los procesos cognitivos son los medios utilizado por las personas para negociar los problemas y demandas de la vida diaria mediante los cuales el conocimiento es adquirido o construido (Anderson, 1999, p. 7).

Para la realización del trabajo educativo se requiere de marcos conceptuales desarrollados ampliamente con respecto a los procesos mentales que intervienen en él, y de los factores que condicionan sus resultados con respecto al proceso de aprendizaje. Así mismo, personas intervinientes en este desarrollo buscan dirigir el desarrollo de diseños curriculares que permitan plantear de la mejor manera posible mejorar los logros académicos y los niveles de aprendizaje de los estudiantes, utilizando y diseñando para ello un conjunto de estrategias de formativas e instructivo que nos relacione los procesos cognitivos y la resolución de problemas (Anderson, 1999, p. 11).

Según los estudios de los últimos métodos de aprendizaje, todos los problemas requieren el uso de diferentes procesos cognitivos. Cuando los estudiantes se profundizan en el estudio de la solución para un problema, ellos deben deliberar y razonar sobre sus acciones, vigilar su progreso y corregir sus errores. Anderson enfatiza en este sentido en la capacidad de los estudiantes para reflexionar sobre sus procesos de pensamiento y la forma en que aprenden en la resolución de problemas.

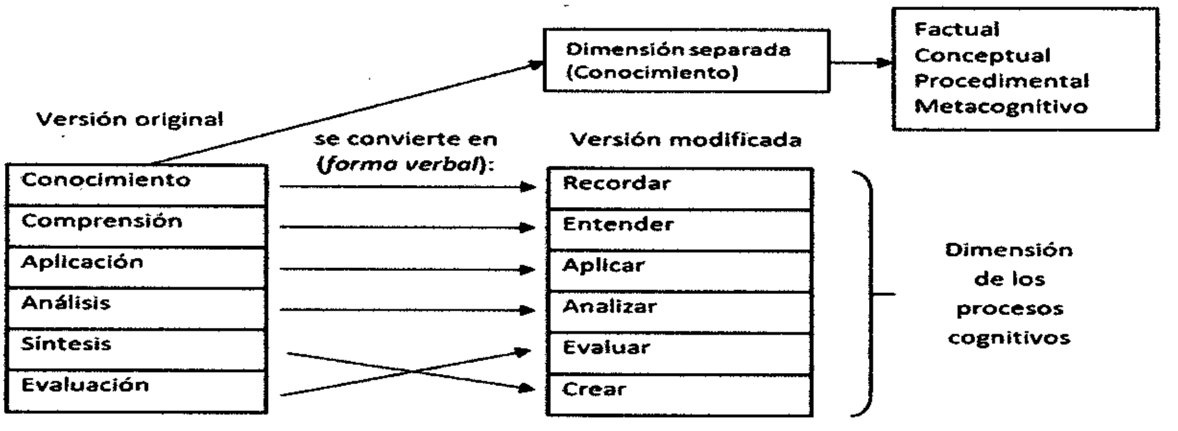


Gráfico 7. Mecanismos cognitivos
Fuente: Alejandro Vásquez Córdova (2010)

Un acercamiento intuitivo al Teorema Fundamental del Cálculo

En situaciones de la vida diaria podemos considerar que aparecen los conceptos básicos e intuitivos del cálculo, mas no así los conceptos formales del análisis matemático.

En el caso del cálculo diferencial (Wenzelburger, 1993) no fue difícil encontrar razones de cambio en la vida diaria. Un ejemplo que podemos considerar la curva de crecimiento. el acceso a los conceptos intuitivos en el caso del cálculo Integral es algo más complejo. Si consideramos los resultados acumulados después de haber estudiado los resultados de la idea central del Calculo Integral que intervienen en ella tres aspectos básicos: la razón del cambio, el resultado de los cambios y el efecto acumulado de las razones de cambio.

Esto no es fácil para la comprensión de nuestros alumnos del cálculo, por ello estos aspectos mencionados deben coordinarse para a partir de estos lograr un acercamiento , mediante curvas, sumatorias , áreas considerando a la integral como una *operación inversa* de la derivada; por lo cual es importante escoger ejemplos convenientes e interesantes ya que lo que se quiere conseguir es un aprendizaje significativo en los alumnos desde el primer momento en el cual se introducen los conceptos básicos del cálculo integral, para lograr esto se ha trabajado con los alumnos de las asignaturas de matemática para poder entender estos temas mediante ejemplos y trabajos aplicativos.

Obtención del conocimiento mediante proceso de estudio del Teorema Fundamental del Cálculo

En la investigación se ha trabajado con las siguientes configuraciones para el logro del conocimiento de la integral definida, que se tocan como situaciones- problema en el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo:

i. Situaciones-problema que requieren procedimientos intuitivos asociados a la noción de la integral para solucionarlas; no obstante, no se utiliza dicha noción de manera explícita.
ii. Situaciones-problema que se resuelven a partir de las primitivas de funciones.
iii. Situaciones-problema que involucran nociones geométricas de áreas, volúmenes, longitud, ...,etc.
iv. Situaciones-problema cuyas soluciones se obtienen a partir de las sumas de Riemann.
v. Situaciones-problema cuya solución requiere métodos n uméricos aproximados.
vi. Situaciones-problema extra matemáticos que se resuelven a partir de la integración.
vii. Situaciones-problema en las cuales se utiliza el concepto *crecimiento acumulado*, desarrollado en distintos estudios, entre los cuales resaltamos los relacionados con el "pensamiento matemático avanzado".
viii. Situaciones-problema cuya solución involucran recursos tecnológicos.

Estas situaciones problema sirven para el logro del conocimiento de la integral definida que pueden ser coherentemente articuladas en el diseño, planificación y desarrollo del proceso de aplicación de la integral.

Dimensión cognitiva del proceso de estudio del Teorema Fundamental del Cálculo.

Los estudiantes de las carreras de ingeniería trabajan con el uso de la información la que está ligada a procesos de adquisición, transformación, organización, retención, recuperación de esta.

Sobre las nociones de la integral, con relación al aprendizaje de los estudiantes, tenemos diversas consideraciones en la que destaca : las dificultades de aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo , la que radica en la complejidad de las nociones de Cálculo y en el lenguaje que se utiliza (Tall, 1991c; Artigue, 1991, 2003; Thompson y Silverman, 2007); de aquí que el proceso de estudio debe iniciarse a partir de los problemas del entorno cotidiano, lo que puede ser llevado a cabo a partir del desarrollo de proyectos de enseñanza (Ribeiro, 2010; Figueiredo, Mello y Santos, 2011); como la necesidad de más tiempo para profundizar en el aprendizaje de los conceptos y propiedades del Cálculo con los estudiantes (Ruthven, 2007, Lois y Milevicich, 2009); la transición entre las distintas representaciones como clave para el aprendizaje de las nociones del Cálculo (Tall, 1991b; 1996; González-Martín, 2004; Rosken y Rolka, 2006; Camacho, Depool y Garbín, 2008); lleva a los estudiantes en un proceso activo del estudio del Cálculo, y la importancia de conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes como vía de adecuar el proceso de estudio del Cálculo a sus características (Frota, 2009).

2.4 Definiciones de términos básicos

- **Génesis del TFC:** Se considera una serie de hechos, acontecimientos y factores que intervinieron a lo largo de la historia de la matemática para la construcción del Teorema Fundamental del Cálculo (Reyna, 2017).

- **Teorema:** Es proposición matemática que puede ser demostrada a partir de un axioma o de otros teoremas, de manera lógica, que ya fueron demostrados con anticipación. Las demostraciones de los teoremas se realizan teniendo en cuenta ciertas reglas de inferencia (Reyna, 2017).

- **Escuelas Filosóficas Matemáticas :** es un concepto antiguo muy extendido, que pensadores en el área de la matemática, que por razones didácticas o de clasificación se han agrupado de proceder en relación a la filosofía matemática, asentando que una escuela surge a partir de las enseñanzas de un gran pensador matemático y en oposición a una escuela rival, como sucede hasta la actualidad concerniente al pensamiento filosófico (Reyna, 2017).

- **Mecanismos Cognitivos:** Los mecanismos que nos ayudan a desarrollar los conocimientos permitiéndonos el aprovechamiento y uso de los datos, a partir de la información a la que se accede a partir de la experiencia valorando y sistematizándola (Reyna, 2017).

- **Aprendizaje.** Es el proceso mediante el cual, como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación estos se modifican y nos permiten adquirir habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores (Reyna, 2017).

- **Conocimiento útil:** Se compone de aquellas competencias que nos permita aplicar los conocimientos adquiridos o desarrollados de forma teórica o conceptual, de manera directa a los problemas reales que se presentan en una organización o institución al competir en el mercado (Reyna, 2017).

III. HIPOTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Las siguientes son las hipótesis que posibilitarán la solución del problema planteado (Reyna, 2017).

3.1.1 Hipótesis General

Si se aplican los diversos mecanismos cognitivos a los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química, se logrará una mejora en el aprendizaje sobre el Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz convirtiéndolo en un conocimiento útil (Reyna, 2017).

3.1.2 Hipótesis Específicas

- Planeando y diseñando las experiencias y actividades necesarias para la adquisición de los aprendizajes a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (Reyna, 2017).
- Si mostramos las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a su interpretación y comprensión e influirá en el rendimiento académico de los alumnos (Reyna 2017).

3.2 Definición conceptual de Variables

3.2.1 Variable dependiente

Y = Proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

3.2.2 Variables independientes

X = Los mecanismos cognitivos en los estudiantes de Matemática II, en la Facultad de Ingeniería Química.

Z= Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo.

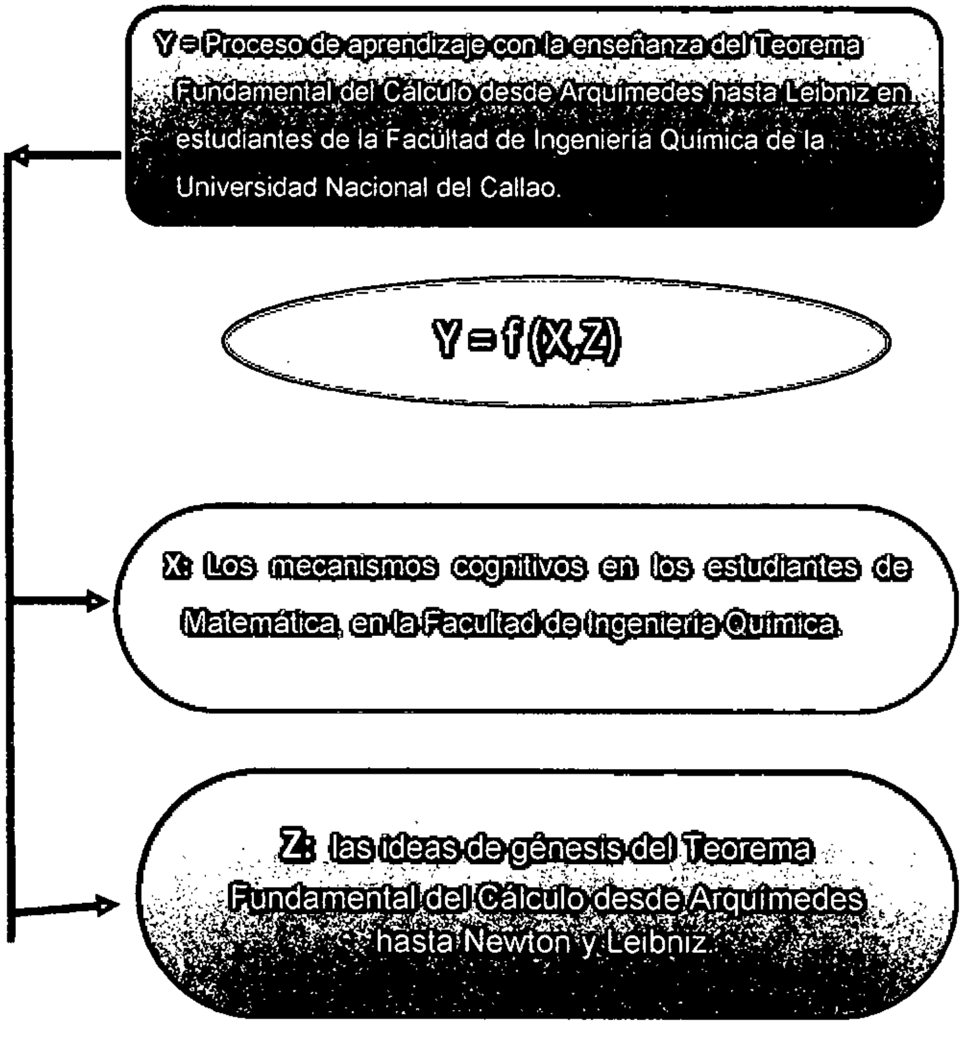


Gráfico 8: Definición *De Variables*
Fuente: Elaboración propia

3.2.3 Operacionalización de las variables

La operacionalización de las variables, las trabajamos en una tabla para una mejor comprensión de estas

Tabla 1
Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método de Recolección de Datos
V.INDEPENDIENTE			
• Los mecanismos cognitivos aplicados en los estudiantes de Matemática II, en la Facultad de Ingeniería Química. • Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo	Conocimiento Comprensión Aplicación Análisis Síntesis Evaluación	Lista de ejercicios Trabajo grupal Practicas Calificadas	Notas de Práctica (P) Examen Parcial (EP) Promedio Parcial (PP) Fórmula: PP = 0.6*PP + 0.4*EP Las calificaciones se consideran en el rango vigesimal (0 a 20)
V. DEPENDIENTE			
Proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao Inicio (0-10) Proceso (11-15) Logrado (16-20)	Comprensión y cuestionamiento Inicio (0-5) Proceso (6-8) Logrado (9-10) Interpretación Inicio (0-2) Proceso (3) Logrado (4) Juicio critico Inicio (0-3) Proceso (4-5) Logrado (6)	Cuestionamiento de la información (preguntas 1,2,3, 4,5,6,7,8,9,10) Interpretación de la información (preguntas 11,12,13,14) Juicio de la información (preguntas 15,16,17,18,19,20)	Notas de problemas propuestos (02) Pre test Post test

Fuente: Elaboración propia .

IV. DISEÑO METODOLOGICO

4.1 Tipo y diseño de la Investigación

- **Tipo de Estudio**

  Descriptivo – Cuasi Experimental

- **Diseño de Estudio**

  Cuasi – Experimental, con pre y post test.

$$\begin{array}{lllll} GE: & O_1 & \longrightarrow X & \longrightarrow & O_2 \\ GC: & O_3 & & & O_4 \end{array}$$

Donde:

$G.E$:	Grupo Experimental.
$G.C$:	Grupo de Control.
O_1:	Pre test Grupo Experimental.
O_2:	Post test Grupo Experimental.
O_3:	Pre test Grupo Control.
O_4:	Post test Grupo Control.
X:	Programa de Educación en Valores "PRACVAL"

4.2 . Método de la investigación

La presente investigación es de tipo cualitativo-cuantitativo.

4.3 Población y Muestra

Población

La población son los alumnos de los cursos de Matemática II del semestre académico 2018-A y 2018-B y de la asignatura de Matemática III de los semestres académicos 2018-A y 2018-B, siendo en cada aula un total de 40 alumnos.

Muestra

Para la determinación del aprendizaje se tomará una muestra de 20 alumnos por grupo del cada semestre (Reyna, 2017) en particular de los grupos académicos 01-Q; de los semestres académicos de 2018-A y 2018-B, de los cuales 20 pertenecen al semestre académico de 2018-A (Grupo Control) y 20 al semestre académico de 2018-B (Grupo Experimental) tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 2: Alumnos de la Asignatura de Matemática II del Semestre Académico 2018-A y 2018-B

SECCIONES	N° ALUMNOS	PORCENTAJE (%)
2018-A (G.C.)	20	50,
2018-B (G.E.)	20	50
TOTAL	40	100

Fuente. Elaboración propia

4.4 Lugar de estudio y periodo realizado

Unidad de Análisis

La unidad de análisis y observación para el presente estudio, estuvo conformada por cada uno de los alumnos(as) de los cursos de Matemática II y Matemática III de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, que cumplieron con los criterios de inclusión. Estos alumnos tienen como conocimientos previos: los conceptos de funciones reales de variable real, límites de funciones reales de variable real, continuidad de una función real de variable real, derivada de una función real de variable real y cálculo de anti derivadas; estos temas fueron tratados en el curso de Matemáticas I, además, tienen conocimientos que adquirieron en el curso de Matemáticas II como sumatorias, la integral definida como el límites de las sumas de Riemann y la interpretación de la integral como el área bajo la curva, siendo esto último imprescindible para el desarrollo de nuestra investigación.

Criterios de Inclusión:

a) Matriculados en el curso de Matemática II y Matemática III correspondiente al semestre académico 2018-A y 2018-B.

b) Con asistencia regular.

c) Que no tengan problemas de cruce horario.

Criterios de exclusión

a) Que no pertenezcan curso de matemática II correspondiente al semestre académico 2018-A y 2018-B.

b) Que tengan inasistencia constante.

c) Que tengan problemas de cruce horario.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Instrumentos para la recolección de datos

Como instrumento de recolección de datos, se ha considerado un diseño de un cuestionario que se presentará en un marco de resolución de problemas que nos permita explorara el nivel de comprensión en el proceso de resolver los problemas reales que se describen posteriormente en la metodología. La ventaja de poder ser aplicado a una cantidad más amplia es lo que nos llevó a esta elección metodológica.

Para la recolección de datos, también se realizaron presentaciones y exposiciones conceptuales, haciendo partícipes a los alumnos de las mismas mediante preguntas y propuesta de pequeñas aplicaciones de tipo evocativo (Reyna, 2017).

Los alumnos trabajarán en grupos e individualmente ejercicios de aplicación, para ello hemos usado:

- La naturaleza del objeto de estudio que es de naturaleza teórica como el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Las posibilidades de acceso con los investigados, los cuales constituye los alumnos matriculados en el curso de Matemática II.
- Los recursos con los que se cuenta, como la bibliografía y trabajos de investigación.
- La oportunidad de obtener datos a través de nuestros cuestionarios y test.
- La aplicación directa del Teorema fundamental del Cálculo a través de un trabajo expositivo y aplicado a la realidad, donde hagan uso del teorema.

Técnica para la recolección de datos

La técnica usada para la recolección de datos en esta investigación, se realizó mediante el uso los fichajes; técnicas evaluativas, de análisis de los contenidos y de estadísticos para el análisis de la misma a fin de comprobar las variables a estudiar con respecto al Teorema fundamental del Cálculo y en general a la integral definida.

Tabla 3: Técnicas e Instrumentos

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
▪ Fichaje: Para la recolección de información bibliográfica y documental. ▪ Evaluativos: Recoger información de campo derivada de la aplicación de instrumentos de medición. ▪ Análisis de Contenidos: Referido a la información proveniente de trabajos de aplicación. ▪ Estadísticos: Para análisis y elaboración de la información.	▪ Fichas de Investigación Bibliográfica, documental y/o de campo. ▪ Pre test y post test. ▪ Ficha de evaluación personal y grupal. ▪ Ficha de Análisis de Contenidos. ▪ Guía de observación ▪ Actividades.

Fuente: Elaboración propia

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Etapas del estudio

La realización del presente estudio comprendió las siguientes fases: Elaboración de la ficha de recolección de datos codificación de las variables; elaboración de la base de datos en Excel 2013; procesamiento de los datos en programa estadístico; obtención de resultados del procesamiento; análisis y discusión de los resultados; conclusiones y recomendaciones y elaboración del informe final.

Estrategia de investigación

Las estrategias de investigación estan de acorde con los criterios generales de proceso de investigación científica.

Averiguar la realidad problemática, los antecedentes, formular el problema e hipótesis, elaborar el diseño de contrastación, ejecutar el proyecto (recolectando, sistematizando, procesando y analizando los datos); para luego sacar conclusiones en base al problema planteado.

Técnica para el análisis de los datos

La técnica usada para el estudio de las variables de la investigación consiste en el análisis que nos permite describir de manera consecuente la actividad matemática realizada por los alumnos al resolver los problemas planteados, así como la comprensión de los conceptos, proposiciones, procesos y argumentos que utilizan para la resolución de tareas.

Análisis Estadístico de Datos

Para el análisis de los datos Para el análisis estadístico, se procedió en dos etapas: la primera un análisis descriptivo el nivel de aprendizaje en los alumnos de matematica II de al Facultad de Ingeneiria Quimica-2018, luego una técnica multivariante conocida como Análisis Discriminante, para ello hemos utilizado los siguientes estadísticos:

- **Media Aritmética:** Medida de tendencia central que caracteriza a un grupo de estudio con un solo valor y que se expresa como el cociente que resulta de dividir la suma de todos los valores o puntajes entre el número total de los mismos. La fórmula para la media aritmética con datos agrupados (Moya Calderón, 278- 280) es como sigue;

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

donde:

x_i = punto medio de clase

n_i = frecuencia de clase i de la distribución

$\sum$ =Suma de productos $n_i x_i$

- **Desviación Estándar:** Medida de dispersión de datos relacionados con la varianza pues en tanto que esta última se expresa en unidades elevadas al cuadrado, para hacer práctico el enunciado, se usa la medida de desviación estándar, que por esta razón es la raíz cuadrada positiva de la varianza. (Moya Calderón, 293 – 294). Su fórmula es la siguiente:

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

donde:

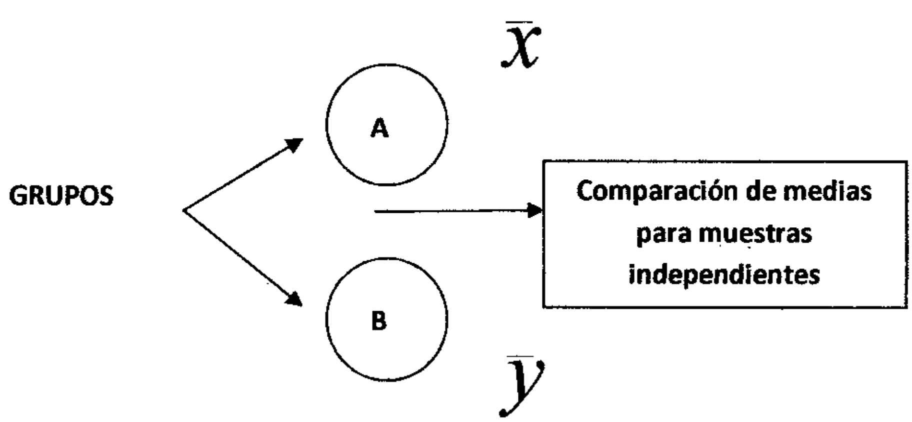
s = Desviación Estándar

xi = Valores individuales

ni = Frecuencia del valor x

n = Casos

- **Prueba "t" de Student para Muestras Independientes:** Es una prueba estadística para evaluar si dos grupos difieren entre si de manera significativa respecto a sus medias.



Se simboliza con t.

Hipótesis a probar: de diferencia entre dos grupos. La hipótesis de investigación propone que los grupos difieren significativamente entre si y la hipótesis nula propone que los grupos no difieren significativamente.

- **Variable involucrada:** La comparación se realiza sobre una variable, si hay diferentes variables, se efectuarán varias pruebas "t" (una para cada variable). Aunque la razón que motiva la creación de los grupos puede ser una variable independiente.
- **Nivel de motivación de la variable:** intervalos o razón
- **Interpretación:** El valor "t" se obtiene en las muestras mediante la fórmula

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{m.n(m+n-2)}{m+n}}$$

Donde:

$\bar{x}$ = media de un grupo

$\bar{y}$ = media del otro grupo

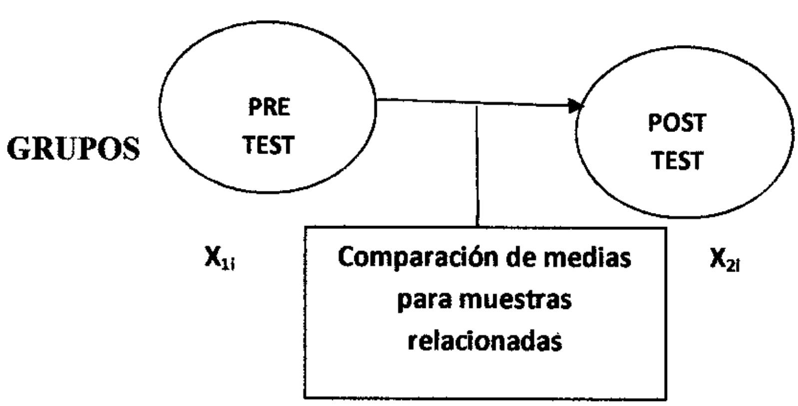
n = un grupo

m = otro grupo

s_x^2 = desviación estándar de un grupo elevado al cuadrado

s_y^2 = desviación estándar de un grupo elevado al cuadrado

- **Prueba "t" de Student para Muestras Relacionadas:** Es una prueba estadística para evaluar al mismo grupo en dos o varios momentos (pre y post test), si estos difieren entre sí, de manera significativa respecto a la media de las diferencias.



Se simboliza con t.

Hipótesis a probar: de diferencia entre dos momentos del mismo grupo. La hipótesis de investigación propone que los dos momentos del grupo difieren significativamente entre si y la hipótesis nula propone que los dos momentos del grupo no difieren significativamente (Reyna, 2017).

- **Variable involucrada:** La comparación se realiza sobre una variable, pero en dos o varios momentos, efectuándose una o varias pruebas "**t**".
- **Nivel de motivación de la variable:** intervalos o razón
- **Interpretación:** El valor "**t**" se obtiene de las diferencias en las muestras de los diferentes individuos ($\boldsymbol{di = x2i - x1i}$), mediante la fórmula

$$t = \frac{\bar{d}}{\hat{s}_d}\sqrt{n}$$

donde:

$\bar{d}$ = media de todas las diferencias de cada individuo en el pre y post test

$\hat{s}_d$ = desviación estándar de las diferencias.

n = tamaño de muestra

Confiabilidad y Validez de los Instrumentos

Elaboración de instrumentos

En la presente investigación trabajamos con los instrumentos:

Test, mediante este instrumento se recoge los datos para determinar la medida de la variable dependiente y la significancia de la variable independiente.

El instrumento se aplicó en dos momentos (Pre test y Post test) para medir el aprendizaje significativo del Teorema Fundamental del Calculo en los alumnos de la asignatura de Matemática en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad del Callao – 2018 (Reyna, 2017).

Se les dio dos actividades las cuales se trabajaron en el aula con la asistencia del docente como se muestra en las figuras, estas actividades consistían en preguntas aplicativas sobre el Teorema Fundamental del Cálculo para ver su juicio crítico, su nivel de aprendizaje, nivel de comprensión.

Para este estudio se consideró la evaluación de trabajos de la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, que realizaron los alumnos a los cuales ya se les había enseñado el Teorema Fundamental del Cálculo, con el fin de establecer los ítems en los cuales clasificamos nuestro estudio.

Para la construcción del "TEST para calificar el aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo se utilizó 20 proposiciones referentes a la a la comprensión del Teorema.

Cada indicador antes mencionado está compuesto por 4 proposiciones cada uno con afirmaciones "Siempre", "Casi siempre", "A veces", "Muy pocas veces" y "Nunca". Esta revisión incluyó una validación efectuada mediante la apreciación de expertos en el tema, así también se tuvo en cuenta la literatura existente en nuestro medio. Además, se conceptuó aspectos sobre redacción y pertinencia o no de cada situación que se pretende evaluar.

Prueba Piloto

Primero se realizó las coordinaciones respectivas con los docentes de las asignaturas para la aplicación de los test y cuestionarios. Los cuestionarios se entregaron personalmente en mano de cada uno de los alumnos, explicándole en qué consistía el estudio.

La prueba piloto se hizo en presencia del investigador para evitar sesgos y mantener una mayor uniformidad de criterios. Durante el transcurso de la misma, dado el nivel de instrucción de cada uno de los encuestados, se aclararon las dudas que pudieron surgir en cada caso, con el fin de evitar invalidaciones posteriores de las encuestas.

Así mismo, se insistió en que la encuesta era voluntaria, anónima y con un tiempo aproximado de 30 minutos para contestarla, así como se rellenasen todos los ítems y que fuesen sinceros en sus respuestas.

Una vez aplicada la prueba piloto a los alumnos de la asignatura de Matemática II, se obtuvo la puntuación de cada uno de los ítems, teniendo en cuenta la escala con que fueron calificados.

Para validar los instrumentos se demostró tanto su validez (medir lo que queremos medir) como su confiabilidad (una escala es fiable cuando se obtienen las mismas medidas al ser utilizadas en más de una ocasión) y se considero la opinión de expertos

Confiabilidad

Entre los métodos aceptados para medir la confiabilidad está el Coeficiente de Alpha de Cronbach's, obteniéndose un valor de 0.789. Como $Alpha \geq 0.7$ el instrumento es confiable.

Validez

Para la validez se utilizó el criterio de la opinión de los expertos y se recurrió a personas especialistas en el tema y dieron su opinión favorable mencionando que el instrumento cumplía con las características apropiadas para que se pueda medir lo que se pretende determinar. Todas las recomendaciones dadas por los especialistas fueron tomadas en cuenta para la aplicación de los instrumentos.

Mediante la Correlación de Pearson $r = 0.664$ con probabilidad $p = 0.009$ que es altamente significativo, se determinó que el instrumento es válido.

Uso del computador para emplear técnicas estadísticas: Para el análisis del pre test y pos test, de los grupos experimental y de control, se ha utilizado el paquete estadístico IBM STATISTIC SPSS ver. 25, que es la abreviatura en inglés del paquete estadístico para las Ciencias Sociales (Statistical Package for the Social Sciences).

Instrumentos:

PRE-TEST

I PROPOSITO

El presente Test tiene como propósito obtener información sobre el proceso de aprendizaje relacionados al área de la Matemática, en particular del Teorema Fundamental del Cálculo de los alumnos del segundo ciclo de la FIQ de la UNAC.

II INSTRUCCIÓN.

Desarrolla los ítems según los datos descritos.

PRUEBA PARA DETERMINAR EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DE LOS ALUMNOS DEL SEGUNDO CICLO DE LA ASIGNATURA DE MATEMATICA II.

Apellidos y Nombres: ....

Semestre..........Grupo Horario........ Fecha.......................................

1. Escribe cómo se interpreta la siguiente integral

a) $\int \frac{1}{x} dx$...

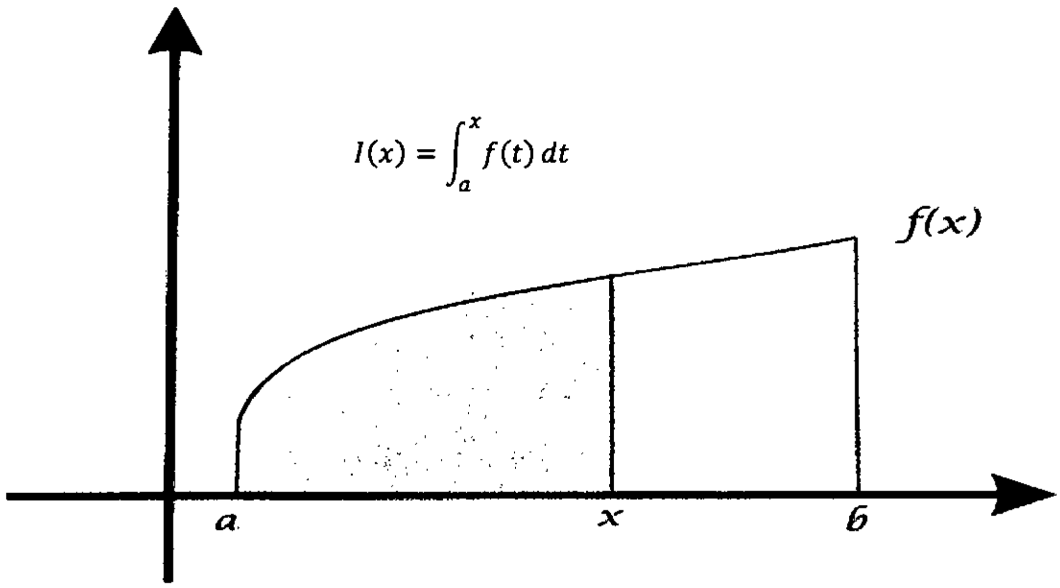
b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$...

c) $\int_{0}^{x} \frac{1}{t} dt$ ....

2. Completa la interpretación del teorema fundamental del Cálculo, según tu entender:

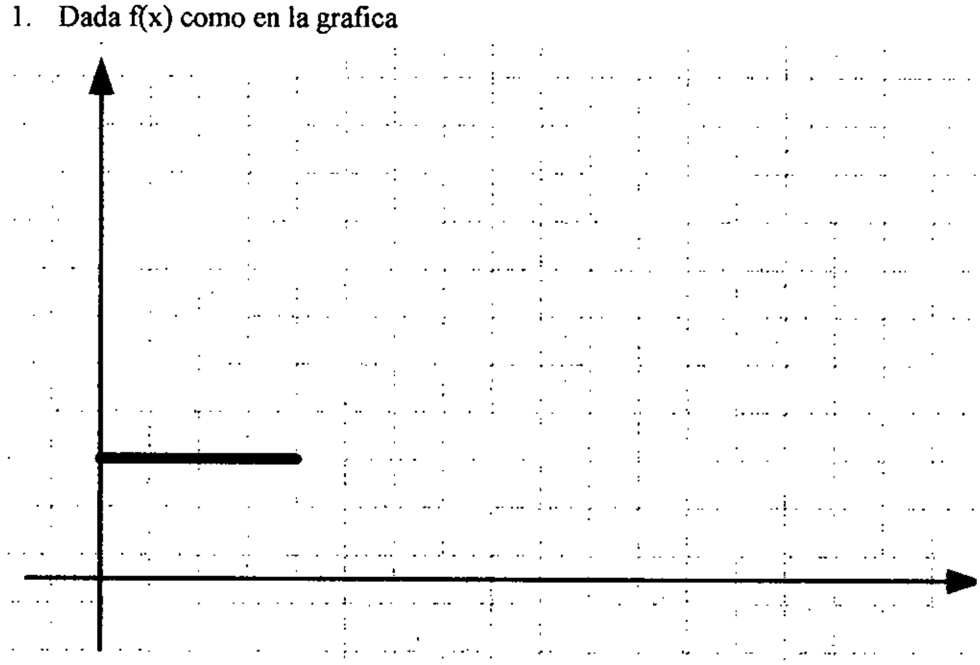
La función de área A(x) es la antiderivada de la función original. Lo que se ha mostrado es que, intuitivamente, **...................** la derivada de una función y "hallar el área" bajo su curva son operaciones ...., es decir, el objetivo del **teorema fundamental del cálculo** ....

3.- Dada la gráfica:



En cada uno de los siguientes casos se te presenta la gráfica de una función f (x), a partir de la cual se espera que construyas la gráfica de su respectiva función integral $I(x)$.

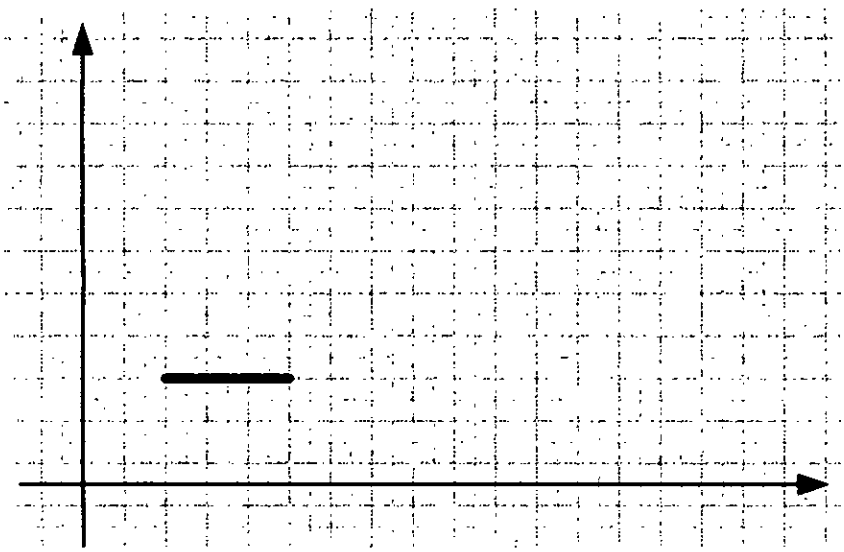
1. Dada f(x) como en la grafica



a) Tabula para $I(0), I(2), I(3)$ e $I(4)$

b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece f(x).

2. Dada f(x) como en la gráfica

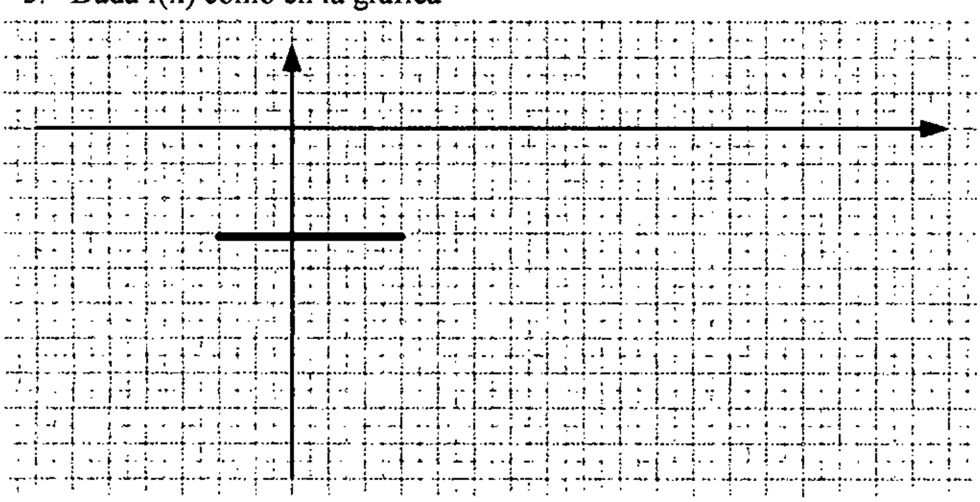


x	$I(x)$

a) Tabula para $I(2), I(3), I(4)$ e $I(5)$

b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece f(x).

3. Dada f(x) como en la gráfica



x	$I(x)$

a) Tabula para $I(-2), I(-1), I(0), I(1), I(2)$ e $I(3)$

b) Construye la gráfica de la función $I(x)$ sobre el mismo plano en que aparece f(x).

4. Si observas lo que obtuviste en cada uno de los casos anteriores, ¿cómo dirías que resulta la gráfica de $I(x)$ cuando $f(x)$ es constante? ¿Tiene algo que ver el signo de f(x)? Explica ampliamente.

Figura 1: **Aplicación del Pre-Test.**
Fuente:. Elaboracion propia

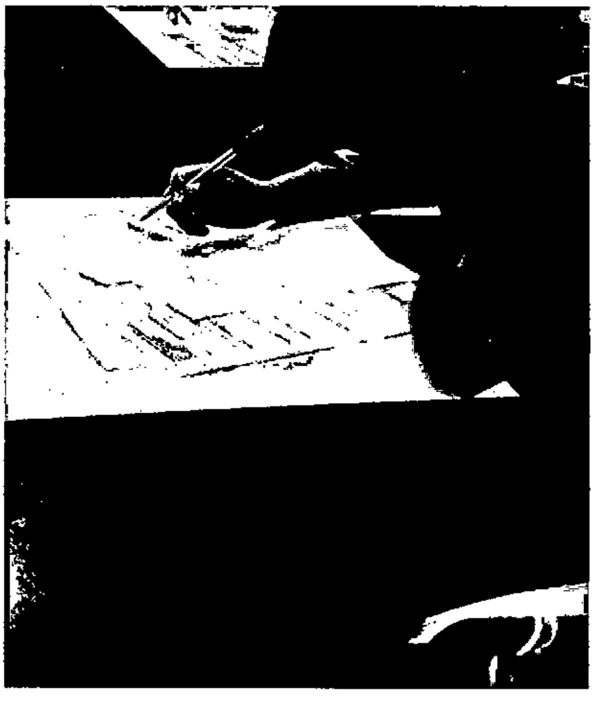


Figura 2: **Alumno desarrollando el Pre-Test.**
Fuente:. Elaboracion propia

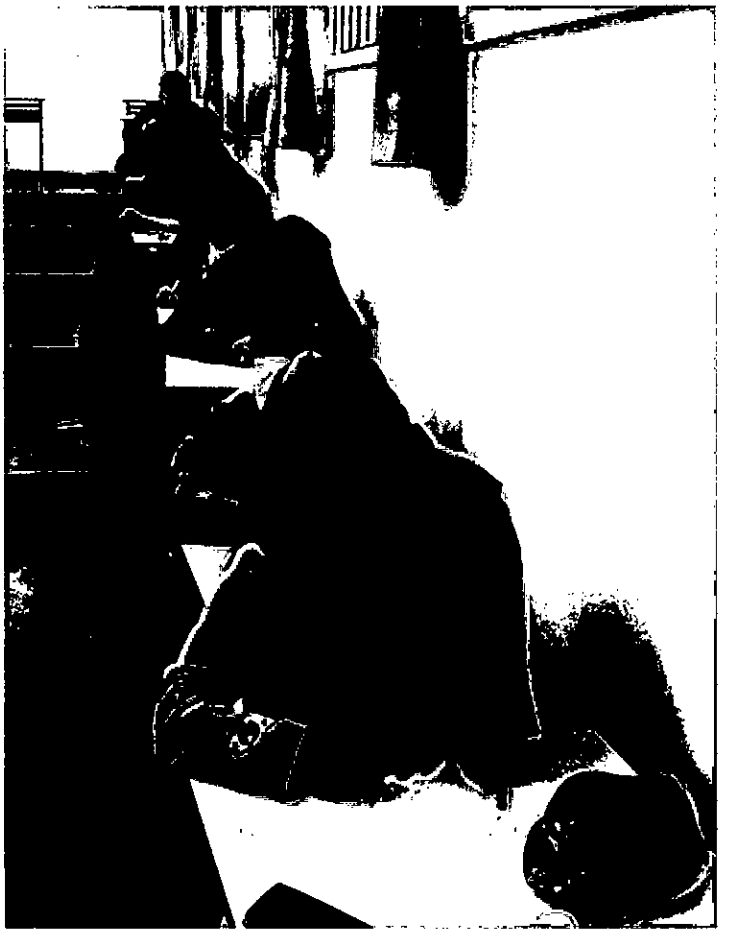


***Figura 3*: Alumnos desarrollando el Pre-Test.**
Fuente:. Elaboracion propia

***Figura 4*: Alumnos discutiendo el desarrollo del Pre-Test.**
Fuente:. Elaboracion propia

POST -TEST

I PROPOSITO

El presente Test tiene como propósito obtener información sobre los conocimientos relacionados al área de la Matemática, en particular del Teorema Fundamental del Cálculo de los alumnos del segundo ciclo de la FIQ de la UNAC.

II INSTRUCCIÓN.

Desarrolla los ítems según los datos descritos.

PRUEBA PARA DETERMINAR EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DE LOS ALUMNOS DEL SEGUNDO CICLO DE LA ASIGNATURA DE MATEMATICA II.

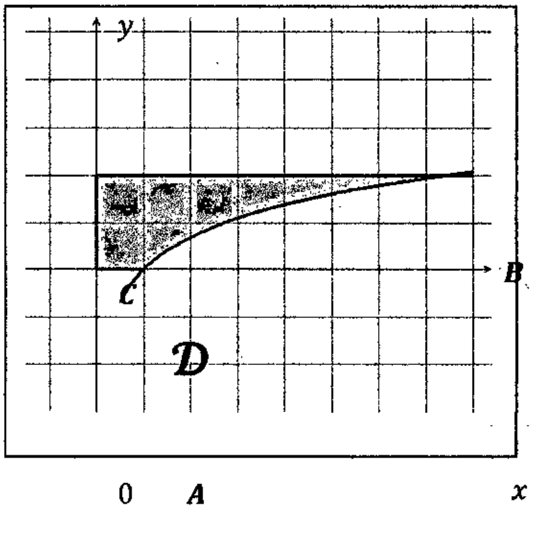
Apellidos y Nombres: ....

Semestre..........Grupo Horario.......: Fecha..

1. Use el primer teorema fundamental del cálculo para calcular

$$\int_0^2 e^{4x^2+12x} \cdot (4x+6)\, dx$$

2.- En el grafico dado, se muestra la región $\mathcal{D}$ del plano limitada por las gráficas de $y = 0,\ x = 0,\quad y = 2\quad$ e $\quad y = lnx$. En cada ítem plantee la integral definida correspondiente.



a) Calcule el área de la región $\mathcal{D}$.

b) Calcule el perímetro de $\mathcal{D}$.

3.- Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones con una adecuada justificación.

a) $\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x sen(t^2)dt\right\} = sen(x^2)\cdot 2x$

b) Si f es una función continua en $[-1;6]$ tal que $\int_{-1}^{5} f(x)dx = 15$ y $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 5$, entonces $\int_0^6 f(x)dx = 9$.

c) La integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ no cumple las condiciones del TFC .

ACTIVIDAD 2

En esta actividad se exponen dos problemas reales para estudiar el nivel de indagación su juicio crítico al desarrollar estos problemas

1. Centros de Gravedad. Equilibrio estático de láminas planas

En una vivienda se pretende construir un tejado semicircular para cerrar el vano de la escalera. Para ello se construye una cascara de forjado como la forma de la figura, formada por un semicírculo de 110 cm de radio y un rectángulo de 240x36 y 20 cm de espesor. La parte rectangular se incrusta en la pared y la semicircular soportaría el tejadito. ¿Qué altura de la pared hay que levantar por encima de la cascara para que el centro de gravedad del conjunto pared-cascara esté dentro de la pared? La densidad de la cascara es la misma que de la pared y ésta tiene 40 cm de espesor.

El tejado que tiene que soportar la cascara, pero lo descartamos, ya que éste va a ser compensado por la masa de la cubierta del tejado de la vivienda.

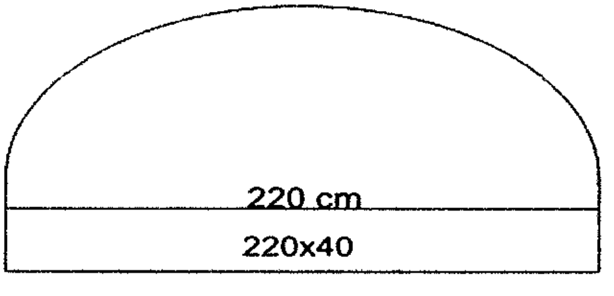


Grafico 9 Construcción del tejado
Fuente: Elaboración propia

2.- Área de una región.

En un diagrama cartesiano, como se muestra en la figura adjunta, la delimitación de un terreno en el que se quiere instalar un campo recreación entre el río y el camino. El borde del camino coincide con el eje de abscisas, la curva que describe el río es la representación cartesiana de la función $f(x) = x \cdot (sen(3x/4) + 1) + 3$ y el segmento BC está sobre la perpendicular al camino por el punto C, que es el punto del río más cercano al camino (mínimo de la función) tras el ensanche.

¿Cuál es su área sabiendo que las unidades del diagrama cartesiano son A Kilómetros?

¿Se podría determinar el área si en vez de conocer la función se supieran cuáles son las coordenadas de puntos situados en el borde del río?

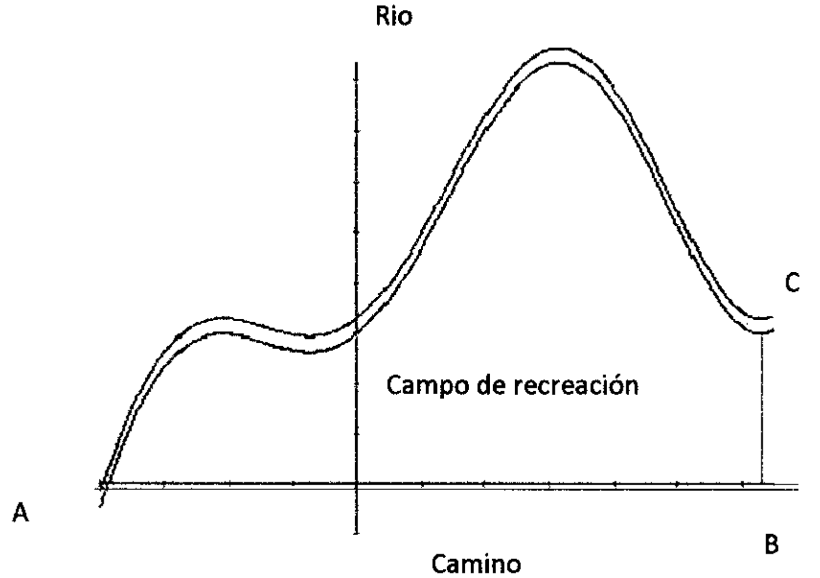


Gráfico 10: Área de Campo de recreación.
Fuente: Elaboración propia

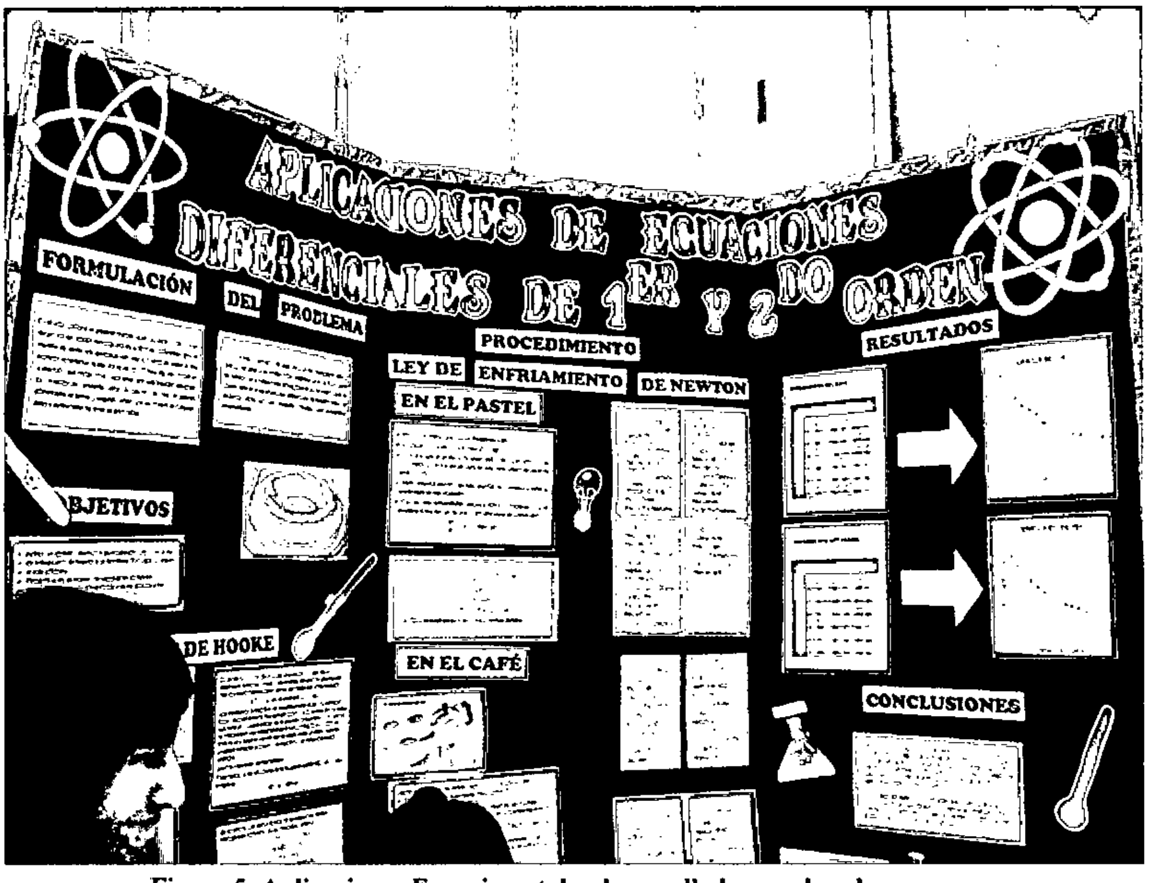


Figura 5: **Aplicaciones Experimentales desarrolladas por los alumnos.**
Fuente: Elaboración propia

Figura 6: **Aplicaciones Experimentales desarrolladas por los alumnos.**
Fuente: Elaboración propia

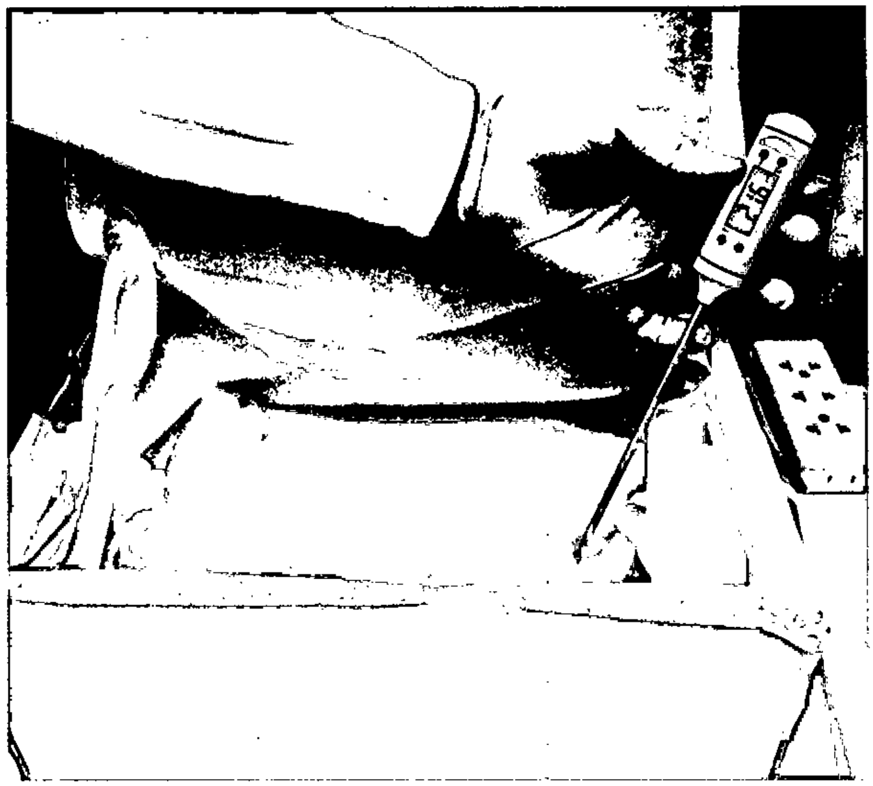


Figura 7: **Aplicaciones Experimentales desarrolladas por los alumnos.**
Fuente: Elaboración propia

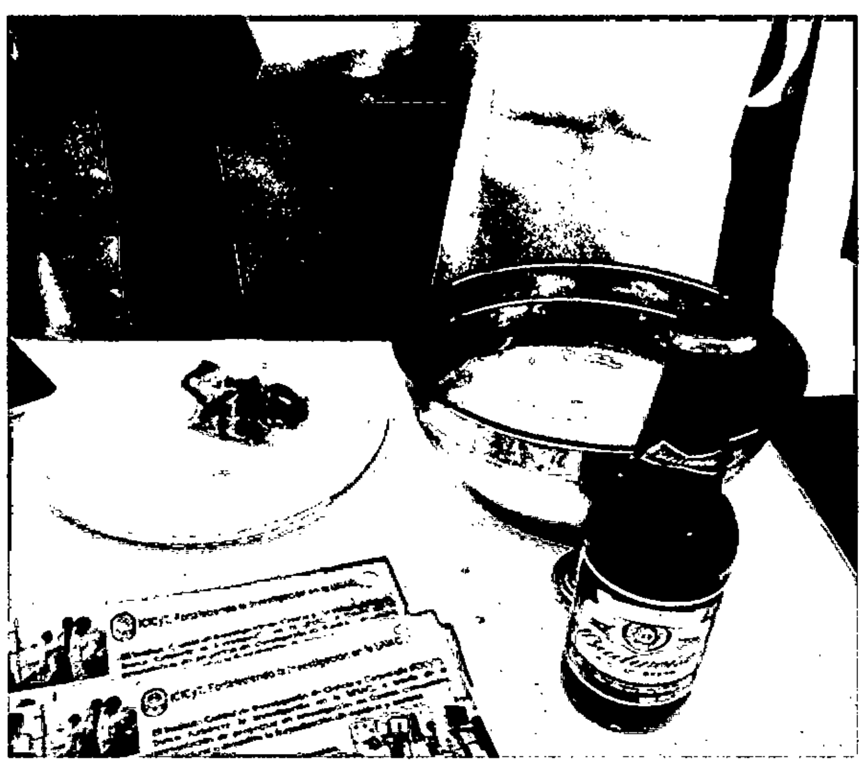


Figura 8: **Aplicaciones Experimentales desarrolladas por los alumnos.**
Fuente: Elaboración propia

Figura 9: **Revisión de las aplicaciones Experimentales desarrolladas por los alumnos.**
Fuente: Elaboración propia

V. RESULTADOS

5.1 Resultados descriptivos

Se han desarrollado test para clarificar los resultados en el aprendizaje, las cuales se han procesado usando el software IBM SPSS STATISTIC 25 que permite los siguientes resultados los cuales los hemos divido en cuatro ítems para un mejor estudio.

Ítem N°1.- Para el nivel de proceso de aprendizaje en la enseñanza del Teorema Fundamental del cálculo se trabajó de acuerdo con los test y encuestas establecidas, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 4
Nivel de Proceso de Aprendizaje antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Nivel del proceso de aprendizaje	**Grupos**							
	Experimental				**Control**			
	Pre-Test		**Post test**		**Pre-Test**		**Post test**	
	n_o	**%**	n_o	**%**	n_o	**%**	n_o	**%**
Inicio	16	80.0	0	0.0	15	75.0	13	65.0
Proceso	4	20.0	7	35.0	5	25.0	6	30.0
Logrado	0	0.0	13	65.0	0	0.0	1	5.0
Total	**20**	**100.0**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**

Fuente: Elaboración propia y obtenida de la Tablas.

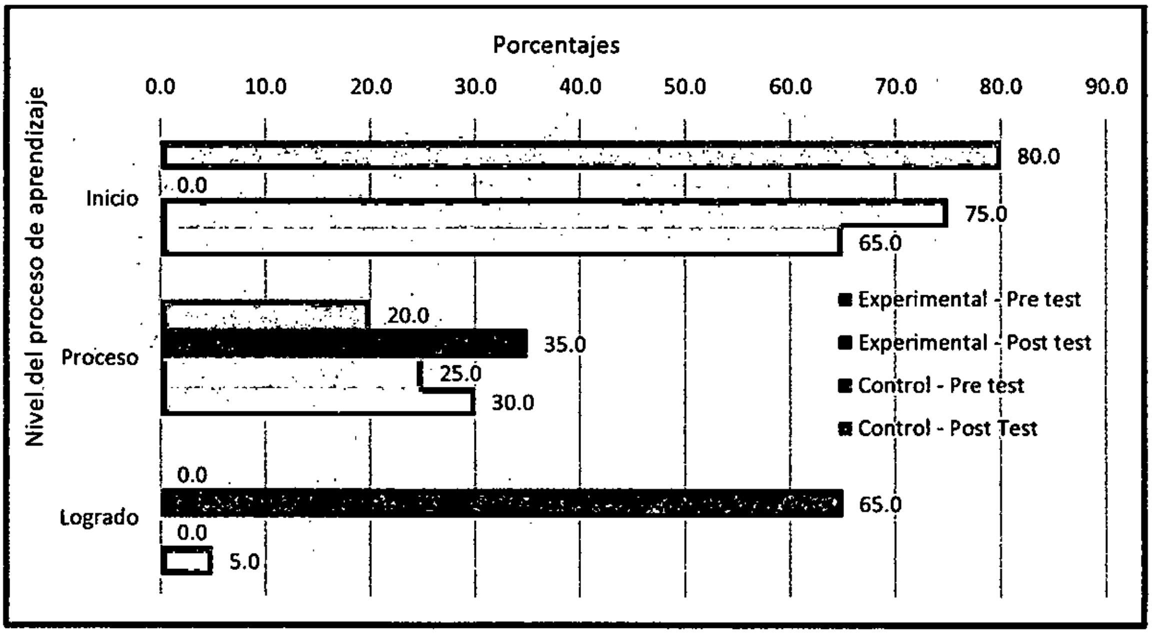


Gráfico 11
Nivel de Proceso de Aprendizaje antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018
Fuente: Elaboración propia y obtenida de la Tablas.

En el grupo experimental en el pre test se observó que el 80.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en inicio, el 20.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en proceso, y ningún estudiante tuvo nivel de proceso de aprendizaje en logrado; y en el post test se observó que ningún estudiantes tuvo nivel de proceso de aprendizaje estuvo en inicio, el 35.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en proceso, y el 65.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en logrado. Y en el grupo control en el pre test se observó que el 75.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en inicio, el 25.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en proceso, y ningún estudiante tuvo nivel de proceso de aprendizaje en logrado; y en el post test se observó que el 65.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en inicio, el 30.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en proceso, y el 5.0% de estudiantes su nivel de proceso de aprendizaje estuvo en logrado

Ítem N°2.- Para el nivel de proceso de aprendizaje en la dimensión comprensión y cuestionamiento en la enseñanza del Teorema Fundamental del cálculo se trabajó de acuerdo con el test y encuestas establecidas, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 5
Nivel de comprensión y cuestionamiento en la Dimensión Comprensión y Cuestionamiento antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Nivel de Comprensión y Cuestionamiento	*Grupos*							
	Experimental				*Control*			
	Pre-Test		*Post test*		*Pre-Test*		*Post test*	
	n_o	%	n_o	%	n_o	%	n_o	%
Inicio	*15*	*75.0*	*3*	*15.0*	*14*	*70.0*	*13*	*65.0*
Proceso	*3*	*15.0*	*6*	*30.0*	*3*	*15.0*	*4*	*20.0*
Logrado	*2*	*10.0*	*11*	*55.0*	*3*	*15.0*	*3*	*15.0*
Total	***20***	***100.0***	***20***	***100.00***	***20***	***100.00***	***20***	***100.00***

Fuente: Elaboración propia y obtenida de la Tablas.

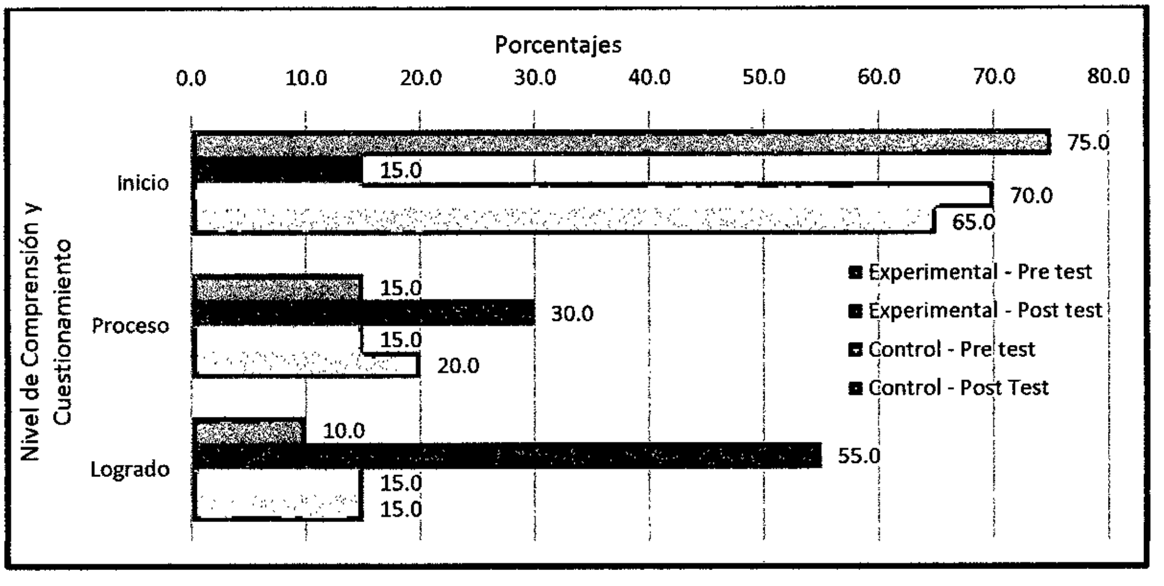


Gráfico 12
Nivel de comprensión y cuestionamiento en la Dimensión Comprensión y Cuestionamiento antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018
Fuente: Elaboración propia y obtenida de Tablas.

En el grupo experimental en el pre test se observó que el 75.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en inicio, el 15.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en proceso, y el 10.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en logrado; y en el post test se observó que el 15.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en inicio, el 30.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en proceso, y el 55.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en logrado. Y en el grupo control en el pre test se observó que el 70.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en inicio, el 15.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en proceso, y el 15% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en logrado; y en el post test se observó que el 65.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en inicio, el 20.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en proceso, y el 15.0% de estudiantes su nivel de comprensión y cuestionamiento estuvo en logrado

Ítem N°3.- Para el nivel de proceso de aprendizaje en la dimensión interpretación en la enseñanza del Teorema Fundamental del cálculo se trabajó de acuerdo con el test y encuestas establecidas, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 6
Nivel de Proceso de Aprendizaje en la Dimensión Interpretación antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Nivel de interpretación	Grupos							
	Experimental				Control			
	Pre-Test		Post test		Pre-Test		Post test	
	n_o	%	n_o	%	n_o	%	n_o	%
Inicio	17	85.0	4	20.0	16	80.0	17	85.0
Proceso	2	10.0	5	25.0	3	15.0	2	10.0
Logrado	1	5.0	11	55.0	1	5.0	1	5.0
Total	**20**	**100.0**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**

Fuente: Elaboración propia y obtenida de Tablas.

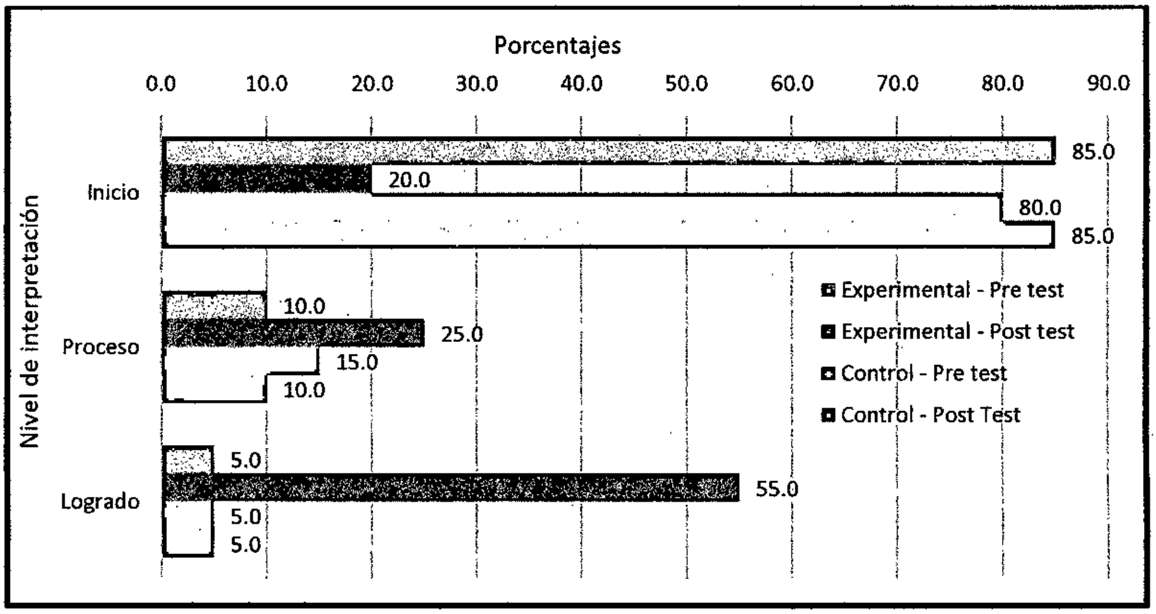


Gráfico13 Nivel de Proceso de Aprendizaje en la Dimensión Interpretación antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC-2018

Fuente: Elaboración propia y obtenida de Tablas..

En el grupo experimental en el pre test se observó que el 85.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en inicio, el 10.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en proceso, y el 5.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en logrado; y en el post test se observó que el 20.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en inicio, el 25.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en proceso, y el 55.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en logrado. Y en el grupo control en el pre test se observó que el 80.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en inicio, el 15.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en proceso, y el 5% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en logrado; y en el post test se observó que el 85.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en inicio, el 10.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en proceso, y el 5.0% de estudiantes su nivel de interpretación estuvo en logrado

Ítem N°4.- Para el nivel de proceso de aprendizaje en la dimensión juicio crítico en la enseñanza del Teorema Fundamental del cálculo se trabajó de acuerdo con el test y encuestas establecidas, obteniéndose los siguientes resultados

Tabla 7
Nivel de Proceso de Aprendizaje en la Dimensión Juicio Crítico antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Nivel de juicio critico	Grupos							
	Experimental				Control			
	Pre-Test		Post test		Pre-Test		Post test	
	n_o	%	n_o	%	n_o	%	n_o	%
Inicio	17	85.0	5	25.0	17	85.0	16	80.0
Proceso	3	15.0	5	25.0	2	10.0	3	15.0
Logrado	0	0.0	10	50.0	1	5.0	1	5.0
Total	**20**	**100.0**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**	**20**	**100.00**

Fuente: Elaboración propia obtenida de Tablas.

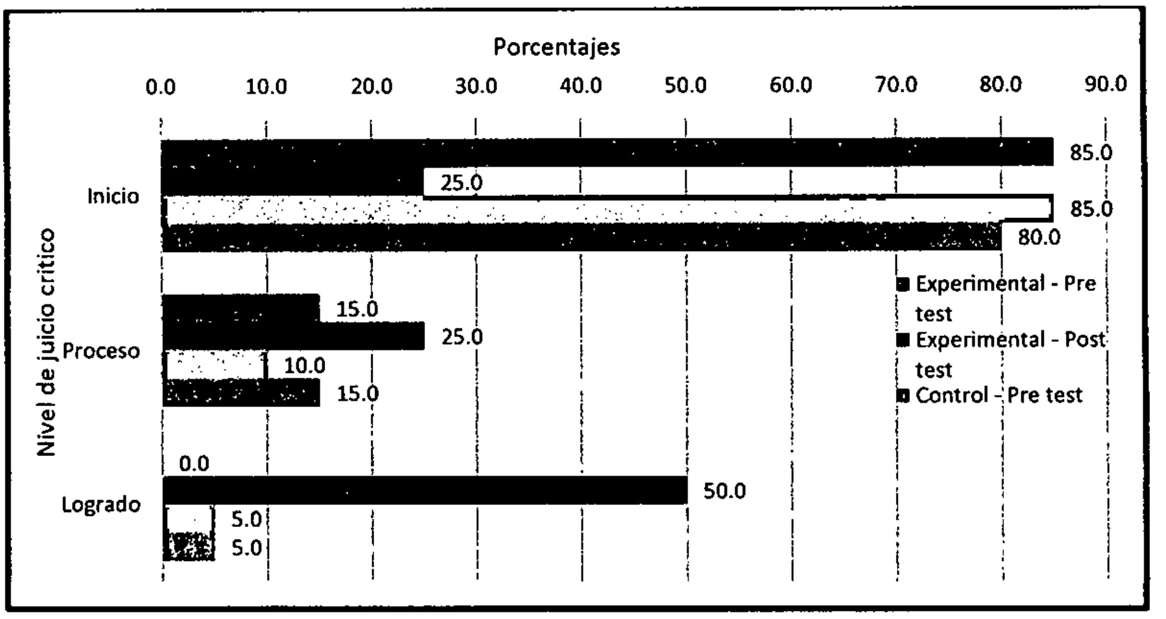


Gráfico 14
Nivel de Proceso de Aprendizaje en la Dimensión Juicio Crítico antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018
Fuente: Elaboración propia obtenida de Tablas

En el grupo experimental en el pre test se observó que el 85.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en inicio, el 15.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en proceso, y ningún de estudiante tuvo nivel de juicio crítico en logrado; y en el post test se observó que el 25.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en inicio, el 25.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en proceso, y el 50.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en logrado. Y en el grupo control en el pre test se observó que el 85.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en inicio, el 10.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en proceso, y el 5% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en logrado; y en el post test se observó que el 80.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en inicio, el 15.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en proceso, y el 5.0% de estudiantes su nivel de juicio crítico estuvo en logrado

5.2 Resultados Inferenciales

En los resultados de esta investigación se ha trabajado de acuerdo a las hipótesis planteadas, así como si se aplican los diversos mecanismos cognitivos a los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química, se logrará una mejora en el proceso de aprendizaje sobre las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz convirtiéndolo en un conocimiento útil se observa que se ha conseguido el objetivo como se muestra con la t de student, lográndose cumplir con la hipótesis (Reyna, 2017).

Tabla 8
Comparación de Medias para Muestras Independientes (Experimental - Control) y Relacionadas (Pre - Post Test) de los Puntajes del Proceso de Aprendizaje en la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Variables		Grupo y/o Momentos		Valor t	Probabilidad (p)	Significancia
Puntaje de proceso de aprendizaje		Pre	Experimental - Control	-0.11	0.916	No significativa
		Post	Experimental - Control	7.02	0.000	Altamente Significativa
		Experimental	Pre - Post Test	-15.69	0.000	Altamente Significativa
		Control	Pre - Post Test	-5.66	0.000	Altamente Significativa
Dimensiones	Puntaje de comprensión y cuestionamiento	Pre	Experimental - Control	0.42	0.676	No significativa
		Post	Experimental - Control	4.20	0.000	Altamente Significativa
		Experimental	Pre - Post Test	-6.38	0.000	Altamente Significativa
		Control	Pre - Post Test	-1.76	0.095	No Significativa
	Puntaje de interpretación	Pre	Experimental - Control	-0.46	0.645	No significativa
		Post	Experimental - Control	4.86	0.000	Altamente Significativa
		Experimental	Pre - Post Test	-6.99	0.000	Altamente Significativa
		Control	Pre - Post Test	-2.99	0.008	Altamente Significativa
	Puntaje de juicio critico	Pre	Experimental - Control	-0.71	0.481	No significativa
		Post	Experimental - Control	4.96	0.000	Altamente Significativa
		Experimental	Pre - Post Test	-9.19	0.000	Altamente Significativa
		Control	Pre - Post Test	-3.56	0.002	Altamente Significativa

Fuente: *Elaboración propia obtenida de Tablas*

Del puntaje de proceso de aprendizaje en el pre test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de -0.11 con probabilidad 0.916 siendo no significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son iguales; en el post test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de 7.02 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son diferentes, siendo mayor en el grupo experimental. Y del grupo experimental entre el pre y los test se observa un valor t student de -15.69 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativo, por lo que la enseñanza de teorema si incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje, y del grupo control entre el pre y post test se observa un valor t student de -5.69 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativo, es decir la no enseñanza de teorema también incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje (Reyna, 20175).

Del puntaje de proceso de aprendizaje en la dimensión comprensión y cuestionamiento en el pre test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de 0.42 con probabilidad 0.676 siendo no significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son iguales; en el post test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de 4.20 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son diferentes, siendo mayor en el grupo experimental. Y del grupo experimental entre el pre y los test se observa un valor t student de -6.38 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativo, por lo que la enseñanza de teorema si incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje, y del grupo control entre el pre y post test se observa un valor t student de -1.76 con probabilidad 0.095 siendo no significativo, es decir la no enseñanza de teorema también no incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje.

Del puntaje de proceso de aprendizaje en la dimensión interpretación en el pre test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de -0.46 con probabilidad 0.645 siendo no significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son iguales; en el post test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de 4.86 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son diferentes, siendo mayor en el grupo experimental. Y del grupo experimental entre el pre y los test se observa un valor t student de -6.99 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativo, por lo que la enseñanza de teorema si incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje, y del grupo control entre el pre y post test se observa un valor t student de -2.99 con probabilidad 0.008 siendo altamente significativo, es decir la no enseñanza de teorema también incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje.

Del puntaje de proceso de aprendizaje en la dimensión juicio crítico en el pre test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de -0.71 con probabilidad 0.481 siendo no significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son iguales; en el post test comparando el grupo experimental con el control se obtuvo un valor t student de 4.96 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativa, es decir las medias poblacionales de los dos grupos son diferentes, siendo mayor en el grupo experimental. Y del grupo experimental entre el pre y los test se observa un valor t student de -9.19 con probabilidad 0.000 siendo altamente significativo, por lo que la enseñanza de teorema si incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje, y del grupo control entre el pre y post test se observa un valor t student de -3.58 con probabilidad 0.002 siendo altamente significativo, es decir la no enseñanza de teorema también incrementa el puntaje de proceso de aprendizaje.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Discusión de resultados descriptivos

El objetivo del trabajo de investigación es mostramos con las estadísticas descriptivas como el puntaje de proceso de aprendizaje en el grupo experimental en el pre test se observa un puntaje promedio de 8 puntos y en el post test un puntaje promedio de 16 puntos, observándose un incremento de 8 puntos promedio, y en el grupo control en el pre test se observa un puntaje promedio de 8 puntos y en el post test un puntaje promedio de 9 puntos, observándose un incremento de 1 punto promedio.

Del puntaje de proceso de aprendizaje en dimensión comprensión y cuestionamiento en el grupo experimental en el pre test se observa un puntaje promedio de 4 puntos y en el post test un puntaje promedio de 8 puntos, observándose un incremento de 4 puntos promedio, y en el grupo control en el pre test se observa un puntaje promedio de 4 puntos y en el post test un puntaje promedio de 4 puntos, no observándose incremento.

Del puntaje de proceso de aprendizaje en dimensión interpretación en el grupo experimental en el pre test se observa un puntaje promedio de 2 puntos y en el post test un puntaje promedio de 3 puntos, observándose un incremento de 1 punto promedio, y en el grupo control en el pre test se observa un puntaje promedio de 2 puntos y en el post test un puntaje promedio de 2 puntos, no observándose incremento.

Del puntaje de proceso de aprendizaje en dimensión juicio crítico en el grupo experimental en el pre test se observa un puntaje promedio de 2 puntos y en el post test un puntaje promedio de 5 puntos, observándose un incremento de 3 puntos promedio, y en el grupo control en el pre test se observa un puntaje promedio de 2 puntos y en el post test un puntaje promedio de 3 puntos, observándose incremento promedio de 1 punto

Tabla 9

Estadísticas Descriptivas del Puntaje del Proceso de Aprendizaje en la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

Variable y dimensiones		Grupos	Momentos	Muestra	Valor Mínimo	Valor Máximo	Promedio	Desviación Estándar
Puntaje de proceso de aprendizaje		Experimental	Pre Test	20	4	13	8	2.6
			Post Test	20	12	19	16	2.3
		Control	Pre Test	20	2	14	8	3.3
			Post Test	20	4	17	9	3.5
Dimensiones	Puntaje de comprensión y cuestionamiento	Experimental	Pre Test	20	1	9	4	2.4
			Post Test	20	3	10	8	2.2
		Control	Pre Test	20	1	10	4	2.8
			Post Test	20	1	10	4	2.8
	Puntaje de interpretación	Experimental	Pre Test	20	0	4	2	1.0
			Post Test	20	1	4	3	0.9
		Control	Pre Test	20	0	4	2	1.0
			Post Test	20	1	4	2	0.7
	Puntaje de juicio critico	Experimental	Pre Test	20	0	5	2	1.3
			Post Test	20	3	6	5	1.3
		Control	Pre Test	20	0	6	2	1.3
			Post Test	20	1	6	3	1.3

Fuente: Elaboración propia obtenida de Tablas

6.2 Contrastación de la hipótesis con los resultados

El objetivo general de la investigación, planteado en el Capítulo 1, consiste en *generar un conocimiento útil del Teorema Fundamental del Cálculo en los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.*

Dicho objetivo general lo hemos dividido en dos objetivos específicos, cuyos resultados y grado de cumplimiento se presentan a continuación.

Objetivo1

Aplicar los diversos mecanismos cognitivos sobre sobre el Teorema Fundamental del Cálculo a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

Este objetivo se ha concretado a partir de un estudio realizado para precisar los diversos significados de la integral, aplicando diversos mecanismos que nos han servido de base para la posterior elaboración y procesamiento de la información, se obtuvo una mejora de un 60% por parte delos estudiantes al aplicar los mecanismos cognitivos como el analizar y ordenar la información, así la capacidad de concentración a partir del conocimiento del origen de esta noción, y cómo emergió y evolucionó a lo largo del desarrollo histórico del Cálculo.

Objetivo2

Contribuir con las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz a su comprensión en los estudiantes, de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao (Reyna, 2017).

Se ha comprobado que con la aplicación de los mecanismos cognitivos aplicados que nos permiten contribuir con las ideas de génesis que conducen al origen del Teorema Fundamental, los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química, se ha logrado una mejora en el aprendizaje de un 80% sobre la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo a través de emitir un juicio crítico convirtiendo a la Integral definida en un conocimiento útil.

Hipótesis 1

Planeando y diseñando las experiencias y actividades necesarias para la adquisición de los aprendizajes a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (Reyna, 2017).

Lo que se había supuesto en nuestra hipótesis específica, se ha comprobado con la realización de actividades: mediante la participación de los alumnos: en prácticas escritas y orales, actividades realizar en grupo, quienes en forma espontánea mostraron la comprensión y entendimiento del Teorema Fundamental del Cálculo y en particular en el desarrollo de su carrera como se muestra en actividades como en la aplicación de problemas acorde con la realidad pudiendo establecer esta conexión.

Finalmente, con los datos de obtenidos en el presente trabajo, se ha logrado en un 85% la prueba de esta hipótesis en el proceso de aprendizaje.

Hipótesis 2

Si mostramos las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a su interpretación y comprensión e influirá en el rendimiento académico de los alumnos (Reyna, 2017).

Así también hemos comprobado nuestra segunda hipótesis: que si mostramos las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz y planteando preguntas y actividades relacionadas a estas, se comprobó mediante un 85% que si se contribuyó a su interpretación y comprensión lo cual influyo notablemente en el rendimiento académico de los alumnos, lo cual se puede apreciar en cada uno de los datos estudiados en un pre y post test aplicados durante los semestres académicos 2018.

Con los resultados obtenidos se comprobó la hipótesis general que desde el estudio de los orígenes de la integral se pudo caracterizar los procesos del estudio de la integral definida, la cual se pudo aplicar en el contexto socio- profesional de la formación de los futuros profesionales de ingeniería de la Universidad Nacional del Callao.

6.3 Contrastación de resultados con otros estudios similares

Robles (2014). presentan el diseño de una secuencia didáctica de tareas orientada a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en los primeros cursos universitarios que, asumiendo la complejidad y la articulación de nociones y objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), promueva, mediante la utilización de ambientes interactivos que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura, el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial que desempeña en el estudio del Cálculo.
En el trabajo realizado, se encuentra similitud con el trabajo expuesto pues según los estudios con la utilización de nociones y actividades expuestas en la asignatura de matemática dictada en la facultad de ingeniería química, mediante una secuencia didáctica y con la participación activa de los estudiantes se ha logrado la comprensión del papel que desempeña el Teorema Fundamental del Calculo en la articulación del cálculo diferencial e integral en un 80% por parte de los alumnos.
Finalmente, en el trabajo se muestra la importancia der los resultados con respecto a la comprensión y más el aprendizaje del Teorema Fundamental el cálculo en el desarrollo de las carreras de ingeniería.

Edson Crisóstomo Dos Santos (2012), estudia casos de un contenido matemático y un contexto educativo particulares, concluyendo que la interacción entre los estudiantes universitarios que van a cumplir deberes y va a tener derechos (discentes), se produce, por medio de la realización de actividades asignadas por sus profesores; estas actividades suelen ser realizadas en clase.

En el desarrollo de la investigación, se encontró que cuando se trata del desarrollo de un proyecto por parte de los estudiantes, sin embargo; necesitan los estudiantes dedicarles, un considerable tiempo extra de clase, eso se puede comprobar al observar los datos estadísticos en los cuales solo se obtiene un 45%. De esto se comprobar la similitud con el trabajo de **Dos Santos** en el cual es el profesor de la asignatura que con su participación sobre el proceso de aprendizaje ha dado a notar la importancia del desarrollo de actividades en grupo por parte de los estudiantes para el aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo.

Brian Joel Valenzuela Pagaza (2018) Con respecto a los aspectos didácticos del estudio de su objeto de estudio, el TFC, mediante la revisión de dos textos de consulta comprobaron que la metodología utilizada para la enseñanza de dicho tema se realiza mediante la conversión en un solo sentido del registro algebraico al registro gráfico, y no en el sentido inverso.

Con respecto al trabajo realizado, se pudo comprobar que se encuentra mucha similitud para con los estudiantes de ingeniería en las universidades nacionales, pues se notaron que se han aplicado instrumentos de investigación didáctica en ambos casos, aunque en el presente trabajo se ha logrado comprobar un juicio crítico y el cual se ha cumplido al usar todas las herramientas meta cognoscitivas que utilizaron los alumnos para los problemas aplicados a situaciones reales como podemos comprobar, lográndose en ello un 60%.

6.4 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

El presente trabajo de investigación, este desarrollado con el respeto y la confianza de los estudios realizados; así como es, un trabajo dedicado y responsable para contribuir con el desarrollo de la ciencia y tecnología.
Así mismo en el presente trabajo se han efectuado evaluaciones y análisis, eliminando todo tipo de sesgo académico, para lograr la objetividad del mismo.

CONCLUSIONES

a) En el análisis de los test y cuestionarios aplicados a los estudiantes se deja en evidencia la dificultad que encuentran los alumnos para la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, por ello, para la comprensión del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz es necesario contribuir con las ideas de génesis, pues lleva a un entendimiento útil de las asignaturas de Matemática en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

b) Se ha generado un conocimiento útil del Teorema Fundamental del Cálculo en los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao cumpliéndose con el objetivo planteado con respecto a la comprensión y más aún los estudiantes de la facultad de ingeniaría Química, han aplicado e interpretado correctamente las ideas sobre el Teorema Fundamental del cálculo.

c) Se ha logrado un nivel de aprendizaje significativo haciendo uso de un modelo de aprendizaje donde intervienen todas las actividades didácticas, los cuales se podrán aplicar en el aprendizaje de nuestras asignaturas, lo que está comprobado con el respectivo análisis.

RECOMENDACIONES

a) Con el estudio se propone un modelo de aprendizaje donde intervengan todas las actividades didácticas, los cuales se podrán aplican en el aprendizaje de nuestras asignaturas.

b) Existen diversos métodos de enseñanza-aprendizaje para la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, pero con la articulación de registros, es decir interpretar la información y traducirla en términos de otro, se logrará una mejor comprensión de los temas relacionados con el cálculo diferencial e integral.

c) Para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo se debe hacer un recorrido de los generadores del Teorema e implementarlo para los docentes que dictan la asignatura que incluye el Teorema Fundamental del cálculo.

d) Implementar la participación de los alumnos de las asignaturas correspondientes en eventos que muestren la aplicación del teorema.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Anderson, Lorin W. (1999). *Rethinking Bloom's Taxonomy: Implications for Testing and Assessment.* Institute of Education Sciences U.S.A.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R. y Bloom D. S.(2000) *A taxonomy for learning, teaching, and assessing : a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* Institute of Education Sciences U.S.A

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Netherlands: Kluwer, A.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática* Disponible en:<http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40512064003>acceso en 14 mar. 2018.

Córdoba, A. V. (2010). *Competencias cognitivas en la Educación* Superior. Revista Electrónica de Desarrollo de Competencias, N°6-Vol2, 34-64.Chile

Crisóstomo Dos Santos, (2012*). Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional.* Tesis Doctoral. Departamento de Didactica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

De Segadas Vianna, Claudia Coelho. (1998) *Students understanding of the fundamental theorem of calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery.* PhD thesis, Institute of Education, University of London.

Dreyfus, T. (1990), *'Advanced Mathematical Thinking',* in P. Nesher and J. Kilpatrick (eds), Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematical Education, Cambridge University Press, 113- 134.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.*New York: Springer-Verlag.

Figueredo, V. L. X., Mello, M. P. y Santos, S. A. (2011). *Cálculo com aplicações: atividades computacionais e projetos.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Frota, M. C. R. (2009). Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 59-79). Recife: SBEM.

Grabiner, J. V. (1983). *The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass.* Mathematics Magazine. 56, (4), 195-206.

González, A. S. (2005), *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica. Utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*, Tesis doctoral, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Gordon, S. P., y F. S. Gordon (2007), *"Discovering the fundamental theorem of calculus"*, Mathematics Teacher, vol. 100, núm. 9, pp. 597-604.

Hernández-Sampieri, R., Collado, C. y Baptista, M. (2014) *Metodología de la Investigación.* (6ª ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. DE C.V.

Le Boterf, G. (2001): *Ingeniería de las Competencias.* Barcelona: Ediciones Gestión.

Lois, A. y Milevicich, L. (2009). The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6) Working Group 7*, Lyon, France.

Moya C. Rufino, Saravia Gregorio (2004), *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Ed. San Marcos, Perú.

Rey Pastor, J. (1969) *Análisis Matemático.* Buenos aires: kapelusz 8ed.

Reyna S. A. (2017) *El proceso enseñanza de la matemática en la carrera de ingeniería química de la Universidad Nacional del Callao a través del aprendizaje basado en problemas.* Universidad Nacional del Callao. Perú

Ribeiro, M. V. (2010). *O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. et. al. (2014). *Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo.* Educación matemática, 26(2), 69-109.

Rosken, B. y Rolka, K. (2006). A picture worth a 1000 words – the role of visualización in mathematics learning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464). Prague: PME.

Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowlege. En, L.D. English, M. Bartolini-Busi, G. A. Jones, R. Lesh, R. and D. Tiroshm, *Handbook of International research in mathematics education* (pp. 581-598). London: Lawrence Erlbaum Ass.

Ruthven, K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Cyprus. Disponible en <http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>, acceso en 10 mar 2018.

Santos, J. R. V. S., Corrêa, J. F. & Cyrino, M. C. C. T. (2005). *Análise Histórico - Epistemológica das Ideias de Leibniz sobre Método da Transmutação.* In: Brolezzi, A. C. & Abdounur, O. J. (Org.). I Seminário Paulista de História e Educação Matemática – SP, São Paulo: 2005. Anais... São Paulo: IME – USP, p. 404-413.

Santos, W. C. (2011). *As idéias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz.* Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, 13(2).

Tall, D. (Ed.). (1991a). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht,The Netherlands Kluwer.

Tall, D. (1991b). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (Ed.). (1991c). Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics Teaching, 137*, 29–32.

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. En M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Valenzuela Pagaza Brian Joel (2018) en su trabajo: *Una perspectiva del Teorema Fundamental del Cálculo basado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica con estudiantes de Ingeniería.* Perú.

Vásquez Córdova Alejandro (2010) *Competencias Cognitivas en la Educación Superior.* Revista Electrónica de Desarrollo de Competencias (REDEC) - N° 6 - Vol. 2 - 2010 Universidad de Talca.

Wenzelburger, Elfriede (1993). *Conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral una propuesta didáctica.* Educación Matemática, 05(03), pp. 93-123-Mexico

Whiteside, D. T. (1960). *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century*, Archive for History of Exact Sciences 1, 179-388. Cambridge University.

Whiteside, D. T. (1968). *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Vol. II. Cambridge: Cambridge University Press, 8 vols.

ANEXOS

XI. ANEXOS

ANEXO N° 1

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz, como un proceso de aprendizaje para estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao

PROBLEMA PRINCIPAL	OBJETIVO PRINCIPAL	HIPOTESIS PRINCIPAL	VARIABLE INDEPENDIENTE	DIMENSIONES	INDICADORES	METODOLOGIA
¿Cómo es el proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao?	Determinar el proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao	Si se aplican los diversos mecanismos cognitivos a los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química, se logrará una mejora en el aprendizaje sobre las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz convirtiéndolo en un conocimiento útil.	Los mecanismos cognitivos en los estudiantes de Matemática, en la Facultad de Ingeniería Química La contribución de las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz	Conocimiento Comprensión Aplicación Análisis Síntesis Evaluación	Trabajo grupal Practicas Calificadas Lista de ejercicios	Exposiciones magistrales. Discusión y/o al trabajo en equipo fundamentados en el aprendizaje individual o trabajo autónomo
PROBLEMAS ESPECIFICOS	**OBJETIVOS ESPECIFICOS**	**HIPOTESIS ESPECIFICAS**	**VARIABLES DEPENDIENTE**	**DIMENSIONES**	**INDICADORES**	**METODOLOGIA**
¿Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a esa comprensión? ¿Los diversos mecanismos cognitivos proporcionados a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo convertirán a este en un conocimiento útil?	Determinar el proceso de aprendizaje antes de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao. Determinar el proceso de aprendizaje después de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao	Planeando y diseñando las experiencias y actividades necesarias para la adquisición de los aprendizajes a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo. Si mostramos las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a su interpretación y comprensión e influirá en el rendimiento académico de los alumnos.	Proceso de aprendizaje con la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz en estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao	Comprensión y cuestionamiento Interpretación Juicio critico	Cuestionamiento de la información Interpretación de la información. Juicio	Exposición de un tema designado por el docente en forma colaborativa; Aplicación sobre un caso del área de ingeniería química.

ANEXO N° 2

ANEXO: FICHA PARA LA VALIDACION DEL CUESTIONARIO DE LA ENCUESTA

I.A-DATOS DEL ESPECIALISTA QUE REALIZA LA VALIDACIÓN

Nombres y Apellidos: SANTOS PANTALEON RODRIGUEZ CHUQUIMANGO
Máximo grado académico alcanzado: Licenciado
Especialidad: Matemático (Docente)
Institución donde labora: Universidad Nacional del Callao (U NAC)

II. A- DATOS DEL PLAN DE TESIS

Título: **"DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE ARQUÍMEDES HASTA LEIBNIZ, COMO UN PROCESO DE APRENDIZAJE PARA ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO"**

Problema

¿Presenta una dificultad en su aprendizaje para los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, el Teorema Fundamental del Cálculo?

Sub problemas :

- ¿Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a esa comprensión?
- ¿Los diversos mecanismos cognitivos proporcionados a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo convertirán a este en un conocimiento útil?

III. A DATOS DEL CUESTIONARIO DE ENCUESTA

El objetivo del cuestionario de encuesta: es identificar la comprensión del Teorema Fundamental del Calculo en los alumnos, su comprensión y aplicación.

Problema(s) que se relaciona(n) con el cuestionario de encuesta: Sub problema

IV. A CUADRO DE VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

Marcar con un check (X) donde considera que corresponda

Exigencias para la validación del cuestionario	CUMPLE	NO CUMPLE
1.- El objetivo del cuestionario, tiene relación con uno o más problemas del proyecto de investigación	X	
2.- El objetivo del cuestionario es claro y entendible	X	
3.- Las instrucciones que se dan en el cuestionario son claras.	X	
4.- Las preguntas del cuestionario guardan relación con su objetivo	X	
5.- Las preguntas tiene secuencia lógica	X	
6.- Los encuestados tienen capacidad para dar respuestas validas	X	
7.- No se tienen preguntas desconocidas	X	
8.- El cuestionario es confiable para los propósitos de la investigación.	X	

Lic. Santos Rodríguez Chuquimango

ANEXO: FICHA PARA LA VALIDACION DEL CUESTIONARIO DE LA ENCUESTA

I.A-DATOS DEL ESPECIALISTA QUE REALIZA LA VALIDACIÓN

Nombres y Apellidos: LUIS AMERICO CARRASCO VENEGAS
Máximo grado académico alcanzado: Doctor
Especialidad: Ingeniero Químico (Docente)
Institución donde labora: Universidad Nacional del Callao (UNAC)

II. A- DATOS DEL PLAN DE TESIS

Título: **"DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE ARQUÍMEDES HASTA LEIBNIZ, COMO UN PROCESO DE APRENDIZAJE PARA ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO"**

Problema

¿Presenta una dificultad en su aprendizaje para los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, el Teorema Fundamental del Cálculo?

Sub problemas :

- ¿Las ideas de génesis del Teorema Fundamental del Calculo desde Arquímedes hasta Newton y Leibniz contribuirán a esa comprensión?
- ¿Los diversos mecanismos cognitivos proporcionados a los alumnos sobre el Teorema Fundamental del Cálculo convertirán a este en un conocimiento útil?

III. A DATOS DEL CUESTIONARIO DE ENCUESTA

El objetivo del cuestionario de encuesta: es identificar la comprensión del Teorema Fundamental del Calculo en los alumnos, su comprensión y aplicación.

Problema(s) que se relaciona(n) con el cuestionario de encuesta: Sub problema

IV. A CUADRO DE VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

Marcar con un check (X) donde considera que corresponda

Exigencias para la validación del cuestionario	CUMPLE	NO CUMPLE
1.- El objetivo del cuestionario, tiene relación con uno o más problemas del proyecto de investigación	X	
2.- El objetivo del cuestionario es claro y entendible	X	
3.- Las instrucciones que se dan en el cuestionario son claras.	X	
4.- Las preguntas del cuestionario guardan relación con su objetivo	X	
5.- Las preguntas tiene secuencia lógica	X	
6.- Los encuestados tienen capacidad para dar respuestas validas	X	
7.- No se tienen preguntas desconocidas	X	
8.- El cuestionario es confiable para los propósitos de la investigación.	X	

....

....

Firma del Validador

ANEXO N° 3

Puntajes y Niveles del Proceso de Aprendizaje en el Grupo Experimental antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

N°	Dimensiones												Proceso de aprendizaje			
	Comprensión y cuestionamiento				Interpretación				Juicio critico							
	Pre		Post		Pre		Post		Pre		Post		Pre		Post	
	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel	Puntos	Nivel
1	2	Inicio	8	Proceso	2	Inicio	2	Inicio	0	Inicio	3	Inicio	4	Inicio	13	Proceso
2	6	Proceso	10	Logrado	1	Inicio	4	Logrado	3	Inicio	5	Proceso	10	Inicio	19	Logrado
3	5	Inicio	5	Inicio	0	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	6	Logrado	7	Inicio	12	Proceso
4	3	Inicio	9	Logrado	1	Inicio	4	Logrado	2	Inicio	5	Proceso	6	Inicio	18	Logrado
5	7	Proceso	10	Logrado	1	Inicio	3	Proceso	3	Inicio	3	Inicio	11	Proceso	16	Logrado
6	4	Inicio	9	Logrado	3	Proceso	4	Logrado	1	Inicio	4	Proceso	8	Inicio	17	Logrado
7	5	Inicio	6	Proceso	1	Inicio	3	Proceso	4	Proceso	6	Logrado	10	Inicio	15	Proceso
8	9	Logrado	10	Logrado	2	Inicio	4	Logrado	2	Inicio	5	Proceso	13	Proceso	19	Logrado
9	2	Inicio	7	Proceso	1	Inicio	4	Logrado	3	Inicio	5	Proceso	6	Inicio	16	Logrado
10	3	Inicio	9	Logrado	1	Inicio	4	Logrado	1	Inicio	3	Inicio	5	Inicio	16	Logrado
11	8	Proceso	10	Logrado	2	Inicio	4	Logrado	0	Inicio	3	Inicio	10	Inicio	17	Logrado
12	4	Inicio	6	Proceso	0	Inicio	4	Logrado	2	Inicio	6	Logrado	6	Inicio	16	Logrado
13	2	Inicio	9	Logrado	1	Inicio	3	Proceso	5	Proceso	6	Logrado	8	Inicio	18	Logrado
14	2	Inicio	6	Proceso	3	Proceso	4	Logrado	2	Inicio	3	Inicio	7	Inicio	13	Proceso
15	9	Logrado	10	Logrado	1	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	6	Logrado	11	Proceso	18	Logrado
16	3	Inicio	4	Inicio	1	Inicio	4	Logrado	4	Proceso	6	Logrado	8	Inicio	14	Proceso
17	1	Inicio	7	Proceso	2	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	6	Logrado	4	Inicio	15	Proceso
18	5	Inicio	9	Logrado	4	Logrado	4	Logrado	2	Inicio	6	Logrado	11	Proceso	19	Logrado
19	4	Inicio	3	Inicio	1	Inicio	3	Proceso	1	Inicio	6	Logrado	6	Inicio	12	Proceso
20	3	Inicio	9	Logrado	2	Inicio	3	Proceso	2	Inicio	6	Logrado	7	Inicio	18	Logrado
$\overline{X}$	**4**		**8**		**2**		**3**		**2**		**5**		**8**		**16**	
S	**2.4**		**2.2**		**1.0**		**0.9**		**1.3**		**1.3**		**2.6**		**2.3**	
CV	**54.9**		**27.8**		**66.7**		**28.0**		**64.2**		**25.8**		**32.3**		**14.4**	

Fuente: Información obtenida del test

Puntajes y Niveles del Proceso de Aprendizaje en el Grupo Control antes y después de la Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en estudiantes de Asignatura de Matemática II de la Facultad de Ingeniería Química de la UNAC -2018

N°	Dimensiones												Proceso de aprendizaje			
	Comprensión y cuestionamiento				Interpretación				Juicio crítico							
	Pre		Post		Pre		Post		Pre		Post		Pre		Post	
	Puntos	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**	**Puntos**	**Nivel**
1	4	Inicio	5	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	1	Inicio	7	Inicio	8	Inicio
2	4	Inicio	4	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	4	Proceso	5	Proceso	10	Inicio	11	Proceso
3	9	Logrado	9	Logrado	1	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	12	Proceso	14	Proceso
4	2	Inicio	3	Inicio	0	Inicio	1	Inicio	3	Inicio	3	Inicio	5	Inicio	7	Inicio
5	3	Inicio	3	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	5	Inicio	7	Inicio
6	6	Proceso	6	Proceso	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	10	Inicio	10	Inicio
7	2	Inicio	7	Proceso	4	Logrado	4	Logrado	6	Logrado	6	Logrado	12	Proceso	17	Logrado
8	2	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	3	Inicio	6	Inicio	7	Inicio
9	2	Inicio	2	Inicio	0	Inicio	1	Inicio	0	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	4	Inicio
10	6	Proceso	7	Proceso	3	Proceso	2	Inicio	1	Inicio	4	Proceso	10	Inicio	13	Proceso
11	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	6	Inicio	7	Inicio
12	10	Logrado	10	Logrado	1	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	3	Inicio	14	Proceso	15	Proceso
13	4	Inicio	4	Inicio	3	Proceso	3	Proceso	2	Inicio	2	Inicio	9	Inicio	9	Inicio
14	2	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	4	Proceso	5	Proceso	7	Inicio	9	Inicio
15	7	Proceso	7	Proceso	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	11	Proceso	12	Proceso
16	1	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	1	Inicio	3	Inicio	3	Inicio	5	Inicio	6	Inicio
17	2	Inicio	2	Inicio	3	Proceso	3	Proceso	1	Inicio	2	Inicio	6	Inicio	7	Inicio
18	9	Logrado	9	Logrado	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	13	Proceso	13	Proceso
19	1	Inicio	1	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	4	Inicio	6	Inicio
20	2	Inicio	2	Inicio	1	Inicio	2	Inicio	3	Inicio	3	Inicio	6	Inicio	7	Inicio
$\overline{X}$	**4**		**4**		**2**		**2**		**2**		**3**		**8**		**9**	
S	**2.8**		**2.8**		**1.0**		**0.7**		**1.3**		**1.3**		**3.3**		**3.5**	
CV	**71.2**		**63.8**		**63.0**		**33.5**		**57.4**		**43.3**		**41.8**		**37.2**	

Fuente: Información obtenida del test

ANEXO N° 4

Aprendizajes Integrados para la Comprensión del Teorema Fundamental

ÍTEMS	PUNTAJE
1	0= No redacta un resumen de lo leído del teorema fundamental del cálculo.
	1= Redacta un resumen de lo leído del teorema fundamental del cálculo.
2	0= No identifica la idea principal del teorema fundamental del cálculo.
	1= Identifica la idea principal del teorema fundamental del cálculo.
3	0= No determina la etapa del Método Científico es el punto de partida de la Investigación Científica
	1= Determina la etapa del Método Científico es el punto de partida de la Investigación Científica
4	0 = No describe por qué la naturaleza del teorema fundamental del cálculo.
	1= Describe por qué la naturaleza del teorema fundamental del cálculo.
5	0 = No responde mediante un cuadro comparativo, menciona las diferencias entre los teoremas del cálculo diferencial.
	1= Responde mediante un cuadro comparativo menciona las diferencias entre los teoremas del cálculo diferencial.
6	0= No menciona qué etapa del método científico debe ser comprobada experimentalmente para los teoremas del cálculo diferencial.
	1= Menciona qué etapa del método científico debe ser comprobada experimentalmente para los teoremas del cálculo diferencial.
7	0= No Esquematiza mediante un cuadro sinóptico las fases del método científico para los teoremas del cálculo diferencial.
	1= Esquematiza mediante un cuadro sinóptico las fases del método científico para los teoremas del cálculo diferencial.
8	0= No responde qué significa el teorema fundamental del cálculo diferencial.
	1= Responde qué significa el teorema fundamental del cálculo diferencial.
9	0= No responde qué significa el teorema fundamental del cálculo integral
	1= Responde qué e significa el teorema fundamental del cálculo diferencial.
10	0= No responde en un cuadro comparativo establece las diferencias entre el teorema fundamental del cálculo diferencial y de la integral
	1= Responde en un cuadro comparativo establece las diferencias entre el teorema

	fundamental del cálculo diferencial y de la integral
11	0= No responde/ ni redacta lo referente a los teoremas del cálculo integral 1= Responde lo referente a los teoremas del cálculo integral
12	0= No esquematiza mediante un cuadro sinóptico los diferentes teoremas del cálculo diferencial e integral 1= Esquematiza mediante un cuadro sinóptico los diferentes teoremas del cálculo diferencial e integral
13	0= No elabora un modelo matemático usando el teorema fundamental del calculo 1= Elabora un modelo matemático usando el teorema fundamental del calculo
14	0= No da 3 aplicaciones de fenómenos físicos donde use el teorema fundamental 1= Da 3 aplicaciones de fenómenos físicos donde use el teorema fundamental
15	0= No expresa sus ideas con claridad y fluidez en sus exposiciones sobre el Teorema fundamental 1= Expresa sus ideas con claridad y fluidez en sus exposiciones sobre el Teorema fundamental
16	0= No comprende las ideas expuestas por sus compañeros sobre el Teorema fundamental. 1= Comprende las ideas expuestas por sus compañeros sobre el Teorema fundamental
17	0= No asume una posición crítica acerca de las exposiciones. 1= Asume una posición crítica acerca de las exposiciones.
18	0= No expresa sus opiniones de manera asertiva sobre el Teorema fundamental 1= Expresa sus opiniones de manera asertiva sobre el Teorema fundamental
19	0= No respeta la opinión de los demás sobre el Teorema fundamental 1= Respeta la opinión de los demás sobre el Teorema fundamental
20	0= No respeta la opinión de los demás. 1= Respeta la opinión de los demás.

Fuente: Elaboración propia

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

?

2.- La integral definida representó :

- Un área.

- Un número

- Una Gráfica. ✓

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

$F_R = ma$

$-kx = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Para hallar áreas y volúmenes

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)? No

2.- La integral definida representó :

- Un área. X
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?
Calculo de áreas y volúmenes. En Física y Química.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

· Sí, Mediante curvas

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

¿?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Claro por ejemplo cuando medimos la Temperatura varia mucho y genera una grafica que se puede medir.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

¿?

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La integral definida nos da como respuesta un número, que puede representar ~~el~~ área de un cuerpo.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, para hallar volúmenes y áreas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

no, ya que las ecuaciones diferenciales ordinarias

2.- La integral definida representó :

- Un área. ✓
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si, lo utilice en matematica II. donde calculaba el. area. de una integral.

Poémape Padilla Giancarlos

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO 1516120538
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si, tomando valores inicial y final en una función

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.- ¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Los puntos tomados se calcularon al inicio y final.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si.

- Cálculo de áreas bajo la gráfica
- Variación entre valores

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

2.- La integral definida representó :

- Un área. un área debajo de la gráfica.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

la integral definida permite obtener calculos como el enfriamiento o calentamiento ya sea de un cuerpo, alimento, ~~b~~bebida, et.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, en temas de matemática III y en la aplicación en la vida diaria.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Sí .

2.- La integral definida representó :

- Un área.

- Un número

- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Nuestro trabajo trato sobre aplicar las EDO's de segundo orden en sismos o terremotos. Con los cuales hallamos las intensidades de dicho sismo y así también las longitudes de onda.

$$R = \left(\frac{A}{A_o}\right)$$

escala de Ritcher

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si, en fisicoquímica .

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

SE PUEDE INTERPRETAR COMO UNA SOLUCION

2.- La integral definida representó :

Un área.

- Un número

- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

LA I. DEFINIDA SE USA PARA CALCULAR DATOS EXACTOS YA QUE VAN O TIENEN UN DOMINIO EL CUAL RESULTA EN UN NUMERO.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

EN FISICA Y EN Q. GENERAL:
PARA FISICA SE TOMAN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA DETERMINAR POR EJEMPLO LA ELONGACION DE UNA CUERDA.
EN QUIMICA SE USA LAS E.D.O PARA DETERMINAR EL TIEMPO QUE DEMORA O QUE TARDA EN REACCIONAR UNA SUSTANCIA -

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION. INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si, porque en la solución la integral definida representa un número

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número ✓
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

En mi trabajo se trato sobre movimientos amortiguados el cual en la ecuación diferencial

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si ; en física, química, matemática

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1. ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial (EDO)?

2. La integral definida representó

Un área

Un número

Una Gráfica

3.- ¿De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

$\frac{dT}{dr} = C_1 2^{-t} + C$

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si, Fisicoquímica IV

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Para hallar la T por enfriamiento de newton

$$T = Ce^{-k/t} + T_{amb}$$

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

FISICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Da

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si , en los cursos de fisica y de quimica , tambien en los laboratorios .

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si se puede interpretar para los ecuación de vibraciones libres y vibraciones forzadas

2.- La integral definida representó :

- Un área. ✓
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si en los cursos de Química y Estadística

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Para el caso de nuestro trabajo de la Ley de enfriamiento de Newton $\frac{dT}{dt} = K(T_0 - T_{amb})$, si queremos hallar una variacion de temperatura entre un t_2 a un t_1 $\int_{t_1}^{t_2}$ que seria el tiempo que se demora en enfriar el cuerpo.
La integral tambien puede representar una area.

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

Represento el tiempo que se demora en enfriar si la constante $K < 0$ y calentar $K > 0$

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

En fisica para saber la variacion de velocidad de un cuerpo asi como en cinetica quimica

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

de Primer orden

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

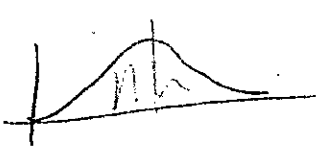
3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

tiene como respuesta un numero.

¿?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

En estadística.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

No, porque el concepto de ecuación diferencial es aquella ecuación donde la derivada de las variables dependientes respecto con las variables independientes y no solo sucede en la integral indefinida.

2.- La integral definida representó :

- Un área.

- Un número

- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

¿?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, en Física 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

NO ya que la integral es un número. y la solución posee constantes,

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Es un número

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si, En las diferentes ramas de la carrera de ingeniería química, ya que todas las demostraciones se realizan mediante este proceso.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica. Temperatura Vs Tiempo

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La integral se aplico a la ley de enfriamiento de Newton.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

En el tema de calorimetria donde se mide la temperatura ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ y el tiempo en el que se da la reaccion

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Sí, en la ley de enfriamiento de Newton se usó eso.

2.- La integral definida representó :

/Un área.

- Un número

- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La integral definida nos sirvió para hallar la temperatura en un cierto tiempo en la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton,

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, en la materia [illegible].

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si por supuesto, se aplica mucho cuando nos dan la ecuación se quiere hallar la solución por ejemplo de una Área. los límites de la integral nos indica que ~~que~~ es una integral definida

2.- La integral definida representó :

✓ Un área. área del círculo, el área de una región

Un número

✓ Una Gráfica. velocidad vs tiempo

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Mi trabajo trato de la ley de Hooke demostrar la ecuación solución mediante EDO, pues para la hallar la solución se a necesitado la integral definida, esto lo interprete de manera que parti de mi deformación inicial resorte hasta el valor maxima de la deformación.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si en Física II
se usa mucho en la ley de Hooke,
tambien se usa en termodinámica (calor, enfriamiento)

n Carlos Taipe Mogollón / [illegible]

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

La solución de una ecuación diferencial es una función, la cual puede ser expresada como una integral, si es que se aplica o se integra respecto a limites o condiciones, que son dadas por el problema. La integral seria definida y se podria reemplazar. Quedando asi un número que represente la magnitud que queremos medir o predecir.

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número. En el proyecto se uso para determinar un número el cual representa a la vez una magnitud (concentración, Tiempo) etc).
- Una Grafica.

3.- ¿ De acuerdo a su trabajo podria dar una interpretación de la integral definida?

La integral definida puede representar, magnitudes, en los problemas de aplicación que se investigo se usan, para la solución final y mode

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, en practicamente todas los cursos que he llevado hay aplicación de la integral definida, asi como ecuaciones diferenciales. Por ejemplo en estadistica (probabilidad), Física (Campos, electricidad), Quimica, Fisicoquimica. Todo es modelado con sistema de ecuaciones diferenciales.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Sí, bueno en nuestro trabajo nos ayudo para llegar a la ecuación general dejandolo en función del tiempo, se aplicó en la 1era y 2da Ley de Newton. La integral definida fue un paso previo para llegar a la ecuación general respectivamente.

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número (cuando reemplazo los límites de intervalo q' me dan.)
- Una Gráfica. (exponencial) en el caso de mi experiencia

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Pues la integral definida se pudo observar en las Aplicaciones de Ecuaciones Diferencial de 1er y 2do orden, como anteriormente me exprese que la integral fue un paso previo para llegar a nuestra ecuación general, así dando como resultado una exponencial y por ello mismo nuestra gráfica se mostró de tal manera tanto para el Keke y la taso de cafe (Ley del Enfriamiento), en nuestra experiencia tuvo que ver mucho nuestra T ambiental, ya que sí eso varcabá pues nuestros calculos posteriores de igual manera varían. Teníamos q' tener en cuenta ese detalle. Tambien influye la salanidad de Agua el lugar en donde nos encontremos.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Sí, lo veo tambien en el curso de Física II, en los campos magneticos al hallar el flujo, también en Química en algunos libros.

• Nuestro trabajo de exposiencia, el tema de la 1era Ley de Newton actualmente es utilizado para la Climatología y de la 2da Ley Newton para la parte sismica. (Física)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Mayormente se usa para las EDO, en series de Frobenius, Fourier y todas las series que podamos emplear lo cual cuando hacemos las EDO con V.P., P.V.I o coeficientes constantes son soluciones mas rapidas, pero se pueden hallar EDO con integrales definidas en escalon unitario y con las ya comentadas series.

2.- La integral definida representó :

- Un área.

- Un número

- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La Integral definida es el número que le damos a una determinada zona que hallar dependiendo las condiciones que nos dan, la Integral viene a ser la inversa a decir de la derivada.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Para hallar sucesiones y series se puede usar la integral definida en el tema que hubo acerca de M.A.S que se puede hacer con EDO en aplicaciones podemos hallar la A, el T y el angulo el cual inicia dicha aplicación, es decir nosotros sabremos a que o comenzo a oscilar dicho pendulo o movimiento armonico simple

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

si, la Integral se puede ser la solucion de una EDO

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

en el sistema masa-resorte, la Integral definida represento una grafica en la interaccion del sistema masa-resorte representando una curva.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

si, en el curso de estadistica hemos usado la Integral definida para el desarrollo del tema de Distribucion normal que se aplica en la grafica conocida como campana de Gauss.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si, si puede ser una ecuacion diferencial solución de la EDO.

Ejm: E.D. del enfriamiento

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número = la temperatura
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La integral definida es la temperatura final del enfriamiento de una taza de chocolate

$T_F = Ce^{-K} + T(inicial)$

$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{dT} = -KT$ $\quad T_2 =$ tem final
$\quad T_1 =$ temperatura inicial

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

en Química General II se usa la integral definida en el calculo de presiones a diferentes temperaturas

$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dP}{dT} = \frac{-\Delta H}{RT}$ entalpía

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

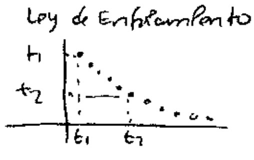
Si, al dar solución a una E.D.O se usan métodos de integración lo cual al desarrollarlos nos da un valor que es solución..

Ejemplo: En nuestro proyecto aplicamos la solución de la ley de Enfriamiento de newton $\frac{dt}{dt} = -K(t_{cm} - t_{s})$ al integrar nos da una ecuación: $T(t) = t_{am} + Ce^{-kt}$, lo cuál nos sirvió para calcular la temperatura teórica y compararla con la temperatura experimental

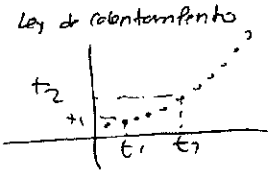
2.- La integral definida representó : Un número, al resolver la E.D.O nos da un valor como resultado lo cuál al agregar otros posibles valores formaban una gráfica

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

Ley de Enfriamiento



Ley de calentamiento



3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

La integral definida es una operación matemática que ayuda a dar solución a una E.D.O, lo cual nos permite calcular los posibles valores que acepta la E.D.O

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

* Entropía $\Rightarrow$ $\Delta H_{\cancel{298}} = \Delta H_{298} + \int_0^T \Delta H$

* En las resistencias

* En los resortes

* Ley de Clapeyron

* Ley de calor

* Enfriamiento de newton

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

Si

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

Solución de una ED.

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Si Para hallar áreas de manera más sencilla

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA
ASIGNATURA: MATEMÁTICA II
SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B
FECHA: 22/11/2018
COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

¿?

2.- La integral definida representó :

- Un área.
- Un número
- Una Gráfica. ✓

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

$$F_R = ma$$
$$-kx = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = t$$

¿?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Para hallar áreas y volúmenes

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

ASIGNATURA: MATEMÁTICA II

SEMESTRE ACADÉMICO : 2018-B

FECHA: 22/11/2018

COMPRENSION, INTERPOLACIÓN Y APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEST

De acuerdo a su trabajo de investigación realizado responda las siguientes preguntas:

1.- ¿La integral definida se puede interpretar como una solución de una ecuación diferencial(EDO)?

No

2.- La integral definida representó :

- Un área. X
- Un número
- Una Gráfica.

3.-¿ De acuerdo a su trabajo podría dar una interpretación de la integral definida?

4.- En los cursos llevados, ¿Encontró usted aplicación de la integral definida?

Calculo de áreas y volúmenes. En Física y Química.

ANEXO N° 5

Solución de la actividad 2

1. Solución de problema 1

Ahora ya se puede abordar el problema propuesto en la introducción: Por simetría =0 e se calcula aplicando la relación $\bar{y} = \frac{\frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{2Área}$ a la función $f(x) = \sqrt{120^2 - x^2}$, obteniéndose

$$\bar{y} = \frac{\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx}{2\pi R^2/_2} = \frac{4R}{3\pi} \quad (R = 20)$$

La propia simetría habría permitido, para calcular, integrar en [0, R] y, de una u otra forma, resulta que el momento de la galleta respecto del borde externo de la pared es $M_g = \frac{\frac{\rho\pi R^2}{2x20x4R}}{3\pi} = \frac{\rho x40x110^3}{3}$.

Por otra parte, el centro de masas de las cargas de la pared es (0, -20) y, por tanto el momento de las cargas de la pared de altura h (incluidos los 20 cm de forjado) respecto del borde externo de la misma es $Mp = \rho x220x400xhx20$. Por tanto, la construcción será estable si Mp>Mg, lo que implica que $h > 110^2/(3x2x20) = 100.8333\ cm.$

La relación $M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)dx$constituye por si misma un método numérico para calcular. Teniendo en cuenta la simetría, se consideran los puntos medios de los intervalos $[0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5], \ldots, [109.5, 110]$ $(c1 = 0.25, c2 = 0.75, c3 = 1.25, \ldots, c220 = 109.75)$ y con la hoja de cálculo se obtiene que $h = 46{,}6855705455492$.

Aplicando el cálculo integral se obtiene $h = 46{,}6854499736226$

2. Solución de problema 2

Para resolver el problema planteado, lo primero que debe hacerse es determinar el intervalo de definición de la integral.

El origen, a, es el punto de corte de la función $f(x) = x \cdot (sen(3x/4) + 1) + 3$ con el eje de abscisas y el extremo, b, es la abscisa donde la función alcanza el mínimo.

Con el programa funciones se obtiene de manera automática que $a = -3'8775$ y $b = 6{,}275$.

Una integración por partes permite obtener la primitiva:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}sen\left(\frac{3}{4}x\right) - xcos\left(\frac{3}{4}x\right)\right)$$

y, por tanto el área es $F(6{,}275) - F(-3{,}878) = 46{,}342468$.

ANEXO N°6

Trabajos aplicativos realizados por los alumnos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACION DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

"AÑO DE LA RECONCILIACIÓN NACIONAL"

TÍTULO DE INVESTIGACIÓN:

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

NOMBRES Y APELLIDOS

BUSTAMANTE JARA, MANUEL	1626115422
GRANDEZ WONG, FRANK	1626115327
HILARIO QUISPE, SANDRA	1526110143

Callao, 2018

PERU

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a la Facultad de Ingeniería Química por realizar la expo ciencia llevada a cabo el día 23 de Octubre del 2018y así poder mostrar nuestro conocimiento del tema, también agradecemos a la profesora Reyna Segura, Ana María por haber incentivado la participación e investigación de este grupo de alumnas y brindar todo el conocimiento del tema a estudiar, así mismo felicitamos a la Facultad de Ingeniería Química por su 52 aniversario, sintiéndonos orgullosas de pertenecer a esta Escuela Profesional que es una cuna de los buenos profesionales.

TABLAS DE CONTENIDO

RESUMEN

En este trabajo de investigación teórico practico, fue realizado con el objetivo de comprobar el cumplimiento de la ley de enfriamiento de Newton en dos experimentos, el del pastel y el de la taza de té, y así poder dar solución a la ecuación deferencial de primer orden y explicar su significado físico para poder reforzar nuestros conocimientos y comprobar la ley de enfriamiento de Newton , por otro lado también comprobamos una de las tantas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, en este caso escogimos el experimento del movimiento amortiguado, para poder formular la ecuación diferencial y darle la correcta solución mediante los métodos enseñados en clase.

Experimentalmente se puede demostrar y bajo ciertas condiciones obtener una buena aproximación a la temperatura de una sustancia usando la Ley de Enfriamiento de Newton. Esta puede enunciarse de la siguiente manera: La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo. Suponiendo que la constante de proporcionalidad es la misma ya sea que la temperatura aumente o disminuya, entonces la ecuación diferencial de la ley de enfriamiento es: $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$

Donde:

T = Temperatura de un cuerpo

t = tiempo

Tm = Temperatura del medio ambiente

En el movimiento amortiguado, la ley que gobierna esta fuerza es un caso especial de la ley generalizada de Hooke. Nos referiremos a este caso especial como la ley de Hooke, la cual se enuncia como sigue: La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio. ("la fuerza es determinados problemas. A esta transición del problema, al modelo matemático correspondiente se le llama modelado. Este método tiene una gran importancia

proporcional al alargamiento"). Denotamos la magnitud de la fuerza restauradora por | f |, y sea x la posición de W medida desde la posición de equilibrio. Se supone la dirección positiva hacia abajo, de modo que x es positivo cuando W está por debajo de la posición de equilibrio y negativo cuando W esté por encima de esta posición.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales tienen una importancia fundamental en la Matemáticas para la ingeniería debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas matemáticamente por este tipo de ecuaciones. Es interés de este trabajo de deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas y químicas que se presentan en práctica para el ingeniero y se ilustra por medio de ejemplos típicos. En estos ejemplos se ilustraran los pasos del modelado, es decir, hacia un planteamiento matemático y sus soluciones, y la interpretación del resultado. Se dedicará en este espacio la modelación de problemas que conduce a Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden y esto lo justifica desde el punto de vista teórico y práctico pues se verán más fáciles si uno se concentra primero en tales ecuaciones, pues de esta manera los estudiantes familiarizados con los conceptos del segundo orden, resultará más fácil los conceptos y métodos de las de orden superior.

La transferencia de calor está relacionada con los cuerpos calientes y fríos llamados; fuente y receptor, llevándose a cabo en procesos como condensación, vaporización, cristalización, reacciones químicas, etc. en donde la transferencia de calor, tiene sus propios mecanismos y cada uno de ellos cuenta con sus peculiaridades. La transferencia de calor es importante en los procesos, porque es un tipo de energía que se encuentra en tránsito, debido a una diferencia de temperaturas (gradiente), y por tanto existe la posibilidad de presentarse el enfriamiento, sin embargo, esta energía en lugar de perderse sin ningún uso es susceptible de transformarse en energía mecánica, por ejemplo; para producir trabajo, generar vapor, calentar una corriente fría, etc. En virtud de lo anterior es importante hacer una introducción al conocimiento de los procesos de transferencia de calor a través de la determinación experimental de la ecuación empírica que relaciona la temperatura de enfriamiento de una cantidad de sustancia con respecto al medio.

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En la vida cotidiana se presenta muchas veces sucesos físicos que ya tienen una explicación mediante una ley o fórmula matemática, pero la mayoría de veces nos quedamos con esa inquietud de saber si esa expresión matemática ya sea una ecuación, fórmula, ley, etc. cumple en la realidad y que limitaciones puede tener, con esa finalidad este grupo de investigación presenta esta simulación de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con el objetivo de comparar datos y contrarrestar las leyes ya enunciadas.

1.2. Formulación del problema

El problema o discusión de este proyecto de investigación teórico práctico es saber si es posible poder comprobar La ley de Enfriamiento de Newton que son ecuaciones diferenciales de primer orden y La ley de Stokes referido a las ecuaciones diferenciales de segundo orden, y si podemos darle solución mediante métodos que explicaremos posteriormente.

1.3. Objetivos

- Aplicar un modelo matemático ya establecido como lo es la ley de enfriamiento de Newton a un fenómeno físico que sucede en la vida cotidiana
- Mediante la ley de Hookes y la segunda ley de Newton determinar ecuaciones diferenciales y darles solución a los problemas de PVI.

1.4. Limitantes de la investigación

Los límites de investigación que tuvimos al presentar este proyecto a la expociencia fueron el espacio, pues no contábamos con un lugar adecuado para poder hacer las pruebas respectivas del proyecto y también la falta de materiales, pero que con el paso de los días se logró solucionar mediante la buena comunicación y comprensión de las integrantes del grupo, y finalmente poder presentar un buen proyecto.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes (internacional y nacional)

Según Isaac Newton,

Cuando Newton trabajaba de funcionario en la casa de moneda de Inglaterra, Newton abordó el problema de acabar con la falsificación. Primero se construyó un termómetro. Su termómetro funcionaba como el bien conocido termómetro de mercurio, un depósito con un líquido que asciende por un tubo capilar calibrado cuando se calienta. Newton no utilizó mercurio sino aceite de semillas de lino, que hierve a una temperatura de 240 grados Celsius, como líquido para su termómetro. Eligió como cero de su termómetro la temperatura de fusión del hielo, fácil de reproducir, y como 12 grados N (Newton) eligió la temperatura del cuerpo humano. Sus escalas se acercaban bastantes a las actuales especialmente a los grados Celsius. Newton a continuación estudió cómo se enfriaban los cuerpos, especialmente los metales, que se encontraban a altas temperaturas. La variación de temperatura de un cuerpo respecto de la temperatura de la habitación en la que se encuentra, es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y la habitación:se interesó en observar el comportamiento de los metales, específicamente el de un bloque de hierro tras ser calentado al rojo vivo y al ser retirado, observo que se enfriaba rápidamente hasta casi llegar a la temperatura ambiente y cuando este bloque se acercaba a la temperatura ambiente su enfriamiento era cada vez menos rápido.

A través de las observaciones de Newton formulo su hipótesis que menciona que la rapidez con la que un cuerpo pierde calor depende de la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su medio ambiente, plantea que si la diferencia es muy grande será más rápido que pierda su calor el cuerpo, opuesto a que si las temperaturas son semejantes. A si mismo considero un factor de intercambio de calor que depende tanto de las condiciones del medio ambiente como del cuerpo. Además, que también considero las propiedades del cuerpo.

Según la investigación sobre el Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario por Gómez J. Y Razo J.

El cálculo fraccionario permite simplificar el modelado de sistemas complejos, como es el caso de la transferencia de calor, mediante ecuaciones más simples. Al aplicar la definición de cálculo fraccionario a la ley de enfriamiento de Newton se obtiene una representación en la cual están intrínsecos fenómenos de difusión anómala, ya que estos fenómenos surgen a partir del incremento de la correlación en el movimiento de las partículas que componen al material en estudio. Estos fenómenos no pueden ser descritos mediante la ley de enfriamiento de orden entero debido a que en el modelado de los sistemas físicos se toman en cuenta procesos ordinarios (es decir, siguen leyes físicas clásicas), pero el medio es complejo; no sólo por ser no homogéneo en el sentido clásico, sino porque el medio se descompone de modo más o menos aleatorio en componentes altamente heterogéneas con muy distinta escalabilidad (2014).

Fenómenos como el efecto Mpemba (Monwhea, 2006), en el que el agua hirviendo se congela más rápido que el agua a una temperatura más baja es un ejemplo de fenómeno de conducción y difusión anómala; desde la perspectiva del cálculo fraccionario se puede encontrar una mejor descripción de los fenómenos físicos presentes y la descripción detallada de este efecto. Otra posible aplicación del modelo descrito consiste en estimar el flujo de calor existente entre un cuerpo y un fluido homogéneo después de que el cuerpo sea introducido en fluido, el problema radica en corregir la conductividad térmica del fluido por una nueva conductividad térmica, que en este caso sería representada por kγ. Avances relacionados se presentarán en futuros trabajos.

Según Producción de entropía y ley de enfriamiento de Newton por Barragán D.

La ley de enfriamiento de Newton, la que gobierna la evolución temporal de los procesos de transferencia de calor, ya sea hacia el equilibrio termodinámico o hacia estados de noequilibrio, no es una consecuencia de la termodinámica lineal de los procesos irreversibles. Esto se demostró al encontrar soluciones exactas a los flujos de entropía para un sistema que como producto de un calentamiento evoluciona a un estado estacionario. Por consiguiente, procesos de transferencia de calor descritos por la ley de Newton o por la ley de Fourier son objeto de optimización termodinámica en la búsqueda de estados de noequilibrio con mínima producción de entropía (2009).

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

El científico británico Isaac Newton (1642-1727), a quien no cabe juzgar sino como uno de los más grandes genios de la historia de la ciencia. Sin olvidar sus importantes aportaciones a las matemáticas, la astronomía y la óptica, lo más brillante de su contribución pertenece al campo de la física, hasta el punto de que física clásica y física newtoniana son hoy expresiones sinónimas.

Conocedor de los estudios sobre el movimiento de Galileo y de las leyes de Kepler sobre las órbitas de los planetas, Newton estableció las leyes fundamentales de la dinámica (ley de inercia, proporcionalidad de fuerza y aceleración y principio de acción y reacción) y dedujo de ellas la ley de gravitación universal. Los hallazgos de Newton deslumbraron a la comunidad científica: la clarificación y formulación matemática de la relación entre fuerza y movimiento permitía explicar y predecir tanto la trayectoria de una flecha como la órbita de Marte, unificando la mecánica terrestre y la celeste.

Con su magistral sistematización de las leyes del movimiento, Newton liquidó el aristotelismo, imperante durante casi dos mil años, y creó un nuevo paradigma (la física clásica) que se mantendría vigente hasta principios del siglo XX, cuando otro genio de su misma magnitud, Albert Einstein, formuló la teoría de la relatividad.

En este trabajo se propone demostrar las ecuaciones diferenciales de primer y de segundo orden que describe la ley de enfriamiento de Newton y el movimiento oscilatorio, con el fin de señalar la teoría propuesta por Isaac Newton.

Mediante la transferencia de calor (Incropera *et ál.*, 1990; Bejan, 2006) está relacionada con los cuerpos calientes y fríos llamados fuente y receptor; aquí se llevan a cabo procesos como condensación, vaporización, cristalización, reacciones químicas, etc., (Barragán *et ál.*, 2002; Shoemaker *et ál.*, 2003) en donde la transferencia de calor tiene sus propios mecanismos y cada uno de ellos cuenta con características peculiares. La transferencia de calor es importante en los procesos porque es un tipo de energía que se encuentra en movimiento debido a una diferencia de temperaturas (gradiente); por tanto, existe la posibilidad de enfriamiento. Sin embargo, esta energía en lugar de perderse sin ningún uso es susceptible de transformarse en energía mecánica; por ejemplo, para producir trabajo, generar vapor, calentar una corriente fría, etc. (Gómez y Razo, 2014).

2.2.2. Desarrollo de un modelo

T= Temperatura superficial instantánea del cuerpo (K)

TA=Temperatura del fluido perteneciente al medio ambiente. (K)

A=Área de la superficie del cuerpo, se selecciona en la que se transfiere mayor calor. (m^2)

m=Masa del cuerpo. (kg)

Ce=Calor especifico del cuerpo. ($kJ\ /\ kgK$)

h=Coeficiente de intercambio de calor, además es una correlación simplificada entre el estado del fluido y las condiciones de flujo, por lo cual general ente se la conoce como una propiedad de flujo. ($^{W}/_{m^2\,K}$)

dQ/dt = transferencia de calor por tiempo. (W)

Pero considerando que la temperatura del cuerpo es mayor a la del ambiente, entonces sufrirá una pérdida de calor la cual es proporcional a la diferencia de temperaturas, podemos expresar lo anterior como:

$$\boxed{dQ = -mCedT\ldots(2)}$$

El signo negativo indica que es una perdida calorífica

$$\boxed{dQ/dt = hA(T - Ta)\ldots(1)}$$

Finalmente sustituyendo (2) en (1), obtenemos otro enunciado de la "Ley de enfriamiento de Newton":

$$\boxed{-mCe\, dT/dt = hA(T - Ta)}$$

$$\boxed{dT/dt = (-hA/mCe)(T - Ta)}$$

$$\boxed{k = hA/mCe}$$

Donde k es una constante conocida como parámetro de enfriamiento y su unidad es s^{-1}.

2.2.3. APLICACIONES E.D.O PRIMER ORDEN

LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO /CALENTAMIENTO

$$\frac{dT}{dt} = K\,(T - T_m) \qquad \textbf{(1) Para aumento o calentamiento}$$

$$\frac{dT}{dt} = -K\,(T - T_m) \qquad \textbf{(2) Para disminución o enfriamiento}$$

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento y del calentamiento de un objeto,

Se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden:

La rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si T(t) representa la temperatura del objeto en el momento t, Tm, es la temperatura constante del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\boxed{\frac{dT(t)}{dt} = -r(T - T_m)}$$

en donde r es una constante de proporcionalidad. Como supusimos que el objeto se enfría, se debe cumplir que T > Tm; en consecuencia, lo lógico es que r < 0, indica que es **perdida calorífica**.

Ley del Enfriamiento

- La ecuación(1) se la puede resolver utilizando el método de variables separables:

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt \quad (2)$$

- Integrando a ambos lados (2):

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = k \int dt \quad (3)$$

- Se obtiene:

$$\ln(T - T_m) = kt + c_1 \quad (4)$$

- Se simplifica (4):

$$T - T_m = e^{kt+c_1}$$

$$T - T_m = e^{kt} * e^{c_1};\ \ e^c = C$$

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$\boldsymbol{T = T_m + Ce^{kt};\quad k < 0\quad (5)}$$

Otra Forma:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$$

$$\frac{dT}{T - T_A} = -k\ dt$$

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_A} = -\int_0^t k\ dt$$

$$\ln(T(t) - T_A) - \ln(T_0 - T_A) = -\mathrm{kt}$$

$$\ln(T(t) - T_A) = -\mathrm{kt} + \ln(T_0 - T_A)\ \ldots(3)$$

$$T(t) = T_A + e^{-kt}(T_0 - T_A)\ldots(4)$$

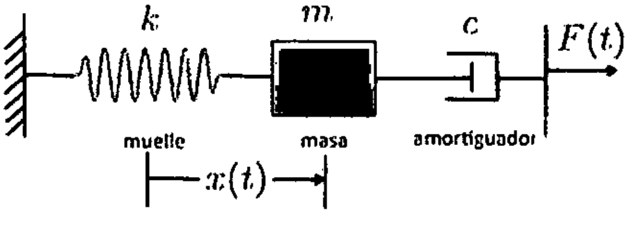
APLICACIONES DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO

En la actualidad el enfriamiento newtoniano es utilizado especialmente en modelos climáticos como una forma rápida y menos cara computacionalmente de calcular la evolución de temperatura de la atmósfera. Estos cálculos son muy útiles para determinar las temperaturas, así como para predecir los acontecimientos de los fenómenos naturales.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Ampliación de Maten áticas (GITI) (2015)

Con frecuencia las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes (a las que prestaremos especial atención en esta lección) aparecen como modelos matemáticos tanto en circuitos LRC como en sistemas mecánicos. Pueden verse tales modelos en multitud de libros. Por ejemplo, en los Capítulos 2 y 3 del texto de Edwards y Penney [1]. Es interesante seguir también la Lección 1 de la asignatura Fundamentos de Control Automático (que se imparte en paralelo a ´esta) donde se "modelan" distintos fenómenos de la ingeniería mediante ecuaciones diferenciales.

Veamos con cierto detalle el caso de las vibraciones mecánicas. Concretamente vamos a analizar el movimiento de una masa unida a un muelle y a un amortiguador sobre la que actúa una fuerza externa como mostramos en el siguiente dibujo:



Llamamos $x(t)$ al desplazamiento de la masa con respecto a su posición de reposo. Sobre la masa actúan tres fuerzas:

La fuerza restauradora del muelle que, de acuerdo con la ley de Hooke, es proporcional al desplazamiento de la masa con respecto a su posición de reposo y viene dada por $-kx$, siendo $k > 0$ la constante de elasticidad del muelle;

También actúa el amortiguador ejerciendo una fuerza proporcional a la velocidad $-cx0$ (t), siendo $c \geq 0$ la constante de amortiguamiento;

Finalmente hay una fuerza externa $F(t)$.

Aplicando la ley de Newton, concluimos que $mx'' = -kx - cx0 + F(t)$. Es decir, el movimiento de la masa viene modelado por $mx' + cx' + kx = F(t)$. Cuando la constante c es cero, el movimiento se llama no amortiguado. Si por el contrario $c > 0$, lo llamaremos movimiento amortiguado. Cuando no hay una fuerza externa actuando sobre el sistema (es decir, cuando $F(t) = 0$), diremos que el movimiento es libre o natural (en el desarrollo de la lección a este tipo y de ecuaciones las llamaremos homogéneas) y si $F(t)$ no es la función nula, llamaremos al movimiento forzado.

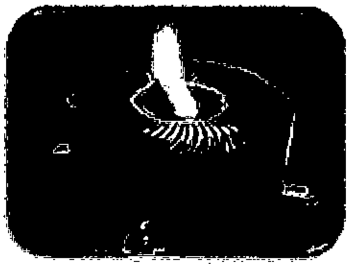
En la parte final de la lección, volveremos sobre este modelo para aplicarle todo lo que hemos aprendido (véase la Sección 4).

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Una ecuación diferencial lineal de segundo orden (para abreviar, a veces omitiremos la palabra diferencial) se suele escribir como $y\,00 + p(t)y\,0 + q(t)y = r(t)$ donde p, q y r son funciones continuas en un intervalo $I \subset R$. Diremos que una función $y \in C\,2\,(I)$ es solución de dicha ecuación cuando $y''(t) + p(t)y\,(t) + q(t)y(t) = r(t)$ para todo $t \in I$. Dos casos particulares de estas ecuaciones jugarán un papel importante en nuestro estudio: Si la función $r(t)$ es idénticamente cero en I, se dice que la ecuación es homogénea. Si las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son constantes en I, digamos $p(t) = p$ y $q(t) = q$ para todo $t \in I$, se dice que la ecuación es de coeficientes constantes. Ejemplo. Las funciones $y1(t) = \cos(t)$ e $y2(t) = \mathrm{sen}(t)$ son soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$. Ejemplo. Las funciones $y1(t) = e\ t$ e $y2(t) = e\ -t$ son soluciones de la ecuación $y'' - y = 0$.

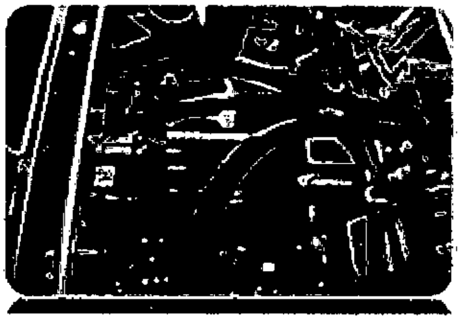
Como ya sabemos, para resolver una ecuación diferencial de primer orden hace falta calcular una primitiva, obteniéndose como solución general una familia de soluciones que depende de un parámetro, la constante de integración correspondiente. Para fijar una solución particular de la ecuación debemos dar una condición inicial con la que podemos determinar el valor de dicha constante. Cabe pensar que para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden sea necesario calcular dos primitivas, obteniéndose como solución general una familia de soluciones que depende de dos parámetros y que para fijar una solución particular de la ecuación debamos dar dos condiciones. Veamos un ejemplo. Ejemplo. Consideremos la ecuación y′′−y= 2e 2t en I = [0, 1]. Si hacemos el cambio de variables y = z, nos queda z − z = 2e 2t que es una ecuación lineal de primer orden. Resolviendo esta ecuación obtenemos z(t) = 2e 2t + c1e t, con lo cual y 0 (t) = 2e 2t + c1e t, de donde, integrando otra 4 Lección 1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias vez, llegamos a la solución general y(t) = e 2t + c1e t + c2 que, efectivamente, depende de dos constantes. Para determinar una solución particular debemos imponer dos condiciones, lo que nos ofrece varias posibilidades; veamos cuatro ejemplos. 1. Si fijamos y(0) = 0 e y 0 (0) = 1, entonces la solución es única y(t) = e 2t − e t . 2. Si fijamos y(0) = 0 e y(1) = 0, entonces la solución es única y(t) = e 2t − (e + 1)e t + e. 3. Si fijamos y′(0) = 0 e y 0′(1) = 1, entonces nos queda un sistema incompatible para c1 y c2, así que no hay solución que verifique dichas condiciones. 4. Si fijamos y′(0) = 0 e y(1) = 2e′(e − 1), entonces la solución no es ′única ya que para cualquier c2 ∈ R la función y(t) = e 2t − 2e t + c2 verifica ambas condiciones. Las condiciones del caso (1) se llaman condiciones iniciales porque en ellas se fijan el valor de la función y el de su derivada en un solo punto de I. Si la función y(t) representa un movimiento cuya variable independiente t es el tiempo, entonces dar condiciones iniciales en t = 0 no es más que fijar la posición y la velocidad en el instante inicial. Las condiciones de los casos (2), (3) y (4) se llaman condiciones de contorno porque en ellas se fijan los valores de y o de y en los extremos del intervalo I. Como nos sugiere el ejemplo, la teoría de las ecuaciones lineales de segundo orden con condiciones iniciales es muy distinta de la teoría con condiciones de contorno. Aquí estudiaremos a fondo la resolución de los problemas de valores iniciales para las ecuaciones con coeficientes constantes y para algunas ecuaciones con coeficientes arbitrarios. En la Lección 5 estudiaremos algunos problemas de contorno especiales ligados a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. En el anterior ejemplo es importante que aprendamos algo más. Observemos que el hecho de que no aparezca explícitamente la función incógnita y en la ecuación diferencial nos ha permitido resolverla haciendo el cambio de variable z = y 0 con lo que hemos reducido el orden. Volveremos más adelante a usar de nuevo esta sencilla idea. El teorema clave es el que nos dice que los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen siempre solución ´única. Teorema de existencia y unicidad. Sean p(t), q(t) y r(t) funciones continuas en un intervalo $I \subset R$. Sea t0 $\in$ I y sean y´ e y´´ dos números reales cualesquiera. Entonces el problema de valores iniciales y´´+ p(t)y + q(t)y = r(t), con y(t0) = y0 e y 0 (t0) = y 0 0 Ampliación de Maten áticas (GITI) — Curso 2015/16 5 tiene una ´única solución en el intervalo I. Es decir, existe una ´única función y $\in$ C 2 (I) verificando que y´´(t) + p(t)y(t) + q(t)y(t) = r(t) para todo t $\in$ I, y(t0) = y´ e y (t0) = y´´. En lo que sigue supondremos que p(t), q(t) y r(t) son funciones continuas en un intervalo $I \subset R$. La linealidad del primer miembro de la ecuación y´´ + p(t)y + q(t)y = r(t) nos permite hacer un análisis de la estructura de sus soluciones similar al que hicimos para la ecuación diferencial lineal de primer orden y al de los sistemas de ecuaciones estudiados en "Algebra". La ecuación y´´+p(t)y´+q(t)y = 0 se llamará ecuación homogénea asociada a y´´+p(t)y 0+q(t)y = r(t) que, a su vez, llamaremos ecuación completa.

Aplicaciones en la Ingeniería en Sistemas

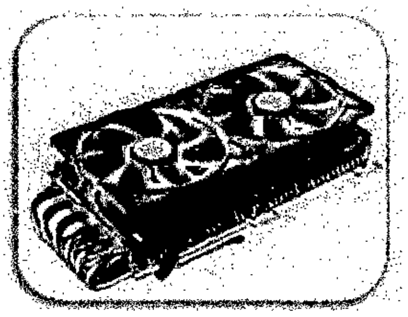
- En el procesador el control de la temperatura es fundamental, conociendo la temperatura del ambiente y el tiempo que toma alcanzar una temperatura moderada se puede saber cuánto tiempo de vida tiene un procesador (teóricamente).



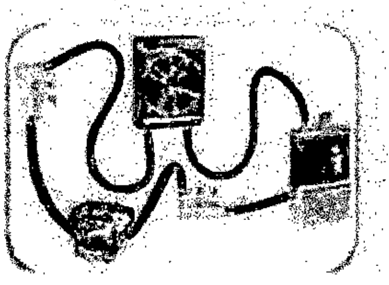
- Los sistemas de enfriamiento ya sean por aire o agua permiten la extracción de calor de los componentes, lógicamente, mientras menos tiempo les tome extraer el calor, mejor serán estos.



- Se puede conocer que también funcionaría un procesador, tarjetas de video y disco duros (HDD) en diferentes ambientes, no es lo mismo que uno de estos componentes funcione en la sierra que en la costa.



- Los líquidos de refrigeración para computadores difieren entre sí, por lo general se utiliza el agua (por lo que es barata y fácil de conseguir). La refrigeración líquida es ideal para computadores de altas prestaciones y para lograr excelentes resultados en cuanto a temperaturas, y con enormes posibilidades en overcloking.



2.3. Definición de términos básicos

2.3.1. Movimiento de resorte

Consideremos un bloque de masa m sujeto a un resorte sobre una superficie horizontal. Un resorte estirado o comprimido ejerce una fuerza que es proporcional a la distancia del estiramiento o compresión y la posición de equilibrio. Matemáticamente se puede representar como

$$\boxed{F = -kx}$$

Donde *k* es llamada constante de fuerza o constante de resorte que se mide en N/m. La ecuación anterior es conocida como ley de Hook. El signo menos en la ecuación indica que la fuerza es una fuerza restauradora, es decir, trata de llevar a la partícula al origen.

De la segunda ley de Newton se tiene que el resorte obedece la siguiente ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

Definimos w = *k/m* como la frecuencia angular. Es fácil mostrar que la siguiente función coseno es solución de la ecuación diferencial anterior.

$$\boxed{x(t) = A\cos(w\,t + f)}$$

El movimiento resultante es llamado Movimiento Armónico Simple.

La energía potencial es máxima en los extremos del movimiento armónico, así mismo, la energía cinética es máxima cuando pasa por el origen. Si no existe fuerza de fricción el movimiento se repetirá por siempre. Si hay presente alguna fricción, en cada desplazamiento se hará trabajo por esta fuerza de fricción que se convertirá en energía interna del sistema. Finalmente, toda la energía potencial almacenada en el resorte se convertirá en energía interna y el bloque llegará al reposo.

El siguiente applet simula un bloque sujeto a un resorte sobre una superficie horizontal. Tiene controles para cambiar la constante del resorte, el coeficiente de fricción y la masa del bloque. Para iniciar la simulación presione el botón "empezar", para detener presione este mismo botón. Se muestran los valores de la posición, velocidad, fuerza y fuerza de fricción que actúan sobre el bloque. El gráfico de la izquierda muestra la posición en función del tiempo, y el da la derecha muestra el porcentaje de cada tipo de energía almacenada en el sistema; potencial, cinética e interna. Arrastre el bloque con el mouse para establecer la posición inicial.

2.3.2. Enfriamiento

Enfriamiento que se consigue mediante la evaporación del agua en el aire; consecuentemente la temperatura seca disminuye mientras aumenta la humedad. También llamado enfriamiento adiabático.

2.3.4. Modelos matemáticos

Un modelo matemático describe teóricamente un objeto que existe fuera del campo de las Matemáticas. Las previsiones del tiempo y los pronósticos económicos, por ejemplo, están basados en modelos matemáticos. Su éxito o fracaso depende de la precisión con la que se construya esta representación numérica, la fidelidad con la que se concreticen hechos y situaciones naturales en forma de variables relacionadas entre sí.

Básicamente, en un modelo matemático advertimos 3 fases:

- la construcción, proceso en el que se convierte el objeto a lenguaje matemático
- el análisis o estudio de un modelo confeccionado

- la interpretación de dicho análisis, donde se aplican los resultados del estudio al objeto del cual se partió.

La utilidad de estos modelos radica en que ayudan a estudiar cómo se comportan las estructuras complejas frente a aquellas situaciones que no pueden verse con facilidad en el ámbito real. Existen modelos que funcionan en ciertos casos y que resultan poco precisos en otros, como ocurre con la mecánica newtoniana, cuya fiabilidad fue cuestionada por el propio Albert Einstein.

Puede decirse que los modelos matemáticos son conjuntos con ciertas relaciones ya definidas, que posibilitan la satisfacción de proposiciones que derivan de los axiomas teóricos. Para ello, se sirven de diversas herramientas, como ser el álgebra lineal que, por ejemplo, facilita la fase de análisis, gracias a la representación gráfica de las distintas funciones.

2.3.3. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación que relaciona de manera no trivial a una función desconocida y una o más derivadas de esta función desconocida con respecto a una o más variables independientes. Si la función desconocida depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama ordinaria, por el contrario, si depende de más de una variable, se llama parcial.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Hipótesis

En este caso particular simularemos el modelo matemático del enfriamiento de Newton que sirven para aplicar en diversas maneras en la vida cotidiana, aplicaremos dicho modelo a un pastel y a una taza de café

La ley de Hooke nos servirá para demostrar y aplicar las ecuaciones diferenciales de segundo orden, y poder dar solución a las ecuaciones diferenciales de segundo orden aplicadas al movimiento de resortes (MAS)

3.2. Tipo y diseño de la investigación

La línea de investigación que este grupo está tomando es la de simulación.

La simulación es el artificio contextual que referencia la investigación de una hipótesis o un conjunto de hipótesis de trabajo utilizando modelos un método perfecto para la enseñanza y aprendizaje. Thomas T. Goldsmith Jr. y Estle Ray Mann la definen así: "Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos"

Una definición más formal, formulada por R. E. Shannon,1 es: "La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos - para el funcionamiento del sistema".

Pasos a seguir para un estudio de la simulación

1. Definición del sistema

Consiste en estudiar el contexto del problema, identificar los objetivos del proyecto, especificar los índices de medición de la efectividad del sistema, establecer los objetivos específicos del modelamiento y definir el sistema que se va a modelar un sistema de simulación.

2. Formulación del modelo

Una vez definidos con exactitud los resultados que se espera obtener del estudio, se define y construye el modelo con el cual se obtendrán los resultados deseados. En la formulación del modelo es necesario definir todas las variables que forman parte de él, sus relaciones lógicas y los diagramas de flujo que describan en forma completa el modelo.

3. Colección de datos

Es importante que se definan con claridad y exactitud los datos que el modelo va a requerir para producir los resultados deseados.

4. Implementación del modelo en la computadora

Con el modelo definido, el siguiente paso es decidir qué lenguaje de programación (como Fortran, Algol, Lisp, etc.) o qué paquete de software se va a utilizar para procesar el modelo en la computadora y obtener los resultados deseados.

5. Verificación

El proceso de verificación consiste en comprobar que el modelo simulado cumple con los requisitos de diseño para los que se elaboró.[2] Se trata de evaluar que el modelo se comporta de acuerdo a su diseño.

6. Validación del sistema

A través de esta etapa se valoran las diferencias entre el funcionamiento del simulador y el sistema real que se está tratando de simular. Las formas más comunes de validar un modelo son:

- La opinión de expertos sobre los resultados de la simulación.
- La exactitud con que se predicen datos históricos.
- La exactitud en la predicción del futuro.
- La comprobación de falla del modelo de simulación al utilizar datos que hacen fallar al sistema real.
- La aceptación y confianza en el modelo de la persona que hará uso de los resultados que arroje el experimento de simulación.

Experimentación

La experimentación con el modelo se realiza después que este haya sido validado. La experimentación consiste en comprobar los datos generados como deseados y en realizar un análisis de sensibilidad de los índices requeridos.

Interpretación

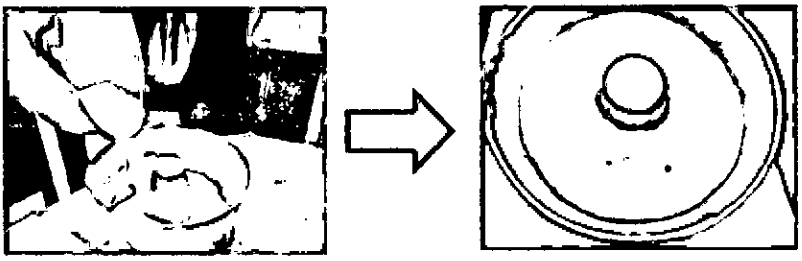
En esta etapa del estudio, se interpretan los resultados que arroja la simulación y con base a esto se toma una decisión. Es obvio que los resultados que se obtienen de un estudio de simulación colabora a soportar decisiones del tipo semi-estructurado.

3.3.- Análisis y procesamiento de datos

En este trabajo de investigación realizamos 3 experiencias, la primera se trata de la ley de enfriamiento de Newton aplicado a un pastel, la segunda es análogo pero esta vez en una taza de café, y la tercera es la aplicación de una ecuación diferencial de segundo orden al movimiento de un resorte(MAS)

Ley de enfriamiento de Newton aplicados a un pastel

- Medir la temperatura ambiente, **Tambiente = 21°C**
- El primer paso a seguir es hornear un pastel



- Una vez que el pastel este recién salido del horno introducir el termómetro y medir la temperatura, asi esa seria nuestra temperatura en el t=0min
- Medir intervalo pequeño en este caso fue de 5 minutos y medir la temperatura en ese momento.

- Con las dos temperaturas podemos hallar la constante C y la constante K que derivan de la ecuación diferencial del enfriamiento.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tambiente)$$

$$\int \frac{1}{(T - Tambiente)} dT = \int -kdt$$

$$\ln(T - Tambiente) = -kt$$

$$T - Tambiente = Ce^{-kt}$$

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente} \Longrightarrow$$

Esta viene a ser la solución de la ecuación diferencial de enfriamiento

- Hallamos las constantes con los dos primeros datos experimentales

  1. Para t=0 min → T= 101°C

     $101 = Ce^{-k0} + 21$

     $\boxed{C = 80}$

  2. Para t=5min → T= 89°C

     $89 = 80e^{-k(5)} + 21$

     $\boxed{K = 0.0325}$

- Calcular la temperatura teórica a diferentes tiempos

  Para t=10 min

  $\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$

  $T = 80e^{-0.0325(10)} + 21$

  $T_{teórica=78,80\,°C}$

  Para t=15 min

  $\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$

  $T = 80e^{-0.0325(15)} + 21$

  $T_{teórica=70,13\,°C}$

  Para t=20 min

  $\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$

  $T = 80e^{-0.0325(20)} + 21$

  $T_{teórica=62,76\,°C}$

  Para t=25 min

  $\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$

  $T = 80e^{-0.0325(25)} + 21$

  $T_{teórica= 56,50\,°C}$

Para t=30 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(30)} + 21$$

$$T_{teórica} = 51{,}17\,°C$$

Para t=35 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(35)} + 21$$

$$T_{teórica} = 46{,}64\,°C$$

Para t=40 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(40)} + 21$$

$$T_{teórica} = 42{,}80\,°C$$

Para t=45 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(45)} + 21$$

$$T_{teórica} = 39{,}54\,°C$$

Para t=50 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(50)} + 21$$

$$T_{teórica} = 36{,}75\,°C$$

Para t=55 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(55)} + 21$$

$$T_{teórica} = 34{,}39\,°C$$

Para t=60 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 80e^{-0.0325(60)} + 21$$

$$T_{teórica} = 32{,}38\,°C$$

- Ahora medimos la temperatura experimental y comprobamos mediante una tabla

EXPERIENCIA DEL PASTEL			
N° Experimento	Tiempo (m)	T. Experimental (°C)	T. Teórica (°C)
1	0	101	101
2	5	89	89
3	10	78.5	78.8
4	15	70	70.13
5	20	62.5	62.76
6	25	56	56.5
7	30	51	51.17
8	35	46.5	46.64
9	40	42.5	42.8
10	45	40	39.53
11	50	37	36.75
12	55	34	34.39
13	60	32.5	32.38

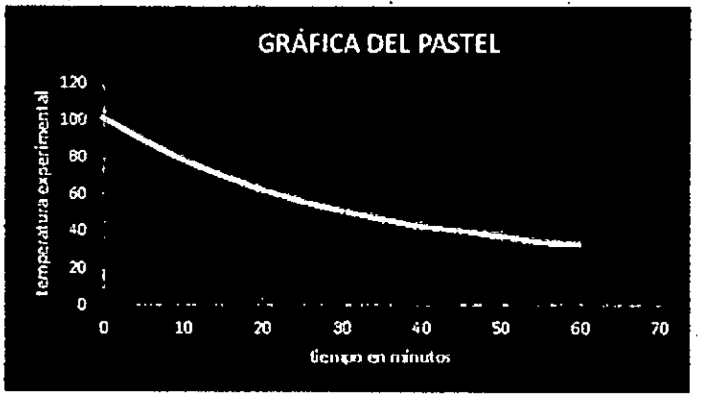
Ahora calculamos el error porcentual, absoluto y relativo mediante las siguiente formulas, y tabulamos.

ERROR ABSOLUTO (Ea) = T teórico - T exp

ERROR RELATIVO (Er) = Ea/ Tteórico

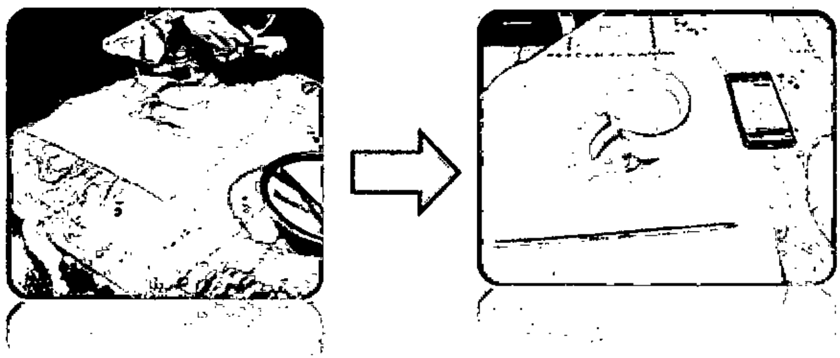
ERROR PORCENTUAL = Er * 100 %

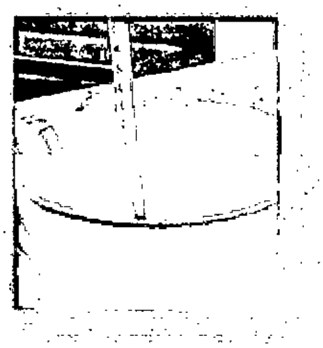
N° Experimento	Tiempo (m)	T. Experimental (°C)	T. Teórica (°C)	Error Absoluto	Error Relativo	Error porcentual (%)
1	0	101	101	0	0	0
2	5	89	89	0	0	0
3	10	78.5	78.8	0.3	0.0038	0.38
4	15	70	70.13	0.13	0.00185	0.185
5	20	62.5	62.76	0.26	0.00414	0.414
6	25	56	56.5	0.5	0.0084	0.884
7	30	51	51.17	0.17	0.00332	0.332
8	35	46.5	46.64	0.14	0.003	0.3
9	40	42.5	42.8	0.3	0.007	0.7
10	45	40	39.53	0.7	0.0177	1.77
11	50	37	36.75	0.25	0.0068	0.68
12	55	34	34.39	0.39	0.0113	1.13
13	60	32.5	32.38	0.12	0.0037	0.37



Ley de enfriamiento de Newton aplicados a una taza de café

- Medir la temperatura ambiente, **Tambiente = 21°C**
- Preparar una taza de café





- Una vez que preparemos el café, de inmediato introducimos el termómetro, y leemos la temperatura esa sería la temperatura en el t= 0 minutos

- Medir intervalo pequeño en este caso fue de 5 minutos y medir la temperatura en ese momento.

- Con las dos temperaturas podemos hallar la constante C y la constante K que derivan de la ecuación diferencial del enfriamiento.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tambiente)$$

$$\int \frac{1}{(T - Tambiente)} dT = \int -kdt$$

$$\ln(T - Tambiente) = -kt$$

$$T - Tambiente = Ce^{-kt}$$

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

Esta viene a ser la solución de la ecuación diferencial de enfriamiento

- Hallamos las constantes con los dos primeros datos experimentales

    - Para t=0 min → Texp=85°C

$$85 = Ce^{-k0} + 21$$

$$\boxed{C = 64}$$

    - Para t=5min → Texp=74°C

$$74 = 64Ce^{-k0} + 21$$

$$\boxed{K = 0.037}$$

- Calcular la temperatura teórica a diferentes tiempos

Para t=10 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(10)} + 21$$

$$T_{teórica} = 64{,}89\ °C$$

Para t=15 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(15)} + 21$$

$$T_{teórica} = 57{,}356\ °C$$

Para t=20 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(20)} + 21$$

$$T_{teórica} = 53{,}61\ °C$$

Para t=25 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(25)} + 21$$

$$T_{teórica} = 49{,}56\ °C$$

Para t=30 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(30)} + 21$$

$$T_{teórica} = 41{,}65\ °C$$

Para t=35 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(35)} + 21$$

$$T_{teórica} = 38{,}52\ °C$$

Para t=40 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(40)} + 21$$

$$T_{teórica} = 35{,}57\ °C$$

Para t=45 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(45)} + 21$$

$$T_{teórica} = 33{,}10\,°C$$

Para t=50 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(50)} + 21$$

$$T_{teórica} = 31{,}06°C$$

Para t=55 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(55)} + 21$$

$$T_{teórica} = 29{,}36\,°C$$

Para t=60 min

$$\boxed{T = Ce^{-kt} + Tambiente}$$

$$T = 64e^{-0.037(60)} + 21$$

$$T_{teórica} = 27{,}95°C$$

- Ahora medimos la temperatura experimental y comprobamos mediante una tabla

EXPERIMENTO DEL CAFE			
N° Experimento	Tiempo (m)	T. Experimental (°C)	T. Teórica (°C)
1	0	85	85.005
2	5	74	74.003
3	10	65	64.89
4	15	59	57.356
5	20	54	53.61
6	25	50	49.56
7	30	41.5	41.65
8	35	39	38.52
9	40	36	35.57
10	45	33	33.1
11	50	31	31.06
12	55	29	29.36
13	60	27.5	27.95

- Ahora calculamos el error porcentual, absoluto y relativo mediante las siguiente formulas, y tabulamos

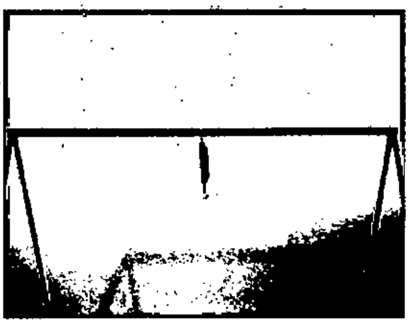
ERROR ABSOLUTO (Ea) = Tteórico - T.exp

ERROR RELATIVO (Er) = Ea/ Tteórico

ERROR PORCENTUAL = Er * 100 %

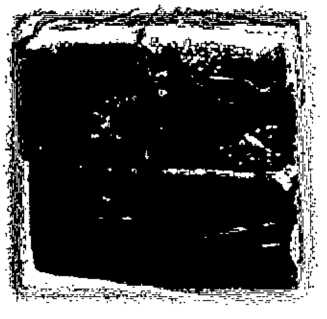
MOVIMIENTO MASA-RESORTE

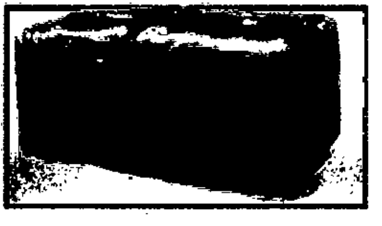
- Montar el sistema de masa resorte como se muestra en la figura



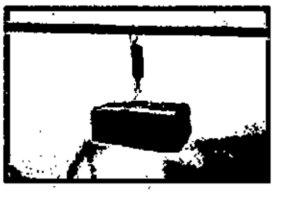
- Medir la longitud original del resorte

- Pesar las masas con la que vamos a trabajar



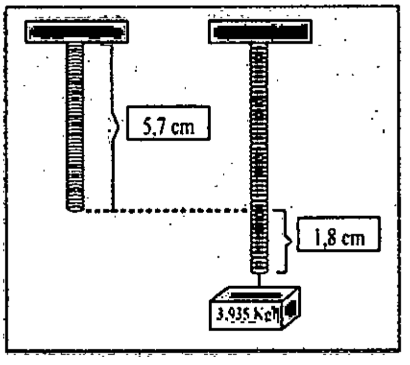


- Enganchar el sólido en el resorte



- Hacer los cálculos correspondientes

Experiencia 1:



$$\boxed{\Delta x = Long\ final - Long\ inicial}$$

$$\Delta x = 1.8\ cm$$

En equilibrio:

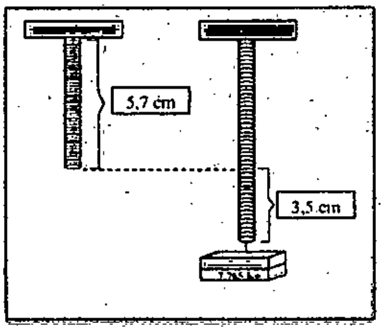
$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} FRy = 0}$$

$$k1\Delta x - mg = 0$$

$$k1(1.8\ x\ 10^{-2}m) - (3.935\ kg\ x\ 9.8\frac{m}{s^2})$$

$$\boldsymbol{K_1 = 2142.388\ \frac{N}{m^2}}$$

Experiencia 2:



$$\boxed{\Delta x = Long\ final - Long\ inicial}$$

$\Delta x = 9.2cm$- 5.7cm

$$\Delta x = 3.5\ cm$$

En equilibrio:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} FRy = 0}$$

$$k2\Delta x - mg = 0$$

$$k2\,(3.5\ x\ 10^{-2}m) - \ (7.765\ kg\ x\ 9.8\frac{m}{s^2})=0$$

$$\boldsymbol{K_2 = 2174{,}200\ \frac{N}{m^2}}$$

K promedio = (k1 + k2) /2 = 2158.94 N/m

En donde $w^2 = \frac{k}{m}$. Se dice que la ecuación (3) describe el movimiento armònico simple o movimiento vibratorio no amortiguado. Hay dos condiciones iniciales obvias asociadas con dicha ecuación:

$$X(0) = \alpha \text{ , } \frac{dx}{dt} \text{ evaluado en t=0 es } \beta$$

Que representa la magnitud del desplazamiento inicial y la velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo si $\alpha > 0 \, y \, \beta < 0$, se trata de una masa que parte de un punto debajo de la posición del equilibrio y a la cual se ha comunicado una velocidad dirigida hacia arriba. Si $\alpha < 0 \, y \, \beta = 0$, se trata de una masa en repodo que se suelta desde un punto que esta α unidades arriba de la posición de equilibrio. Los demás casos son análogos.

Solución y ecuación del movimiento:

Observamos que las soluciones de la ecuación auxiliar $M^2 - w^2 = 0$ son complejos.

M1= wi, M2=-wi

De acuerdo a la ecuación auxiliar de las ecuaciones lineales homogéneas podemos concluir la ecuación general.

$$y = C1e^{m1x} + C2\, e^{m2x}$$

$$y = C1e^{(\alpha+i\beta)x} + C2\, e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Fórmula Euler:

$$e^{i\alpha} = cos\alpha + sen\alpha$$

Solución general: $\boxed{x(t)= C1\ cos(wt) + C2\ sen(wt)}$

m= 7.765 kg

$w^2 = \frac{K}{m} = \frac{2158.94}{7.765} = 277.952$

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

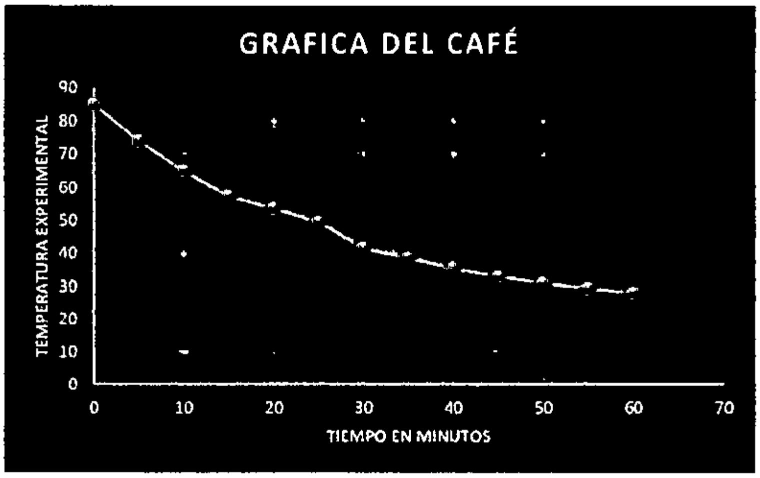
Por coeficientes indeterminados

$$m^2 + 277.95 = 0 \rightarrow \quad m = 16.67\, i$$

$$x(t) = C1\cos(wt) + C2\, sen\, (wt)$$

$$x(t) = c1\cos(16.67t) + c2\, sen\, (16.67t)$$

Tiempo (m)	T. Experimental (°C)	T. Teórica (°C)	Error Absoluto	Error Relativo	Error porcentual (%)
0	85	85	0	0	0
5	74	74	0	0	0
10	65	64.89	0.11	0.00169	0.169
15	59	58.356	0.644	0.011	1.1
20	54	53.61	0.39	0.00727	0.727
25	50	49.56	0.44	0.00878	0.887
30	41.5	41.65	0.15	0.0036	0.36
35	39	38.52	0.48	0.012	1.246
40	36	35.57	0.43	0.012	1.2
45	33	33.1	0.1	0.003	0.302
50	31	31.06	0.06	0.0019	0.193
55	29	29.36	0.36	0.01226	1.226
60	27.5	27.95	0.45	0.161	1.61



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \quad , x(0) = 10 \ x'(0) = 0$$

Solución:

Una formulación equivalente del problema es: se estira hacia abajo de un cuerpo que pende del resorte hasta que esté a 10 unidades bajo la posición de equilibrio y luego se le retiene hasta t=0; se le suelta a continuación de manera que parta de un estado de reposo. Aplicando las condiciones iniciales a la solución:

$$x(t) = C1\cos(4t) + C2\,sen\,(4t)$$

$$x(0) = 10 = c1 + c2(0)$$

Resulta que c1 =10 y por lo tanto

$$x(t) = C1\cos(4t) + C2\,sen\,(4t)$$

$$\frac{dx}{dt}\,en\,t = 0 \ = \ -30\,sen4t + c2\,cos4t$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 = 4c2$$

$$c2 = 0$$

La última ecuación implica que c2 =0 y por lo tanto de movimiento es:

$$x(t) = 10\cos(4t)$$

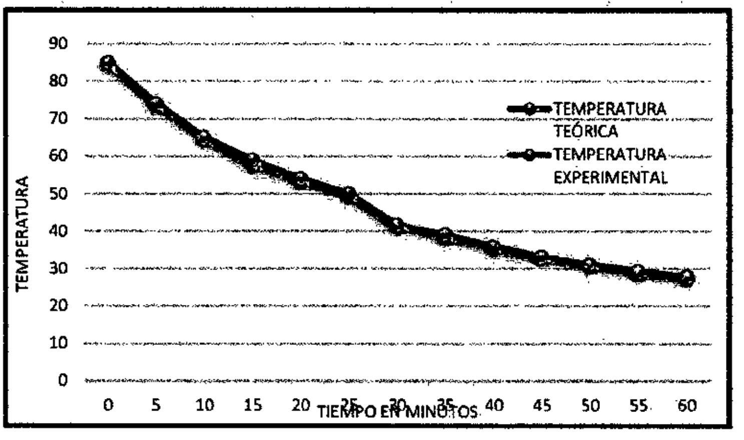
La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado, con la masa deslazándose alternadamente 10 unidades hacia cada lado d la posición de equilibrio x=0

CAPITULO IV: RESULTADOS

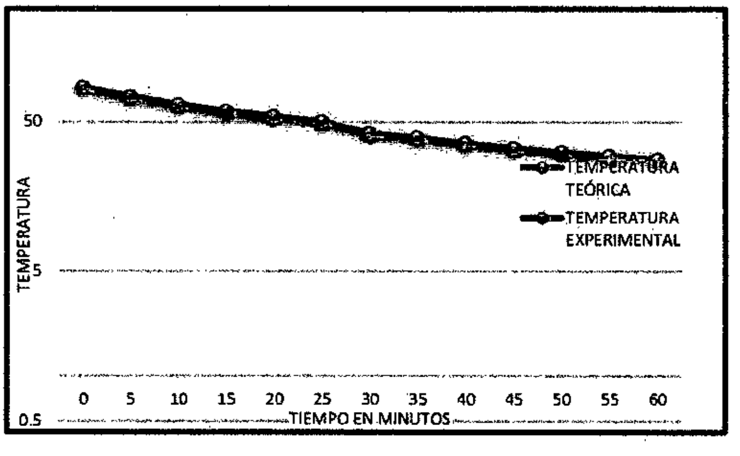
4.2. Resultados

Notamos mediante esta grafica que, si se cumple la ley de enfriamiento de Newton para estas dos experiencias, ya que las curvas exponenciales son muy parecidas, y mediante un ajuste semilogaritmico convertirlo en unas rectas casi iguales, el error que observamos se debe al error del termómetro que es 0.5°C y al error del experimentador.

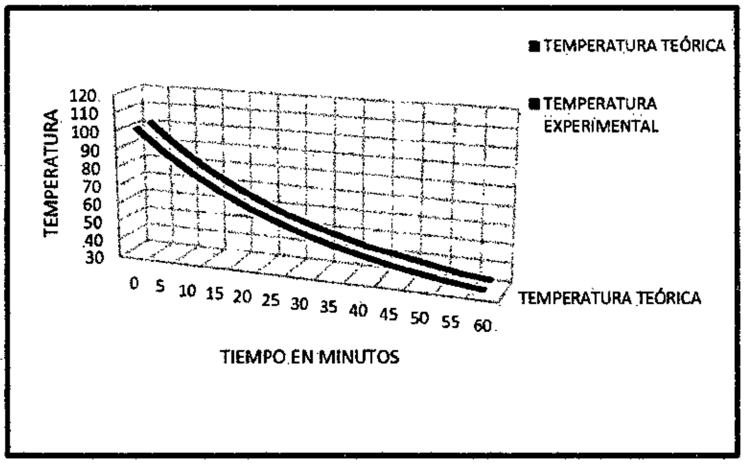
Experimento de la taza de café



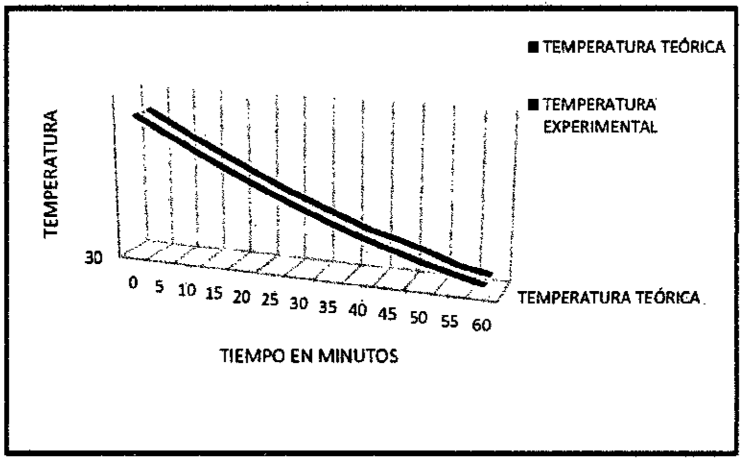
- Ahora lo graficamos en papel logaritmo



Experimento del pastel



- Ahora lo graficamos en papel logaritmo



Ejemplo 1

Una fuerza de 400 N estira un resorte de 2m. Una masa de 50 kg se sujeta al extremo del resorte y se la suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hace 10 m/s. Halle la ecuación del movimiento.

F= 400N, 2m= x, masa= 50 kg, v=10m/s

400/2 = k

k=200 N/m

w^2=4

w=2

$$\frac{dx}{dt} = -10\ m/s$$

Ecuación del movimiento:

$$50x'' + 200x = 0$$

$$x'' + 4x = 0$$

$$x(t) = C1\cos(wt) + c2\ sen(wt)$$

$$x(t) = 1/2C1\cos(2t) + c2\ sen(2t)$$

C1=2

$$x'(0) = -10 = -2sen2t + c2\ cos2t$$

$$x'(0) = -10 = 2c2$$

$$C2 = 5$$

$$x(t) = 2\cos(2t) + -5\ sen(2t)$$

Ejemplo 2:

Resolver e interpretar el problema de valor inicial:

CONCLUSIONES

- Podemos concluir de la primera experiencia que consiste en la aplicación de la ley de enfriamiento de Newton en una taza de café y un pastel que logramos comprobarla, existió un margen de error ya que tuvimos la temperatura del ambiente muy variada al momento de realizar las mediciones con el termómetro, pero podemos decir que logramos demostrar o que nos planteamos.
- En la segunda experiencia concluimos que podeos aplicar las ecuaciones diferenciales de segundo orden en el momento masa resorte, o movimiento armónico simple, y podemos realizar diversos problemas de PVI con la ecuación hallada

RECOMENDACIONES

- Realizar las mediciones de la parte experimental en un ambiente cerrado donde no cambie la temperatura de manera excesiva.
- Tener en cuenta que la temperatura de ambiente sea igual para todas las experiencias
- A la hora de medir con el termómetro, este no debe tocar las paredes del recipiente, porque si no alterará el resultado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez Aguilar, José F.; Razo Hernández, José R. Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario. Investigación y Ciencia, vol. 22, núm. 61, enero-abril, 2014, pp. 12-18. Universidad Autónoma de Aguascalientes. Aguascalientes, México.

Base de Datos: Sistema de Información Científica Redalyc. Enlace: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67431579002

Daniel Barragan: Químico y Ph.D., Producción de entropía y ley de enfriamiento de Newton, Entropy production and Newtons cooling law. en Ciencias Químicas, Universidad de Colombia, Bogotá D.C.,y Medellín. Ing. Investig.vol29 no.2Bogota May/Aug.2009

Base de datos: SciELO.

Enlace:http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-56092009000200014&script=sci_arttext

Ampliación de Maten áticas (GITI) de Ingeniería en las Tecnologías Industriales.

Ampliación de Maten áticas. Lección 1. 1ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
DE SEGUNDO ORDEN. — Curso 1Curso 2o. Grado. 2015/16

CAPITULO V: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

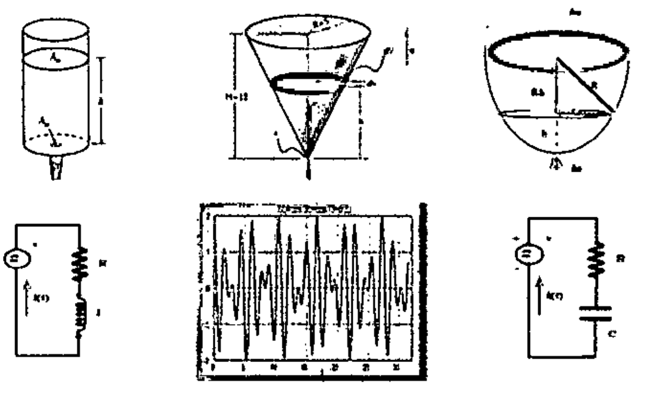
Nos damos cuenta que existe un margen de error en la experiencia que se debe al error del termómetro y también al error del experimentador, la ley de enfriamiento de Newton si verificó en la experiencia de la taza de café y del pastel.

En la segunda parte de este experimento se refiere a la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, nos damos cuenta que verifica con la ecuación inicial, además de comprobarlo con algunos problemas de PVI.

ANEXOS

- *Aplicaciones*

ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS



Diapositivo 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TEMA: "APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA INGENIERÍA QUÍMICA – LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON"

DOCENTE: Ana Maria Reyna

INTEGRANTES:

- Gomez Figueroa, Brian
- Mendez Camacho, José Luis
- Sanchez Calzada, Leslie Joshelyn

Callao, 2018

PERÚ

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS:

Agradecemos a la profesora Ana María Reyna Segura por motivarnos a la investigación y búsqueda de nuevos conocimientos.

RESUMEN

En nuestro proyecto damos a conocer cómo aplicar las ecuaciones diferenciales en la ingeniería química y en la vida cotidiana, haciendo hincapié en este último aspecto, primeramente, daremos algunas definiciones básicas sobre lo que es una ecuación diferencial, los tipos de ecuaciones y algunas de sus aplicaciones, pero nos enfocaremos en particular de manera experimental en la ley de enfriamiento de Newton mediante, los experimentos de enfriamiento del café, cerveza, carne pues son cosas que están presentes con mucha frecuencia en la vida y cerramos aplicando la ley de enfriamiento aplicado a un animal a manera de hacer una analogía con los humanos.

INTRODUCCIÓN

Una ecuación diferencial es aquella ecuación que relaciona una o más funciones (variable dependiente), su variable o variables (variables independientes) y sus derivadas.

Las ecuaciones diferenciales están en muchos ámbitos de nuestra vida, las aplicaciones a las cuales estas se disponen están en muchas de las ramas científicas y tecnológicas, entre ellas podemos mencionar a la mecánica, la electricidad, los osciladores simples, la electrónica, etc.

En nuestra vida cotidiana realizamos actividades o acciones que las hacemos prácticamente por "inercia", y si bien es cierto no está mal hacer dichas acciones por el simple hecho de que son rutinarias, en realidad hay mucho más detrás de todo eso, desde esperar a que un café este lo suficientemente mente temperado para poder ser bebido como desayuno hasta medir el tiempo que lleva una persona muerta, todo esto puede, es y será moldeado, medido, cuantificado por una ecuación diferencial, para ser más precisos, dicha ecuación lleva el nombre de Ley del enfriamiento de Newton.

El nombre de Isaac Newton (1641-1727) es ampliamente reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. Probablemente se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales motivado por su responsabilidad de supervisar la calidad de la acuñación mientras fue funcionario de la casa de la moneda de Inglaterra. Newton observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la temperatura del aire. Sus observaciones dieron lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de ley de enfriamiento de Newton.

La ley de enfriamiento de Newton se escribe como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_{objeto} - T_{medio})$$

Donde la derivada de la temperatura respecto al tiempo $\frac{dT}{dt}$ representa la rapidez del enfriamiento, T_{objeto} es la temperatura instantánea del cuerpo, k una constante que define el ritmo de enfriamiento y T_{medio} es la temperatura ambiente, que es la temperatura que alcanza el cuerpo luego de suficiente tiempo.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Las ecuaciones diferenciales aparecen frecuentemente en los modelos matemáticos que se usan en las ciencias aplicadas y en la ingeniería, una de las aplicaciones es la ley de enfriamiento de Newton que consiste en conocer la temperatura de un cuerpo a lo largo de un determinado tiempo. Esta ley describe que la rapidez de enfriamiento o calentamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio.

1.2. Formulación del problema

El nivel de fiabilidad de la ley de enfriamiento de Newton al momento de predecir una temperatura en un determinado tiempo.

1.3. Objetivo

1.3.1. Objetivo general

Comprobar la Ley de enfriamiento de Newton mediante experimentos y luego mediante métodos de integración.

1.4. Limitantes de la investigación

Uno de los principales óbices al momento de realizar este trabajo investigativo fue el hecho que en libros e internet no se encuentra mucha información sobre dicha ley, haciendo aún más complicada nuestra labor al momento de recopilar información con respecto al tema, en segundo lugar la tardía presentación del formato final del trabajo de investigación, lo cual nos llevó a reestructurar el informe a tan solo una semana de la expociencia y por último la desidia de algunas autoridades de la facultad en especial de los laboratorios al momento de dar la orientación correspondiente o al momento de prestar sus ambientes para poder hacer una mejor experimentación.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Las ecuaciones diferenciales son muy usadas actualmente para realizar diferentes tipos de trabajos experimentales

Ley de enfriamiento de Newton se utiliza en el estudio de la transferencia de calor. En la enseñanza de cursos básicos de fisicoquímica, termodinámica o fenómenos de transporte, es usada para determinar propiedades de transporte, tales como coeficientes de conductividad térmica y de los coeficientes convectivos de transferencia de calor de diferentes clases de sistemas, como son los gases, sólidos, líquidos y soluciones. Algunos antecedentes son:

- Daniel Barragan (2009) con su trabajo *"Producción de entropía y Ley de enfriamiento de Newton"*.

Nos dice que para la generación de calor se analizan, en el marco de la termodinámica de los procesos irreversibles, las ecuaciones evolutivas que describen la transferencia de calor según la Ley de Enfriamiento de Newton.

Este trabajo tuvo como propósito llamar la atención sobre la relación que existe entre la cinética de un proceso y la termodinámica de este, tomando como caso particular el transporte de calor. Primero se analiza si al describir la evolución temporal de un proceso con la Ley de enfriamiento de Newton, el estado estacionario al que llegue este es un estado de no equilibrio con mínima generación de entropía; igualmente, se analiza si la Ley de enfriamiento de Newton es consecuencia de asumir una relación lineal entre fuerzas y flujos.

En segundo lugar, se deduce una expresión, basada en la Ley de enfriamiento de Newton, que permite describir la transferencia de calor entre fases fluidas separadas por una pared.

Las conclusiones a las que se llega en este trabajo se tendrán en cuenta en el estudio de la optimización termodinámica de un proceso químico termo activado con intercambiadores de calor.

La Ley de enfriamiento de Newton, la que gobierna la evolución temporal de los procesos de transferencia de calor, ya sea hacia el equilibrio termodinámico o hacia estados de no equilibrio, no es una consecuencia de la termodinámica lineal de los procesos irreversibles. Esto se demostró al encontrar soluciones exactas a los flujos de entropía para un sistema que como producto de un calentamiento evoluciona a un estado estacionario. Por consiguiente, procesos de transferencia de calor descritos por la Ley de Newton o por la Ley de Fourier son objeto de optimización termodinámica en la búsqueda de estados de no equilibrio con mínima producción de entropía.

- Fraile Delgado: *"Estudio experimental de procesos de calentamiento y enfriamiento* ", busca difundir la parte experimental de la teoría. El trabajo de los laboratorios permitió estudiar de forma exhaustiva los calentamientos y enfriamientos de diferentes sistemas. Es muy importante para el autor recalcar la diferencia de calor (Q) y temperatura (T) para eso realiza actividades que permiten asimilar las nociones correctas. Lo que buscaban comprobar a través de diferentes experimentos es que la Ley de Enfriamiento sea simétrica a la Ley de Calentamiento. Plantearon la siguiente ecuación $\frac{dT}{(T_a-T)} = k\,dt$ suponiendo que su solución seria $T = T_a - (T_a - T_0)e^{kt}$ cuya forma logarítmica seria $Ln(T_a - T_0) = kt + Ln(T_a - T_0)$

En sus estudios de la Ley de enfriamiento verificaron que también depende del sistema si es aislante o no. En uno de sus experimentos se realizó el experimento sin tapadera y se evidencia que el descenso de la temperatura es mucho más pronunciado.

- Juan Francisco Coronel (2013) *"Principios de transferencia de calor en ingeniería"*. En la vida cotidiana utilizamos expresiones que tiene una explicación científica y en texto encontramos algunas aplicaciones como la Ley de Enfriamiento de Newton que nos ayuda a comprobar. Con la Ley de enfriamiento buscaron explicar la transferencia de calor de un sólido a un fluido en movimiento. Nos explica entonces por qué sentimos frio, la temperatura de nuestro cuerpo es de 36.5°C aproximadamente y la temperatura del aire que nos rodea es generalmente menos, por lo que cierta cantidad de calor se está transmitiendo desde nuestro cuerpo hacia el ambiente.

Cuando la transferencia se produce con rapidez son bastantes diferentes, notamos el frio. Hemos tenido energía desde nuestro cuerpo al aire ambiente por convección natural y si evidentemente corre mucho viento, tenemos más transferencia y mayor es la sensación de frio. En este texto también se habla de la termodinámica, sobre la conducción y radiación

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

2.2.1.1 Ecuaciones diferenciales: Son ecuaciones que relacionan una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas.

a) Ecuación diferencial ordinaria (E.D.O): Es una ecuación que contiene derivadas respecto a una sola variable independiente.

b) Ecuación en derivadas parciales (E.D.P): Es una ecuación que contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.

c) Ecuaciones diferenciales de retraso (o retardo): ecuaciones que están caracterizadas por la presencia de un desplazamiento en el argumento o variable $(x - x_0)$.

2.1.1.1.1. Orden: Es el orden de la derivada o derivada parcial más alta que aparece en la ecuación.

Se dice que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma implícita cuando tiene la forma $F(x, y, y', \dots\dots, y^{(n)}) = 0$ siendo:

$F: \Omega \subset R^{n+2} \to R$ siendo Ω un subconjunto (generalmente abierto) de R^{n+2}.

- Se dice que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma explícita cuando tenemos $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots\dots, y^{(n-1)})$ con : $f: D \subset R^{n+1} \to R$ siendo la función definida en el subconjunto D (generalmente abierto) de R^{n+1}.

2.1.1.1.2. Ecuación diferencial lineal: Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

y se llama lineal homogénea si además $g(x) = 0$

Se dice que una función $y = \varphi(x)$ definida en un intervalo I es solución de una diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad.

Una E.D se dice resoluble (o integrable) por cuadraturas si su solución es expresable mediante integrales.

En general, la solución de la ecuación diferencial de orden n dependerá de n parámetros. Pero incluso de esta forma pueden no obtenerse todas las soluciones de una E.D. Por ejemplo, cuando tenemos una familia uniparamétrica de soluciones de una E.D., una sencilla interpretación geométrica nos muestra que también la envolvente de la familia de curvas (si existe) es solución de la E.D.

2.1.1.1.2.1. Problema de valor inicial:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

2.1.1.1.2.2. Problemas de valor frontera:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida, especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

La función primitiva resultante, o función solución de una ecuación diferencial, puede tener por las condiciones iniciales o de frontera diversos valores, diferenciándose una solución de otra en el parámetro, definiéndose este conjunto de soluciones familia de soluciones de un parámetro (en el caso de existir sólo un parámetro) o familia de soluciones de dos o más parámetros (en el caso de existir más de un parámetro).

2.2.1.2. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

2.2.1.2.1 Trayectorias ortogonales

En la ingeniería se presenta a menudo el problema geométrico de encontrar una familia de curvas (trayectorias ortogonales) que intersequen ortogonalmente en cada punto a una familia dada de curvas. Por ejemplo, es posible que se den las líneas de fuerza y se pide obtener la ecuación de las líneas equipotenciales (perpendiculares).

2.2.1.2.1. Desintegración radiactiva

Los núcleos están formados por protones y neutrones que se mantienen unidos por la denominada fuerza fuerte. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones que no conducen a una configuración estable, a estos núcleos se les denomina radiactivos. Los núcleos inestables tienden a aproximarse a la configuración estable emitiendo ciertas partículas. Los tipos de desintegración radiactiva se clasifican de acuerdo al tipo de partículas emitidas, la más común es la desintegración alfa, en la que se emite un núcleo de Helio (dos protones y dos neutrones), produciéndose un nuevo elemento cuyo número atómico es dos unidades menos (retrocede dos posiciones en la tabla periódica), y cuya masa disminuye en cuatro unidades.

2.2.1.2.2. Crecimiento poblacional

El modelo malthusiano de crecimiento de una población p(t) supone que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Sabiendo que la población de Estados Unidos en 1700 era de 3.93 millones y en 1800 era de 5.31 millones, usa el modelo de mezclas para conocer la población en función del tiempo. Este modelo supone que la tasa de mortalidades nula que desde luego es errónea. Parece natural pensar que la tasa de mortalidad natural también es proporcional al tamaño de la población. No obstante, debido a otros factores de mortalidad (desnutrición, enfermedades, crímenes violentos, etc.), se puede suponer que la tasa de mortalidad es proporcional al número de interacciones bipartitas.

2.2.1.3. Ley de enfriamiento de Newton

Cuando un cuerpo se enfría en un medio a temperatura constante e inferior, el proceso térmico que se da es complejo y la pérdida de energía que origina el enfriamiento es una difícil superposición de fenómenos de radiación, convección y conducción. En cualquier caso, tal proceso de enfriamiento se produce debido a una transferencia energética del cuerpo al ambiente originada por la diferencia de temperaturas entre ambos y cuya velocidad depende del gradiente de temperatura entre el cuerpo y el ambiente. Esto fue estudiado por Newton y se conoce en la literatura como la Ley del enfriamiento de Newton (Palacios, 1958; Catalh, 1961; Tipler, 1994).

La expresión matemática de la velocidad de enfriamiento sería:

$$\Phi = -K.A.(T - T_a) \ldots (1)$$

Donde Φ representa la variación de energía (calor, Q) con respecto al tiempo $(\frac{dQ}{dt})$, A la superficie del cuerpo que se enfría; K, un coeficiente de proporcionalidad; T, la temperatura del cuerpo que se enfría; y T_a, la temperatura ambiente.

Si en la ecuación 1 ponemos que Q = m.Ce.ΔT, ley de validez general, y que expresa la relación lineal entre la energía perdida (enfriamiento) o ganada (calentamiento) y la variación de temperatura experimentada por el sistema, podremos poner:

$$\frac{mCedT}{dt} = -K.A(T - T_a)$$

El análisis dimensional del término (K.A) / (d.m.Ce) que aparecería como una nueva constante nos dice que sus dimensiones son de δ^{-1} si la constante K es la de conducción térmica, lo que hace coherente dimensionalmente la ecuación siguiente:

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -kdt \ldots (3)\ donde\ k = {}^{(KA)}/_{(dmCe)}$$

Es ésta una sencilla ecuación diferencial cuya solución, si tomamos como condiciones iniciales para t= 0, T = T_o, puede ponerse como

$$T = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt} \ldots\ldots (4)$$

es decir, una exponencial decreciente asintóticamente a la temperatura ambiente.

La forma logarítmica de esta ecuación sería

$$Ln(T - T_a) = kt + Ln(T_o - T_a) \ldots\ldots (5)$$

2.2.1.3.1. CALENTAMIENTOS NATURALES

De la misma manera que hemos razonado para tratar un enfriamiento, un calentamiento «natural» (y esto no lo hemos visto tratado en ningún texto), es decir, el que sufre un cuerpo en un ambiente a mayor temperatura, debería obedecer también a una «ley de calentamiento» simétrica a la del enfriamiento. El desarrollo matemático manteniendo las consideraciones sobre las constantes, sería ahora partir de la ecuación:

$$\frac{dT}{(T_a - T)} = kdt \qquad (6)$$

Y su solución sería:

$$T = T_a - (T_a - T_o)e^{kt} \qquad (7)$$

Que es una exponencial creciente asintóticamente a la temperatura ambiente

La forma logaritmica de 7 es:

$$Ln(T_a - T) = kt + Ln(T_a - T_o) \qquad (8)$$

2.2.1.3.2 Aplicaciones de la Ley de enfriamiento de Newton

- ✓ Mezclas
- ✓ Medicina forence
- ✓ Termodinamica
- ✓ Gastronomia

2.3. Definición de términos básicos.

- ➢ Óbice: obstáculo, dificultad que impide el correcto desempeño de una labor.
- ➢ Fiabilidad: Probabilidad de que un sistema cumpla una determinada función bajo ciertas condiciones durante un tiempo determinado.
- ➢ Tardía: Que ocurre, se realiza o se manifiesta tarde, después del tiempo señalado, convenido o acostumbrado.
- ➢ Desidia: Falta de ganas, de interés o de cuidado al hacer una cosa.
- ➢ Variable: designa una cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos dentro de un conjunto de números especificado.
- ➢ Constante: es una magnitud numérica específica, independientemente de la naturaleza del problema dado

CAPITULO III

3.1. Hipótesis

La temperatura medida experimentalmente debe ser aproximadamente igual a la temperatura obtenida mediante la ecuación diferencial de la Ley de enfriamiento de Newton, dándonos a entender que esta posee un alto nivel de fiabilidad al momento de predecir una temperatura o un determinado tiempo, lo cual tiene mucha utilidad al momento de hacer experimentos en el laboratorio

CAPITULO IV

METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la investigación

- Tipo de investigación:

a) Según la tendencia: Cuantitativa

b) Según el análisis y alcance de sus resultados: Explicativa

- Diseño de la investigación

a) Experimental

4.2. Población y muestra

Para el primer experimento trabajado con animales nuestra poblaciónes todos los conejos del mercado Caqueta y la muestra es un conejo.

Para el segundo experimento de la taza de café nuestra población es todos los vasos precipitados del laboratorio de Química General II y nuestra muestra es un vaso precipitado.

Para el tercer experimento de la cerveza la población es tódas las cervezas del Lima y muestra es una cerveza.

Para el cuarto experimento de la carne nuestra población es todas las carnes del mercado y la muestra es una carne.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

- Técnica: Experimental
- Instrumentos: Revisión de documentos, estudios de casos, observación.

4.4. Análisis y procesamiento de datos

4.4.1. Análisis de datos

Recopilamos los datos obtenido en el laboratorio y realizamos tablas con los datos obtenidos.

4.4.1.1. Aplicación de la Ley de Newton en un animal

Tabla 1: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en un animal.*

Tiempo(s)	Temperatura(°C)
0	38.8
10	37.8
20	36.3
30	35.3
40	34.5

Fuente: Elaboración propia.

4.4.1.2. Aplicación de la Ley de Newton en una taza de café

Tabla 2: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una taza de café.*

Tiempo(s)	Temperatura(°C)
0	66
5	52.1
10	42.84
15	38.31
20	35.4

Fuente: Elaboración propia.

4.4.1.3. Aplicación de la Ley de Newton en el calentamiento de una cerveza

Tabla 3: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una cerveza.*

Tiempo(s)	Temperatura(°C)
0	4.6
5	5.9
10	7.6
15	8.8
20	10.5
25	11.3

Fuente: Elaboración propia.

4.4.1.4. Aplicación de la Ley de Newton en el descongelamiento de carne

Diagrama 4: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en carne.*

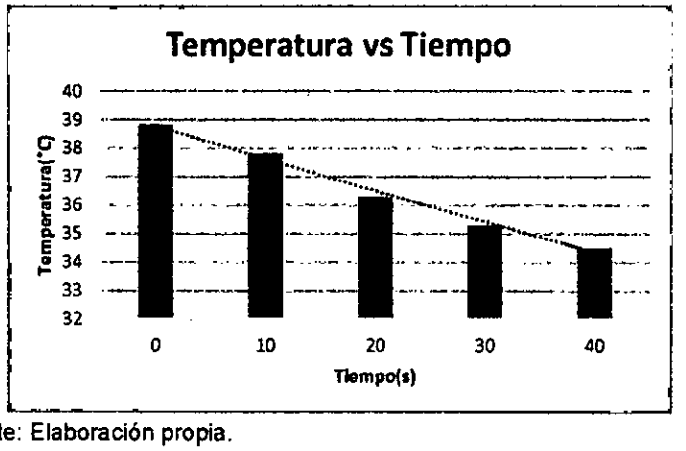
Tiempo(s)	Temperatura(°C)
0	11.2
5	15
10	17.3
15	19.1
20	20.2

Fuente: Elaboración propia.

4.4.2. Procesamiento de datos

4.4.2.1. Aplicación de la Ley de Newton en animales

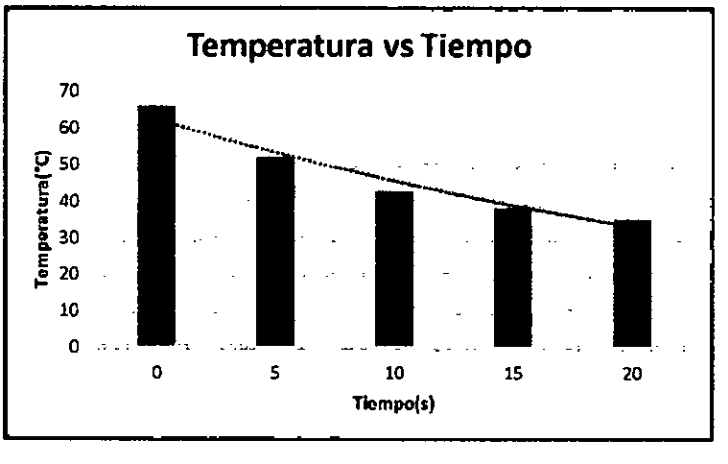
Diagrama 1: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en un animal.*



Fuente: Elaboración propia.

4.4.2.2. Aplicación de la Ley de Newton en una taza de café

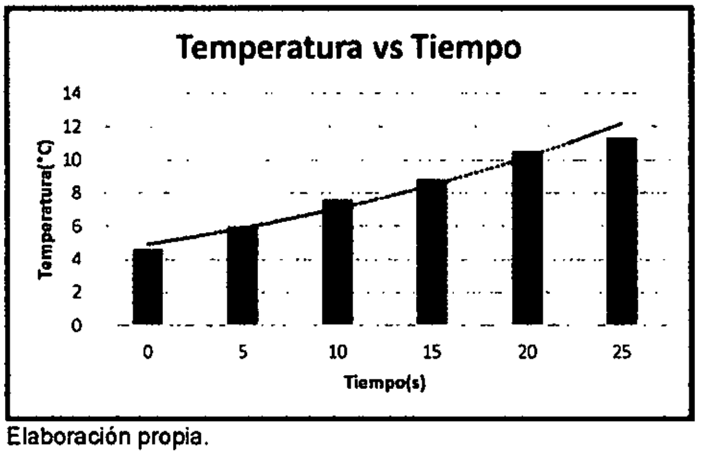
Diagrama 2: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una taza de café.*



Fuente: Elaboración propia.

4.4.2.3. Aplicación de la Ley de Newton en el calentamiento de una cerveza

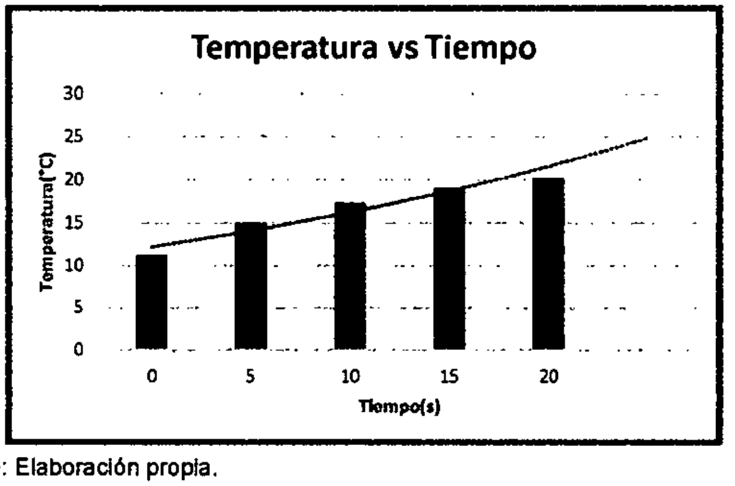
Diagrama 3: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una cerveza.*



Fuente: Elaboración propia.

4.4.2.4. Aplicación de la Ley de Newton en el descongelamiento de carne

Diagrama 4: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en carne.*



Fuente: Elaboración propia.

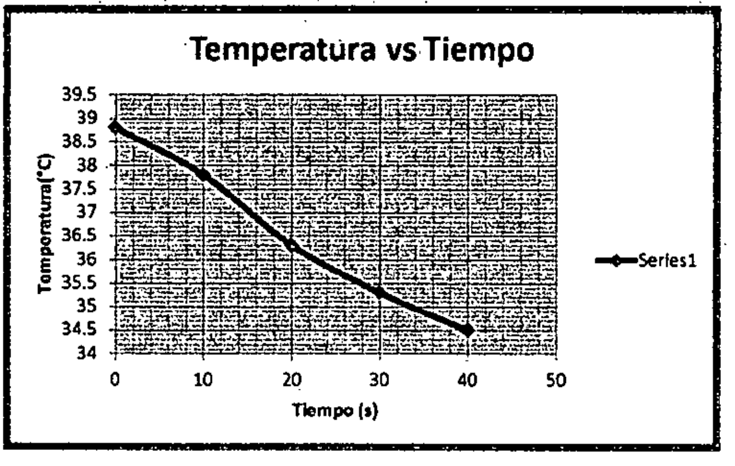
CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1. Aplicación de la Ley de Newton en un animal.

Con los datos obtenidos ahora graficaremos, obteniendo así graficas exponenciales.

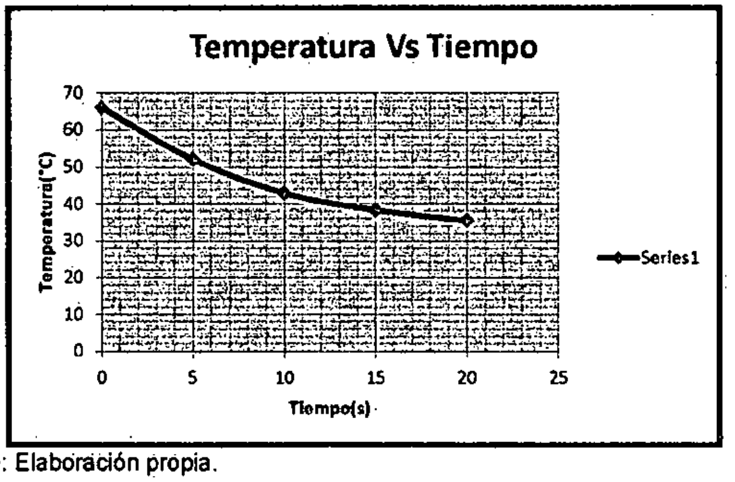
Grafico 1: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en un animal.*



Fuente: Elaboración propia.

5.2. Aplicación de la Ley de Newton en una taza de café

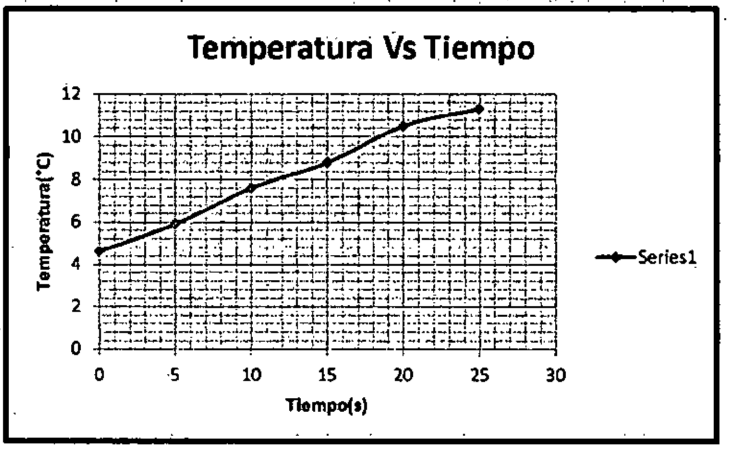
Grafico 2: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una taza de café.*



Fuente: Elaboración propia.

5.3. Aplicación de la Ley de Newton en el calentamiento de la cerveza

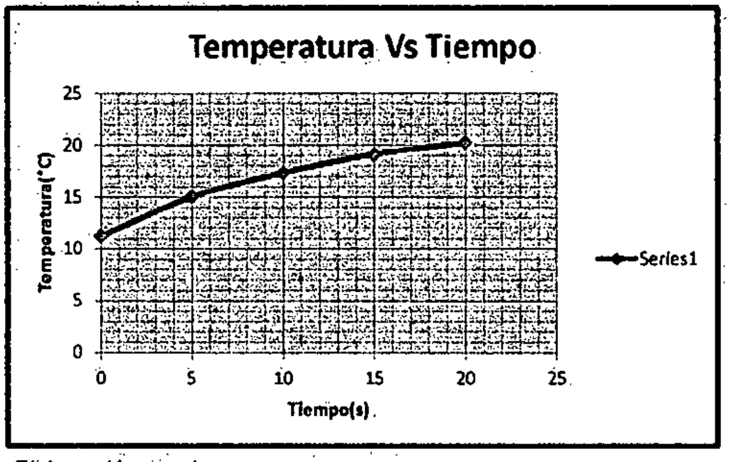
Grafico 3: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en una cerveza.*



Fuente: Elaboración propia.

5.4. Aplicación de la Ley de Newton en el descongelamiento de carne

Grafico 4: *Variación de la temperatura con respecto al tiempo en carne.*



Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

En nuestros experimentos nos ha arrojado valores aproximados (tiempo y temperatura), lo cual contrasta nuestra hipótesis, dándonos a entender que dicha ley es muy efectiva para lograr a conocer algunas de esas variables

CONCLUSIONES

Se concluyó que la ley de enfriamiento de newton se cumple en todos los casos, pero los valores experimentales difieren de los valores teóricos en un pequeño margen esto puede deberse a que la temperatura del ambiente no es algo fijo como en el caso de la ecuación, ello debe causar un margen de error por aceptable ya que no es muy significativo.

RECOMENDACIONES

- ✓ Al momento de medir la temperatura al conejo debe ser de manera rectal, así tendrá mayor precisión.
- ✓ No quitar el termómetro mediante de las mediciones porque hay variación de temperatura ambiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

G. Zill y S. Wright (2015). *Ecuaciones diferenciales con valores a la frontera.*

(3.ª ed). España: Editorial Thompson.

L. Kreider, G. Kuller, R. Ostberg (2015). *Ecuaciones Diferenciales.* (5.ª ed.). España: Editorial Mc Graw Hill.

S. Gil, M. Mayochi, L. Pelliza (2011). *Estimación experimental de la estimación de la luminosidad del Sol.* (3.ª ed.). Editorial Phys

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tema:

APLICACIÓN REAL DE LA DERIVADA DE SEGUNDO ORDEN EN TERREMOTOS O SISMOS

Docente: Reyna Segura, Ana María

Curso: Matemática III

Alumnos:

- Sánchez Lazo, Alonzo
- Vásquez Edquén Rocío

Callao, 2018

PERÚ

INDICE

RESUMEN

Este trabajo consiste en el desarrollo de contenidos matemáticos. El tema que se eligió fue aplicación real de la derivada de segundo orden, que pertenece a las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden. Este tema forma parte de la materia Matemática III, del tercer ciclo de la Carrera en Ingeniería Química de la FIQ de la UNAC.

Este trabajo plantea resolver, y dar a conocer más, la aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en los terremotos o sismos, demostraremos y aplicaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden necesarias, por lo que en el trabajo también se incluye la información correspondiente a la bibliografía empleada.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo, considerado por muchos como uno de los mayores logros de las matemáticas, fue creado para hacer frente a las urgentes necesidades matemáticas de la ciencia del S. XVII. Se precisaba poder interrelacionar las aceleraciones, velocidades y distancias recorridas por cuerpos en movimiento, relacionar pendientes de curvas con las razones de cambio, hallar los valores máximos y mínimos de funciones, encontrar longitudes de curvas, áreas acotadas por curvas, volúmenes encerrados por superficies y centros de gravedad de cuerpos que se atraen. Encontrándose en dicho Cálculo a las Ecuaciones Diferenciales que tienen una importancia fundamental en las matemáticas para la ingeniería debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas matemáticamente por este tipo de ecuaciones.

Además, los fenómenos naturales más interesantes implican cambios y se describen mejor mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables, como en el caso de los terremotos o sismos. Los terremotos o sismos son los eventos telúricos terrestres de movimiento entre el choque de las placas tectónicas, se caracterizan por la rapidez con que se generan, el ruido que generalmente lo acompaña, a fin de que la población los clasificó como el fenómeno natural más trágico y temible, debido principalmente a que ocurren en una forma repentina e inesperada y por su capacidad de destrucción.

En este informe se da a conocer las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden a la ingeniería; especificando su rol en los fenómenos naturales, terremotos o sismos.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA CIENTIFICO

Hoy en día sismos, temblores y terremotos son términos usuales para referirse a los movimientos de la corteza terrestre. Los sismos se originan en el interior de la tierra y se propaga por ella en todas direcciones en forma de ondas. Son de corta duración e intensidad variable y son producidos a consecuencia de la liberación repentina de energía.

Actualmente para cuantifican el efecto, intensidad del terremoto o sismo se usan las Escalas de magnitudes: la Escala sismológica de Ritcher, la Escala sismológica de magnitud de momento, la Escala sismológica de Mercalli o la Escala Medvedek-Sponheuer-Karnik; en la situación que no contaramos con ninguna escala, nacería la incertidumbre de cómo calcular la intensidad de dichos sismos o terremotos y además hacer el analisis físico de ondas y asi entender más los movimientos de los sismos que se presentan en la tierra. La solución en este caso sería hacienda uso de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo General

- Conocer la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de segundo orden en los terremotos o sismos.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Presentar información acerca de las ecuaciones diferenciales de segundo orden así como también de sus aplicaciones.
- Aprender a modelar problemas de ingeniería y ciencias
- Efectuar el análisis haciendo uso de las ecuaciones diferenciales.

II. ECUACIÓN DIFERENCIAL

"Newton inventó las ecuaciones diferenciales para describir movimientos de los cuerpos bajo gravedad, y su enfoque como un lenguaje apropiado para establecer leyes físicas y construir modelos, circunda todas las ciencias. Hay una gran discrepancia entre esta visión y los cursos usuales sobre ecuaciones diferenciales que a menudo consisten en una serie de trucos para hallar fórmulas de solución. Pero sucede que muchas ecuaciones diferenciales no admiten soluciones elementales y aun cuando las admiten, su búsqueda oscurece la pregunta esencial: ¿cómo se comportan las soluciones?"

(J.Hubbard. The collage Mathematics Journal. Nov. 1994)

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas, además envuelve una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

2.1. ANTECEDENTES

Las ecuaciones diferenciales ordinarias comienzan con el nacimiento del cálculo de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quienes iniciaron el estudio del problema inverso de la diferenciación: dada una relación entre dos cantidades y sus diferenciales (o fluxiones), cómo encontrar una relación entre las cantidades (o fluentes). Sin embargo, este problema analítico de la integración de ecuaciones diferenciales de orden corresponde a un problema geométrico formulado con anterioridad: el método inverso de tangentes; esto es, cómo encontrar una curva caracterizada por una propiedad dada de sus tangentes.

Utilizando expansiones de expresiones en series de potencias, Newton mostró que el problema inverso de las tangentes era totalmente soluble. Leibniz, sin embargo, expresando su deseo de lograr soluciones dando la naturaleza de las curvas, no estaba satisfecho con el sistemático uso de series y pensaba que, hablando de forma general, no había suficiente conocimiento todavia acerca del método inverso de las tangentes. Su procedimiento fue esencialmente cambiar variables para intentar transformar la ecuación diferencial dada en una ecuación con variables separables:

$f(x)dx = g(y)dy$ pues su solución se obtenía inmediatamente por cuadraturas. Incluso, antes de comenzar el siglo XVIII, los trabajos de, especialmente, Gottfried Wilhlm Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748) llevaron hacia la integración (reducción a cuadraturas) de ecuaciones diferenciales homogéneas y de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Sin embargo, incluso habiendo logrado tal separación de variables, aunque no siempre es el caso, continúa el problema de reducir las cuadraturas a otras más simples. Además, Johann Bernoulli destaca en su *Lectiones mathematicae* en 1691, que la separación de variables puede ocultar la naturaleza del problema. Por ejemplo, $ydx = 2xdy$ escrita como variables separables involucra, en apariencia curvas logarítmicas canto, en realidad, la solución es algebraica: $y^2 = Kx$.

Varios problemas geométricos y mecánicos provocaron que los matemáticos comenzaran a pensar acerca de las ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno. Este es el caso de Jácopo Riccati (1676-1754) quien presentó en 1723 la ecuación que lleva su nombre: $x^2d^2x = d^2y + dy^2$ resuelta por Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler. Las bases de la teoría general de la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes variables fueron desarrolladas en 1765 por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). Usando dos métodos diferentes, mostraron que n integrales particulares de la ecuación homogénea determinan la integral completa de la ecuación no homogénea a través de n cuadraturas. En 1776, Lagrange nota que este resultado puede también ser demostrado usando el método de variación de la constante, que se convirtió en el método general más utilizado.

En 1715, Brook Taylor (1685-1731) ya se había encontrado con una solución en el caso de las ecuaciones de segundo grado, y notado su carácter singular. En 1758, Euler enfatizó la paradoja dual de tales soluciones singulares en el cálculo integral. Estas soluciones son obtenidas no por integración, sino por diferenciación de ecuaciones diferenciales. A medida que se comienzan a estudiar sistemas físicos más complejos, por ejemplo, en la astronomía, se requiere resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2. ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden para una función $y = y(x)$ es una ecuación de la forma:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Donde a(x), b(x) y f(x) son funciones dadas, definidas en un intervalo J. Cuando f(x) es la funciónnula se dice que (1) es una *ecuación lineal homogénea*. Algunos ejemplos de ecuaciones lineales de segundo orden son:

$$y'' + w^2y = 0 \qquad \text{Movimiento armónico simple}$$

$$y'' + \varphi y' + w^2y = f(x) \qquad \text{Oscilador amortiguado forzado}$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0 \qquad \text{Ecuacion de Bessel}$$

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{p(p + 1)}{1 - t^2}y = 0 \qquad \text{Ecuacion de Legendre}$$

Las dos primeras son ejemplos de *ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. Las dos últimas son ejemplos de *ecuaciones lineales con coeficientes variables*.

- Se dice que una función y = φ(x) definida en un intervalo I es solución de una diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad. Una E. D. se dice resoluble (o integrable) por cuadraturas si su solución es expresable mediante integrales.

- La solución de la ecuación diferencial de orden n dependerá de n parámetros. Pero incluso de esta forma pueden no obtenerse todas las soluciones de una E. D. Por ejemplo, cuando tenemos una familia uniparamétrica de soluciones de una E. D., una sencilla interpretación geométrica nos muestra que también la envolvente de la familia de curvas (si existe) es solución de la E. D.

- Se define como problema de valor inicial y problemas de valor frontera a aquellos en que la ecuación diferencial se resuelve sujeta a unas condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer.

2.2.1 Problema de valor inicial:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

2.2.2 Problemas de valor frontera:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida, especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

- La función primitiva resultante, o función solución de una ecuación diferencial, puede tener por las condiciones iniciales o de frontera diversos valores, diferenciándose una solución de otra en el parámetro, definiéndose este conjunto de soluciones familia de soluciones de un parámetro (en el caso de existir sólo un parámetro) o familia de soluciones de dos o más parámetros (en el caso de existir más de un parámetro).

2.3. APLICACIONES DE LAS EDO DE SEGUNDO ORDEN

El descubrimiento de Newton y Leibniz en el siglo diecisiete sobre las ideas básicas del cálculo integral fue crucial para el avance que sufrieron las matemáticas, y más importante fue, si cabe, la relación que encontraron entre el cálculo integral y el diferencial, ya que consiguieron fundirlos en uno solo. Una de las aplicaciones de este descubrimiento fue la física aplicada, dícese, la Ingeniería.

Entre las aplicaciones de las EDO de segundo orden están:

- Modelos lineales (problemas con valores iniciales) como los sistemas resorte/masa y circuitos en serie análogo.
- Modelos lineales (problemas con valores de frontera) como las deflexiones de una viga y cuerda rotando.
- Modelos no lineales como el movimiento de un cohete y el péndulo no lineal.

2.3.1. Sistema resorte/masa: Movimiento libre no amortiguado

Ley de Hooke Supongamos que, como en la figura 5.1(b), una masa m_1 está unida a un resorte flexible colgado de un soporte rígido. Cuando se reemplaza m_1 con una masa distinta m_2, el estiramiento, elongación o alargamiento del resorte cambiará.

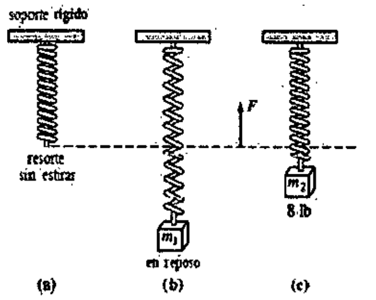


FIGURA 5.1

Según la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución, *F*, opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a la cantidad de alargamiento s. En concreto, $F = Rs$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada constante del resorte. Aunque las masas con distintos pesos estiran un resorte en cantidades distintas, 6ste está caracterizado esencialmente por su número k; por ejemplo, si una masa que pesa 10 libras estira 1/2 pie un resorte, entonces 10 = k(1/2) implica que k = 20 lb/ft. Entonces, necesariamente, una masa cuyo peso sea de 8 libras estirará el resorte 2/5 de pie.

Segunda ley de Newton Después de unir una masa m a un resorte, ésta lo estira una longitud s y llega a una posición de equilibrio, en la que su peso, W, está equilibrado por la fuerza de restauración *ks*. Recuérdese que el peso se define por $W = mg$, donde la masa se expresa en slugs, kilogramos o gramos y g = 32 ft/s^2, 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2, respectivamente.

Como se aprecia en la figura 5.2(b), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza una distancia x respecto de su posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es $k(x + s)$.

Suponiendo que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y que la masa se mueve libre de otras fuerzas externas (movimiento libre), entonces podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza de restitución y el peso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + mg - ks = -kx \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

El signo negativo de la ecuación (1) indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en la dirección opuesta del movimiento. Además, podemos adoptar la convención que los desplazamientos medidos abajo de la posición de equilibrio son positivos (Fig. 5.3).

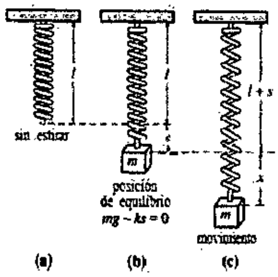


FIGURA 5.2

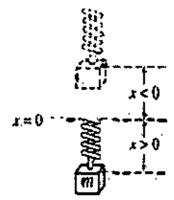


FIGURA 5.3

Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado Si dividimos la ecuación (1) por la masa *m*, obtendremos la ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$, *0* sea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Donde $w^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe el movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado. Dos condiciones iniciales obvias asociadas con (2) son $x(O) = \alpha$, la cantidad de desplazamiento inicial, y $x'(O) = \beta$, la velocidad inicial de la masa. Por ejemplo, si $\alpha > 0$, $\beta < 0$, la masa parte de un punto abajo de la posición de equilibrio con una velocidad *hacia arriba*. Si $\alpha < 0$, $\beta = 0$, la masa se suelta partiendo del *reposo* desde un punto ubicado $|\alpha|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio, etcétera.

Solución y ecuación del movimiento Para resolver la ecuación (2) observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + w^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = wi$, $m_2 = -wi$. Así, según (8) de la sección 4.3, la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1 coswt + c_2 sen\ wt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

El **periodo** de las vibraciones libres que describe (3) es $T = 2\pi/w$, y la **frecuencia** es $f = 1/T = w/2\pi$. Por ejemplo, para $x(t) = 2\cos 3t - 4\ \text{sen}\ 3t$, el periodo es $21\pi/3$ y la frecuencia es $3/2\pi$.

El número anterior indica que la gráfica de *x(t)* se repite cada 27π/3 unidades y el último número indica que hay tres ciclos de la gráfica cada 27r unidades o, lo que es lo mismo, que la masa pasa por 3/2π vibraciones completas por unidad de tiempo. Además, se puede demostrar que el periodo 2π/w es el intervalo entre dos máximos sucesivos de *x(t)*.

Téngase en mente que un máximo de *x(t)* es el desplazamiento positivo cuando la masa alcanza la distancia máxima *abajo* de la posición de equilibrio, mientras que un mínimo de *x(t)* es el desplazamiento negativo cuando la masa llega a la altura máxima *arriba* de esa posición. Ambos casos se denominan desplazamiento extremo de la masa.

Por último, cuando se emplean las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 en la ecuación (3), se dice que la solución particular que resulta es la ecuación del movimiento.

2.3.2. Sistema resorte/masa: Movimiento libre amortiguado

El concepto del movimiento armónico libre no es realista porque el movimiento que describe la ecuación (1) supone que no hay fuerzas de retardo que actúan sobre la masa en movimiento. A menos que la masa esté colgada en un vacío perfecto, cuando menos habrá una fuerza de resistencia debida al medio que rodea al objeto. Según se advierte en la figura 5.6, la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o conectado a un dispositivo amortiguador.

Ecuación diferencial del movimiento amortiguado libre En mecánica, se considera que las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a alguna potencia de la velocidad instantánea. En particular, supondremos en el resto de la descripción que esta fuerza está expresada por un múltiplo constante de *dx/dt*. Cuando no hay otras fuerzas externas aplicadas al sistema, se sigue por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(4)}$$

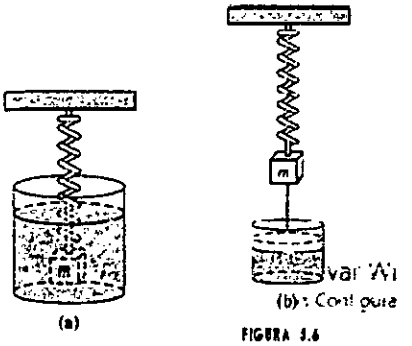


FIGURA 1.6

Donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es consecuencia del hecho de que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Al dividir la ecuación (4) por la masa *m,* la ecuación diferencial del movimiento amortiguado libre es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)\,dx/dt + (k/m)x = 0$, o sea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(5)$$

Donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, w^2 = \frac{k}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

El símbolo 2λ sólo se usa por comodidad algebraica, porque así la ecuación auxiliar queda $m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0$ y las raíces correspondientes son:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}\,, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

Ahora podemos distinguir tres casos posibles que dependen del signo algebraico de $\lambda^2 - w^2$. Puesto que cada solución contiene al *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, *los* desplazamientos de la masa se vuelven insignificantes cuando el tiempo es grande.

CASO 1: $\lambda^2 - w^2 > 0$. Aquí, se dice que el sistema está **sobreamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento, β, es grande comparado con la constante de resorte, k. La solución correspondiente de (5) es $x(t) = c_1e^{m1t} + c_2e^{m2t}$, o bien:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-w^2}\,t} + c_2 e^{\sqrt{\lambda^2-w^2}\,t}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

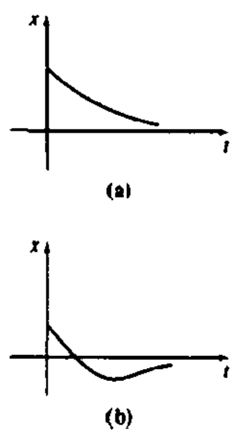


FIGURA 5.7

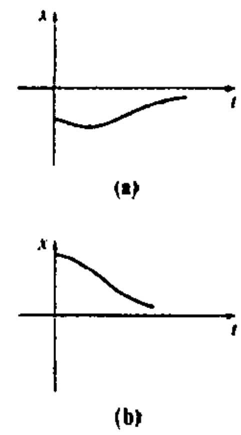


FIGURA 5.8

Esta ecuación representa un movimiento suave y no oscilatorio. La figura 5.7 muestra dos gráficas posibles de x(t).

CASO II: $\lambda^2 - w^2 = 0$. Se dice que el sistema está **críticamente amortiguado** puesto que cualquier pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento originaría un movimiento oscilatorio. La solución general de la ecuación (5) es $x(t) = c_1e^{m1t} + c_2e^{m2t}$ es decir,

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

En la figura 5.8 vemos dos típicos gráficos de este movimiento. Obsérvese que se parecen mucho a los de un sistema sobreamortiguado. También se aprecia, según la ecuación (8), que la masa puede pasar por la posición de equilibrio, a lo más una vez.

CASO III = $\lambda^2 - w^2 < 0$. Se dice que el sistema está **subamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño en comparación con la constante del resorte. Ahora las raíces m_1 y m_2 son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{w^2 - \lambda^2}i\ , \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{w^2 - \lambda^2}i$$

Entonces, la solución general de la ecuación (5) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 cos\sqrt{w^2 - \lambda^2 t} + c_2 sen\sqrt{w^2 - \lambda^2 t}\right) \dots\dots\dots \ (9)$$

Como se aprecia en la figura 5.9, el movimiento que describe (15) es oscilatorio pero, a causa del coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración tienden a cero.

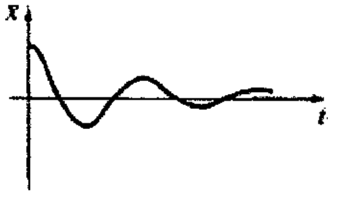


FIGURA 5.9

2.3.3. Sistema resorte/masa: Movimiento forzado

Ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguamiento Ahora tomaremos en cuenta una fuerza externa, *f(t)*, que actúa sobre una masa oscilatoria en un resorte; por ejemplo, *f(t)* podría representar una fuerza de impulsión que causara un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte (Fig. 5.12). La inclusión de *y(t)* en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial del movimiento forzado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -km - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \ \dots\dots\dots (10)$$

Al dividir esta ecuación por m se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+w^2x=F(t)\;\dots\dots\dots\dots(11)$$

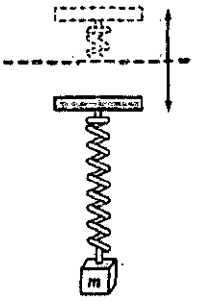


FIGURA 5.12

Donde F(t) = f(t)/m y, al igual que en la sección anterior, $2\lambda = \beta/m$, $w^2 = k/m$. Para resolver esta ecuación no homogénea tenemos el método de los coeficientes indeterminados o el de la variación de parámetros.

III. EDO EN SISMOS Y TERREMOTOS

Un terremoto o sismo es una liberación de energía manifestado por la perturbación (vibración) del terreno, que se produce por los desplazamientos repentinos a lo largo de los bordes de las placas o por el movimiento de las fallas geológicas. La zona donde se inicia la liberación de energía se llama foco y su proyección sobre la superficie se conoce como epicentro.

El movimiento sísmico se propaga mediante ondas elásticas (similares al sonido), a partir del hipocentro. Las ondas sísmicas se presentan en tres tipos principales.

Ondas longitudinales o primarias (P), Ondas transversales o secundarias (S), Ondas superficiales en las interacciones de las ondas P y S.

Hallando la A que depende de hallar la ecuación de movimiento ya que esta dado la escala de Richter.

$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Donde:

A – la medida de la amplitud de la onda del terremoto
A_0 – la amplitud de la onda más pequeña detectable (u onda estándar)

3.1. AMORTIGUACIÓN

La amortiguación es una de las propiedades más sensibles de materiales y estructuras, tanto a nivel macro como microscópico, siendo particularmente sensibles a la presencia de grietas. Es el fenómeno por el cual se disipa energía mecánica en un sistema. La amortiguación determina la amplitud de la vibración en la resonancia y el tiempo de persistencia de la vibración después que culmina la excitación.

El amortiguamiento de un sistema o material sub-amortiguado puede ser clasificado de tres formas principales: interno, estructural y de fluidos. El interno se asocia con defectos en la microestructura, granularidad e impurezas del material y a efectos termo elásticos causados gradientes locales de temperatura.

La amortiguación se comporta como una fuerza proporcional a la velocidad, como lo son las fuerzas de rozamiento con fluidos y por ello la fórmula es la misma. C es un coeficiente de rozamiento viscoso.

$$F = c * v = c * x'$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{c}{M}\frac{dx}{dt} - \frac{K}{M}x = 0$$

Para que resolver la ecuación característica sea más fácil, hacemos

$$a = \frac{c}{2M}$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Tenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

La ecuación característica es:

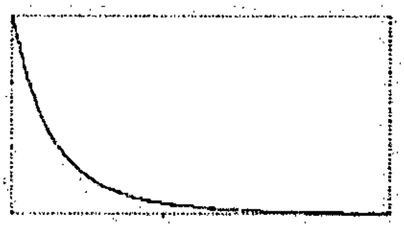
$$r^2 + 2br + a = 0$$

Las raíces son:

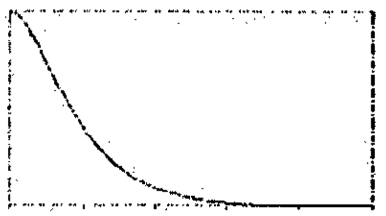
$$m_1, m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

3.2. SISTEMAS DE AMORTIGUACIÓN

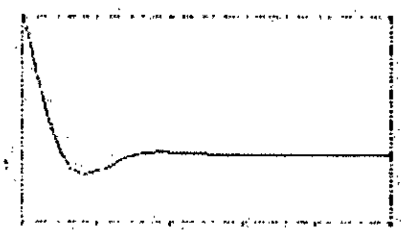
MOVIMIENTOSOBREAMORTIGUADO



MOVIMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

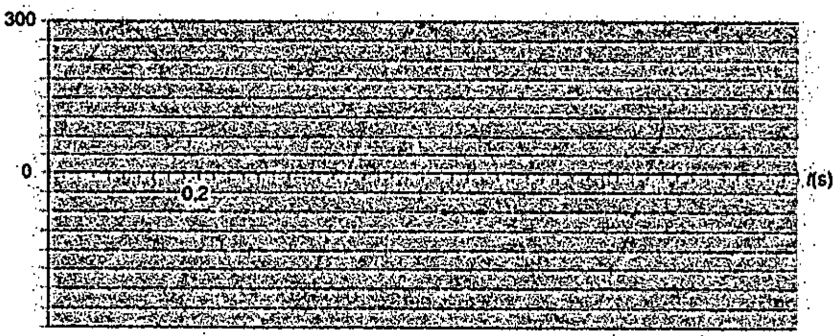


MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO



EJEMPLO 1

Según la gráfica encontrar la escala de la cual fue el temblor dado el 23 de junio en Brasil.



De la gráfica se deduce que T/2 = 0,2 s, por lo que el periodo y la pulsación son: T = 0,4 s; ω = 2 π /T = 5 π rad/s. donde la ecuación sería. Sabiendo que $c_1 = 10$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0}$$

$$x(t) = 10\cos 5t + c_2 \sin 5t$$

Hallando c_2 :

Cuando $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10$ por lo tanto aplicando hallamos $c_2 = 10$

$$x(t) = 10\cos 5t + 10\sin 5t$$

EJEMPLO 2

Una persona que se dedica a hacer deportes extremos practica bungee. El sujeto pesa 50kg, se lanza de un precipicio y estira la soga 2m. Sabiendo que la fuerza elástica que ejerce es de 400N y cuando sube lo hace con una velocidad igual a 10m/s. Hallar la ecuación del movimiento.

$$\frac{400}{2} = k$$

$$k = 200$$

$$\omega^2 = 4$$

$$\omega = 2$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -10$$

Ecuación del movimiento

$$50x'' + 200x = 0$$

$$x'' + 4x = 0$$

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 sen\, \omega t$$

$$x(t) = c_1 \cos \frac{1}{2} t + c_2 sen\, 2t$$

$$c_1 = 2$$

$$x'(0) = [-10 = -2\, sen\, 2t + c_2 \cos 2t]$$

$$x'(0) = [-10 = 2c_2]$$

$$c_2 = -5$$

$$x(t) = 2\cos 2t - 5 sen\, 2t$$

IV. CONCLUSIONES

- Concluimos que las ecuaciones diferenciales usadas para representar los movimientos de la tierra más conocidos como sismos son las ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- Las ecuaciones diferenciales de segundo orden proporcionan una herramienta esencial para modelar muchos problemas en Ingeniería, Física, Ingeniería y Biología, puesto que estos, por lo general, requieren la determinación de una función que satisface a una ecuación diferencial.
- En el análisis de las gráficas que se realizaron por medio de las ecuaciones de los sistemas amortiguado, críticamente amortiguado y subamortiuado nos permitieron entender un poco los movimientos de los sismos que se presentan en la tierra.
- El dominio de los métodos numéricos, en combinación con las capacidades y potencialidades de la programación de computadoras resuelve problemas de ingeniería de manera más fácil y eficientemente.

V. BIBLIOGRAFIA

- Zill, D. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Décima edición.
- C.H. Edwards y D. E. Penney, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores frontera, Editorial Pearson, cuarta edición, 2009.
- R.K. Nagle y E.B. Saff, Fundamentos de ecuaciones diferenciales, Editorial Addison-Wesley, Iberoamericana, segunda edición, 1999.
- R.K. Nagle, E.B. Saff y A.D. Snider, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Editorial Pearson, cuarta edición, 2005.
- G.F. Simmons, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, Editorial McGrawHill, segunda edición, 1995.
- Alicia Guerrero, Oscilaciones y Ondas, Universidad Nacional de Colombia, cap. 1 y 2.
- Peralta, J. A. y Miller, C. G., Resonancia en placas delgadas 209 – 217 (1997)

VI. ANEXOS

5.1.-Metodos Numéricos Aplicados a Ecuaciones Diferenciales

5.1.1.-Método de Euler: Con esta aplicación llegaremos a ver las soluciones mediante diferentes métodos para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, para esta ecuación con los intervalos de y(t) para t=1 empleando un h=0.2, intervalo de t ∈[0,1].

$$
p= \begin{cases} y'(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}=t+y \\ y(t_0=0)=1 \end{cases}
$$

$$
n=\frac{t_n-t_0}{h} \qquad n=\frac{1-0}{0.2}=5 \qquad n=5
$$

Se procede a aplicar el método de Euler. $\begin{cases} Y_{j+1}=Y_j+hF_j \\ Y_0=y_0 \end{cases}$

Para $j=0$, se tiene: $Y_0=1$, $t_0=0$.

$$
Y_1=Y_0+hF_0 \qquad Y_1=Y_0+h(t_0+Y_0)
$$

$$
Y_1=1+0.2(0+1) \qquad Y_1=1.2
$$

Para $j=1$, se tiene: $Y_1=1.2$, $t_1=t_0+h$, $t_1=0.2$

$$
Y_2=Y_1+hF_1 \qquad Y_2=Y_1+h(t_1+Y_1)
$$

$$
Y_2=1.2+0.2(0.2+1.2) \qquad Y_2=1.48
$$

Para $j=2$, se tiene: $Y_2=1.48$, $t_2=t_1+h$, $t_2=0.4$

$$
Y_3=Y_2+hF_2 \qquad Y_3=Y_2+h(t_2+Y_2)
$$

$$Y_3 = 1.48 + 0.2(0.4 + 1.48) \qquad Y_3 = 1.856$$

Para $j = 3$, se tiene: $Y_3 = 1.856$, $t_3 = t_2 + h$, $t_3 = 0.6$

$$Y_4 = Y_3 + hF_3 \qquad Y_4 = Y_3 + h(t_3 + Y_3) \qquad Y_4 = 2.3472$$

Para $j = 4$, se tiene: $Y_4 = 2.3472$, $t_4 = t_3 + h$, $t_4 = 0.4$

$$Y_5 = Y_4 + h(t_4 + Y_4) \qquad Y_5 = 2.97664$$

Tabla 1. Resultados paso a paso, tabulados por el Método de Euler

j	t_i	$Y(t_i)$
1	0.2	1.2
2	0.4	1.48
3	0.6	1.856
4	0.8	2.3472
5	1.0	2.97664

5.1.2.-Metodo de Euler Modificado: El método de Euler modificado tiene dos motivaciones. La primera es que es más preciso que el método de Euler por diferencias hacia delante o hacia atrás. La segunda es que este método es más estable que su homologo hacia delante. El método de Euler modificado también es reconocido como el método de punto medio, y las ecuaciones aproximantes:

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = Y_i + \frac{h}{2} F(t_i, Y_i)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + hF\left(t_{i+\frac{1}{2}}, Y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

Para $j = 0$, se tiene: $Y_0 = 1$, $t_0 = 0$.

$$Y_{0+\frac{1}{2}} = Y_0 + hF_0 \qquad Y_{0+\frac{1}{2}} = Y_0 + h(t_0 + Y_0) \qquad Y_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0.2(0+1) \qquad Y_{0+\frac{1}{2}} = 1.2$$

$$Y_1 = Y_0 + hF\left(t_{0+\frac{1}{2}}, Y_{0+\frac{1}{2}}\right) \qquad Y_1 = Y_0 + h(t_{0+\frac{1}{2}} + Y_{0+\frac{1}{2}}) \qquad Y_1 = 1.24$$

Tabla 2. Resultados paso a paso, tabulados por el Método de Euler Modificado

j	t_i	$Y(t_i)$
1	0.2	1.24
2	0.4	1.5768
3	0.6	2.0317
4	0.8	2.63067
5	1.0	3.40542

5.1.3.-Metodo de Heun: El método de Euler posee un serio defecto en su aproximación para determinar la pendiente usando encada paso de la iteración. Una de las mejoras que se aplica el método de Euler, es el denominado Predictor-Corrector, cuyas ecuaciones interactivas resultan ser:

$$Y_{i+1}^{0} = Y_i + hF(t_i, Y_i)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}\left[F(t_i, Y_i) + F(t_{i+1}, Y_{i+1}^{0})\right]$$

Tabla 3. Resultados paso a paso, tabulados por el Método Predictor Corrector

j	t_i	$Y(t_i)$
1	0.2	1.24
2	0.4	1.5768
3	0.6	2.0317
4	0.8	2.63067
5	1.0	3.40542