UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACION DE LA FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACION

"MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA ACCIÓN DE LOS TERREMOTOS SOBRE EDIFICIOS DE VARIOS PISOS USANDO SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN"

AUTOR: SANTOS PANTALEÒN RODRÌGUEZ CHUQUIMANGO

Callao, 2019

PERÙ

Índice

SR

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

El trabajo de investigación realizado tiene por objetivo construir un modelo matemático para explicar o describir la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos. En la construcción del modelo hemos utilizado sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, hemos hecho una aplicación de los sistemas mecánicos masa resorte el cual es explicado por las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Partiendo del supuesto que la acción de un terremoto sobre los edificios de varios pisos es similar al sistema mecánico masa resorte y que las leyes que gobiernan este sistema también gobiernan la acción de un terremoto sobre edificios. Se considera que cada piso de un edificio es una masa y que la unión de cada piso se comporta como un resorte y haciendo uso de los sistemas de ecuaciones de segundo orden hemos construido el modelo como se muestra en los resultados.

Fusionando los métodos inductivo-deductivo hemos considerado el modelo para un piso que consta de una ecuación diferencial de segundo orden no homogéneo, la cual se resuelve por métodos analíticos. El modelo para un edificio de dos pisos se constituye de un sistema de dos ecuaciones de segundo orden no homogéneo el cual puede ser resuelto de manera analítica. En la generalización de nuestro modelo para un edificio de más pisos hemos usado el software mathcad para la solución del sistema de ecuaciones homogéneo.

Palabra clave: Sistemas de ecuaciones de segundo orden, sistemas mecánicos.

Abstract

The objective of the research work is to construct a mathematical model to explain or describe the action of earthquakes on multi-store buildings. In the construction of the model we have used systems of ordinary differential equations of second order, we have made an application of the mechanical systems spring mass which is explained by the differential equations of second order. Starting from the assumption that the action of an earthquake on multistory buildings is similar to the mechanical mass spring system and that the laws that govern this system also govern the action of an earthquake on buildings. It is considered that each floor of a building is a mass and that the union of each floor behaves like a spring and making use of the systems of second order equations we have built the model as shown in the results.

By merging the inductive-deductive we have considered the model for a floor that consists of a non-homogeneous second-order differential equation, which is solved by analytical methods. The model for a two-story building is constituted by a system of two non-homogeneous second order equations which can be solved analytically. In the generalization of our model for a building with more floors we have used mathcad software for the solution of the system of homogeneous equations.

Keyword: Systems of second order equations, mechanical systems.

Introducción

El trabajo de investigación propuesto tiene por objetivo construir un modelo matemático para explicar o describir la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos haciendo uso de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Se ha desarrollado la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y los sistemas de ecuaciones de segundo orden, y se ha presentado la aplicación de estas ecuaciones en el sistema mecánico masa-resorte. Se presenta el modelo masa-resorte considerando un resorte y una masa que resulta en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden. Luego, se presenta el sistema masa resorte para tres resortes y dos masas que corresponde a un sistema de ecuaciones ordinarias de segundo orden de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Generalizamos un sistema masa-resorte para n masas y $n+1$ resortes, que corresponde a un sistema de n ecuaciones de segundo orden con n incógnitas.

En el presente informe vemos como los efectos de un terremoto sobre edificios de varios pisos tiene un efecto similar a los sistemas mecánicos, en verdad, se puede decir que el efecto de un terremoto sobre los edificios es un ejemplo de un sistema mecánico masa- resorte.

SR

I. Planteamiento del problema

1.1. Descripción de la realidad problemática

El trabajo de investigación propuesto tiene por objetivo construir un modelo matemático para explicar o describir la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos. Para Robert, Borelli (1998) la modelación es el proceso de reconstrucción de un proceso natural de su medio a una forma llamada modelo, el cual puede analizarse por medio de técnicas que entendemos y en las que confiamos. Un modelo es un dispositivo que ayuda al modelador a predecir o explicar el comportamiento de un fenómeno, experimento o suceso.

Por otro lado, una de las finalidades de las matemáticas es el modelamiento de fenómenos que suceden en la naturaleza por medio de la construcción, solución, análisis, e interpretación de modelos matemáticos.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden sirven para modelar algunos sistemas mecánicos, entre los cuales están las masas puntuales, conectadas por resortes en un arreglo lineal, sufriendo pequeñas oscilaciones. Por otro lado la distribución de un edificio tiene un comportamiento similar a los sistemas masa resorte, en tal sentido es fundamental el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a los sistemas mecánicos masa resorte, en particular para modelar y explicar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Cómo se puede modelar la acción de los terremotos sobre un edificio de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden?

1.2.2. Problemas específicos

i) ¿Cómo se puede modelar los sistemas mecánicos masa- resorte usando sistemas de ecuaciones de segundo orden?

ii) ¿Cómo se usan los sistemas mecánicos masa resorte para modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Construir un modelo matemático para la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

1.3.2. Objetivos específicos

i) Desarrollar la teoría de sistemas de ecuaciones de segundo orden y aplicarlo a los sistemas mecánicos masa resorte.

ii) Usar los sistemas masa- resorte para modelar La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos.

1.4. Limitantes de la investigación

a) En cuanto a los limitantes teóricos no hay puesto que la teoría de los sistemas de ecuaciones de segundo orden y su solución está ampliamente desarrollada en los diferentes textos de ecuaciones diferenciales.

b) Uno de los limitantes que se pueden considerar es la falta de investigaciones en el tema desde el punto de vista matemático, solo se encuentran investigaciones en el tema desde el punto de vista estructural que corresponde a la especialidad de ingeniería civil.

c) Las conclusiones que se dan son teóricas debido a que el experimento real es imposible de realizar por la naturaleza del fenómeno, sin embargo, desde el punto de vista matemático y de la modelación se muestra el modelo, la solución y la interpretación de los resultados.

II. Marco teórico

2.1. Antecedentes de la investigación

Antecedentes Internacionales

Bassotia y Ambrosinib (2007) en su investigación titulada "Sobre la utilización de Amortiguadores de masa sintonizados en la Provincia de Mendoza", presenta cómo solución alternativa para los problemas de seguridad estructural e incomodidad ante las vibraciones en edificios y puentes, la utilización del concepto de control pasivo de vibraciones, en particular los amortiguadores de masa sintonizados (AMS), el cual consiste en una masa, un resorte y un amortiguador viscoso el cual se coloca en el sistema vibrante principal y ayuda a atenuar las vibraciones no deseadas, cuando está sintonizado con la frecuencia de la estructura principal. Esta alternativa se presenta como una de las formas más eficaces y de bajo costo para el mejoramiento de la seguridad de estructuras existentes.

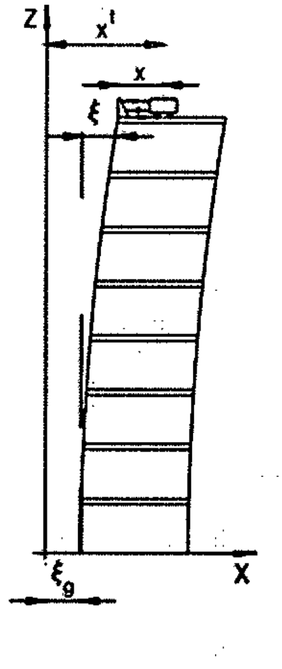

Figura 1. Coordenadas del modelo estructura – AMS. Fuente: Bassotia y Ambrosinib (2007)

El sistema AMS consiste de un sistema de dos ecuaciones de segundo orden en el que se incluye amortiguamiento. Se resuelve usando transformada de Fourier.

Bozzio y Barbat (2000) presentan un movimiento de sistema temporal con un grado de libertad seguido por la ecuación diferencial

$$mx'' + cx' + kx = -ma(t)$$

Que se escribe en la forma

$$x'' + 2vwx' + \omega^2 x = a(t), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Utilizando la frecuencia del sistema amortiguado $w_v = w\sqrt{1-v^2}$, la respuesta del sistema en el tiempo t es de la forma

$$x = -\frac{1}{w_v}\int_0^t a(u)e^{-vw(t-u)}\sin[w_v(t-u)]\,du$$

Este modelo representa la acción de un terremoto sobre un edificio de un piso.

Referencias nacionales

En el ámbito nacional no existen trabajos publicados que traten el tema desde el punto de vista matemático, sin embargo, existen publicaciones que analizan los daños causados por los terremotos como el sucedido en Pisco.

> Con el terremoto de Pisco, se ha comprendido que las tareas de prevención y mitigación de los daños producidos por este tipo de peligros, conlleva a realizar una continua educación de la población a todos los niveles a los cuales sea posible (hogares, colegios, universidades, empresas, instituciones públicas, departamentos, provincias, distritos, urbanizaciones y asentamientos humanos) y realizar campañas de difusión a nivel local y nacional; además de evaluaciones físicas de las viviendas o edificaciones con el asesoramiento respectivo. Las experiencias vividas por poblaciones como la de Tambo de Mora en Chincha, permiten considerar que es vital realizar un control adecuado

sobre la expansión urbana para que no se desarrolle en zonas geológicamente inestables o en Pisco, utilizando en su construcción material inadecuado. Evidentemente, la tarea de mitigar el desastre es la que mejor se viene desarrollando; sin embargo, debemos suponer que aún falta mucho por hacer y aprender. (Tavera, 2007, p.3)

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

En el trabajo de investigación se usa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden por lo que antes de abordar el estudio de estos sistemas presentamos un breve resumen de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, luego veremos su aplicación en los sistemas mecánicos masa resorte.

2.2.2. Conceptual

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden sirven para modelar sistemas mecánicos masa-resorte, lo cual se encuentra ampliamente desarrollada en los textos de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

2.2.3. Teórico - conceptual

La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos tiene el mismo comportamiento que un sistema mecánico masa-resorte, por lo tanto se puede hacer uso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden para modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos.

2.3. Definición de términos básicos

2.3.1. Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea

Una Ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de segundo orden es de la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \tag{1}$$

Donde $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x), h(x)$ son funciones continuas en algún intervalo I de $\mathbb{R}$, y $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

A) Forma Normal

Si dividimos la ecuación (1) entre $a_2(x)$ se tiene la ecuación en su forma normal.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tilde{a}_1(x)\frac{dy}{dx} + \tilde{a}_0(x)y = \tilde{h}(x) \tag{2}$$

Donde $\tilde{a}_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \tilde{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_2(x)}$.

B) Ecuación Homogénea asociada

Si en la ecuación (1) se tiene $h(x) = 0$ la ecuación que resulta es la ecuación homogénea asociada a (1).

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{3}$$

La solución de la ecuación (3) es de la forma

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

Donde c_1, c_2 son constantes reales; y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de (3).

La solución de la ecuación (1) es de la forma

$$y = y_h + y_p$$

Donde:

y_h, es la solución de la ecuación homogénea asociada.

y_p, es una solución particular de la ecuación (1).

La solución particular y_p, se puede obtener por inspección o a partir de y_h usando el método de variación de parámetros o el método de los coeficientes indeterminados. De la forma de la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de segundo orden, se observa que para resolver la ecuación necesitamos resolver primero la ecuación homogénea asociada y luego hallamos una solución particular.

2.3.2. Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden

Para resolver una ecuación de segundo orden en su forma general haremos uso del Wronskiano.

A) Wronskiano: Sea y_1, y_2 funciones reales derivables, el Wronskiano de y_1, y_2 se define por

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

El Wronskiano es una función definida en el producto cartesiano de funciones reales continuas y derivables, $\mathcal{F}$ en cierto intervalo I.

$$W: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

B) Teorema: Si $W[y_1, y_2] \neq 0$ entonces las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes.

C) Teorema: Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación diferencial homogénea normal de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

en algún intervalo I de $\mathbb{R}$. Las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes y por lo tanto generan el conjunto solución de la ecuación (3), si y solo si $W[y_1, y_2] \neq 0$.

D) Teorema: (Fórmula de Abel). Sean y_1, y_2 soluciones en algún intervalo I de la ecuación de segundo orden en su forma normal

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Entonces

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int a_1(x)dx}$$

Donde c es una constante apropiada.

La demostración de este teorema usa la definición de Wronskiano y la solución de una ecuación lineal de primer orden como se muestra en Kreider, Kuller y Ostberg (1973, p.81).

Como una aplicación del teorema de Abel resolvamos una ecuación de segundo orden homogéneo conociendo una solución y_1.

Supongamos que y_1 es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Queremos hallar otra solución y_2 de modo que y_1, y_2 sean linealmente independientes.

Por el teorema de Abel

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int a_1(x)dx}$$

Usando la definición de Wronskiano y considerando $c = 1$, se tiene

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{-\int a_1(x)dx}$$

Esta es una ecuación ordinaria lineal de primer orden para y_2. Resolviendo se tiene que

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{(y_1)^2}dx$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Si la ecuación es con coeficientes constantes no hay necesidad de hacer uso del Wronskiano, la solución se obtiene considerando la ecuación cuadrática asociada.

Sea la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

La solución de esta ecuación depende de las raíces de la cuadrática asociada

$$ar^2 + br + c = 0$$

Resumimos la solución en la tabla 1.

Tabla 1.

Solución de una ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

Naturaleza de las raíces	Raíces	Solución de la ecuación con coeficientes constantes de segundo orden
Reales y diferentes	$r_1 \neq r_2$	$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
Una sola raíz real de multiplicidad 2	r	$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 t e^{rx}$
Raíces complejas	$r = \alpha + \beta i, \beta > 0$	$y_h = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Fuente: Elaboración propia.

Luego que ya hemos resuelto la ecuación diferencial homogénea de segundo orden, es decir, tenemos

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

SR

se procede a encontrar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea usando el método variación de parámetros o el método coeficientes indeterminados.

2.3.3. Método variación de parámetros

Dada la ecuación

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

Para resolver esta ecuación consideremos el siguiente procedimiento:

Paso 1: Colocamos la ecuación en su forma normal y reescribimos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

Paso 2: Resolvemos la ecuación homogénea asociada y obtenemos

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Paso 3: A partir de y_h hacemos

$$y_p = c_1y_1 + c_2y_2$$

Donde ahora c_1, c_2 son funciones o parámetros a determinar y verifican el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} \boldsymbol{c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0} \\ \boldsymbol{c_1'y_1' + c_2'y_2' = h(x)} \end{cases}$$

Paso 4: Resolvemos el sistema algebraico usando la regla de Cramer y obtenemos:

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2h(x)}{W[y_1, y_2]}$$

Integrando obtenemos

$$c_1 = \int \frac{-y_2 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$

Similarmente,

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & h(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 h(x)}{W[y_1, y_2]}$$

Integrando se tiene,

$$c_2 = \int \frac{y_1 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$

Con esto hemos obtenido

$$y_p = \left(\int \frac{-y_2 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx\right) y_2$$

Finalmente, la solución general de la ecuación de segundo orden no homogénea es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \left(\int \frac{-y_2 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 h(x)}{W[y_1, y_2]} dx\right) y_2$$

Donde c_1, c_2 son constantes. En el anexo 1 presentamos ejemplos.

2.3.4. Coeficientes Indeterminados

El método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular de una ecuación diferencial no homogénea lineal no se puede aplicar a cualquier ecuación, se deben cumplir las siguientes dos condiciones.

1) La ecuación homogénea debe ser con coeficientes constantes.
2) La función $h(x)$ debe admitir un aniquilador A, es decir, un operador con coeficientes constantes lineal tal que $A(h(x)) = 0$

Así por ejemplo, el anulador de $\cos x$, $\sin x$ es el operador $D^2 + 1$, pues:

$$(D^2 + 1)(\cos x) = D^2(\cos x) + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$$

Funciones que aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n con coeficientes constantes admiten un aniquilador: Polinomios, la función exponencial e^{rx}, donde r es una raíz real del polinomio asociado a la ecuación diferencial, la función $x^{k-1}e^{rx}$, donde donde r es una raíz real de multiplicidad k. Demos el procedimiento del método como lo hace Kreider et al. (1973)

Dada la ecuación de la forma

$$\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y}_{L(y)} = h(x)$$

Paso 1. Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Obtenemos

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n, \text{ con } c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ constantes.}$$

Paso 2. Identificamos el anudador A de $h(x)$

Paso 3. Aplicamos el anulador en la ecuación diferencial dada y se obtiene una ecuación diferencial con coeficientes constantes homogénea

$$AL(y) = 0$$

Resolviendo se tiene

$$\check{y}_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

Paso 4. Escogemos y_p a partir de $\check{y}_h$ sin considerar las funciones que aparecen en y_h. Es decir y_p es de la forma

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$$

82

Donde $c_1, c_2, \cdots, c_k$ son constantes a determinar reemplazando en

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

En el anexo 2 presentamos ejemplos.

2.3.5. Problema de valor inicial

En esta parte se enuncia un teorema general de existencia, unicidad, sensibilidad y continuidad que se aplica a casi todos los problemas de valor inicial de segundo orden que con seguridad se encontraran al modelar los procesos naturales.

La forma normal para el PVI de segundo orden es

$$y'' = F(t, y, y'), \;\; y(t_0) = y_0, \;\; y'(t_0) = v_0$$

Una función $y(t)$ definida en un intervalo I que contiene a t_0 es una solución del PVI si y es una función continuamente diferenciable dos veces en $t \in I$ y satisface la ecuación. A medida que t recorre I, el punto $(t, y(t), y'(t))$ describe una curva en el espacio tyy' denominada curva de tiempo-estado. Los datos del PVI son la función F y los valores iniciales y_0, v_0.

Teorema. (Teorema fundamental para las EDO de segundo orden) supóngase que $F, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y\prime}$ son continuas en una caja cerrada B en el espacio t, y, y' y que el punto (t_0, y_0, v_0) está dentro de B, entonces el *PVI*

$$y'' = F(t, y, y'), \;\; y(t_0) = y_0, \;\; y'(t_0) = v_0$$

Tiene una solución única en el intervalo I que contiene a t_0.

2.3.6. Sistema Mecánico Masa-resorte

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes tienen aplicaciones básicas en la ingeniería. Consideraremos una importante aplicación de la mecánica (una masa que oscila en un resorte elástico).

Consideremos dos leyes importantes en los que se fundamenta el sistema mecánico masa-resorte.

2.3.7. Ley de Hooke.

Suponga que un resorte flexible está suspendido verticalmente de un soporte rígido y después una masa m se sujeta a su extremo libre. La cantidad de estiramiento o elongación del resorte dependerá, por supuesto, de la masa; las masas con diferentes pesos estiran el resorte en diferentes cantidades. De acuerdo con la ley de Hooke, el propio resorte ejerce una fuerza de recuperación F que es contraria a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación s. Es decir

$$F = -ks$$

2.3.8. Segunda ley de Newton.

Después que una masa m se anexa a un resorte, estira el resorte por una cantidad s y alcanza una posición de equilibrio en la cual su peso W se balancea por la fuerza de recuperación ks. Sabiendo que el peso está definido por $W = mg$, donde la masa se mide en slugs, kilogramos o gramos y g es la aceleración de la gravedad. La condición de equilibrio significa $mg = ks$ o $mg - ks = 0$.

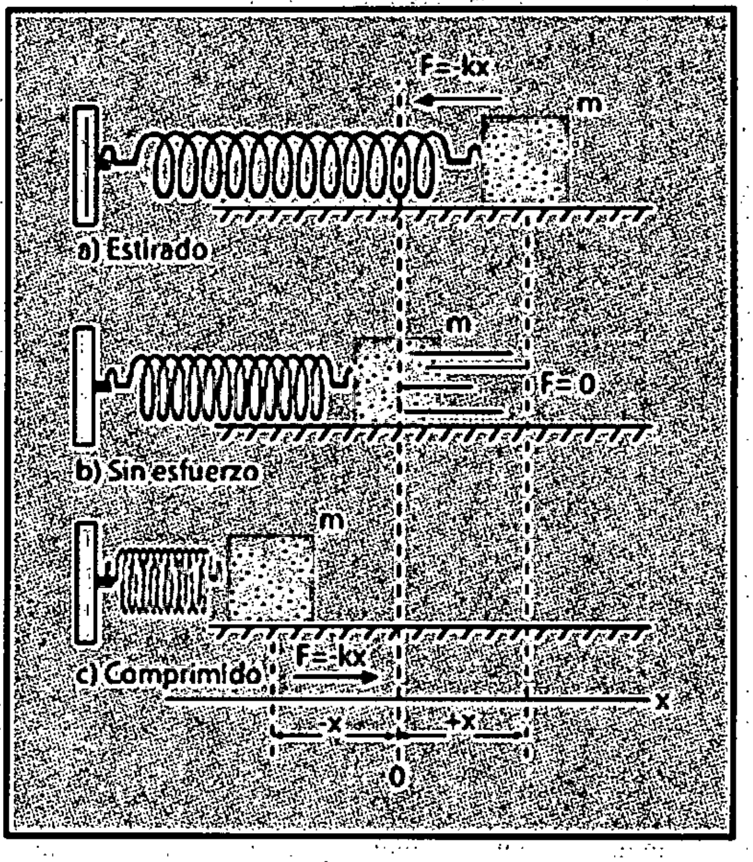

Figura 2.
Sistema masa-resorte
Fuente: Imágenes Google

2.3.9. Sistema masa-resorte

Se toma un resorte ordinario, que resista tanto la compresión como la extensión, y se suspende verticalmente de un soporte fijo. En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa m. Se supone que m es tan grande que puede despreciarse la masa del resorte.

Si el cuerpo se tira hacia abajo cierta distancia y luego se suelta experimenta un movimiento. Se supone que el cuerpo se mueve únicamente en sentido vertical. Se desea determinar el movimiento de este sistema mecánico. Para ello se consideran las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento, esto llevará a una ecuación diferencial, de cuya solución $y(t)$ se obtendrá el desplazamiento de la masa como una función del tiempo t. Se elige la dirección hacia abajo como la positiva y la negativa en dirección contraria.

La fuerza más evidente que actúa sobre el cuerpo es la atracción de la gravedad

$$F_1 = mg$$

Donde m es la masa del cuerpo y g es la aceleración de la gravedad.

Se considera también la fuerza del resorte F_2 que actúa sobre el cuerpo

$$F_2 = -ks$$

Que no es otra cosa que la ley de Hooke, donde s es el desplazamiento vertical del cuerpo y a la constante k se le llama módulo del resorte.

Si $s = 1$, entonces $F_2 = -k$, entre mas rígido sea el resorte mayor será el valor de k.

Cuando el cuerpo está en reposo (sin movimiento) la fuerza gravitacional y la fuerza del resorte están en equilibrio siendo su resultante la fuerza cero.

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0$$

Donde s_0 es el estiramiento del resorte que corresponde a esta posición, la cual recibe el nombre de posición de equilibrio estático.

Se denota por $y(t)$ al desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio estático $(y = 0)$ con la dirección positiva hacia abajo, este desplazamiento produce una fuerza adicional $-ky$ sobre el cuerpo. Por la ley de Hooke

$$F_1 + F_2 - ky = -ky \qquad (4)$$

SR

2.3.10. Sistema no amortiguado

Si el sistema del amortiguamiento es tan pequeño que puede despreciarse entonces (4) es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

$$my'' = -ky$$

Es decir, tenemos la ecuación

$$my'' + ky = 0$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes de las más sencillas,

$$y'' + w_0^2 y = 0$$

cuya solución es

$$y(t) = A\cos w_0 t + B\,\mathrm{sen}\, w_0 t, \qquad w_0 = \sqrt{k/m}$$

Al movimiento correspondiente se le llama oscilación armónica.

Para analizar el movimiento descrito por la solución escogemos constantes C, w de modo que la solución se puede expresar como

$$y(t) = C\cos(w_0 t - \alpha), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan\alpha = \frac{B}{A}$$

2.3.11. Sistema amortiguado

Si la masa se conecta a un amortiguador entonces es necesario tomar en cuenta el medio viscoso de amortiguamiento correspondiente. La fuerza de amortiguamiento correspondiente tiene dirección opuesta al movimiento instantáneo y se supone que es proporcional a la velocidad del cuerpo, es decir

$$F_3 = -\delta y'$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - \delta y'$$

Por tanto por la segunda ley de Newton

$$my'' = -ky - \delta y'$$

Es decir, se tiene la ecuación

$$my'' + \delta y' + ky = 0$$

Las raíces del polinomio asociado son

$$r = -\frac{\delta}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{\delta^2 - 4mk}$$

Es decir

$$r_1 = -\alpha + \beta, \quad r_2 = -\alpha - \beta, \quad \alpha = \frac{\delta}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{\delta^2 - 4mk}$$

Se tienen los siguientes casos

i) Si $\delta^2 - 4mk > 0$, las raíces son reales y diferentes: r_1 y r_2. En este caso se tiene un sobre amortiguamiento.
La solución de la ecuación es de la forma

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

En este caso el cuerpo no oscila pues los exponentes de las exponenciales son ambos negativos. En el infinito $y(t)$ tiende a cero. En lenguaje de representación natural se expresa del siguiente modo: "En un tiempo suficientemente largo, la masa estará en reposo en la posición de equilibrio".

En lenguaje de Representación gráfica se tiene en figura 3.

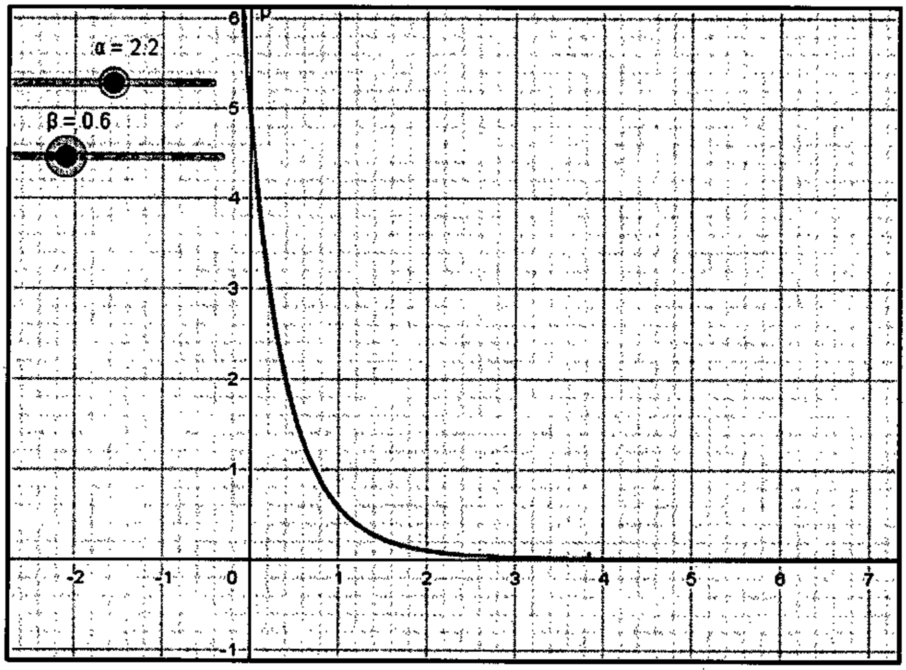

Figura 3. Sistema sobre amortiguado. Elaboración propia usando el software GeoGebra.

ii) Si $\delta^2 - 4mk = 0$, se tiene una raíz doble, $r = -\alpha$, en este caso se tiene un amortiguamiento crítico.

La solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

Puesto que la función exponencial nunca es cero, y $c_1 + c_2 t$ puede tener a lo mas un cero positivo, se tiene que la función $y(t)$ puede interceptar el eje t a lo más una vez y luego volver a la posición de equilibrio $y = 0$.

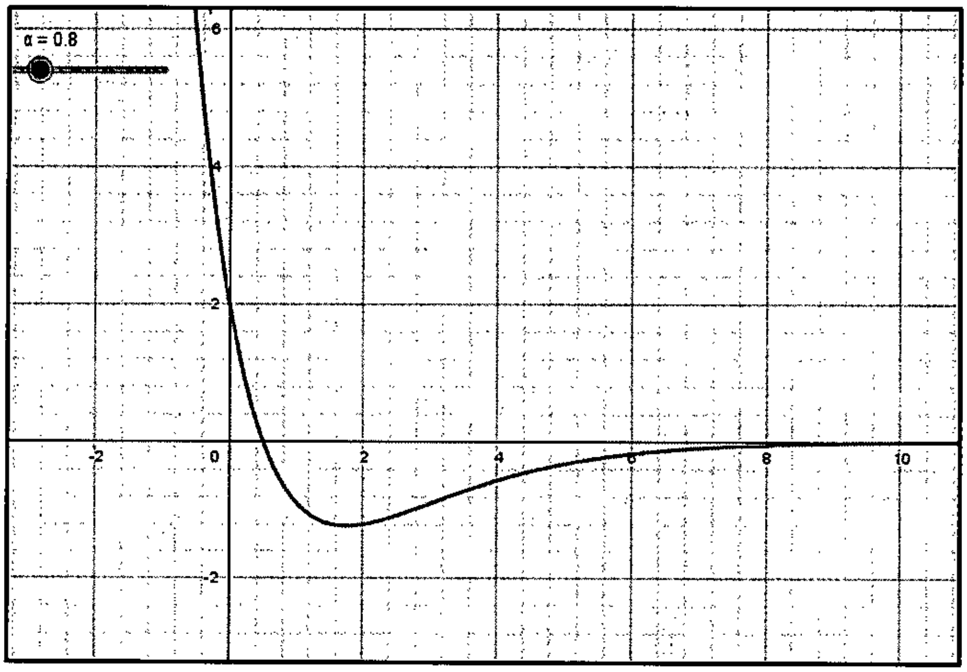

Figura 4. Sistema amortiguado crítico. Elaboración propia usando el software GeoGebra.

iii) Si $\delta^2 - 4mk < 0$, se tienen raíces complejas. En este caso se tiene un sub amortiguamiento. Sean las raíces complejas

$$r_1 = -\alpha + iw, \quad r_2 = -\alpha - iw, \quad w = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \delta^2} > 0, \alpha = \frac{\delta}{2m}$$

La solución general de la ecuación es de la forma

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos wt + B\sin wt) = Ce^{-\alpha t}\cos(wt - \varphi)$$

Donde $C^2 = A^2 + B^2, \ \tan\varphi = \frac{B}{A}$.

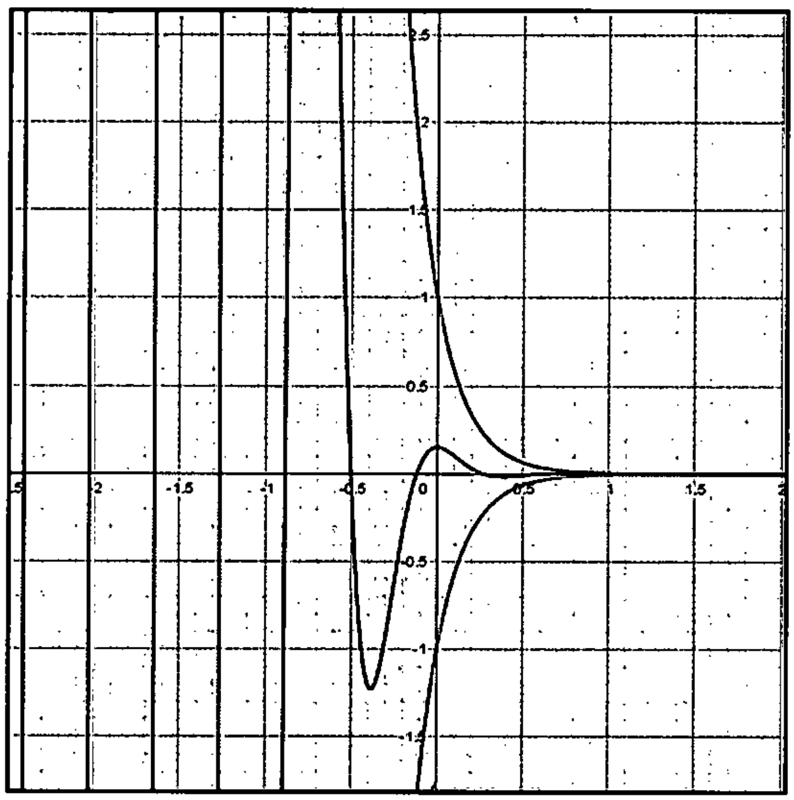

Figura 5. Sistema sub amortiguado. Elaboración propia usando el software GeoGebra.

2.3.12. Oscilaciones forzadas: Resonancia

Los movimientos libres del sistema masa-resorte son movimientos en ausencia de fuerzas externas y como hemos visto están gobernados por una ecuación de la forma

$$my'' + \delta y' + ky = 0$$

Donde, y es el desplazamiento del cuerpo a partir del reposo, m es la masa del cuerpo, my'' es la fuerza de inercia, $\delta y'$ la fuerza de amortiguamiento y ky la fuerza del resorte. Los movimientos forzados se obtienen si se hace que una fuerza externa $f(t)$ actúe sobre el cuerpo. Obteniéndose así la siguiente ecuación diferencial no homogénea

$$my'' + \delta y' + ky = f(t)$$

A $f(t)$ se le conoce como la fuerza de entrada o impulsora y a una solución correspondiente se la llama salida o respuesta del sistema a la fuerza impulsora.

De particular interés son las entradas periódicas en la que se considera una fuerza senoidal, es decir,

$$f(t) = F_0 \cos wt, \quad F_0 > 0, w > 0$$

Tenemos entonces la ecuación no homogénea

$$my'' + \delta y' + ky = F_0 \cos wt$$

Como sabemos la solución de esta ecuación es de la forma

$$y = y_h + y_p$$

Donde y_p es una solución particular. Descartando que wi sea raíz del polinomio de la ecuación homogénea asociada y usando el método coeficientes indeterminados se tiene,

$$y_p = A \cos wt + B \sin wt$$

Derivando y reemplazando en la ecuación se tiene los coeficientes A y B como lo muestra Kreiszig (2002, p.137).

$$A = F_0 \frac{k - mw^2}{(k - mw^2)^2 + w^2\delta^2}, \qquad B = F_0 \frac{w\delta}{(k - mw^2)^2 + w^2\delta^2}$$

Siempre y cuando el denominador sea diferente de cero.

Haciendo $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} (> 0)$ se tiene la siguiente expresión

$$A = F_0 \frac{m(w_0^2 - w^2)}{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\delta^2}, \quad B = F_0 \frac{w\delta}{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\delta^2}$$

Discusión de los tipos de soluciones

i) Sin amortiguamiento: Si $\delta = 0$. Supongamos primero que $w_0^2 \neq w^2$, entonces se tiene

$$y_p = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos wt$$

Luego, la solución general del sistema es

$$y = C\cos(w_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos wt$$

Esta salida representa una superposición de dos oscilaciones armónicas: La del movimiento libre no amortiguado y la frecuencia de la entrada o fuerza impulsora.

La amplitud máxima de y_p es

$$A_0 = \frac{F_0}{k}\rho,$$

Donde

$$\rho = \frac{1}{1 - (w/w_0)^2}$$

A_0 depende de w y w_0. Si $w \to w_0$ entonces ρ y A_0 tienden al infinito, este fenómeno se conoce como resonancia y es de importancia fundamental en el estudio de los sistemas vibratorios. En el caso de resonancia la ecuación diferencial es de la forma

$$y'' + w_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos w_0 t$$

La solución particular es de la forma

$$y_p = t(A\cos w_0 t + B\sin w_0 t)$$

Hallando los valores de A y B se tiene

$$y_p = \frac{F_0}{2mw_0} t \sin w_0 t$$

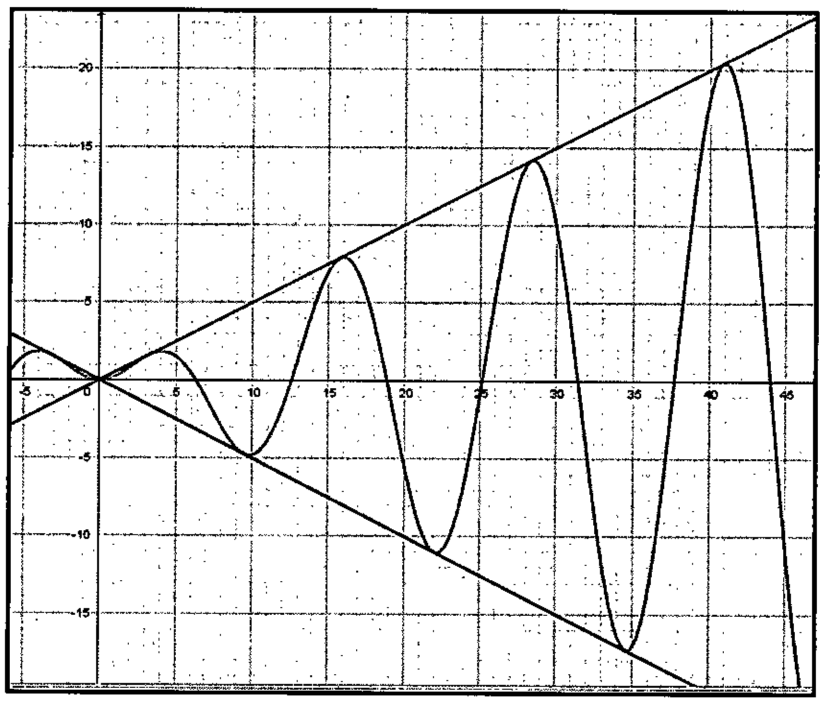

Figura 6. Sistema de oscilación forzada sin amortiguamiento. Elaboración propia usando el software GeoGebra

En el figura 6 se ve que y_p se hace cada vez más grande. "Esto significa que los sistemas con poco amortiguamiento pueden sufrir vibraciones considerables que pueden destruir el sistema" (Kreyszig, 2002, p. 139). Otro tipo de oscilación es cuando w está próxima a w_0.

ii) Oscilaciones forzadas amortiguadas. Si hay amortiguamiento, entonces $\delta > 0$. En este caso tenemos la ecuación

$$my'' + \delta y' + ky = F_0 \cos wt$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = e^{-\alpha t}(A \cos w^* t + B \sin w^* t)$$

Esta solución tiende a cero cuando t tiende al infinito. La solución general representa la solución transitoria y tiende a la solución de estado estacionario y_p. "Después de un tiempo suficientemente grande, la salida que corresponde a una entrada senoidal pura será prácticamente una oscilación armónica cuya frecuencia es la salida de la entrada. Esto es lo que ocurre en la práctica, ya que ningún sistema físico es por completo no amortiguado" (Kreyszig, 2002, p. 140).

Amplitud de y_p

Para estudiar la amplitud de y_p como una función de w, se escribe y_p en la forma

$$y_p = C^* \cos(wt - \vartheta)$$

Donde

$$C^*(w) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\delta^2}}$$

$$\tan\vartheta = \frac{b}{a} = \frac{w\delta}{m(w_0^2 - w^2)}$$

Determinando el máximo de $C^*(w)$ se tiene

$$\left(-2m^2(w_0^2 - w^2) \quad + \delta^2\right)w = 0$$

De donde obtenemos que

$$\delta^2 = 2m^2(w_0^2 - w^2) \qquad (3)$$

Para un amortiguamiento suficientemente grande ($\delta^2 > 2m^2w_0^2 = 2mk$) la ecuación (3) no tiene solución real, y C^* se decrece de manera monótona conforme w se incrementa. Si $\delta^2 \leq 2mk$ la ecuación (3) tiene una solución real $w = w_{max}$ que se incrementa conforme δ se decrece y tiende a w_0 cuando δ tiende a cero. Se tiene

SR

$$C^*(w_{max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2w_0^2 - \delta^2}}$$

2.3.13. Sistemas masa-resorte con sistemas de ecuaciones

A) Un arreglo horizontal de 3 resortes y 2 masas

Suponga que se tienen dos masas puntuales m_1, m_2 y tres resortes de longitudes L_1, L_2, L_3 con constantes de resortes k_1, k_2, k_3

El resorte 1 y el resorte 3 están fijos a superficies inamovibles. Las masas están en contacto con una superficie cuyo coeficiente de fricción (constante de amortiguamiento) es δ. Se supone que la masa de los resortes es despreciable, la fricción no afecta a los resortes, la ley de Hooke se aplica a los resortes, el movimiento es solo horizontal y la resistencia es proporcional a la velocidad.

Considerando que la configuración está en reposo. Sean l_1, l_2, l_3 las longitudes de los resortes cuando el sistema está en reposo (ver figura 7). Sea x la distancia de la masa m_1 desde su posición de equilibrio, y la distancia de la masa m_2 desde su posición de equilibrio.

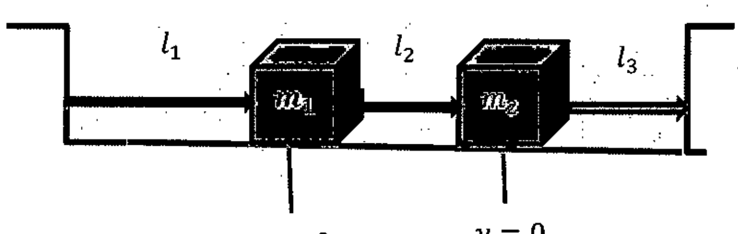

Figura 7.

Sistema masa resorte de dos masas y tres resortes.

Las diferencias entre la longitud de un resorte en reposo y su longitud medida es

$$\Delta L_1 = l_1 - L_1$$

$$\Delta L_2 = l_2 - L_2$$

$$\Delta L_3 = l_3 - L_3$$

Luego usamos la ley de Newton para describir el movimiento de las masas m_1, m_2. Sea F_{R_i} la fuerza total sobre la masa m_i, entonces

$$F_{R_1} = \begin{bmatrix} \text{Fuerza del} \\ \text{resorte 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Fuerza del} \\ \text{resorte 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Resistencia} \\ \text{sobre m}_1 \end{bmatrix}$$

Y

$$F_{R_2} = \begin{bmatrix} \text{Fuerza del} \\ \text{resorte 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Fuerza del} \\ \text{resorte 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Resistencia} \\ \text{sobre m}_2 \end{bmatrix}$$

Las longitudes de los tres resortes son

Resorte 1: $L_1 + \Delta L_1 + x = l_1 + x$

Resorte 2: $L_2 + \Delta L_2 + y - x = l_2 + y - x$

Resorte 3: $L_3 + \Delta L_3 - y = l_3 - y$

Entonces $\Delta L_1 + x, \Delta L_2 + y - x, \Delta L_3 - y$ miden la cantidad de alargamiento o compresión de cada resorte. Considerando que el resorte 2 ejerce una fuerza igual pero opuesta tanto sobre m_1 como sobre m_2 y que la fuerza ejercida por un resorte es proporcional a la cantidad en que difiere su longitud de la longitud de reposo, se obtiene el siguiente sistema como lo muestra Campebell (1997, p.381).

$$(m_1 x')' = -k_1(\Delta L_1 + x) + k_2(\Delta L_2 + y - x) - \delta x'$$

$$(m_2 y')' = -k_2(\Delta L_2 + y - x) + k_3(\Delta L_3 - y) - \delta y'$$

Como l_1, l_2, l_3 son las longitudes de los resortes en reposo, las fuerzas de los resortes se deben balancear en estas longitudes. Entonces,

$$k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 = k_3 \Delta L_3$$

Con esto se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden

$$m_1 x'' + \delta x' + (k_1 + k_2)x - k_2 y = 0$$

$$m_2 y'' + \delta y' + (k_2 + k_3)y - k_2 x = 0$$

Si las fuerzas externas $f_1(t), f_2(t)$ actúan horizontalmente sobre las masas m_1, m_2 se tiene el sistema no homogéneo

$$m_1 x'' + \delta x' + (k_1 + k_2)x - k_2 y = f_1(t)$$

$$m_2 y'' + \delta y' + (k_2 + k_3)y - k_2 x = f_2(t)$$

B) Sistema de 3 masas y cuatro resortes

Consideremos el sistema que se muestra a continuación:

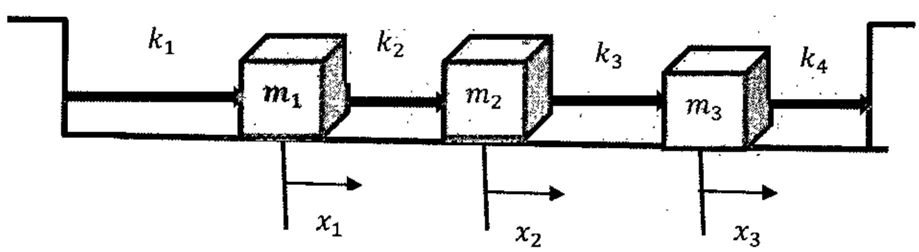

Figura 8.
Sistema mecánico masa-resorte. Tres masas unidas por cuatro resortes hacia dos paredes laterales.

La figura N° 8 muestra tres masas conectados uno a otro y a dos paredes por cuatro resortes. Asumiremos que las masas son libres de fricción y que cada resorte obedece a la ley de Hooke- su extensión o compresión x y fuerza F de reacción están relacionados por la fórmula $F = -kx$. Si los desplazamientos a la derecha x_1, x_2 y x_3 de las tres masas (de su respectiva posición de equilibrio) son todos positivos, entonces

El primer resorte es estirado a distancia x_1

El segundo resorte es estirado a distancia $x_2 - x_1$

El tercer resorte es estirado a distancia $x_3 - x_2$

El cuarto resorte es comprimido a distancia x_3

Aplicando la ley de Newton $F = ma$ a las tres masas nos lleva a las ecuaciones de movimiento

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + \qquad + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2)$$

$$m_3 x_3'' = -k_3(x_3 - x_2) - k_4 x_3$$

Expresando el sistema en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Luego es sistema toma la forma

$$MX'' = KX$$

C) Sistema de n masas y $n + 1$ resortes

Consideremos una generalización del sistema masa- resorte teniendo n masas y $n + 1$ resortes como se muestra en la figura 9. En el anexo 4 se tiene un ejemplo.

SP

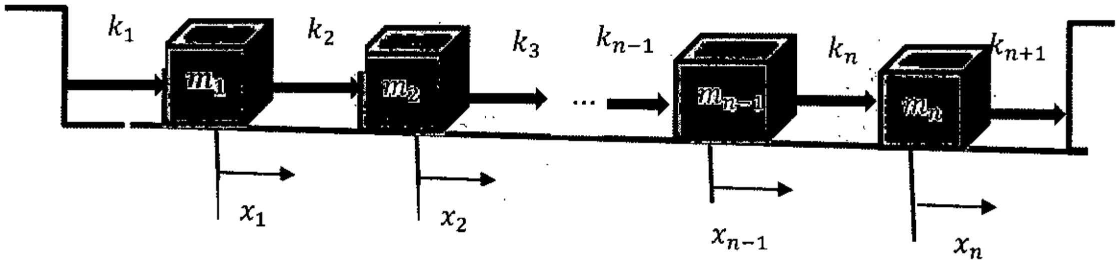

Figura 9.
Sistema mecánico masa-resorte de n masas unidas por $n+1$ resortes hacia dos paredes laterales.

El sistema masa resorte se puede representar a través del siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

$$m_1x_1'' + \delta_1x_1' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_ix_i'' + \delta_ix_i' + (k_2 + k_{i+1})x_i - k_ix_{i-1} - k_{i-1}x_{i-1} = 0, \;\; i = 2, \cdots, n-1$$

$$m_nx_n'' + \delta_nx_n' + (k_n + k_{n+1})x_n - k_nx_{n-1} = 0$$

Si despreciamos la fricción se tiene el sistema

$$m_1x_1'' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_ix_i'' + (k_2 + k_{i+1})x_i - k_ix_{i-1} - k_{i-1}x_{i-1} = 0, \;\; i = 2, \cdots, n-1$$

$$m_nx_n'' + (k_n + k_{n+1})x_n - k_nx_{n-1} = 0$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial haciendo

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1}+k_n) & k_n \\ 0 & 0 & & k_n & -(k_n+k_{n+1}) \end{pmatrix}$$

La matriz M es obviamente no singular, para conseguir la inversa, reemplazamos cada elemento en la diagonal por su recíproco. Aplicando la inversa en cada lado de la ecuación se tiene el sistema homogéneo

$$X'' = AX$$

Donde $A = M^{-1}K$.

Como nuestro sistema mecánico masa resorte involucra un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, veamos cómo resolverlos.

2.3.14. Solución de sistemas de segundo orden

A) Sistema homogéneo de segundo orden lineal

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden homogéneo es de la forma

$$X'' = AX$$

Donde A es una matriz de orden $n \times n$.

El sistema mecánico de dos masas y dos resortes es un sistema de la forma

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m_2x_2 = k_2x_1 - k_2x_2 \end{cases} \tag{5}$$

Que se puede escribir en forma matricial como

$$MX'' = KX$$

Donde

$$M=\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K=\begin{pmatrix} -k_1-k_2 & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como M es inversible, aplicando la inversa $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}$, el sistema toma la forma:

$$X''=M^{-1}KX$$

Es decir

$$X''=\begin{pmatrix} -\dfrac{k_1}{m_1}-\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}X$$

B) Solución de un sistema homogéneo de segundo orden

Un sistema de la forma $X''=AX$ se puede resolver de dos formas

i) Reduciendo el sistema de segundo orden a un sistema de primer orden. Obteniendo

$$\begin{cases} x_1'=x_3 \\ x_2'=x_4 \\ x_3'=\left(-\dfrac{k_1}{m_1}-\dfrac{k_2}{m_2}\right)x_1+\dfrac{k_2}{m_1}x_2 \\ x_4'=\dfrac{k_2}{m_2}x_1-\dfrac{k_2}{m_2}x_2 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo de la forma $X'=AX$ que puede resolverse determinando los valores y vectores propios de la matriz de los coeficientes

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1}-\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema expresa el estado completo del sistema físico: las posiciones de las masas en relación con las de equilibrio x_1, x_2 y también sus velocidades x_3, x_4 en el tiempo t.

ii) La otra forma de resolver el sistema (5) es considerar que las soluciones de valor real del sistema tienen la forma.

$$X = V\cos\omega t \quad y \quad X = V\operatorname{sen}\omega t$$

Donde V es un vector columna de constantes. Sustituyendo cualesquiera de estas soluciones en $X'' = Ax$ se obtiene, $(A+\omega^2)V = 0$. Lo que implica que $\lambda = -\omega^2$ es valor propio de la matriz A y V es el vector propio correspondiente a $\lambda = -\omega^2$.

Por lo tanto $X(t) = V\cos\omega t$ es una solución de $X'' = AX$ si y solamente si $\lambda = -\omega^2$ un valor propio de la matriz A, y V es su vector propio correspondiente.

Si $X'' = AX$ modela un sistema mecánico, entonces es típico que los valores propios de A sean números reales negativos. La solución general es de la forma

$$X = c_1V_1\cos\omega_1 t + c_2V_1\operatorname{sen}\omega_1 t + c_3V_2\cos\omega_2 t + c_4V_2\operatorname{sen}\omega_2 t$$

Donde V_1, V_2 son los vectores propios reales de la matriz A correspondientes a λ_1, λ_2.

Si la matriz A de orden $n\times n$ tiene distintos valores propios negativos $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \cdots, -\omega_n^2$ con vectores propios reales asociados $V_1, V_2, \cdots, V_n$, entonces la solución general de $X'' = AX$ es de la forma

SR

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos \omega_i t + b_i \operatorname{sen} \omega_i t) V_i$$

Con a_i, b_i constantes arbitrarias.

III. Hipótesis y variables

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

Se puede construir un modelo matemático para la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden

3.1.2. Hipótesis específicas

a) Los sistemas de ecuaciones de segundo orden nos permiten modelar sistemas mecánicos masa resorte.

b) La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos es similar a un sistema masa-resorte.

3.2. Operacionalización de hipótesis

3.2.1. Hipótesis de investigación

H1: Se puede modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones de segundo orden.

3.2.2. Hipótesis nula

Ho: No se puede modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones de segundo orden

3.3. Operacionalización de variables

3.3.1. Definición conceptual

a) Variable independiente: Modelamiento matemático.

Proceso mediante el cual un fenómeno o proceso natural se puede representar, analizar e interpretar usando el lenguaje matemático.

b) Variable Dependiente

Acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos:

La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos se comparará con un sistema masa-resorte.

3.3.2. Operacionalización de la variable dependiente

Variable Dependiente	dimensiones	Indicadores
Acción de los terremotos	Sistema movimiento libre no amortiguado	Formulación, resolución e interpretación.
	Sistema movimiento forzado no amortiguado	

La Variable independiente, Modelamiento matemático, no la dimensionamos, usamos los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden para modelar un sistema mecánico masa-resorte el cual nos permite modelar la acción de un terremoto sobre los edificios.

IV. Metodología de la investigación

4.1. Tipo y diseño de la investigación

Es una investigación básica, no experimental, descriptiva y exploratoria; tratamos un problema práctico. Con un margen de generalización limitado.

4.2. Población y muestra

Se trata de una investigación básica que hace uso de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden y los métodos de solución. El modelamiento matemático de la acción de los terremotos lo haremos comenzando con un modelo para un edificio de dos pisos, para luego modelar uno de diez pisos y luego generalizamos nuestro modelo para un edificio de n pisos. De esta manera estamos aportando al conocimiento científico desde un punto de vista teórico.

4.3. Técnica e instrumentos para la recolección de información

Los datos pueden ser manejados por el investigador: por ejemplo la masa de un edificio de 1 piso es m= 5,000 kg, con constante de restitución $k = 10{,}000\ kg/s^2$.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

En nuestro caso de la bibliografía revisada hemos obtenido los datos para la construcción del modelo.

4.5. Análisis y procesamiento de datos

Haciendo uso del método deductivo hemos énfasis en la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden y en los modelos mecánicos masa resorte su explicación y abstracción.

Haciendo uso del método inductivo analizaremos un modelo para un edificio de 10 pisos, cuyos resultados serán tomados para extraer conclusiones de carácter general, de ese modo haremos una generalización para edificios de n pisos.

Para el análisis y procesamiento de datos se ha usado el software Mathcad, Geogebra y el Excel.

V. Resultados

Como lo expresa Gilber N. Lewis en el texto (Zill, 2002, pág. 406) los terremotos de gran magnitud tiene un efecto devastador. En la actualidad estamos siendo testigos de diferentes movimientos telúricos que causan zozobra en nuestra sociedad. Dichos temores podrían menguar si tenemos un conocimiento real del suceso desde el punto de vista matemático. La construcción del modelo se puede hacer en base a los siguientes supuestos:

1. El efecto que produce un terremoto sobre los edificios de varios pisos se puede modelar como un sistema mecánico masa –resorte, el que a su vez se modela haciendo uso de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.
2. Como se muestra en la figura 1 supondremos que el i-ésimo piso de un edificio tiene masa m_i y que los pisos adyacentes están unidos por un conector elástico, cuya acción se parece a la de un resorte. En el caso normal, los elementos estructurales de los grandes edificios son de acero, que es un material muy elástico. Cada unión suministra una fuerza de restitución cuando los pisos se desplazan entre sí. Supondremos que es válida la ley de Hooke, cuando la constante de proporcionalidad es k_i, entre los pisos iésimo e $(i+1)$-ésimo. Es decir, la fuerza de restitución entre esos dos pisos es

   $$F = k_i(x_{i+1} - x_i)$$

   Donde x_i representa el desplazamiento horizontal del i-ésimo piso, respecto del equilibrio, y $x_{i+1} - x_i$ es el desplazamiento del $(i+1)$-ésimo, en relación con el e i-ésimo piso (ver figura 10).

3. También supondremos que hay una relación similar entre el primer piso y el suelo, y que su constante de proporcionalidad es k_0.

SR

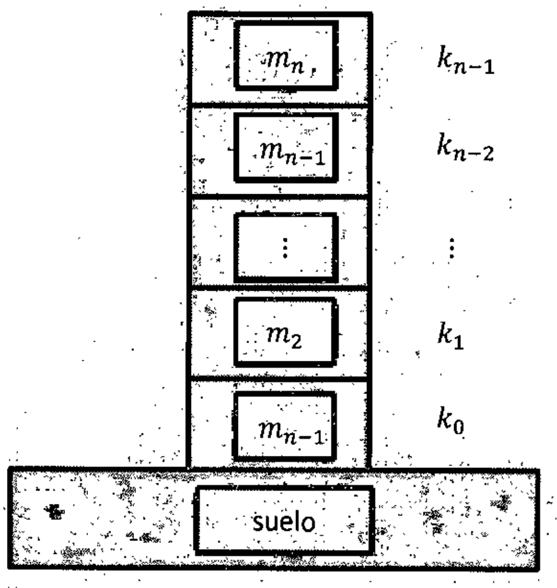

Figura 10.
Edificio de n pisos

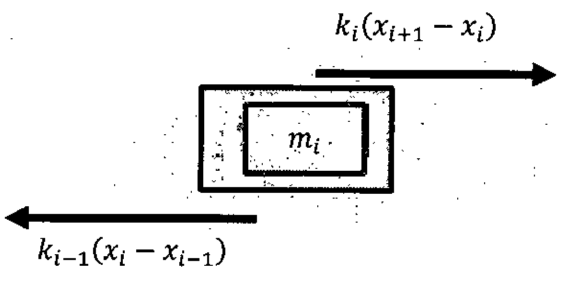

Figura 11.
Fuerzas que actúan sobre el i-ésimo piso.

5.1. Construcción del modelo no forzado

Aplicando la segunda ley de Newton a cada piso del edificio se tiene el sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \vdots \\ m_n x_n'' = -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases} \tag{6}$$

Para $n = 1$ tenemos el modelo para un edificio de un solo piso

$$m_1x_1'' = -k_0x_1$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden homogéneo de las más sencillas.

5.1.1. Construcción del modelo de 2 pisos.

Para $n = 2$ tenemos el modelo para un edificio de dos pisos

$$m_1x_1'' = -k_0x_1 + k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_2x_2'' = -k_1(x_2 - x_1)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones de segundo orden.

5.1.2. Construcción del modelo de 3 pisos

Para $n = 3$ tenemos el modelo para un edificio de 3 pisos

$$m_1x_1'' = -k_0x_1 + k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_2x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2)$$

$$m_3x_3'' = -k_2(x_3 - x_2)$$

5.1.3. Solución e interpretación del modelo para 2 pisos

Por ejemplo consideremos un edificio de dos pisos, cada uno con masa $5{,}000\ kg$ y con constante de restitución $k = 10{,}000 kg/s^2$. En este caso se tiene el sistema de ecuaciones

$$5{,}000x_1'' = -10{,}000x_1 + 10{,}000(x_2 - x_1)$$

$$5{,}000x_2'' = -10{,}000(x_2 - x_1)$$

Simplificando

$$x_1'' = -4x_1 + 2x_2$$

$$x_2'' = 2x_1 - 2x_2$$

Para resolver este sistema lo convertimos a un sistema de primer orden lineal.

Hacemos

$$x_1' = x_3$$

$$x_2' = x_4$$

Luego

$$x_3' = x_1''$$

$$x_4' = x_2''$$

Así obtenemos el sistema equivalente de primer orden

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -\left(\dfrac{k_0}{m_1} + \dfrac{k_1}{m_1}\right) + \dfrac{k_1}{m_1} x_2 \\ x_4' = \dfrac{k_1}{m_2} x_1 - \dfrac{k_1}{m_2} x_2 \end{cases} \tag{7}$$

Este sistema se resuelve usando el método de los auto valores y auto vectores, siendo la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_0}{m_1} - \dfrac{k_1}{m_1} & \dfrac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_1}{m_2} & -\dfrac{k_1}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para un edificio de 2 pisos se tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando valores propios y vectores propios de la matriz podemos resolver este sistema y hallar la solución correspondiente.

Resolvemos el modelo de dos pisos usando el sistema de segundo orden

$$x_1'' = -4x_1 + 2x_2$$

$$x_2'' = 2x_1 - 2x_2$$

Usando valores propios y vectores propios.

La matriz de los coeficientes es

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$, equivalentemente, usando el software Mathcad se tiene

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.236 \\ -0.764 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios correspondientes son:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0.851 \\ -0.526 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.851 \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$X = c_1 V_1 \cos \omega_1 t + c_2 V_1 \sin \omega_1 t + c_3 V_2 \cos \omega_2 t + c_4 V_2 \sin \omega_2 t$$

Es decir

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 0.851 \\ -0.526 \end{pmatrix} \cos(2.288t) + c_2 \begin{pmatrix} 0.851 \\ -0.526 \end{pmatrix} \sin(2.288t) + c_3 \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.851 \end{pmatrix} \cos(2.746t) + c_4 \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.851 \end{pmatrix} \sin(2.746t)$$

Luego, $x_1(t) = c_1(0.851)\cos(2.288t) + c_2(0.851)\sin(2.288t) + c_3(0.526)\cos(2.746t) + c_4(0.526)\sin(2.746t)$

$$x_2(t) = -c_1(0.526)\cos(2.288t) \\ - c_2(0.526)\sin(2.288t) + c_3(0.851)\cos(2.746t) \\ + c_4(0.851)\sin(2.746t)$$

Usemos el software Geogebra para graficar $x_1(t)$ para diferentes valores de c_1, c_2, c_3, c_4.

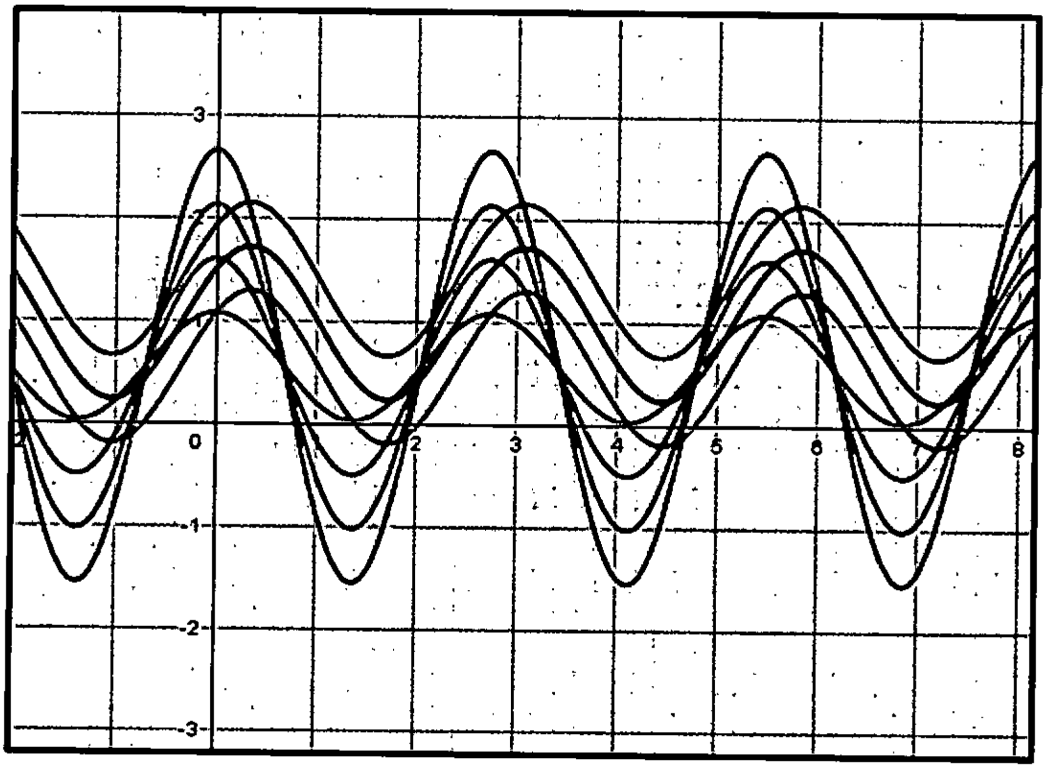

Figura 12: Modelo para 2 pisos.

Gráfica de $x_1(t) = c_1(0.851)\cos(2.288t) + c_2(0.851)\sin(2.288t) + c_3(0.526)\cos(2.746t) + c_4(0.526)\sin(2.746t)$ para diferentes valores de c_1, c_2, c_3 y c_4, generado con el software Geogebra.

De la gráfica 12 se observa que el sistema no forzado se mantiene estable.

5.2. Forma matricial del modelo no forzado

El sistema en (6) se puede expresar en forma matricial

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & m_n\end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} -(k_0+k_1) & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ k_1 & -(k_0+k_1) & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & k_2 & -(k_0+k_1) & k_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & k_{n-1}\end{pmatrix}$$

El sistema (6) se puede escribir como

$$MX''=KX \tag{8}$$

A las matrices M y K se les llama matriz de masa y matriz de rigidez del edificio, respectivamente.

La matriz M es inversible con inversa

$$M=\begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2^{-1} & & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & m_n^{-1}\end{pmatrix}$$

Aplicando la matriz inversa en (8) se tiene el sistema

$$X''=AX$$

Donde $A=M^{-1}K$. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneo.

Los valores propios de A indican la estabilidad del edificio durante un terremoto. Son negativos y diferentes. Las frecuencias naturales del edificio son las raíces cuadradas de valores propios, pero negativos. En otras palabras, si λ_i es el i-ésimo valor propio de A, entonces $\omega_i=\sqrt{-\lambda_i}$ es la i-ésima frecuencia.

Durante un terremoto, se aplica una gran fuerza horizontal a la planta baja. Si esta fuerza es de naturaleza oscilatoria, como por ejemplo $F(t) = G\cos\gamma t$ donde G es una matriz columna de constantes, se desarrollarían grandes desplazamientos en el edificio, en especial si la frecuencia γ de la fuerza F se aproxima a una de las fuerzas naturales ω_i del edificio.

5.3. Modelo para un edificio de 10 pisos

Supongamos que tenemos un edificio de 10 pisos, y que cada piso tiene 10,000 kg de masa y el valor de cada k_i es de 5000 kg/s^2.

De los datos se tiene:

$m_i = 10{,}000\ kg$ de masa para todo $i = 1, \dots, 10$

$k_i = 5{,}000\ kg/s^2$ para todo $i = 1, \dots, 10$

Reemplazamos los valores en el modelo se tiene

$$10{,}000x_1'' = 5{,}000x_1 + 5{,}000(x_2 - x_1)$$

Es decir, tenemos la primera ecuación

$$x_1'' = 0.5x_2$$

Similarmente, tenemos la segunda ecuación

$$x_2'' = 0.5x_1 - x_2 + 0.5x_3$$

La tercera ecuación es

$$x_3'' = 0.5x_2 - x_3 + 0.5x_4$$

La décima ecuación es

$$x_{10}'' = 0.5x_9 - 0.5x_{10}$$

Es decir, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1'' = 0.5x_2 \\ x_2'' = 0.5x_1 - x_2 + 0.5x_3 \\ x_3'' = 0.5x_2 - x_3 + 0.5x_4 \\ \qquad \vdots \\ x_{10}'' = 0.5x_9 - 0.5x_{10} \end{cases}$$

En este caso se tiene un sistema de 10×10. Como se muestra en Zill, (2002) La matriz de los coeficientes es

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Usando el software Mathcad calculamos los valores propios de A obteniendo la tabla 2.

Tabla 2:
Valores propios de la matriz A

eigenvals(A) =

	0
0	-0.5
1	-0.267
2	-0.099
3	-0.011
4	-0.777
5	-1.075
6	-1.365
7	-1.623
8	-1.826
9	-1.956

Tabla generada por el software Mathcad

Luego, calculamos los periodos y las frecuencias usando el Excel y obtenemos la siguiente tabla.

Tabla 3:
Periodos y frecuencias del sistema de ecuaciones para un edificio de 10 pisos

λ_i	-1.959	-1.86	-1.623	-1.365	-1.075	-0.777	-0.5	-0.267	-0.099	-0.011
ω_i	1.400	1.364	1.274	1.168	1.037	0.881	0.707	0.517	0.315	0.105
T_i	4.489	4.607	4.932	5.378	6.060	7.128	8.886	12.160	19.969	59.908

Tabla generada con Excel.

En la tabla 3, en el tercer renglón se puede observar que el edificio no parece correr peligro alguno de desarrollar resonancia, durante un terremoto normal, cuyo periodo suele ser de 2 a 3 segundos.

Ahora, en el mismo ejemplo, supongamos que la matriz de rigidez K se multiplica por un factor igual a 10. En este caso la matriz de coeficientes del sistema es

$$A := 10\begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A se muestran en la tabla 4.

Tabla 4

Valores propios de la matriz 10A

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{array}{|c|r|} \hline & 0 \\ \hline 0 & -5 \\ \hline 1 & -2.669 \\ \hline 2 & -0.99 \\ \hline 3 & -0.112 \\ \hline 4 & -7.775 \\ \hline 5 & -10.747 \\ \hline 6 & -13.653 \\ \hline 7 & -16.235 \\ \hline 8 & -18.262 \\ \hline 9 & -19.556 \\ \hline \end{array}$$

Tabla generada por el software Mathcad.

Los periodos y frecuencias correspondientes se presentan en la tabla 6.

Tabla 5:

Periodos y Frecuencias de la matriz 10A

λ_i	-19.59	-18.6	-16.23	-13.65	-10.75	-7.75	-5	-2.67	-0.99	-0.11
ω_i	4.426	4.313	4.029	3.695	3.279	2.784	2.236	1.634	0.995	0.332
T_i	1.420	1.457	1.560	1.701	1.916	2.257	2.810	3.845	6.315	18.945

Tabla Generada con Excel.

De igual modo se puede observar de las frecuencias en el último renglón de la tabla 6, que el edificio se mantiene estable en los primeros 2 o 3 segundos que normalmente dura en terremoto. Para una mejor visualización presentamos el modelo de un edificio de dos pisos.

$\mathcal{S}R$

5.4. Formulación del modelo forzado

Si además interviene una fuerza externa se tiene un sistema mecánico masa resorte con respuesta forzada que corresponde a una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

$$X'' = AX + F(t)$$

Donde $F(t)$ es la fuerza ejercida por el movimiento sísmico.

Para un edificio de un solo piso el modelo no amortiguado forzado es de la forma

$$mx'' + kx = F(t)$$

Si $F(t) = F$ constante, se tiene la ecuación

$$mx'' + kx = F$$

Usando el software Mathcad para $m = 1, k = 0.5, \quad F(t) = 1$ se tiene el siguiente formato

$$D(t, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \frac{1}{m}(F(t) - b(t)X_1 - kX_0) \end{bmatrix}$$

$$S1 = rkfixed\left[\begin{pmatrix} 0 \\ v0 \end{pmatrix}, 0, 10, 100, D\right]$$

$$i = 0 \ldots last\left(S1^{\langle 0 \rangle}\right)$$

Con estos datos tenemos la siguiente gráfica que nos muestra una oscilación constante que es irreal puesto que los terremotos no son con fuerza constante. En este caso $b(t) = 0$ pues no se considera amortiguamiento.

SR

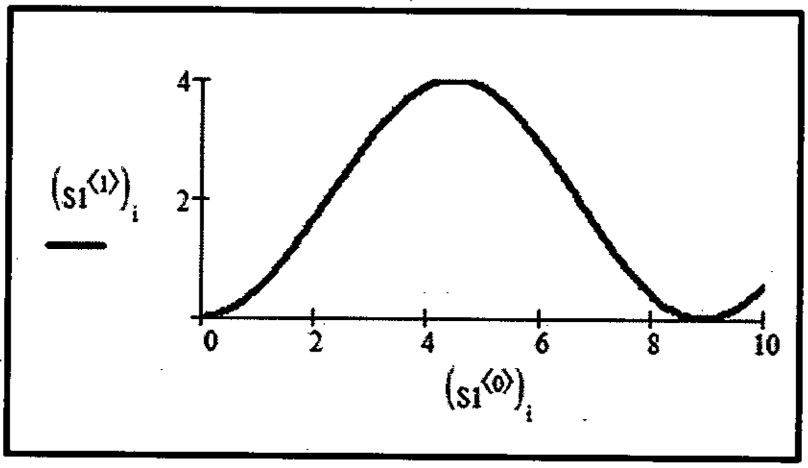

Figura 13. Comportamiento del edificio de un piso cuando la fuerza es constante. Elaboración propia usando el software Mathcad.

En la figura 14 tenemos el comportamiento del sistema mecánico para un piso si la fuerza es decreciente en forma lineal, es decir, $F(t) = 1 - t$; y si la fuerza es senoidal que es la fuerza de un terremoto normal, $F(t) = \cos 3t$

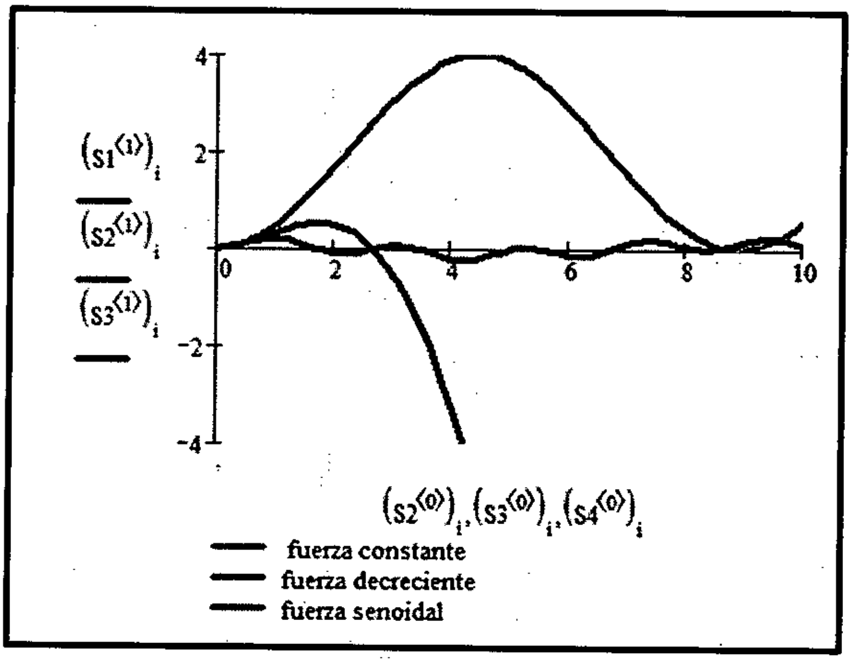

Figura 14. Comportamiento del edificio cuando la fuerza es constante, decreciente y senoidal.

VI. Discusión de resultados

6.1. Contrastación de la hipótesis.

La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos tiene el mismo comportamiento que un sistema mecánico masa-resorte.

La acción de los terremotos sobre un edificio de varios pisos se modela haciendo uso de un sistema de ecuaciones de segundo orden.

En forma Matricial el sistema es de la forma

$$X'' = AX$$

En este caso no hay fuerza externa.

6.2. Sistema no amortiguado forzado

Si además interviene una fuerza externa se tiene un sistema mecánico masa resorte con respuesta forzada que corresponde a una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

$$X'' = AX + F(t)$$

Donde $F(t)$ es la fuerza ejercida por el movimiento sísmico.

El Modelo propuesto se puede resolver calculando los valores propios, que son negativos y las frecuencias respectivas como se muestra en el modelo de dos y diez pisos.

Conclusiones

Se ha elaborado el modelo matemático que describe la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos, haciendo uso de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, con lo que se acepta la hipótesis de la investigación.

Se observa la gran utilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden para modelar y explicar la acción de los terremotos tan igual como se usa para un sistema mecánico masa resorte.

Recomendaciones

Se recomienda seguir investigando en este tema de manera multidisciplinar, a fin de enriquecer la investigación para pasar por ejemplo a la simulación que es un tipo de aplicación más técnico que requiere de un especialista en programación y además la adquisición de softwares y equipos de simulación.

Referencias bibliográficas

Bassottia Ricardo y Ambrosinib Daniel (2007). Sobre la utilización de amortiguadores de masa sintonizados en la provincia de Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional Gral. Paz y Urquiza, Argentina. Disponible en:

https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Bassotti/publication/228651747_Sobre_la_utilizacion_de_amortiguadores_de_masa_sintonizados_en_la_Provincia_de_Mendoza/links/53e2bd480cf275a5fdda61b6/Sobre-la-utilizacion-de-amortiguadores-de-masa-sintonizados-en-la-Provincia-de-Mendoza.pdf.

Borelli Robert , Courtney S. Coleman (2002). *Ecuaciones Diferenciales una Perspectiva de Modelación*, México, Oxford University Press.

Bozzo Luis M y Barbat Alex H. (2009). *Diseño sismo resistente de edificios, técnicas convencionales y modelo de un grado de libertad avanzados.* España, Editorial Reverté. S.A.

Campell Stephen L. y Richard Haberman (1997). *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera*, México, McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Eduards Y Penney. (2004). *Elementary differential equations with boundary value problems,* Pearson Prentice Hall, United States of America, 5e.

Kreider, Kuller y Ostberg (1973). *Ecuaciones diferenciales*, México Fondo Educativo Interamericano. S.A.

SR

Kreyzig, Erwin (2002). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería Vol.I*, México, Limusa Wiley, tercera edición.

Tabera, Hernando, *El terremoto de pisco del 15 de agosto de 2007-Perú.* Instituto Geofísico del Perú Dirección de Sismología - CNDG Calle Badajos 169 - Urb. Mayorazgo IV Etapa Ate - Lima - Perú Teléfono: 51-1-3172300 www.igp.gob.pe. Disponible en https://repositorio.igp.gob.pe/bitstream/handle/IGP/699/terremoto%20de%20pisco.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Zill, Dennis G. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado,* México, International Thomson Editores, S.A. Séptima edición.

Zilll,Dennis G. Zill y Cullen Michael R. (2006). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1 Ecuaciones Diferenciales*, México, McGraw-Hill /Interamericana Editores, S.A. de C.V. Tercera Edición.

SR

Anexos

Anexo 1.

Ejemplos de aplicación del método de variación de parámetros.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'=2x, -1<x<1$; sabiendo que $y_1=1$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Paso 1: Colocamos la ecuación en su forma normal

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y=\frac{2x}{1-x^2}$$

Paso 2: Resolvemos la homogénea asociada sabiendo que $y_1=1$ es solución, necesitamos hallar y_2

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{(y_1)^2}dx$$

$$y_2=\int\frac{e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{1}dx=\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Luego

$$y_h=c_1+c_2\ln\frac{1+x}{1-x},\quad c_1,c_2 \text{ constantes}$$

Paso 3: Ahora hallamos y_p

$$y_h=c_1(1)+c_2\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Ahora c_1, c_2 son parámetros a determinar y satisfacen el sistema algebraico:

$$\begin{cases}\boldsymbol{c_1'y_1+c_2'y_2=0}\\ \boldsymbol{c_1'y_1'+c_2'y_2'=h(x)}\end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} c_1'(1) + c_2'\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 0 \\ c_1'(0) + c_2'\left(\dfrac{2}{1-x^2}\right) = \dfrac{2x}{1-x^2} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln\frac{1+x}{1-x} \\ \frac{2x}{1-x^2} & \frac{2}{1-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ln\frac{1+x}{1-x} \\ 0 & \frac{2}{1-x^2} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{2x}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}}{\frac{2}{1-x^2}} = -x\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Luego, integrando se tiene

$$c_1 = -\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$$

Integrando por partes:

$$u = \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad dv = xdx$$

$$du = \frac{2}{1-x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$c_1 = -\frac{x^2\ln\frac{1+x}{1-x}}{2} + \int \frac{2}{1-x^2}\frac{x^2}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2\ln\frac{1+x}{1-x}}{2} + \int \frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{x^2\ln\frac{1+x}{1-x}}{2} + \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{x^2\ln\frac{1+x}{1-x}}{2} - x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Para calcular c_2

Se observa en el sistema que

$$c_2' = x$$

Luego,

$$c_2 = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Finalmente,

$$y_p = c_1(1) + c_2 \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$y_p = \left(-\frac{x^2 \ln \frac{1+x}{1-x}}{2} - x - \frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{1-x} \right)(1) + \left(\frac{x^2}{2}\right) \ln \frac{1+x}{1-x} = -x - \frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{1-x}$$

La solución general es

$$y = c_1(1) + c_2 \ln \frac{1+x}{1-x} - x - \frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{1-x}, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

$$y = c_1(1) + \left(c_2 - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{1+x}{1-x} - x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

$$y = c_1(1) + c_2 \ln \frac{1+x}{1-x} - x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Cuando la ecuación es con coeficientes constantes la solución es más sencilla ya que no requiere otra condición más que la ecuación diferencial, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(D^2 + 1)y = \frac{1}{\cos x}$$

La ecuación es equivalente a:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Paso 1: La ecuación ya está en su forma normal

Paso 2: Resolvemos la homogénea asociada

$$y'' + y = 0$$

El polinomio asociado es $r^2 + 1 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm i$. Luego la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Paso 3: Sea la solución particular $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ donde c_1, c_2 son ahora funciones a determinar y son tal que

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ c_1'(-\sin x) + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Paso 4: Resolvemos el sistema algebraico usando la regla de Cramer

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{-\frac{1}{\cos x} . \sin x}{\mathbf{1}} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

Integrando

$$c_1 = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x)$$

Ahora obtengamos c_2

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{1}{\cos x} . \cos x}{\mathbf{1}} = 1$$

Integrando

$$c_2 = \int dx = x$$

Luego,

$$y_p = \ln(\cos x)\,.\,(\cos x) + x.\sin x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x)\,.\,(\cos x) + x.\sin x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

La solución de una ecuación diferencial de segundo orden es una familia biparamétrica de curvas las cuales se pueden graficar usando cualquier software matemático, por ejemplo el GeoGebra.

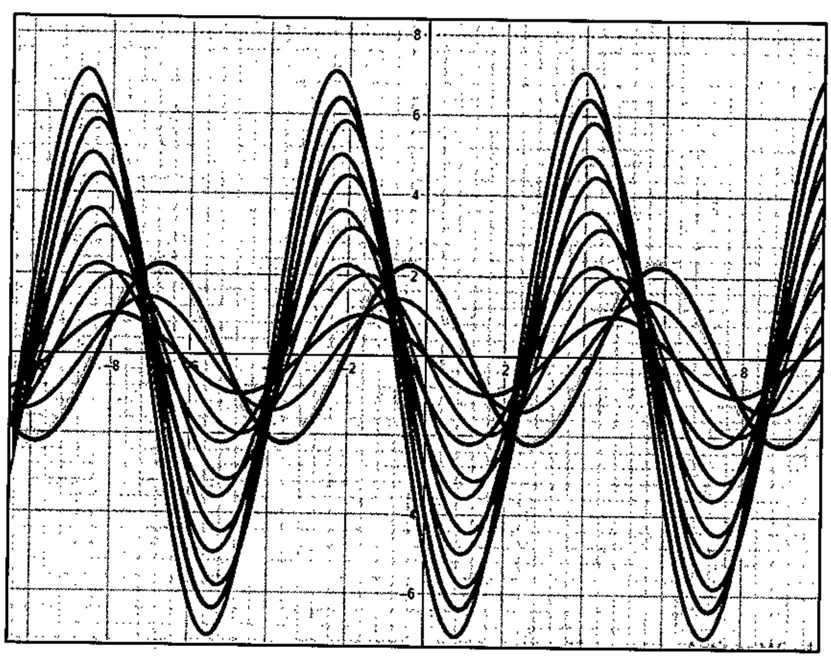

Figura 15. Curvas solución de la ecuación homogénea

Curvas solución de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$, para diferentes valores de c_1, c_2 en $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Fuente. Elaboración propia con el software GeoGebra.

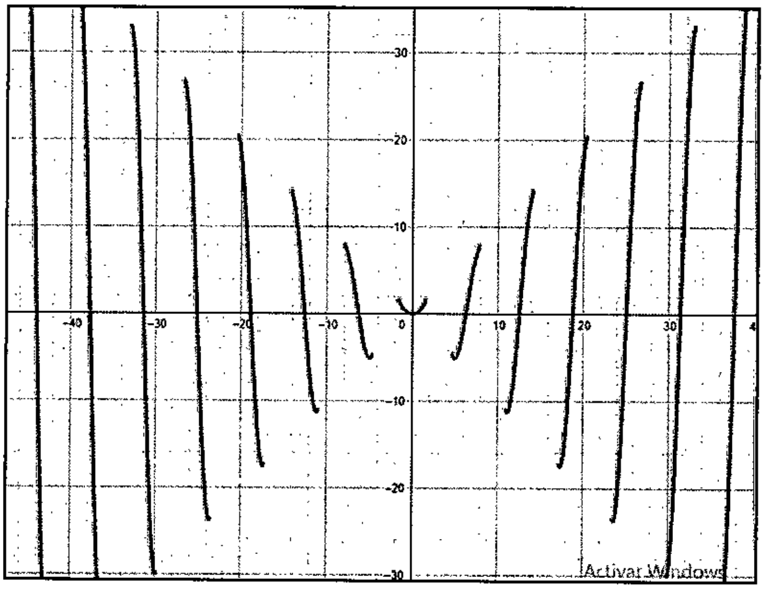

Figura 16. Solución particular

Gráfica de la solución particular $y_p = \ln(\cos x).(\cos x) + x.\sin x$. Fuente, elaboración propia haciendo uso del software GeoGebra.

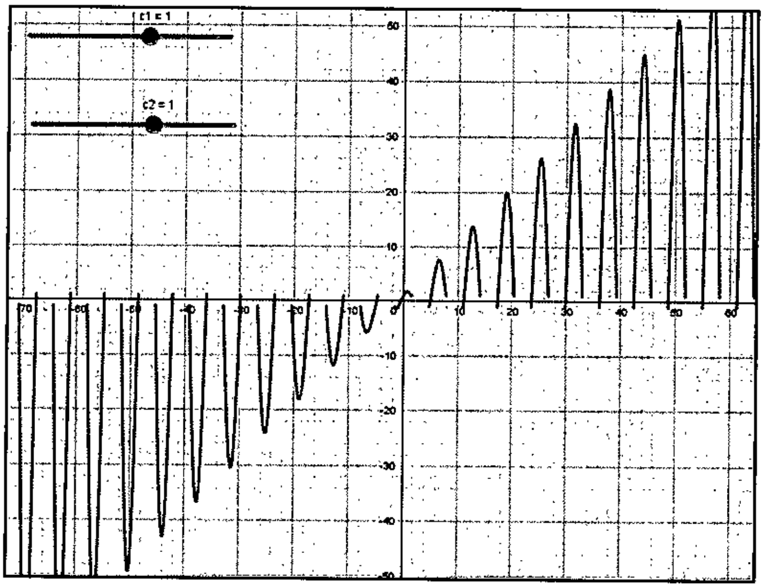

Figura 17. Solución única.

Gráfica de la solución cuando $c_2 = c_2 = 1$, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x).(\cos x) + x.\sin x$. Fuente: Elaboración propia usando el Software GeoGebra.

82

Anexo 2

Ejemplo de aplicación del método coeficientes indeterminados

Ejemplo 3.

Hallar la solución general de

$$y'' + y = \sin x + \cos x$$

$$(D^2 + 1)y = \sin x + \cos x$$

Paso 1. Resolvemos la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ obteniendo

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,, \qquad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Paso 2. Identificamos el anulador de $\sin x + \cos x$, el cual es $D^2 + 1$.

Paso 3. Aplicando el anulador se tiene

$$(D^2 + 1)(D^2 + 1)y = 0$$

Resolviendo

$$\tilde{y}_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

Paso 4. Escogemos y_p a partir de $\tilde{y}_h$ según lo indicado y se obtiene

$$y_p = c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

Para calcular los coeficientes c_3, c_4 calculamos y_p', y_p'' y reemplazamos en la ecuación obteniendo

$$c_3 = -\frac{1}{2}, \ c_4 = \frac{1}{2}$$

Luego

$$y_p = -\frac{x}{2}\cos x + \frac{x}{2}\sin x$$

Luego la solución general es

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \; - \frac{x}{2}\cos x + \frac{x}{2}\sin x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Si además consideramos las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ se tiene la solución única

$$y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{x}{2}\cos x + \frac{x}{2}\sin x$$

Graficando la solución se tiene

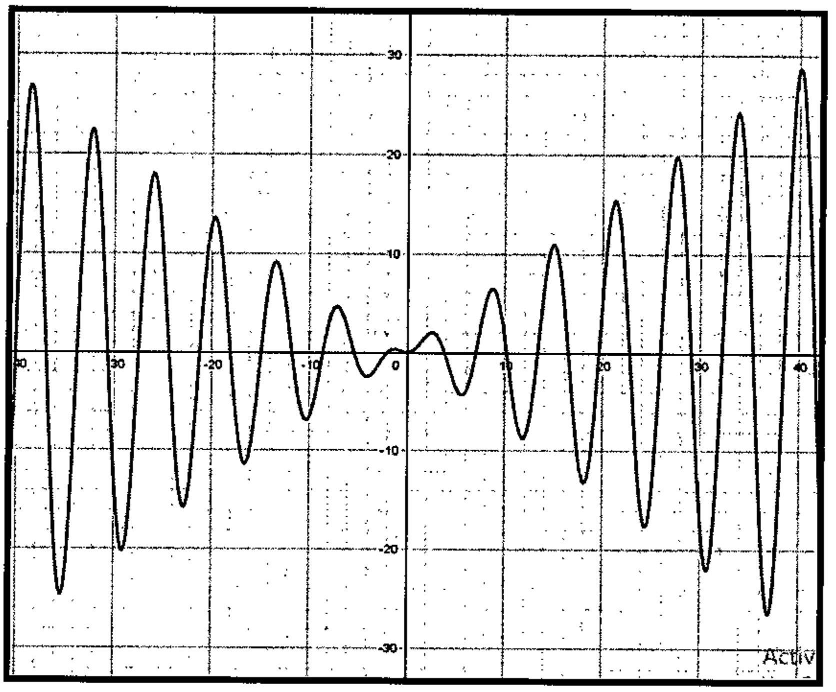

Figura 18. Solución por el método coeficientes indeterminados.
Gráfica de la curva solución $y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{x}{2}\cos x + \frac{x}{2}\sin x$. Fuente: Elaboración propia usando el software GeoGebra.

Anexo 3.

Ejemplo de un problema de valor inicial.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y' + 100.25y = 0$$

El polinomio asociado es $r^2 + r + 100.25 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = -\frac{1}{2} + 10i$. $r_2 = -\frac{1}{2} - 10i$. La solución de la ecuación es

$$y = c_1 e^{-t/2} \cos 10t + c_2 e^{-t/2} \sin 10t$$

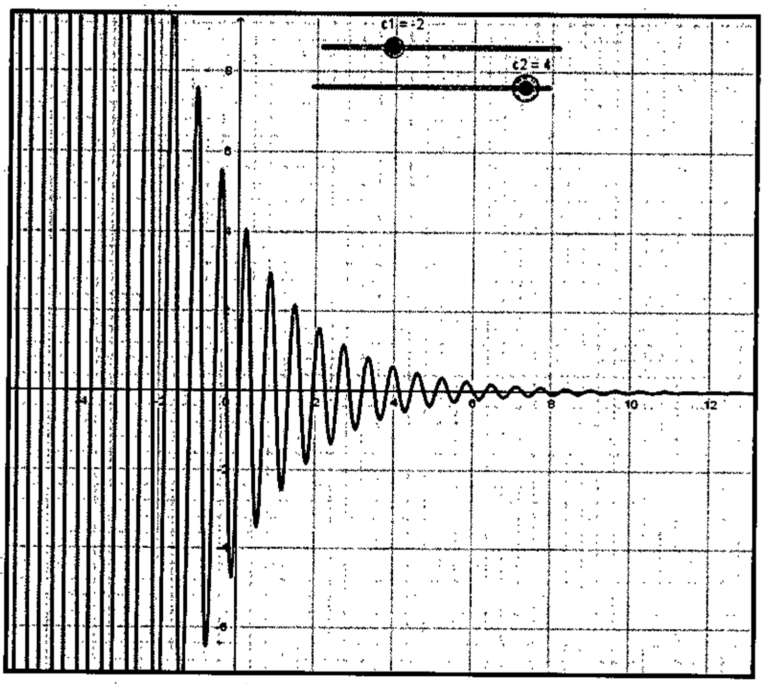

Figura 19. Solución de una ecuación homogénea.
Curva solución $y = c_1 e^{-t/2} \cos 10t + c_2 e^{-t/2} \sin 10t$ para $c_1 = -2, c_2 = 4$. Se puede observar que a medida que t crece la curva se estabiliza, es decir tiende a cero.

Anexo 4.

Ejemplo 5. Sistema masa-resorte sin fricción.

Suponga que el sistema masa-resorte tiene dos masas de 1 gr. Las constantes de los resortes son todas $1g/s^2$ encuentre el movimiento resultante si la primera masa está inicialmente en posición de equilibrio con una velocidad de $16\,cm/s$ hacia la derecha, mientras que la segunda masa está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Se supone que la fricción es despreciable.

Solución

De los datos del problema se tiene el sistema

$$x'' + 2x - y = 0, \ \ x(0) = 0, \qquad x'(0) = 16$$

$$y'' + 2y - x = 0, y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

Resolviendo el sistema por eliminación como lo muestra (Stephen L. Campbell, 1997), se tiene la solución

$$x = 8\sin t + \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

$$y = 8\sin t - \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

Usando la forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculando los auto valores se tiene $i, \sqrt{3}i$ que corresponde a la misma solución. En el siguiente gráfico se presentan las soluciones.

ЯR

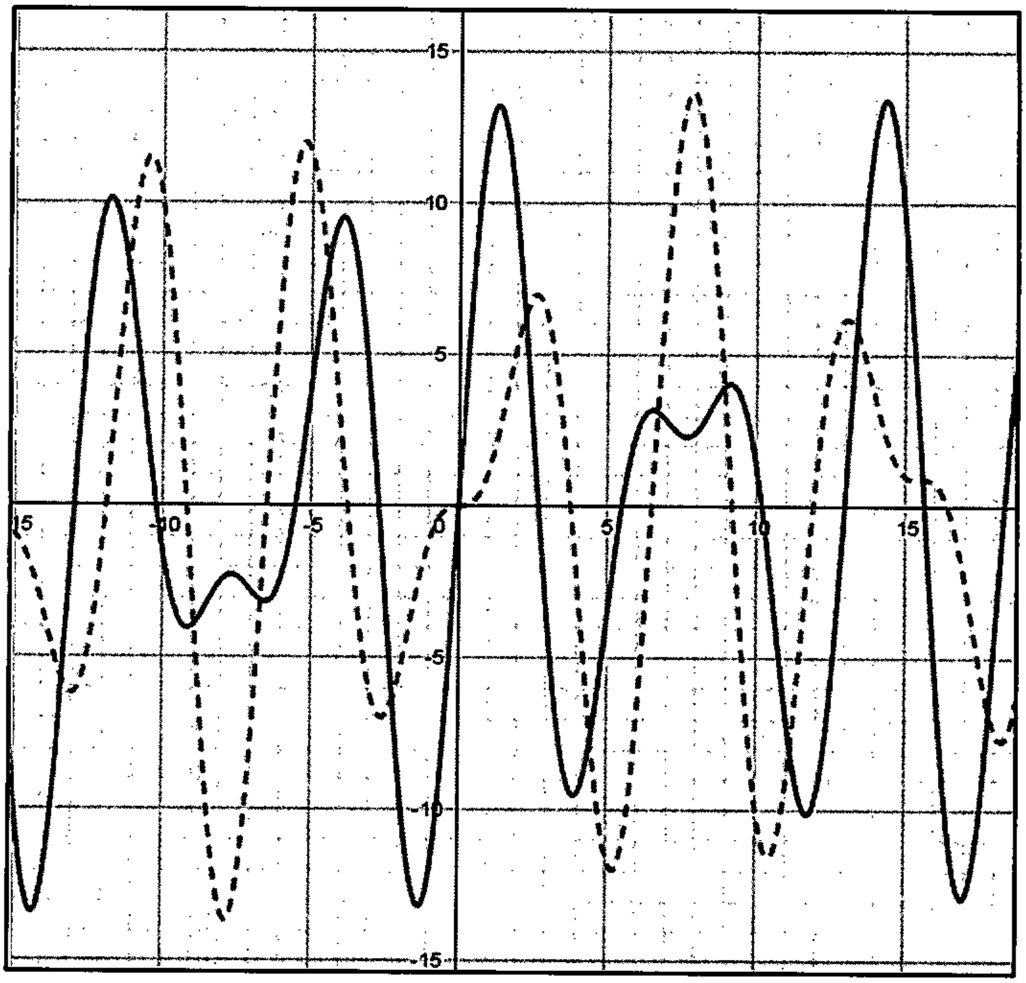

Figura 20. Sistema masa- resorte.
Soluciones del ejemplo 5. $x = 8\sin t + \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$, $y = 8\sin t - \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$. Fuente: Elaboración propia usando el software GeoGebra.

SR

Ejemplo 6.

Considere el sistema masa resorte con $n = 2$. Donde no hay tercer resorte conectado a una pared del lado derecho, hacemos $k_3 = 0$. Si $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 100$, y $k_2 = 50$, entonces la ecuación es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X'' = \begin{pmatrix} -150 & 50 \\ 50 & -50 \end{pmatrix} X$$

Multiplicando por la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$X'' = \begin{pmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{pmatrix} X$$

Calculando los valores propios se tiene $\lambda_1 = -25, \lambda_2 = -100$, los vectores propios correspondientes son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general del sistema es

$$X(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \sin 5t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (a_2 \cos 10t + b_2 \sin 10t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución representa oscilaciones libres del sistema masa resorte. Estas describen los dos modos naturales de oscilación en sus dos frecuencias naturales $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 10$. La solución se puede expresar de la forma

$$X_1(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \sin 5t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cos(5t - \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \cos \alpha_1 = \frac{a_1}{c_1}$ y $\sin \alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}$ tiene las ecuaciones componentes

$$x_1(t) = c_1 \cos(5t - \alpha_1)$$

$$x_2(t) = 2c_2 \cos(5t - \alpha_1)$$

Similarmente para la solución

$$X_2(t) = (a_2 \cos 10t + b_2 \sin 10t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_2 \cos(10t - \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SR

Tiene las soluciones componentes escalares

$$x_1(t) = c_2 \cos(10t - \alpha_2)$$

$$x_2(t) = -c_2 \cos(10t - \alpha_2)$$

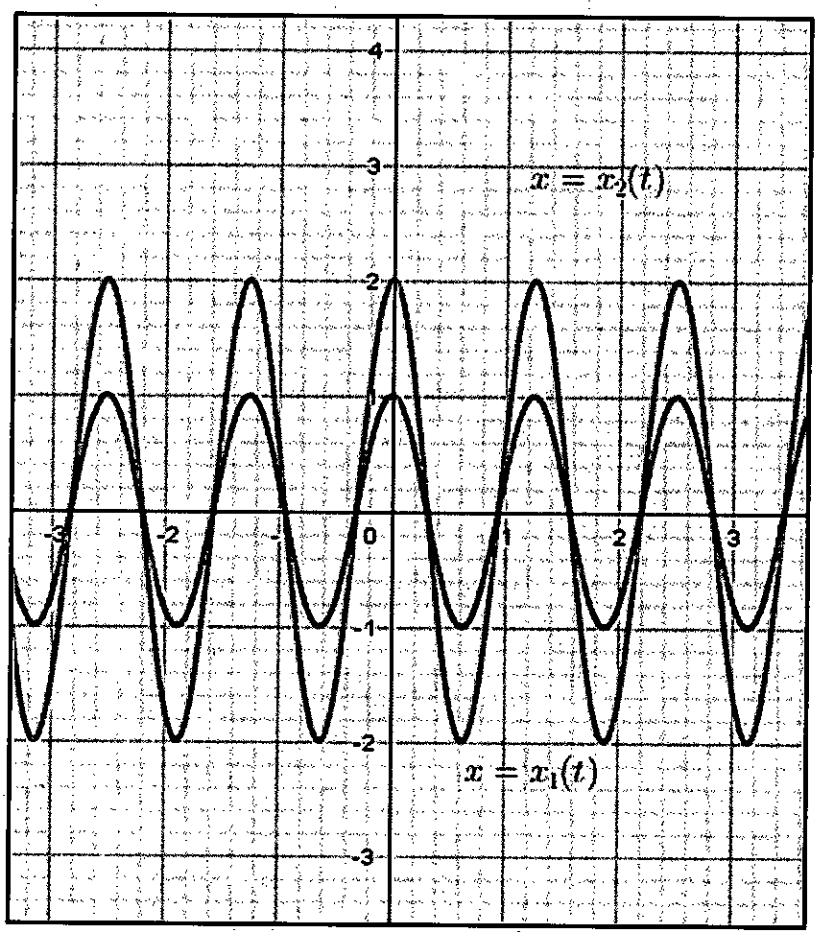

Figura 21. Oscilaciones en la misma dirección.

Oscilaciones en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 5$. Elaboración propia usando el software GeoGebra

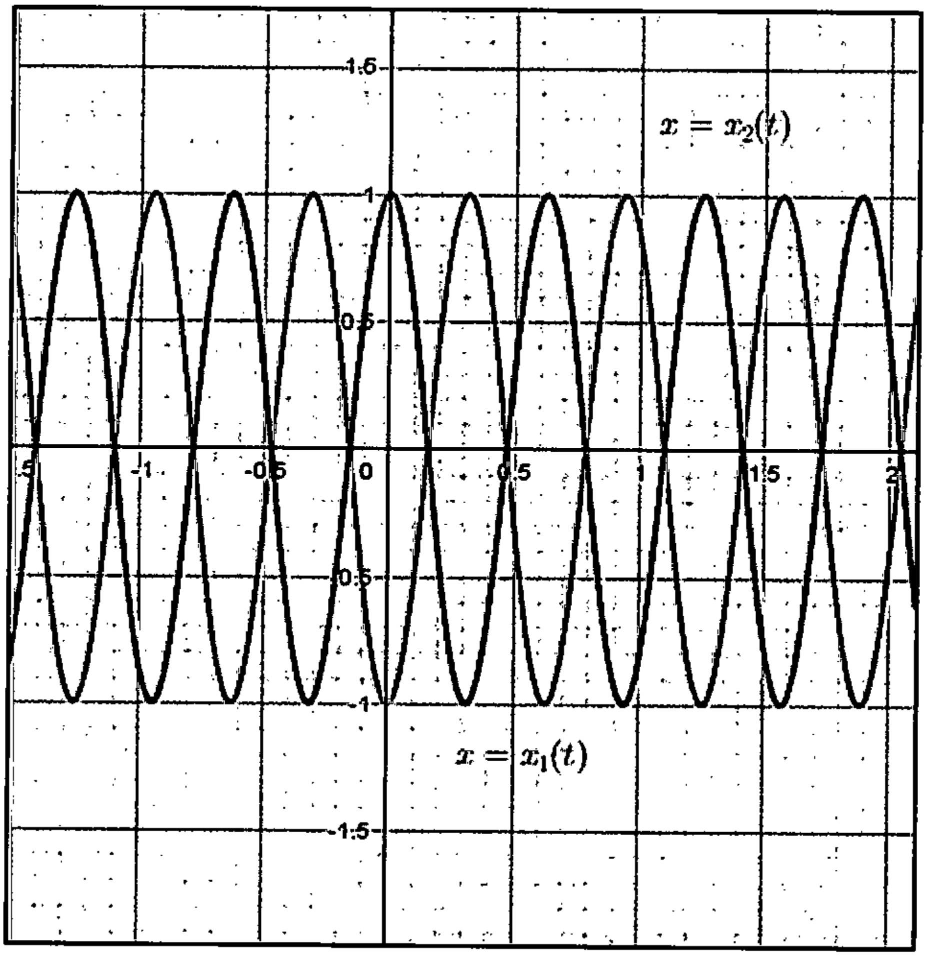

Figura 22.Oscilaciones en dirección opuesta.
Oscilaciones en dirección opuesta con frecuencia $\omega_2 = 10$. Elaboración propia usando el software Geogebra.

Matriz de consistencia

Formulación del problema	Objetivo general	Hipótesis	Metodología
¿Cómo se puede modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden?	Modelar la acción de los terremotos sobre los edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.	Se puede modelar la acción de los terremotos sobre los edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Variable dependiente: acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos. Variable independiente: Modelamiento matemático con sistemas de ecuaciones de segundo orden.	Se trata de una investigación básica, por lo que usaremos el método inductivo deductivo. Haciendo uso del método deductivo pondremos énfasis en la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden y en los modelos mecánicos masa resorte su explicación y abstracción.
Sub problemas	Objetivos específicos	Hipótesis específicas	
1) ¿Cómo se puede modelar los sistemas mecánicos masa- resorte usando sistemas de ecuaciones de segundo orden? 2) ¿Cómo se usan los sistemas mecánicos masa resorte para modelar la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos?	1) Desarrollar la teoría de sistemas de ecuaciones de segundo orden y aplicarlo a los sistemas mecánicos masa resorte. 2) Usar los sistemas masa- resorte para modelar La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos.	1. Los sistemas de ecuaciones de segundo orden nos permiten modelar sistemas mecánicos masa resorte. 2. La acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos es similar a un sistema masa-resorte.	Haciendo uso del método inductivo inferimos conclusiones de carácter general, de ese modo haremos una generalización para edificios de n pisos.