UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

FORMULACIÓN VARIACIONAL Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE NASH

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

WILY NOEL RAMOS LÓPEZ

CALLAO- PERÚ

2019

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

FORMULACIÓN VARIACIONAL Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE NASH

por

WILY NOEL RAMOS LÓPEZ

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos necesarios para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Flores Vega Walter

Presidente

Lic. León Zárate Elmer Alberto

Secretario

Lic. Tello Bedriñana Herminia Bertha

Vocal

Lic. Juan Benito Bernui Barros

Asesor

CALLAO- PERÚ

2019

DEDICATORIA

A mis tres hijos, razón de mi existir y estímulo permanente de mis esfuerzos y sacrificios para ser día un mejor ejemplo para ellos.

Agradecimientos

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas por sus valiosas enseñanzas, quienes de una u otra forma determinaron mi real vocación por la matemática; ciertamente estoy en deuda.

A esas amistades de años idos y años presentes, les agradezco mucho su deferencia a mi persona.

Índice general

Indice de figuras

Indice de cuadros

Resumen

FORMULACIÓN VARIACIONAL Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE NASH

WILY NOEL RAMOS LÓPEZ

Diciembre del 2018

Título obtenido: Licenciado en matemática

El teorema de punto fijo y la teoría de grado topológico son dos herramientas matemáticas que permiten demostrar la existencia de soluciones a problemas de desigualdad variacional (VI(K,F)). En esta investigación se estudiará el problema de Equilibrio de Nash para posteriormente realizar su formulación como un problema de desigualdad variacional. Finalmente, utilizando la herramienta matemática de grado topológico demostrar la existencia de solución. Una ventaja importante del enfoque de grado a diferencia del teorema de punto fijo es que el teorema básico derivado afirma no solo la existencia de una solución para el VI (K, F) en cuestión, sino también para todos los VI (L, G), donde el par (LG) es una ”pequeña perturbación”de (K, F).

Palabras Claves: Problema de desigualdad variacional, problema de complementariedad, Equilibrio de Nash.

Abstract

VARIATIONAL FORMULATION AND EXISTENCE OF SOLUTION IN FINITE DIMENSION SPACES OF THE NASH EQUILIBRIUM PROBLEM

WILY NOEL RAMOS LÓPEZ

December 2018

Obtained Degree: Graduated in Mathematics

The fixed-point theorem and the theory of topological degree are two mathematical tools that allow demonstrating the existence of solutions to problems of variational inequality (VI (K, F)). In this investigation the problem of Nash equilibrium will be studied to later make its formulation as a problem of variational inequality. Finally, using the mathematical tool of topological degree demonstrate the existence of a solution. An important advantage of the degree approach as opposed to the fixed-point theorem is that the derived basic theorem affirms not only the existence of a solution for the VI (K, F) in question, but also for all VIs (L, G) , where the pair (LG) is a ”small disturbance.ºf (K, F)

Palabras Claves: Problem of variational inequality, complementarity problem, Nash equilibrium.

Introducción

Los problemas de desigualdad variacional ”VI” surgen como una generalización de los problemas de complementariedad no lineal ”NCP”. Tienen sus orígenes por los años 1960 a partir del estudio del cálculo de variaciones. Estos problemas proporcionan un amplio entorno unificado para el estudio de problemas de optimización y equilibrio que sirve como el principal marco computacional para la solución práctica de una serie de problemas de continuo uso en las ciencias matemáticas.

En la investigación se desarrolla el capítulo uno centrandose en la descripción de la realidad problemática, formulación del problema, objetivos de la investigación y limitantes.

En el segundo capítulo se hace un estudio de los antecedentes internacionales y nacionales asociados a la presente investigación, posteriormente, se desarrolla preliminares sobre grado topológico, desigualdad variacional y Equilibrio de Nash.

En el tercer capítulo se hace referencia a las variables de investigación y se plantea las hipótesis de estudio.

La metodología de investigación se desarrolla en el cuarto capítulo.

En el quinto capítulo se plantea los resultados de la investigacion.

En el sexto capítulo se realiza la discusión de resultados con las referencias de estudio.

En el último capítulo, cerramos la investigación planteando las conclusiones y recomendaciones para posteriores investigaciones relacionados al tema.

Capítulo I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El término **Equilibrio** es muy usado y aplicado en muchas ramas de la ciencia, así según la RAE (2001) “El equilibrio es el estado de un cuerpo cuando fuerzas encontradas que obran en él se compensan destruyendose mutuamente”(p.639). Así también asociado a la economía se tiene el concepto de equilibrio competitivo que según Tirole (2009) afirma: “Dentro de la economia, el paradigma del equilibrio competitivo de Arrow y Debreu es el modelo mejor desarrollado. Un equilibrio competitivo es un conjunto de precios, con las demandas y ofertas asociadas, tales que todos los mercados se vacían”(p.22).

Las matemáticas no son ajenas a este concepto y más aun, dicho concepto está bastante relacionado con la teoría de juegos en particular el Equilibrio de Nash fue una contribución fundamental a la naciente teoría matemática de los juegos no cooperativos donde la fortuna de un jugador depende de las acciones de los demás y todos tratan de hacer lo mejor para sí mismos. Con respecto a los juegos la National Geografiphic (2017) afirma:

> la historia de las matemáticas está llena de referencias a los juegos y a los aspectos lúdicos de dicha disciplina. Se podría decir desde que la humanidad empezó a practicar juegos, y paralelamente a desarrollar matemáticas, y hasta el siglo XVII, no es posible separar lo que podría llamarse matemática seria de la matemática lúdica o recreativa. En 1612, apareció en Francia el primer libro dedicado exclusivamente a las matemáticas recreativas, **Problemes plaisants et deléctables qui se font par les nombres** de Claude-Gaspar Bachet de Méziriac. A partir de ese momento, los dos ámbitos de las matemáticas irán separándose, poco a poco, aunque los encuentros seguirán siendo

> numerosos, por ejemplo, en el origen de la probabilidad debido a Fermat y Pascal, en el interés de muchos grandes matemáticos como Newton, Euler o Gauss por los problemas recreativos, o en los trabajos sobre los números de Édovard lucas, hasta llegar a la creación de la teoría de juegos hacia la mitad del siglo XX (p.16).

Ya en pleno siglo XX, empezó a formularse un marco teórico que acabaría convirtíendose hacia la mitad del siglo en lo que hoy se conoce como teoría de juegos. El primer teorema general que se estableció y demostró se debe al lógico Ernst Zermelo (1871-1956) y fue formulado en 1912. En este teorema se afirma que cualquier juego finito de información completa (como las damas y el ajedrez) tiene una solución óptima con estrategias puras [1]. Hacia 1920, el matematico Émile Borel se interesó por una teoría que estaba emergiendo e introdujo la idea de estrategia mixta [2] y muy pronto John von Newmann empezó a trabajar en ella, formulando y demostrando el teorema del minimax.[3]

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que se ocupa principalmente de la **toma de decisiones**. Gracias a sus características se aplica a todo tipo de situaciones en las que se plantea un conflicto, en el cual los contendientes tienen que tomar las decisiones más favorables a sus intereses sin conocer las que tomarán sus adversarios. La formulación de la teoría se basa en juegos abstractos, de ahí su nombre, pero el intéres de la misma no son realmente los juegos, sino sus aplicaciones a todas aquellas situaciones cuyas características hacen que su análisis y propuesta de solución pueda realizarse a través de la modelización de la situación como un juego abstracto. Estos juegos se centran en los juegos competitivos para dos personas y de suma cero.[4]

Se supone que cada jugador trata de realizar siempre la jugada que más le favorece, es decir, aquella que le produzca mayores beneficios. En otras palabras, que los jugadores no se conformen con menos que la totalidad de los beneficios, estos juegos que actuan como modelos matemáticos, sirvieron inicialmente para analizar situaciones competitivas relacionados con la economía, y sus autores mostraron un método para determinar las estrategias óptimas

[1] Una estrategia pura es un término empleado para designar un tipo de estrategias en teoría de juegos. Cada jugador tiene a su disposición un conjunto de estrategias. Si un jugador elige una acción con probabilidad 1 entonces está jugando una estrategia pura.

[2] Una estrategia mixta, es una generalización de las estrategias puras, usada para describir la selección aleatoria de entre varias posibles estrategias puras, lo que determina siempre una distribución de probabilidad

[3] Este teorema expresa que en un juego finito para dos jugadores A y B, existe un valor medio que representa la cantidad que el jugador A puede ganar a B si los dos jugadores juegan de manera razonable, es decir, tratando de obtener los mayores beneficios (o las menores perdidas)

[4] Por suma cero se entiende que los beneficios de un jugador equivalen en todo momento a las pérdidas de los otros, es decir, que solo hay un ganador y que este ganador se lo conserva todo.

para cada jugador. El éxito que supuso para la teoría el metodo de solución, propuesto por Von Neumann, conocido como **estrategía minimax**, y su ampliación a estrategias que incluyen formas de jugar ponderando el azar, llamadas estrategias mixtas, llevó a los primeros matemáticos y economistas que se ocuparon de la teoría de juegos al estudio de situaciones más complejas.

Sin embargo, lo que empezó como un conjunto de aplicaciones al mundo de la economía, inicialmente con metódos bastante simplificados, fue evolucionando durante la segunda mitad del siglo XX. Además con la introducción de los juegos en los que no necesiariamente las ganancias de un jugador deberian ser pedidas de los otros, se introdujo la idea de cooperación, generando modelos de juegos cada mas cercanos a la realidad, no solo de las ciencias económicas sino también de otros campos, como el militar, el político, la evolución biológica e incluso la filosofica. Todas estas disciplinas, aparentemente tan dispares, tienen en común la importancia de la toma de decisiones en situaciones que pueden plantearse como si de un juego se tratara, aunque ahora el juego pierda el carácter de lúdico y se centra más en la idea de riesgo.

A medida que la formulación de dichos juegos se acerca más a la realidad y son, por lo tanto, más complejos, admiten soluciones más abiertas en que la matemática puede aportar sus conocimientos junto a otras ideas de orden moral, ético o filosófico y, en general, las pertenecientes al estudio del comportamiento humano.

El concepto de negocio como juego, en el sentido de que la jugada de un jugador desencadena las jugadas de los otros, subyace en gran medida al pensamiento estratégico. Es un concepto que se toma de una rama de la economía (la teoria de los juegos), en el cual los agentes de la economía ya sean individuos o sociedades no son islas que viven y actúan independientemente de los demás.

> En sectores en los que las firmas compiten con ferocidad por una porción del mercado y la lealtad del cliente, esta progresión estilizada de jugadas revela un paralelismo con la conducta real. Son pocas las firmas que, en la actualidad, piensan en una estrategia sin aportar algo de la teoría de juego. Para Von Neumann y Morgenstern, los dos economistas que desarrollaron la idea, la estrategia constituía un plan completo: un plan qué especifica que elecciones haría el jugador en cada situación posible. Ver los negocios como una serie de juegos sin fin, cada uno de los cuales tiene un ganador y

> un perdedor, puede representar una desventaja. En las negociaciones, por ejemplo, con proveedores externos o clientes, o con los sindicatos o colegas, puede obstaculizar una conclusión satisfactoria si los participantes lo consideran solo en terminos de victoria o derrota. De esta manera, una de las partes siempre sufre el resultado negativo. El proceso de negociación adopta un rumbo hacia un resultado positivo para ambas partes, en el que ambas partes pueden quedar razonablemente conformes (Hindle, 2017, p.103).

Hablando en términos generales e intuitivos, podríamos decir que la Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individuales (caso de los juegos no cooperativos), bien mediante acuerdos entre los participantes (caso de los juegos cooperativos).

La Teoría de Juegos ha aportado instrumentos de analisis (entre ellos el equilibrio de Nash) que han resultado eficaces y enriquecedores en el estudio de muchas situaciones de tipo económico (en el estudio, por ejemplo, de los mercados oligopolísticos, de las licitaciones públicas o de la regulacion de mercado), y también de muchas situaciones de tipo social, político y legal. Ello se ha reflejado en los progamas de estudio de economía y de las ciencias sociales en general.

Cabe distinguir dos tipos básicos de juego, o dicho de otro modo, dos enfoques básicos en el análisis de un juego: cooperativos y no cooperativos. En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre que decisiones va a tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Entre los juegos no cooperativos cabe hacer dos distinciones basicas, juegos estáticos o dinámicos y juegos con informacion completa o sin ella.

Por otro lado el término **programación de equilibrio** hace referencia a la modelización, análisis y cálculo de equilibrio a través de la metodología de la programación matemática. Desde los primeros días de la programación lineal, se ha reconocido que la programación matemática tiene mucho que ofrecer para el cálculo de los equilibrios económicos.

Los estudios de la desigualdad variacional finita dimensional **VI(K,F)**, la cual es una generalización del problema de complementariedad no lineal **NCP(K,F)**, comenzó a mediados de 1960 en España y tiene su origen en el cálculo de las variaciones asociado con la minimización de los funcionales de dimension finita. Este tema se ha convertido en una disciplina muy fructífera en el campo de la programación matemática pues proporciona un amplio entorno unificado para el estudio de problemas de optimización y de equilibrio y sirve como el principal marco computacional para la solución practica de una serie de problemas de continuo uso en las ciencias matemáticas.

El problema complementario no lineal finito dimensional **NCP(K,F)** es un sistema de desigualdades no lineales en muchas variables no negativas junto con una ecuación especial que expresa la relación complementaria entre las variables y las correspondientes desigualdades. Esta condición de complementariedad es la característica clave que distingue el **NCP(K,F)** de un sistema general de desigualdades. Está en el corazón de todos problemas de optimización restringidos en dimensiones finitas y proporciona un marco poderoso para el modelado de problemas de equilibrio de muchos tipos.

El teorema de punto fijo, la teoría de grado topológico y la teoría en base a la función de merit son herramientas importantes que permiten demostrar la existencia de solución a los problemas de desigualdad variacional.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Qué características se deben establecer para la existencia de solución en espacios de dimensión finita del Problema de Equilibrio de Nash?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Cómo será la formulación variacional del problema de Equilibrio de Nash?
- ¿Cómo se determina la existencia de solución del problema de Equilibrio de Nash?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Determinar una formulación matemática y probar la existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash.

1.3.2. Objetivos específicos

- Mostrar una formulación matemática del problema de Equilibrio de Nash.
- Demostrar la existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórico

Carencia de bibliografia en español relacionado a la variable de estudio.

1.4.2. Temporal

Poca investigación de los últimos cinco años relacionada a la variable de estudio.

1.4.3. Espacial

Las investigaciones realizadas a la variable de estudio en su mayoria son internacionales y en menor medida son nacionales.

Capítulo II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del estudio

En esta sección presentamos investigaciones con respecto a las desigualdades variacionales y teoría de grado topológico.

2.1.1. Antecedentes Internacionales

- **Herrón S (1997)** en su investigación titulada TEORÍA DE GRADO, nos presenta algunas importantes propiedades de la teoría de grado en dimensión finita e infinita y muestra una aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- **Erika A (2013)** en su tesis titulada TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER, APLICACIONES AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE LA VARIABLE COMPLEJA, la autora analizó la existencia y estabilidad de soluciones para problemas del tipo $y = f_{(x)}$ bajo la herramienta del grado topológico. Además, esta misma herramienta la ha usado para demostrar resulltados clásicos del cálculo de variable compleja, específicamente del principal argumento, el teorema de Rouche y el teorema fundamental del Álgebra.

- **Carlos E, Azofelia Z (2003)**, en su investigación titulada UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO 1, los autores resaltan cómo el concepto de grado topológico de una función se ha convertido en una herramienta de vital importancia, con aplicaciones principalmente en el establecimiento de teoremas de existencia. Así mismo, los autores presentan las distintas definiciones básicas de grado topológico, así como sus generalizaciones y aplicaciones. Finalmente, enfatizan en otro concepto importante muy ligado al de grado topológico, el cuál es el de índice punto fijo, que en contextos particulares, es más efectivo que el de grado topológico, ya que sus propiedades y aplicaciones también son analizadas.

- **Blanco L, Lema F, Carmen S, Pedreira A, Luis P (2018)** en su investigación titulada SOBRE EL USO DE LAS DESIGUALDADES VARIACIONALES PARA EL CÁLCULO DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD NO LINEAL nos muestran la relación fuerte entre la programación matemática con los problemas de complementariedad no lineal (NCP) y de los problemas de desigualdades variacionales (VIP) y plantean cómo esta relación ha dado lugar a numerosos esfuerzos investigadores orientados a resolverlos. Establecen que en los últimos años ha resultado de vital importancia para la resolución de los VIP el uso de funciones D-gap para reformular el problema como uno de optimización diferenciable sin restricciones. Los autores buscan con esta investigación dar una presentación de la aplicabilidad de la función D-gap a los NCP con algoritmos recogidos de la literatura, así como un punto de partida para investigaciones que reduzcan las hipótesis para este caso particular.

- **Erick M (2009)**, en su investigación titulada EQUILIBRIO DE NASH Y DISEÑO DE MECANISMOS, el autor discute sobre algunos defectos teóricos y prácticos del Equilibrio de Nash pero hace énfasis en que estos retrocesos son menos problemáticos en cuestiones de diseño de mecanismos que en la mayoría de las aplicaciones de teoría de juegos. La teoría de diseño de mecanismos es la **ingeniería** de la teoría económica.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

- **Alex M (2013)** en su tesis titulada ”SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE DESIGUALDAD VARIACIONAL EN $\mathbb{R}^n$ USANDO EL METODO DEL PUNTO PROXIMAL EXACTO CON DISTANCIA DE BREGMANrealizó su investigación con la finalidad de encontrar la solución de un problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$ usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregam.

  En su investigacion, el autor afirma que cuando x está restringuido a un conjunto convexo cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$ se tiene el problema de optimización convexa con restricción

$$P_1 \begin{cases} min f_{(x)} \\ x \in C \end{cases}$$

Afirma que $x^* \in C$ es un minimizador de f en C, si solo si $\exists w \in f_{(x^*)}$, tal que $< w, y - x^* > \geq 0; \forall y \in C$. En función a esta afirmación, el problema anterior lo formula utilizando el subdiferencial ∂f de f.

$$P_2 \begin{cases} Encontrar\ x^* \in C \\ tal\ que\ para\ algun\ w \in \partial f_{(x^*)}\ se\ tiene\ < w, y - x^* > \geq 0; \forall y \in C \end{cases}$$

Cuando f es una función convexa, afirma que $\partial f : \mathbb{R}^n \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono maximal, obteniendo así la extensión natural de (P_2). Generalizando el operador ∂f por cualquier otro operador monótono maximal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ obtiene la siguiente formulación:

$$P_3 \begin{cases} Encontrar\ x^* \in C\ tal\ que\ para\ algun \\ w \in T_{(x^*)}\ se\ tiene\ < w, y - x^* > \geq 0; \forall y \in C \end{cases}$$

En su investigación, utiliza el método de punto proximal con distancia de Bregman para resolver el problema de desigualdad variacional (P_3).

- **Miguel P (2011)**, en su tesis titulada DESIGUALDAD VARIACIONAL,SOLUCIONES Y APLICACIONES, realizó un estudio sobre las desigualdades variacionales y concluye que estas desigualdades permiten resolver problemas complejos reduciéndolo a una sola desigualdad. El centro de estudio del autor radica en generalizar la teoría de optimización a problemas en los que la función de estudio sea no diferenciable. La importancia del estudio segun el autor de la optimización no diferenciable es debido a que sus problemas de aplicación con frecuencia se encuentran funciones con un numero finito de puntos de no diferenciabilidad.

  En base a estos antecedentes, se elaborán y fortalecerán los aspectos teóricos de estudio, los cuales se presentan en el marco teórico de nuestra investigación.

- **Erick P, Lennin R (2016)** titularon su investigación MÉTODO PROXIMAL PARA PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL: CASO NO MONÓTONO e introducen un algoritmo de punto proximal inexacto usando distancias proximales para resolver el problema de desigualdad variacional cuando el operador involucrado en el modelo es pseudo-monótono y cuasi-monótono. Bajo algunas hipótesis naturales, los autores prueban que la sucesión generada por el método es convergente en el caso pseudo-monótono y débilmente convergente en el caso cuasi-monótono

- **Luis M (2008)** en su investigación ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LA TEORIA DE JUEGOS Y LA TEORIA DE PUNTOS FIJOS, DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE LAS CORRESPONDENCIAS, realiza una introducción a la teoría de juegos, en esa introducción explica los elementos que intervienen en un modelo de juego no cooperativo. Con esa introducción, el autor busca mostrar de manera natural cómo aparecen las correspondencias de respuesta óptima entre el equilibrio de Nash, semicontinuidad superior por correspondencias y el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, para llegar al equilibrio de Nash. Finalmente, se desarrollan los Teoremas del Máximo de Berge, Teorema de punto fijo de Kakutani y el Teorema de Equilibrio para juegos no cooperativos de Nash.

- **Edgar S (2005)** en su investigación titulada PERFECCIONAMIENTO DE EQUILIBRIO DE NASH introduce formalmente los conceptos referidos a la Teoría de Juegos. Posteriormente para el caso de juegos de n jugadores, se propone un análisis que da a conocer la necesidad de refinar el concepto de Equilibrio de Nash, y por ello, el objetivo planteado es obtener el refinamiento más estricto: el equilibrio regular. La necesidad de tal refinamiento induce a plantear refinamientos previos como son el equilibrio perfecto, propio y esencial, los cuales son desarrollados, además de establecerse las relaciones existentes entre ellos. Luego, el autor presenta un análisis sobre juegos matriciales y bimatriciales. Adicionalmente a ello, el autor propone un problema de programación lineal, el cual le permite establecer si un equilibrio es no dominado (consecuentemente perfecto) en estos tipos de juegos.

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

2.2.1.1. Desigualdad Variacional

Definición 2.2.1 *(Modelo del problema de desigualdad variacional)*

*Dado un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función continua $F : K \to \mathbb{R}^n$, el problema de desigualdad variacional denotada por **VI(K,F)** consiste en encontrar un vector $x \in K$, de tal manera que, se verifique:*

$$(y-x)^T.F_{(x)} \geq 0; \forall y \in K \tag{2.1}$$

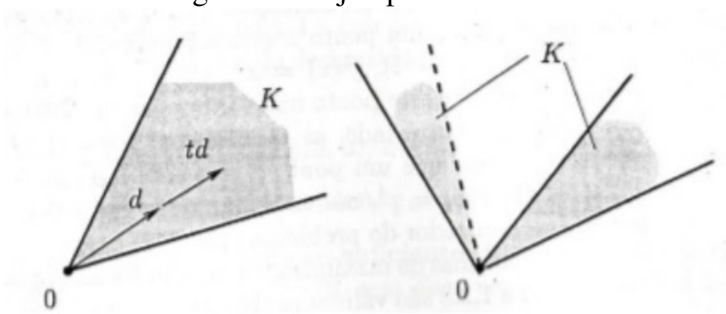
*El conjunto solución de este problema se denota por **SOL(K,F)** y viene dada por:*

$$SOL(K,F) = \{x \in K : (y-x)^T.F_{(x)} \geq 0; \forall y \in K\} \equiv \{x \in K : (y-x)^T.(-F_{(x)}) \leq 0; \forall y \in K\}$$

Definición 2.2.2 *(Definición de Cono)*

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama cono cuando: $d \in K \to td \in K; \forall t \in \mathbb{R}^+$

Figura II.1: Ejemplos de conos



Fuente: Izmailov y Solodov, 2005, p.21

Si: "K" es un cono no vacío, necesariamente $0 \in K$.

Observación 2.2.1

- *A lo largo de esta investigación se estudiará la situación en la que el conjunto K es cerrado y la continuidad de "F" es entendidad en un conjunto abierto que contiene a "K"*

- *Una interpretación geométrica de la desigualdad (2.1) es que un punto $x \in K$ es una solución de la* ***VI(K,F)*** *si solo si "F" forma un ángulo no obtuso*[1] *con cada vector de la forma "$y-x$" para todos los $y \in K$.*

- *Se puede formalizar la observación anterior usando el concepto de cono, especificamente el de cono normal asociado con el conjunto "K" y cualquier vector "$x \in K$" , por tanto se puede definir el cono normal a "K" en x de la siguiente forma:*

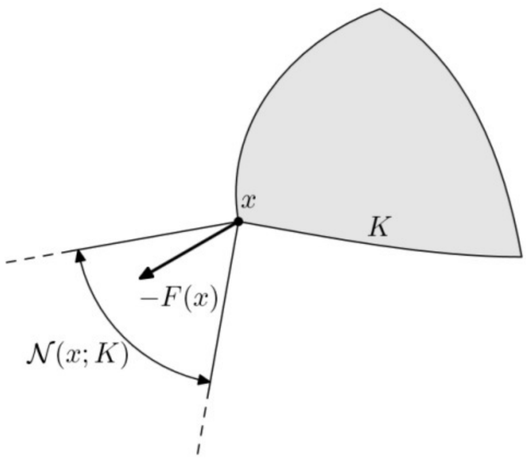
$$N_{(x,K)} \equiv \{d \in \mathbb{R}^n / d^T(y-x) \leq 0; \forall y \in K\}$$

Los vectores en este conjunto se denominan vectores normales al conjunto "K" en "x", la desigualdad (2.1) dice claramente que un vector $x \in K$ resuelve a $VI(K,F)$ si y solo si "$-F_{(x)}$ es un vector normal a "K" en "x", o equivalentemente

$$0 - F_{(x)} = -F_{(x)} \in N_{(x,K)} \ \ implica \ \ que \ \ 0 \in F_{(x)} + N_{(x,K)}$$

El cono normal juega un papel importante en el analisis convexo y en programación no lineal. En la siguiente figura se ilustra la inclusión anterior.

Figura II.2: Solución "x" y el cono normal.



Fuente:Facchinei y Pang, 2002, p.3

La **VI(K,F)** admite una forma equivalente conocida como problema de complementariedad, la cual se menciona a continuación.

[1]Si a y b son vectores de $\mathbb{R}^n$ se cumple: $a.b = |a|.|b|cos(\theta)$, por tanto $a.b \geq 0$ implica θ es no obuso

Definición 2.2.3 *(Modelo del problema complementario)*

Dado un cono K y una función $F : K \to \mathbb{R}^n$, el problema complementario denotada por ***CP(K,F)*** *consiste en encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

$$x \in K \wedge F_{(x)} \in K^* \wedge x \perp F_{(x)} \tag{2.2}$$

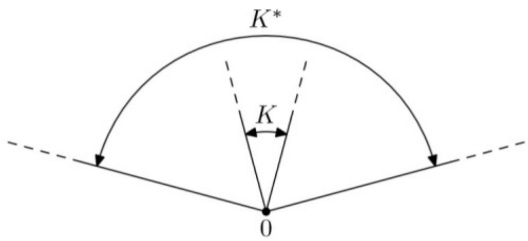
donde la notación $\perp$ significa ***perpendicular*** *y K^* es el cono dual de K definido por:*

$$K^* = \{d \in \mathbb{R}^n : /v^t.d \geq 0; \forall v \in K\}$$

Es decir, K^* consiste en todos los vectores que hacen un ángulo no obtuso con cada vector en "K".

La siguiente figura ilustra el cono dual.

Figura II.3: Un cono y su dual.



Fuente:Facchinei y Pang, 2002, p.5

La conexión precisa entre la $VI(K,F)$ y el $CP(K,F)$ cuando K es un cono, se describe en el siguiente resultado:

Proposición 2.2.1 *Sea K un cono no vacío en $\mathbb{R}^n$, un vector "x" resuelve el $VI(K,F)$" si y solo si "x" resuelve el $CP(K,F)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que "x" resuelve el $VI(K,F)$ entonces $(y-x)^T F_{(x)} \geq 0, \forall y \in K$.

Debido a que "K" es un cono no vacío y la desigualdad anterior se cumple $\forall y \in K$, considerando:

$$y = 0 \wedge y = 2x$$

se tiene:

$$-x^T.F_{(x)} \geq 0 \wedge x^T.F_{(x)} \geq 0$$

Se concluye

$$-x^T.F_{(x)} \geq 0...(1)$$

Por otro lado de la desigualdad: $(y-x)^T F_{(x)} \geq 0, \forall y \in K$, se tiene:

$$y^T F_{(x)} \geq x^T F_{(x)}, \forall y \in K$$

$$y^T F_{(x)} \geq 0, \forall y \in K$$

entonces

$$F_{(x)} \in K^*...(2)$$

De (1) y (2) se concluye que x resuelve el $CP(K,F)$

$(\Leftarrow)$ Si x resuelve el $CP(K,F)$ se tiene

$$x \in K \wedge x^T F_{(x)} = 0 \wedge F_{(x)} \in K^*$$

$$y^T F_{(x)} \geq 0, \forall y \in K$$

$$y^T F_{(x)} \geq x^T F_{(x)}, \forall y \in K$$

$$(y-x)^T F_{(x)} \geq 0, \forall y \in K$$

Por tanto "x" resuelve $VI(K,F)$. ■

Observación 2.2.2

- *Cuando se usa la notación $CP(K,F)$, se entenderá que K es un cono.*

- *Específicamnete se dirá que un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es factible para el $CP(K,F)$ si:*

$$x \in K \wedge F_{(x)} \in K^*$$

- *Se dirá que un vector x es estrictamente factible para $CP(K,F)$ si*

$$x \in K \ \ y \ \ F_{(x)} \in int K^*$$

- *La region factible del $CP(K,F)$ es el conjunto de todos los vectores factibles y se denota por $FEA(K,F)$, claramente $SOL(K,F) \subseteq FEA(K,F)$ y en notación de conjunto se puede escribir: $FEA(K,F) = K \cap F^{-1}(K^*)$.*

Muchos casos especiales del problema de complementariedad son muy importantes en modelaje. Un caso importante es cuando ”K” es el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$, el $CP(K,F)$ es conocido como el problema de complementariedad no lineal y se denota por **NCP(F)**.

Definición 2.2.4 *(Modelo del problema complementario no lineal)*
*Dado una función $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$, el problema de complementariedad no lineal denotada por **NCP(F)**,consiste en encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

$$x \geq 0 \wedge F_{(x)} \geq 0 \wedge x \perp F_{(x)} \tag{2.3}$$

Observación 2.2.3 *Mediante la expresión de la condición de ortogonalidad $x^T.F_{(x)} = 0$ en términos de los productos componentes (que está justificado por que ”x” y ”$F_{(x)}$” son ambos vectores no negativos), se obtuvo la siguiente formulación equivalente del $NCP(F)$, $0 \leq x \wedge F_{(x)} \geq 0 \wedge x_i.F_i(x) = 0; \forall i = 1,2,3,...,n$. La última formulación (o más precisamente, la condición cero de los productos componentes) proporciona una explicación para el término çomplementariedad”; es decir ”x_i” y ”$F_i(x)$” son complementariedad en el sentido de que si uno de ellos es positivo, entonces el otro debe ser cero.*

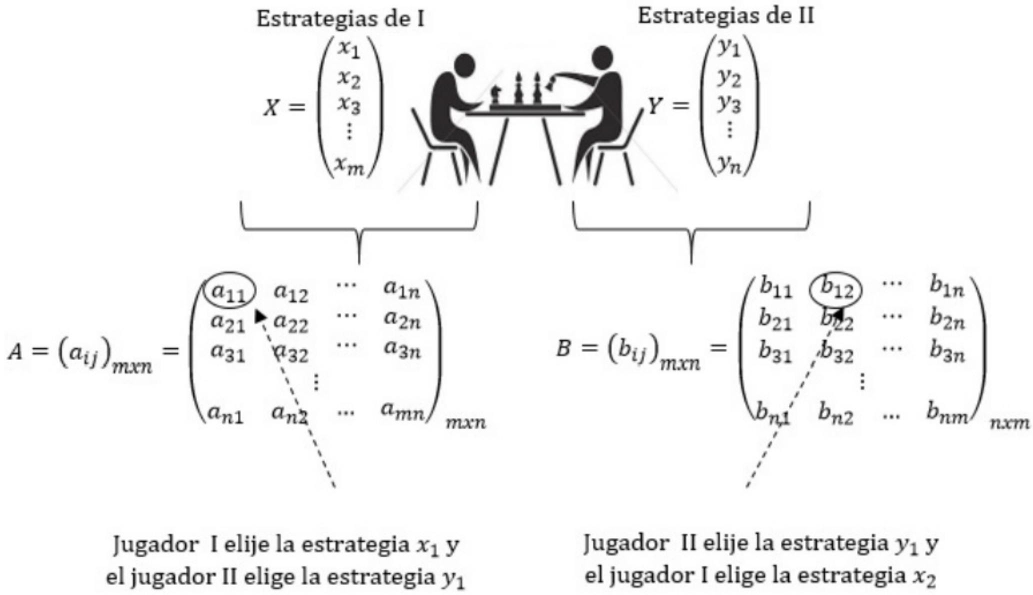
2.2.1.2. Problema de silla de montar

Muchos problemas de equilibrio de la economía y problemas importantes aplicados a diversos campos de la ingeniería pueden ser formulados como una VI(K,F) y CP(F,P). El problema de Silla de Montar es una extensión de un problema de optimización, dicho problema se define por una función escalar de dos argumentos y dos subconjuntos de dos espacios euclideanos posiblemente diferentes.

Ejemplo 2.2.1 *Un primer modelo es un juego de dos personas, estas personas seran denotadas por I y II. Donde cada jugador tiene un cierto número de posibles estrategias ”m” y ”n” respectivamente.*
Definamos:
$x_i \geq 0$ como la probabilidad de que eljugador I emplee su estrattegia ”i” ($i = 1,2,...,m$).

$y_i \geq 0$ *como la probabilidad de que eljugador II emplee su estrattegia "j" (* $i = 1, 2, ..., n$*).*
$X = (x_1, x_2, ..., x_m)^T \wedge Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$*, vectores que representan las estrategias mixtas.* $a_{ij} \wedge b_{ij}$ *los beneficios para los jugadores I y II respectivamente, si I elije la estrategia "i" y II elije la estrategia "j".*
$A = [a_{ij}]_{mxn} \wedge B = [b_{ij}]_{mxn}$ *son las matrices de recompensas mxn asociadas con el juego.*

Figura II.4: Esquematización del juego de dos personas.



Fuente: Elaboración propia

El juego es de suma cero si: $A + B = 0$ *y* $A + B \neq 0$ *en otro caso. En el caso de suma cero, la recompensa para un jugador es igual al negativo de esa cantidad para el otro jugador.*
Una suposición del comportamineto del juego es cada uno de estos elegira para cada vector fijo de estrategias mixtas empleadas por su oponente, un vector de estrategias mixtas para maximizar su beneficio esperado. Por lo tanto los problemas de los dos jugadores se pueden expresar de la siguiente manera.
Para el jugador I.

$$maximice : f_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{2.4}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Para cada "Y" fijo satisfaciendo $Y \geq 0$ *y* $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

Para el jugador II.

$$maximice: f_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \tag{2.5}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_i = 1$$

Para cada "X" fijo satisfaciendo $X \geq 0$ *y* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
Se dice que un par de estrategias $(x^*; y^*)$ *mixtas están en equilibrio si* x^* *es una solución óptima del problema (2.4) para* $Y = y^*$. *Además* y^* *es una solución óptima del problemas (2.5) del jugador II para* $X = x^*$
En el caso de suma cero, la cantidad $(X^*)^T AY^*$ *se llama el valor de juego, está es la recompensa para el jugador I bajo el par de equilibrio* $(x^*; y^*)$*, por supuesto, lo negativo de está cantidad es la recompensa para el jugador II bajo el mismo par de estrategias de equilibrio.*
los problemas anteriores se pueden reformular como un problema primal-dual de programas lineales.

$$maximice: u$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - u \geq 0; \forall j = 1, 2, 3..., n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \wedge X \geq 0$$

y

$$minimize: v$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j - v \leq 0; \forall i = 1,2,3...,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \wedge Y \geq 0$$

Usando la dualidad de la programación lineal, se puede mostrar que un par de estrategias mixtas $(x^*;y^*)$ está en equilibrio si solo si $(x^*;y^*)$ es un par de soluciones óptimas de los programas lineales anteriores, además el valor objetivo óptimo común es precisamente el valor del juego. En el caso de un juego de suma no nula, el enfoque de programación lineal anterior para el cálculo de las estrategias de equilibrio se rompe, de hecho, el problema general del juegode dos personas se puede reformular como un problema de complementariedad lineal.

Para obtener esta formulación, primero observamos que al restar una constante positiva lo suficientemente grande a cada entrada de las dos matrices de paga A y B podemos hacer que ambas sean negativas.

Además, este proceso no alterara las estrategias de equilibrio por que si "E" denota la matriz de orden "mxn" de todas, entonces para un par arbitrario de estrategias mixtas $(X;Y)$, tenemos: $X^T(A+\lambda E)Y = X^TAY + \lambda$ para cualquier escalar λ.

Ahora considere un juego Bimatriz con matrices de pago $A \leq 0$ y $B \leq 0$, si $(x^*;y^*)$ es un par de estrategias de equilibrio para los dos jugadores, entonces el par de vectores $(X;Y)$ definido por:

$$X = \frac{x^*}{-(x^*)^T B y^*} \wedge Y = \frac{y^*}{-(x^*)^T A y^*}$$

Es una solución del problema complementario lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_m \\ -e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geq 0 \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geq 0 \tag{2.6}$$

$$U^TX = V^TY = 0 \tag{2.7}$$

donde e_m y e_n son canónicos con dimensiones m y n respectivamente, tenga en cuenta que los vectores x e y están bien definidos por que tanto A y B son estrictamente negativos. A la inversa, si X e Y son soluciones del problema de complementariedad lineal anterior, entonces *no pueden ser iguales a cero, y los vectores:*

$$x^* = \frac{X}{e_m^T X} \wedge y^* = \frac{Y}{e_n^T Y}$$

se puede demostrar que es un par de estrategias de equilibrio mixtas.

Ejemplo 2.2.2 *El ejemplo principal de una función de silla de montar es la función escalar lagrangiana $L(x,\mu,\lambda)$ con la variable primal x como un argumento y el par dual (μ,λ) como segundo argumento. Si $L : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ denota una función de silla de montar arbitraria, sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ dos conjuntos cerrados dados, el problema de silla de Montar asociado con este triple (L,X,Y) consiste en encontrar un par de vectores $(x,y) \in XxY$, llamado un punto de Silla de montar tal que:*

$$L(x,v) \leq L(x,y) \leq L(u,y); \;\; \forall \;\; (u,v) \in XxY \tag{2.8}$$

Donde X,Y son conjuntos convexos[2] *y L es continuamente diferenciable y çonvexo-concava.*[3]
El problema de silla de Montar puede ser formulado como una VI, específicamente decimos que $L(x,y)$ es convexo-concavo si $L(.,y)$ es convexo para cada $y \in Y$ fijo, pero arbitrario y $L(x,.)$ es concavo para cada $x \in X$ fijo, pero arbitrario.
La segunda desigualdad en (2.4) dice que x es un mínimo global de la función $L(.,y)$ en el conjunto X, de manera similar la primera desigualdad dice que y es un máximo global de $L(x,.)$ en Y.
Usando el principio de mínimo y máximo, diremos que si L es convexo-concavo y X e Y son conjuntos convexos cerrados, entonces (x,y) es un punto de silla de montar si solo si (x,y) resuelve el $VI(XxY,F)$ donde

$$F(u,v) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_u L(u,v) \\ -\nabla_v L(u,v) \end{pmatrix}; (u,v) \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{2.9}$$

En general, si la función de silla de montar $L(u,v)$ es dos veces continuamente diferenciable esto significa: $\frac{\partial^2 L(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 L(u,v)}{\partial v \partial u}$ entonces la función $F(u,v)$ definida en (2.5) es continuamente

[2]Dado $K \subset \mathbb{R}^n$, K es convexo si y so1o si $\forall x_1 \;\; y \;\; x_2 \in K, \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ se cumple: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$
[3]f es cóncava en $K \Leftrightarrow \forall x_1 \;\; y \;\; x_2 \in K, \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ se cumple: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

diferenciable y más aún su matriz jacobiana dado por:

$$J(F(u,v)) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{uu}L(u,v) & \nabla^2_{uv}L(u,v) \\ -\nabla^2_{uv}L(u,v)^T & -\nabla^2_{vv}L(u,v)^T \end{pmatrix}$$

Debido a que las dos submatrices $\nabla^2_{uu}L(u,v)$ y $\nabla^2_{vv}L(u,v)$ son simétricas y las dos submatrices fuera de la diagonal $\nabla^2_{uv}L(u,v)$ y $-\nabla^2_{uv}L(u,v)$ son transpuestas negativas el uno al otro, se sigue que $J(F(u,v))$ es bisimétrico.

Asociado a todos los problemas de silla (L;X,Y) hay un par de problemas de optimización:

$$\left.\begin{matrix} minimizar\varphi(x) \\ sujeto\ \ x \in X \end{matrix}\right\} \quad \wedge \quad \left\{\begin{matrix} maximizar\psi(y) \\ sujeto\ \ y \in Y \end{matrix}\right. \tag{2.10}$$

donde $\varphi(x) \equiv sup\{L(x,v) : v \in Y\} \ \wedge \ \psi(y) \equiv inf\{L(u,y) : u \in X\}$son posiblemente funciones de valor extendido; es decir, es posible que $\varphi(x)$ sea igual a ∞ para algunos $x \in X$ y que $\psi(y)$ sea igual a $-\infty$ para algunos $y \in Y$.
Sustituyendo las definiciones de $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ en (2.6) podemos escribir este par de problemas como un minimax y un problema de maximin. respectivamente,

$$\inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} L(x,y) \ \wedge \ \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} L(x,y)$$

La relación entre estos problemas de optimización y el problema de la silla de montar se enuncia en el siguienteresultado

Teorema 2.2.1 *Siendo $L : XxY \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:*

$$\inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} L(x,y) \geq \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} L(x,y) \tag{2.11}$$

Además, para el par $(\bar{x},\bar{y}) \in XxY$, las siguientes tres afirmaciones son equivalentes

(a) $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto de silla de L en XxY

(b) $\bar{x}$ es un minimizador de $\varphi(x)$ en X, $\bar{y}$ es un maximizador de $\psi(y)$ en Y y se verifica la desigualdad (2.11).

(c) $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{y}) = L(\bar{x},\bar{y})$

Demostración:

$(a) \to (b)$: Supongamos que $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto de silla de montar de L en XxY. Para todos los $(x,y) \in XxY$, tenemos:

$$L(\bar{x},y) \leq L(\bar{x},\bar{y}) \leq L(x,\bar{y}) \tag{2.12}$$

A partir de esta desigualdad se puede establecer lo siguiente:

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} L(x,y) \leq \varphi(\bar{x}) \leq L(\bar{x},\bar{y}) \leq \psi(\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y) \tag{2.13}$$

De hecho, la primera y la última desigualdad son obvias, mientras que las dos desigualdades del medio son la consecuencia de la condición de silla de montar (2.8). Así se mantienen las igualdades (2.9). Esto también establece que $\bar{x}$ minimiza $\varphi(x)$ en X y $\bar{y}$ maximiza $\psi(y)$ en Y

$(b) \to (c)$: Si (b) se mantiene, entonces

$$\varphi(\bar{x}) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} L(x,y) = \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y) = \psi(\bar{y})$$

Además tenemos

$$\psi(\bar{y}) \leq L(\bar{x},\bar{y}) \leq \varphi(\bar{x})$$

Así se verifica la parte (c).

$(c) \to (a)$: Si (c) se mantiene, entonces tenemos

$$L(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\bar{x}) \equiv \sup_{y\in Y} L(\bar{x},y)$$

que establece la desigualdad de la izquierda en (2.8). La desigualdad de la derecha sigue de manera similar. ■

2.2.2. Conceptual

2.2.2.1. Problemas de Equilibrio de Nash

La teoria de juego no cooperativo fue presentada por J-Nash quien recibio el premio Nobel de Ciencias Economicas en 1994 por tal contribución.

Resulta que el calculo de un equilibrio de Nash puede lograrse resolviendo una desigualdad variacional.

En un juego no cooperativo hay N jugadores, cada uno de los cuales tiene una determinada función de costo y un conjunto de estrategias que pueden depender de las decisiones de los otros jugadores.

Supongamos que el conjunto de estrategias del jugador "i" es K_i el cual sera un subconjunto de $\mathbb{R}^{n_i}$ y es independiente de las estrategias de los otros jugadores.

La función de costo $\theta_i(x)$ del jugador "i" depende de las estrategias de todos los jugadores, los cuales estaran descritos por el vector x que consiste de los subvectores $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ para $i = 1,2,...,N$. El problema del jugador i es determinar para cada tupla $\bar{x}_i \equiv (x_j : j \neq i)$ fija, pero arbitraria de las estrategias de los otros jugadores, una estrategia óptima x_i que resuelva el problema de minimización de costos en la variable y_i

$$\begin{array}{rc} minimizar & \theta_i(y_i, \bar{x}_i) \\ sujeto\ \ a: & y_i \in K_i \end{array}$$

Denotando el conjunto solución de este problema de optimización por $S_i(\bar{x}_i)$ se debe entender en la notación $\theta_i(y_i, \bar{x}_i)$ que la función θ_i está evaluada en el vector cuyo $j - esimo$ subvector es x_j para $j \neq i$ y cuyo $i - esimo$ subvector es y_i

Un equilibrio de Nash es una tupla de estrategias $x = (x_i : i = 1,2,...N)$ con la propiedad de que para cada i se tiene que $x_i \in S_i(\bar{x}_i)$, en palabras, un Equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador, tal que ningún jugador puede reducir el costo desviando unilateralmente su acción de estrategias designada.

El siguiente resultado proporciona un conjunto de condiciones suficientes bajo las cuales se puede obtener un equilibrio de Nash resolviendo un VI.

Proposición 2.2.2 *Siendo K_i un subconjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^{n_i}$, supongamos que para cada tupla fija $\bar{x}_i$, la función $\theta_i(y_i; \bar{x}_i)$ es convexa y continuamente diferenciable en y_i entonces una tupla $x = (x_i : i = 1,2,...N)$ es un equilibrio de Nash si solo si $x \in SOL(K,F)$, donde*

$$K = \prod_{i=1}^{N} K_i \ \ \wedge F_{(x)} = (\bigtriangledown_{x_i} . \theta_i(x))_{i=1}^{N}$$

Demostración:

Por convexidad y el principio mínimo sabemos que x es un equilibrio de Nash si y solo si para cada $i = 1,2,...N$ se tiene:

$$(y_i - x_i)^T \nabla_{x_i} \theta_i(x) \geq 0; \ \ \forall y_i \in K_i \tag{2.14}$$

Así, si x es un equilibrio de Nash, entonces al concatenar estos VIs individuales, se sigue fácilmente que x debe resolver el VI prescrito.
A la inversa, si $x \equiv (x_i : i = 1,2,...,N)$ resuleve el $VI(K,F)$, entonces

$$(y-x)^T F(x) \geq 0; \forall y \in K$$

En particular, para cada $i = 1,2,...,N$, sea y la tupla cuyo subvector j es igual a x_j para $j \neq i$ y el subvector i es igual a y_i, donde y_i es un elemento arbitrario del conjunto K_i. La desigualdad anterior se convierte en (2.14). ■

Observación 2.2.4 *De lo enunciado se tiene:*

- *El conjunto K de la proposición anterior es el producto cartesiano de conjuntos de dimensiones inferiores.*
- *Un caso particular del problema de Equilibrio de Nash es cuando* $N = 2$ *y* $\theta_1(x) = -\theta_2(x)$. *Este se denomina el problema de silla de montar, el cual en la terminología teórica de los juegos, recibe el nombre de problema de dos personas de suma cero , es decir la ganancia de un jugador es igual a la del otro jugador, pero en pérdida.*

Von Neumann y Morgenstern, tras haber estudiado los juegos bipersonales de suma cero, ampliaron sus estudios al caso de los juegos con más de dos personas; pero teniendo en cuenta posibles alianzas (agrupaciones de dos o más jugadores para actuar de manera coordinada), en otras palabras, se alejaron de los juegos estrictamente competitivos. Fue John Nash, quien en los años 50 del siglo XX, extendió la teoría de juegos para juegos con ”n” personas sin cooperación, en los que las alianzas estan prohibidas. Se ocupó especialmente de juegos competitivos de suma no cero (tanto para dos, como para más personas) y llegó a establecer la idea de equilibrio, que se conoce como equilibrio de Nash.

El método de Nash es aparentemente simple, por lo menos, en cuanto a su idea principal. En efecto, supongamos que diversos jugadores acaban de realizar un juego y cada uno de ellos ha seleccionado una estrategia determinada. Una vez conocido el resultado del juego, se pregunta a cada jugador si considera que su manera de jugar ha sido suficientemente satisfactoria, o dicho de otra manera, si hubiera preferido actuar de manera distinta. Si la respuesta es positiva, es decir, si todos los participantes consideran que han elegido una buena estrategia, el resultado del juego es un punto de equilibrio, en el sentido de Nash.

Veamos la aplicación de esta idea a un caso concreto.

Ejemplo 2.2.3 *La siguiente matriz da los resultados de un juego de suma no cero:*

Cuadro II.1: Resultados de un juego de suma cero

	Estrategia 1	Estrategia 2
Estrategia 1	(1,100)	(0,1)
Estrategia 2	(2,0)	(5,2)

Fuente: Elaboración propia

Dos jugadores eligieron la estrategia 2. Una vez conocido el resultado, ambos estan conformes con su manera de jugar y consideran que es lo mejor que podían hacer. El primer jugador (estrategias por filas) considera que ha ganado 5, que es el máximo que podía obtener, mientras que el segundo, una vez sabido que el primero ha elegido la estrategia 2, también está de acuerdo con su elección, pues ha ganado 2 en lugar de no ganar nada.

Podría discutirse la solución anterior argumentando que, si bien la elección del primer jugador es "buena" por que la estrategia elegida (2) es dominante, el segundo jugador pensará en algún momento que elegir la primera estrategia podría haberle dado una ganancia de 100. Pero en un juego competitivo, en el que cada jugador piensa en maximizar sus ganancias, este resultado no se daría si se considera que el jugador 1 elige de manera racional.

Por lo tanto, de los cuatro resultados posibles, el único del cual no se arrepentirán ninguno de los dos jugadores es de (5,2); este resultado es **un punto de equilibrio de Nash***. En cualquier partida con un resultado distinto alguno de los dos jugadores pondrá objeciones a su propia manera de jugar, por lo que, en palabaras de Nash, sería una solución inestable.*

El método aplicado para obtener la solución anterior parece interesante y da una solución recional. En este contexto, Nash demostró que cualquier juego finito entre dos personas tiene al menos un punto de equilibrio, extendiendo de esta manera el teorema de minimax de Von Neuman. En los juegos de suma cero, el punto de equilibrio coincide con el que se obtiene por el teorema de minimax; pero el interés del resultado de Nash es que hay puntos de equilibrio en los juegos de suma no cero, como se acaba de abordar en el ejemplo anterior, e incluso que las soluciones son razonables.

El ejemplo anterior ha mostrado que cuando se está frente a un juego de suma distinta de cero, a veces, es posible utilizar estrategias de cooperación que permiten mejorar los resultados; el problema aparece cuando esta mejora no se reparte de manera equitativa entre los jugadores. Dicho de otra manera, el problema es como repartir los excedentes y una manera racional de hacerlo es la que convence más a los participantes.

Ejemplo 2.2.4 *Una persona quiere comprar el coche usado que un amigo suyo está dispuesto a venderle. Para fijar el precio, van los dos a tasarlo a una tienda de compra-venta de autos; allí les dicen que están dispuestos a comprarlo por 1000 dolares y a venderlo por 1300 dolares, ganando un minimo de 300 dolares por la transacción. Si hacen la venta directamente sin pasar por la tienda, es evidente que se ahorrran los 300 dolares y pueden decidir que se repartirán el ahorro entre los dos. En este caso, lo más racional parece ser un reparto a partes iguales, de modo que la venta se hará por 1150 dolares ganando cada uno 150 dolares.*

Lo anterior parece la solución más racional, pero no la única. Uno de los dos participantes en el juego, por ejemplo el comprador, podría decidir que no está dispuesto a pagar más de 1100 dolares, con lo que el vendedor, si acepta, aún ganaría 100 dolares respecto al precio tasado. Y al contrario, podría ser el vendedor el que fijará un precio mínimo de 1250 dolares con el argumento de que el comprador todavía se ahorra 50 dolares.
Obsérvese que si uno de los dos rechaza la oferta del otro, con el argumento racional de que el reparto de beneficios no es "justo", se está perjudicando a sí mismo, puesto que el precio sigue siendo inferior al que debería pagar en la tienda.

Pero la idea de reparto "*justo*" de los beneficios no siempre es tan evidente y, a veces, puede existir más de una solución considerada totalmente razonable. El juego conocido como el dilema del prisionero (término asignado a un tipo de juegos de suma no cero planteados por Albert W Tucker en 1950) es uno de los más famosos problemas de la teoría de juegos.

Este dilema es un ejemplo simple de lo que sucede en muchas situaciones en las que se produce una confrontación entre dos fuerzas, que pueden optar por enfrentarse o por cooperar, como son las gerras de precios, las campañas de publicidad o las carreras armamentísticas.

Aunque el nombre del dilema hace referencia a un prisionero, y puede formularse como un juego entre dos delincuentes que dudan entre declararce inocentes o aceptar su culpa e inculpar a su adversario. Veamos su aplicación en un enfrentamiento militar que ha estado y, por desgracia, sigue estando presente en nuestro mundo actual con demasiada frecuencia. Su formulación es la siguiente:

Ejemplo 2.2.5 *Dos potencias, P1 y P2, que están enfrentadas, deben decidir su politica armamentista. Cada una puede optar por dos estrategias de manera independiente:*

A : negarse a coopera, es decir, armarse como preparación para una posible gerra.

B :cooperar, es decir, desarmarse o, cuanto menos,ponerse de acuerdo en una prohibición de determinadas armas.

Los cuatro posibles resultados, (A;A), (A;B), (B,A) y (B,B), en los que la primera coordenada es la estrategia de P1 y la segunda es la estrategia de P2, pueden expresarse mediante la siguiente tabla:

Cuadro II.2: Posibles resultados de las potencias P1 y P2

		Potencia P2	
		Opción A	Opción B
Potencia P1	Opción A	(A,A) Carrera armamentista	(A,B) Sólo se arma P1
	Opción B	(B,A) Sólo se arma P2	(B,B) Control de las armas, o desarme

Fuente: Elaboración propia

Podrían asignarse valores (pagos numéricos) al resultado de cruzar las distintas estrategias teniendo en cuenta que, en este caso, los pagos serán distintos para cada jugador; por lo que en cada casilla, habrá un par de números: el primero correspondiente a lo que gana P1 y el segundo, a lo que gana P2. De esta manera se tendrá una matriz de pagos como la siguiente:

Cuadro II.3: Matriz de pagos

		Potencia P2	
		Opción A	Opción B
Potencia P1	Opción A	(2,2)	(5,0)
	Opción B	(0,5)	(4,4)

Fuente: Elaboración propia.

Si se interpreta los números como ganancias, el dilema resulta evidente. ¿Qué debe hacer P1? Para cualquiera de las dos opciones de P2, P1, resulta favorecido si se arma. En efecto, si P2 elige A, P1 ganará 2 si se arma y 0 si no lo hace; mientras que si P2 elige B, P1 ganará 5 si se arma y 4 si no lo hace. De manera simétrca, sucede lo mismo con P2, ya que para las dos posibles estrategias de P1, armarse da mayores ganancias. Así, se dice que la solución

(A,A), ambas potencias se arman, con un pago de 2 para cada una de ellas, es la solución de equilibrio no cooperativo hacia la que parece que el juego está dirigido.

Sin embargo, para cada potencia es mejor que la otra se desarme (las ganancias son mayores) y, además, el máximo beneficio global se obtiene cuando ambas potencias se desarman. Entonces, si las potencias no cooperan, el mejor resultado global (4,4) no puede producirse, pero, si una potencia coopera, dado que desconoce lo que va a hacer la otra, asume un riesgo grande (obtendrá el menor pago si la otra potencia no coopera), con lo cual la confianza se convierte en el elemento esencial del juego, y sin ella, el mejor resultado es totalmente inestable, porque cada potencia tratará de protegerse de una posible no cooperación del adversario.

En otras muchas situaciones de la vida real, en general menos extremas que la planteada, es posible acercarse a situaciones en las que la cooperación, aunque dificil, sea factible.

Habitualmente el juego se realiza varias veces y entonces elementos importantes como la reputación y la confianza pueden intervenir de forma significativa, con lo cual los jugadores pueden darse cuenta de las ventajas mutuas. En el ejemplo mostrado, el desarme tiene evidentemente muchas ventajas frente a una carrera armamentista desenfrenada que, además de los grandes costos, puede llevar finalmente al desastre total; sin embargo, la cooperación es algo complejo que sólo puede alcanzarse a largo plazo.

2.2.3. Teórico-conceptual

2.2.3.1. El mapa natural y el mapa normal

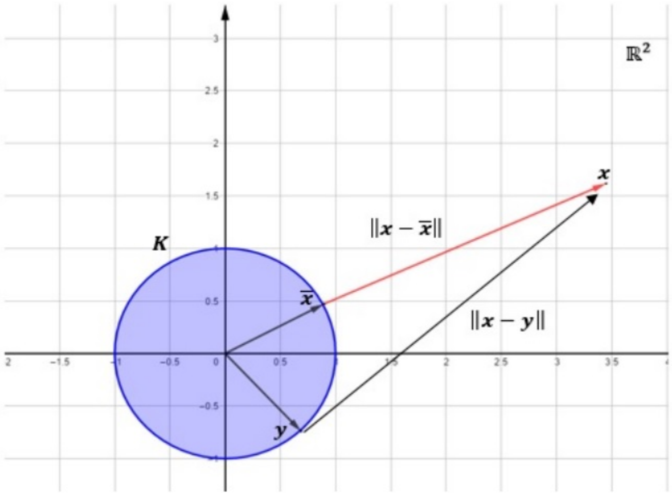
Sea K un subconjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$, es bien sabido por el análisis convexo que para cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ existe un vector único $\bar{x} \in K$ que está más cerca de x en la norma euclidiana.

Ejemplo 2.2.6 *Consideremos el subconjunto convexo cerrado $K \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que:*
Entonces para cada $x = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe un único $\bar{x} = (\bar{x}_1;\bar{x}_2) \in K$ tal que se verifica:

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\|; \forall y \in K$$

Ejemplo 2.2.7 *Para cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ el vector más cercano $\bar{x}$ al vector anterior se llama proyección (euclidiana) de x en K y denota $\Pi_K(x)$.*
La asignación $\Pi_K : x \longrightarrow \Pi_K(x)$ se denomina proyector euclidiano sobre K. Por definición,

Figura II.5: Representación del vector mas cercano de K a cualquier elemento de $\mathbb{R}^2$mediante la norma euclidena.



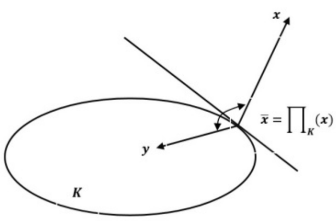
Fuente: Elaboración propia

$\Pi_K(x)$ es la solución única del siguiente problema de minimización convexo en la variable y, donde x se considera fija.

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}(y-x)^T(y-x)$$
$$sujeto\ \ a: \ \ y \in K$$

Cuando K es poliédrico[4] *calcular la proyección en K no es, en general, una tarea trivial. Resumimos las propiedades esenciales del operador Π_K en el siguiente teorema, además la figura siguiente ilustra la proyección de un punto en un conjunto convexo cerrado y la propiedad variacional de la proyección.*

Figura II.6: La proyección de un punto sobre un conjunto cerrado convexo.



Fuente:Facchinei y Pang, 2002, p.77

[4] Un poliedro es un conjunto convexo conformado por la intersección finita de semiespacios.

Teorema 2.2.2 *Sea K un subconjunto convexo cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

(a) *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\Pi_K(x)$ existe y es único.*

(b) *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\Pi_K(x)$ es el único vector $\bar{x} \in K$ $(\bar{x} = \Pi_K(x))$ que satisface la desigualdad*

$$(y - \bar{x})^T(\bar{x} - x) \geq 0; \ \ \forall y \in K \tag{2.15}$$

(c) *Para cualquier par de vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ se cumple:*

$$(\Pi_K(u) - \Pi_K(v))^T(u - v) \geq \|\Pi_K(u) - \Pi_K(v))\|_2^2$$

(d) *Π_K como función de "x" no es expansiva, es decir, para cualquiera de los dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ se cumple:*

$$\|\Pi_K(u) - \Pi_K(v)\|_2 \leq \|u - v\|_2$$

Por lo tanto, Π_K es una función continua global de Lipchitz en $\mathbb{R}^n$.

(e) *La función de distancia al cuadrado $\rho(x) \equiv \frac{1}{2}\|x - \Pi_K(x)\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ verifica:*

$$\nabla\rho(x) = x - \Pi_K(x)$$

Demostración:

Ver[1], pag 78. ■

Volviendo al $VI(K,F)$, usamos la desigualdad (2.15) para establecer el siguiente resultado que da una formulación equivalente de la ecuación no moderada de este problema.

Proposición 2.2.3 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo y $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ arbitrario, se sostiene que:*

$$[x \in SOL(K,F)] \Leftrightarrow [F_K^{nat}(x) = 0]$$

donde

$$F_K^{nat}(v) \equiv v - \Pi_K(v - F(v))$$

Demostración:

($\Longleftarrow$) Si $x \in SOL(K,F)$ entonces satisface el problema de desigualdad variacional $VI(K,F)$

dado por:

$$(y-x)^T F(x) \geq 0, \ \ \forall y \in K$$

el cuál equivale a:

$$(y-x)^T (x-(x-F(x))) \geq 0, \ \ \forall y \in K...(1)$$

Por el teorema anterior se tiene que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ el vector $\overline{x} = \Pi_K(x)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$(y-\overline{x})^T (\overline{x}-x) \geq 0, \ \ \forall y \in K...(2)$$

Comparando (1) y (2) se concluye:

$$x = \Pi_K(x-F(x))$$

$$x - \Pi_K(x-F(x)) = 0$$

equivalentemente $F_K^{nat}(x) = 0$. ■

De la proposición (2.2.3). Podemos derivar una formulación de ecuación no suave alternativa de la VI(K,F).

Proposición 2.2.4 *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *cerrado y convexo y* $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *arbitrario. Un vector* $x \in SOL(K,F)$ *si solo si existe un vector* z *tal que* $x = \Pi_K(z)$ *y* $F_K^{nor}(z) = 0$
donde

$$F_K^{nor}(v) \equiv F(\Pi_K(v)) + v - \Pi_K(v)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $x \in SOL(K,F)$ se tiene de la proposición anterior

$$F_K^{nat}(x) = 0$$

$$x - \Pi_K(x-F(x)) = 0$$

$$x = \Pi_K(x-F(x))$$

Definiendo $z = x - F(x)$ se tendrá: $x = \Pi_K(z)$ entonces:

$$F_K^{nor}(z) \equiv F(\Pi_K(z)) + z - \Pi_K(z)$$

$$F_K^{nor}(z) \equiv F(x) + z - x$$

$$F_K^{nor}(z) \equiv z - (x - F(x))$$

Por tanto:

$$F_K^{nor}(z) \equiv 0$$

($\Leftarrow$) Como $x = \Pi_K(z) \wedge F_K^{nor}(z) = 0$, definimos $z = x - F(x)$ Luego desarrollamos:

$$F_K^{nor}(z) = 0$$

$$F(\Pi_K(z)) + z - \Pi_K(z) = 0$$

$$F(x) + z - \Pi_K(z) = 0$$

$$F(x) + z - \Pi_K(x - F(x)) = 0$$

$$x - \Pi_K(x - F(x)) = 0$$

$$F_K^{nat}(x) = 0$$

Usando la proposicion anterior se tiene

$$x \in SOL(K, F)$$

■

Es útil aclarar las dos formulaciones de la ecuación del VI(K,F).

$$F_K^{nat}(x) = 0 \;\; \wedge \;\; F_K^{nor}(z) = 0 \tag{2.16}$$

La principal diferencia entre estas dos ecuaciones en lo que respecta a su equivalencia con el VI(K,F) es que la ecuación anterior se formula utilizando la variable original del VI(K,F), mientras que la última ecuación se formula a través de un cambio de variable: $x \equiv \Pi_K(z)$

Esta diferencia se hace explícita en la proposición (2.2.3) y (2.2.4). En general, el dominio de definición de la función F_K^{nat} es el mismo que F, mientras que el dominio de definición de la función F_K^{nor} es siempre el espacio completo $\mathbb{R}^n$.

2.2.3.2. Teoría de Grado

En esta etapa se abordara la teoría de grado topológico, la cual será la herrramienta para demostrar la existencia de solucion del problema de desigualdad variacional. Esta teoría es una herramienta importante en el estudio de técnicas que permiten obtener información sobre la existencia de soluciones de ecuaciones de la forma

$$y = f_{(x)}$$

Donde x e y varían en espacios apropiados y f es una aplicación continua. El estudio en el espacio $\mathbb{R}^n$ tiene la ventaja de que al ser un Espacio de Banach, [5] dicho espacio permite que los resultados se podrán interpretar en el contexto de cualquier espacio de dimensión finita. En el desarrollo de esta teoría se trabajará con funciones definidas en conjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^n$. Muchos de los problemas a tratar generalmente encajan en el modelo siguiente:

Dado un elemento $y \in \mathbb{R}^n$, Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y una función continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ el objetivo es hallar $x \in \mathbb{R}^n$, tal que: $f(x) = y$ descartando la posibilidad de tener soluciones en la imagen de la frontera de Ω ($\partial\Omega$).

Ejemplo 2.2.8 *Consideremos la situación en que:* $n = 1$, $y = 0$, $\Omega =< -5, 11 >$ *y*

$$f_{(x)} = x^5 + 5x^4 - 2x + 6$$

En esta situación el problema $y = f_{(x)}$ *equivale a resolver la ecuación*

$$x^5 + 5x^4 - 2x + 6 = 0$$

Y se busca hallar las soluciones en el intervalo $\overline{\Omega} = [-5; 11]$.
En este proceso de resolución surge la pregunta si el problema tiene varias soluciones y además como estan distribuidas en $\overline{\Omega}$. *También surge otra interrogante, como cambiara el resultado si la ecuación* $y = f_{(x)}$ *se modifica por* $\tilde{y} = \tilde{f}_{(x)}$ *, para* $\tilde{y}$ *e* $\tilde{f}$ *cercanos en algún sentido a* f *e* y *respectivamente (estabilidad de las respuestas).*

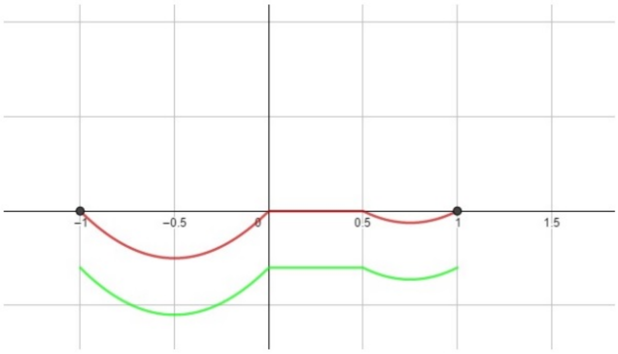
Ejemplo 2.2.9 *Consideremos la situación en que:* $n = 1$, $y = 0$, $\Omega =< -1, 1 >$ *y* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

[5] Los espacios de Banach son espacios normados en los que vale el teorema de Bolzano-Cauchy, es decir, son espacios en los que toda sucesión de Cauchy es convergente (esto se conoce actualmente como completitud)

tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\; x \in \{-1,1\} \cup [0;\frac{1}{2}] \\ x^2 + x & si\; x \in < -1; 0 > \\ x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & si\; x \in < -\frac{1}{2}; 1 > \end{cases}$$

Figura II.7: Representación de f y $\tilde{f}$



Fuente:Elaboración Propia

Siendo $\tilde{f} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *donde* $\tilde{f}_{(x)} = f_{(x)} - \varepsilon$, *con* $\varepsilon > 0$, *resulta que:*

$$f^{-1}_{\{0\}} = \{-1;1\} \cup [0;\frac{1}{2}]...(1)$$

$$\tilde{f}^{-1}_{\{0\}} = \emptyset...(2)$$

Se observa que a pesar de que f *y* $\tilde{f}$ *estan "proximos"(1) y (2) indican situaciones distintas, observemos también:*

$$\partial\Omega = \{-1;1\} \wedge 0 \in f_{(\partial\Omega)}$$

Para evitar este tipo de situaciones se considerara durante el desarrollo de la teoria de grado la condición:

$$y \in f_{(\partial\Omega)}$$

Siendo Γ una colección de triples (ϕ, Ω, p), donde Ω es un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, ϕ es un función continua $(\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{R}^n \wedge p \notin \phi_{(\partial\Omega)}$. La siguiente definición identifica el grado como una función de valor entero con Γ como su dominio.

Definición 2.2.5 *Sea un entero* $deg(\phi, \Omega, p)$ *asociado a cada triple* (ϕ, Ω, p) *en la colección* Γ. *La función "deg" (*$deg : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$*) es llamado un grado topológico si los siguientes tres axiomas se satisfacen:*

A1. El grado de la aplicación Identidad de $\mathbb{R}^n$ *definido por* $id(x) = x$ *relativo a cualquier conjunto abierto, acotado con* $p \in \Omega$ *tiene la única solución* $x = p$ *y se verifica:*

$$deg(I, \Omega, p) = 1; \ si \ p \in \Omega$$

A2. Propiedad aditiva del grado en función de segundo argumento.
Supongamos que $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ *son subconjuntos de* Ω *abiertos y disjuntos, si* $p = \phi_{(x)}$ *tiene un número finito de soluciones en* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *pero ninguna solución en* $\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ *entonces el número de soluciones en* Ω *es la suma del número de soluciones en* $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ *esto es:*

$$deg(\phi, \Omega, p) = deg(\phi, \Omega_1, p) + deg(\phi, \Omega_2, p)$$

donde

$$p \notin \phi_{(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)}$$

A3. Principio de invarianza homotópica [6] *del grado.*
Cuando calcular $deg(\phi, \Omega, p)$ *es complicado, entonces se puede hallar* $deg(g, \Omega, y_0)$ *donde* g *y* y_0 *son deformaciones continuas de* ϕ *y* p *respectivamente.*
Precisando, sean $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continuas tales que*

$$p \notin \phi_{(\partial\Omega)} \wedge p \notin g_{(\partial\Omega)}$$

Supongamos que existe:

$$H : [0;1]x\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

continua que verifica:

$$H_{(0,x)} = \phi_{(x)} \wedge H_{(1,x)} = g_{(x)}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

Se dira entonces que "H" es una homotopía entre ϕ *y* g*, o que, cada una es una "deformación continua"de la otra. Si además:*

$$H_{(t,x)} \neq p; \forall t \in [0;1] \wedge \forall x \in \partial\Omega$$

[6] Sean X e Y espacios topológicos y las funciones continuas $f : X \longrightarrow Y \wedge g : X \longrightarrow Y$ se dice que f es homotópica a g si existe una función continua $F : [0,1]xX \longrightarrow Y$ tales que $F(0,x) = f(x) \wedge F(1,x) = g(x)$. En este caso, escribimos $f \cong g$ y F se llama homotopía entre f y g.

Se dira que "H" es una homotopia admisible, respecto a "p" esto quiere decir que:

$$deg(H_{(t,.)}, \Omega, p_{(t)})$$

es independiente de $t \in [0,1]$ *con* $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $p_{(t)} \notin H_{(\partial\Omega,t)}, \forall t \in [0,1]$.

Ejemplo 2.2.10 *Sea* $\Omega = < -1, 1 >$ *;* $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f_{(x)} = x$*;* $g : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $g_{(x)} = x.e^x$*. Demuetre que f y g son homotopicas.*

Definamos:

$h : [0;1]x[-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:* $h_{(t,x)} = (1-t)f_{(x)} + tg_{(x)} \wedge y_{(t)} = 0, \forall t \in [0;1]...(1)$

$p : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:* $p_{(t)} = 0, \forall t \in [0;1]...(2)$

Afirmamos que "h" es una homotopía admisible respecto a "0" entre "f" y "g". en efecto

De (1) y (2) se tiene:

$$h_{(0;x)} = f_{(x)} \wedge h_{(1;x)} = g_{(x)}$$

Además

$$h_{(t;-1)} = (1-t).f_{(-1)} + tg_{(-1)} = t - 1 - \frac{t}{e} \neq 0; \forall t \in [0;1]$$

$$h_{(t;1)} = (1-t).f_{(1)} + tg_{(1)} = (1-t).e + t \neq 0; \forall t \in [0;1]$$

Observación 2.2.5 *De lo enunciado se tiene:*

- $deg(\phi, \Omega, p)$ *se denomina el grado de* ϕ *en p relativo a* Ω
- *Cuando* $p = 0$ *se escribirá* $deg(\phi, \Omega) = deg(\phi, \Omega, 0)$

Teorema 2.2.3 *Sea* Ω *un subconjunto abierto no vació de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *una función continua. Asuma que* $p \notin \phi_{(\partial\Omega)}$ *y* $deg(\phi, \Omega, p) \neq 0$*, entonces existe un* $\bar{x} \in \Omega$ *tal que* $\phi_{(\bar{x})} = p$*.*

Demostración:

Ver[1], pag 128. ■

Observación 2.2.6 *A la inversa, si* $p \notin \overline{\phi}_{(\Omega)}$*, entonces* $deg(\phi, \Omega, p) = 0$

En la siguiente proposición se recogen varios hechos útiles que facilitan el cálculo de grado de un función continua. En la parte *c* de esta proposición, la función $dist_\infty$ a un conjunto cerrado se define en términos de la máxima norma de vectores, es decir, para un conjunto cerrado $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$dist_\infty(x, S) \equiv \inf_{y \in S} \|x - y\|_\infty$$

Proposición 2.2.5 *Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea ϕ y Υ funciones continuas tal que $\phi;\Upsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, suponiendo que $p \notin \phi_{(\partial\Omega)}$. Las propiedades siguientes se cumplen:*

a) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,-p,\Omega)$

b) Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$ si $\phi_a(x) \equiv \phi_{(x+a)}$, entonces $deg(\phi_a,\Omega-a,p) = deg(\phi,\Omega,p)$

c) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\Upsilon,\Omega,p)$ siempre y cuando se verifique:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \|\phi_{(x)} - \Upsilon_{(x)}\|_\infty < dist_\infty(p,\phi_{(\partial\Omega)})$$

d) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\Upsilon,\Omega,p)$ siempre y cuando se verifique $\phi_{(x)} = \Upsilon_{(x)}$ para cada $x \in \partial\Omega$.

e) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,\Omega,q)$ para cada $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p-q\|_\infty < dist_\infty(p,\phi_{(\partial\Omega)})$

f) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,\Omega,q)$ para cada "q" perteneciente al mismo componente conexo de $\mathbb{R}^n - \phi_{(\partial\Omega)}$

g) $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,\Omega_1,p)$ para cada subconjunto abierto Ω_1 de Ω tal que $p \notin \phi(\Omega-\Omega_1)$

h) Si Ω_1 y Ω_2 son dos conjuntos disjuntos tal que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ entonces

$$deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,\Omega_1,p) + deg(\phi,\Omega_2,p)$$

i) Sea $\psi : \overline{\Omega'} \to \mathbb{R}^n$ constante donde $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío. Si $q \notin \psi_{(\partial\Omega')}$ entonces $deg(\phi x\psi,\Omega x\Omega',(p,q))$ está bien definido y además se verifica:

$$deg(\phi x\psi,\Omega x\Omega',(p,q)) = deg(\phi,\Omega,p).deg(\psi,\Omega',q)$$

Demostración:

Ver[1], pág 129. ■

Proposición 2.2.6 *Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sean $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y continua, para cada $p \in \phi_{(\Omega)}$ se cumple $deg(\phi,\Omega,p) = \pm 1$*

Demostración:

Ver[1], pág 130. ■

Observación 2.2.7 *De lo establecido se tiene*

- *La propiedad de escisión implica que* $deg(\phi,\Omega,p) = deg(\phi,\Omega_1 \cup \Omega_2,p) = deg(\phi,\Omega_2,p)$, *este grado común se denomina indice de* ϕ *en "x" y se denota por* $ind(\phi,x)$.

- *En particular, si* $\phi(x) = Ax + b$ *es una función afín no singular. Se tiene que para algunas matrices no singulares* [7] $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, *un vector* $b \in \mathbb{R}^n$, *y un subconjunto abierto* Ω *que contiene al vector* $\bar{x} = A^{-1}b$ *se cumple:*

$$deg(\phi,\Omega) = ind(\phi,\bar{x}) = \pm 1 = sgn(det(A))$$

La identidad $deg(\phi,\Omega) = sgn(det(A))$ es un punto de partida del enfoque alternativo para definir el grado, además en los resultados se puede generalizar a funciones no lineales.

Sea ϕ continuamente diferenciable en una vecindad del vector $\bar{x}$, suponiendo que la matriz jacobiana $J\phi(x)$ es no singular, entonces, por el teorema de la función inversa, se tiene que ϕ es un homeomorfismo local en x. Es decir existe una vecindad abierta N de $\bar{x}$ tal que la restricción $\phi/N : N \longrightarrow \phi(N)$ es un homeomorfismo con respecto a cualquier vecindad abierta N' de $\bar{x}$ contenido adecuadamente en N con $p \equiv \phi(\bar{x}) \wedge deg(\phi,N',p) = ind(\phi,\bar{x}) = sgn(det(J\phi(x)))$

La siguiente proposición es una generalización adicional de este último resultado.

Proposición 2.2.7 *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $\Upsilon \wedge \phi$ *dos funciones continuas definidas en* $\overline{\Omega}$. *Supóngase que* $\overline{x}$ *es un vector en* Ω *tal que* $\overline{x}$ *es un* $p-punto$ *aislado de* Φ *y*

$$lim_{\overline{x} \neq x \to \overline{x}} \frac{\Phi(x) - \Upsilon(x)}{\|x - \overline{x}\|} = 0 \wedge \liminf_{\overline{x} \neq x \to \overline{x}} \frac{\|\Upsilon(x) - \Upsilon(\overline{x})\|}{\|x - \overline{x}\|} > 0 \tag{2.17}$$

Las dos proposiciones siguientes se verifican

(a) $\overline{x}$ *es un p-punto aislado de* Υ

(b) $ind(\Phi,\overline{x})$ *y* $ind(\Upsilon,\overline{x})$ *estan bien definidos y son iguales.*

Demostración:

Ver[1], pag 131. ■

De la proposición anterior el primer límite dice que $\Upsilon_{(x)}$ es una **aproximación de primer orden (FOA)** de $\Phi(x)$ para x cerca de $\overline{x}$ el cual es $\Phi_{(x)} = \Upsilon_{(x)} + e_{(x)}$, donde la función diferencia

[7] Una matriz $A \in \mathbb{R}^n$ es no singular cuando su determinante es diferente de cero (existe su matriz inversa)

$e_{(x)}$ es pequeño comparado con $\|x-\bar{x}\|$.

El segundo límite en la proposición (2.2.7) es una condición de crecimiento local de la función de aproximación Υ cercana a $\bar{x}$, de hecho este limite es equivalente a la existencia de una constante $c > 0$ tal que para todos los x suficientemente cerca de $\bar{x}$ se tiene

$$\Upsilon(x) = \Upsilon(\bar{x}) + h(x) \;\; donde \;\; \|h(x)\| \geq c\|x-\bar{x}\|$$

Si $\Phi(x)$ es F-diferenciable en $\bar{x}$, entonces

$$\Upsilon_{(x)} \equiv \Phi_{(\bar{x})} + J(\Phi(\bar{x}))(x-\bar{x})$$

satisface el primer límite de (2.11), el segundo límite se cumple si $J(\Phi(\bar{x}))$ es no singular.

La parte (h) de la proposición (2.2.5) se refiere a una descomposición del dominio Ω, está propiedad se sigue fácilmente del axioma (A2) de la definición de grado.

Usando la propiedad de la descomposición del dominio, podemos establecer el siguiente resultado el cual nos da una identidad para calcular el grado en términos del índice.

Proposición 2.2.8 *Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $\Phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Siendo $p \notin \Phi_{(\partial\Omega))}$ tal que $\Phi^{-1}(p)$ es finito, entonces se cumple:*

$$deg(\Phi, \Omega, p) = \sum_{x \in \Phi^{-1}(p)} ind(\Phi, x)$$

Demostración:

Ver[1], pág 132. ∎

Suponiendo que el conjunto de soluciones de $\Phi_{(x)} = p$ es no vacío y limitado, donde Φ es continua y definida en un subconjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $deg(\Phi, \Omega, p)$ es independiente de Ω siempre y cuando Ω sea un conjunto abierto limitado que contenga $\Phi^{-1}(p)$ y $\overline{\Omega}$ este contenido en D. Este grado común puede considerarse como un índice de $\Phi^{-1}(p)$.

El siguiente resultado muestra que este índice se puede calcular fácilmente mediante una secuencia de funciones continuas que se aproximan a Φ uniformemente en conjuntos compactos.

Teorema 2.2.4 *Sea $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, una función continua definida en la cerradura del conjunto abierto D y sea $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Phi^{-1}(p)$ es no vacío y compacto. Sea Ω un conjunto* *abierto acotado que contiene $\Phi^{-1}(p)$ tal que $\overline{\Omega} \subseteq \overline{D}$. Entonces cada secuencia de funciones continuas Φ^k, convergen uniformemente a Φ en $\overline{\Omega}$,*

$$deg(\Phi, \Omega, p) = \lim_{k \to +\infty} deg(\Phi^k, \Omega, p)$$

Además, el límite es siempre alcanzado después de un número finito de pasos.

Demostración:

Ver[1], pág 133. ■

Empleamos los resultados presentados hasta ahora para establecer una condición suficiente para la sobreyectividad de una función no lineal.

Proposición 2.2.9 *Sea $\Phi : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, si se verifica que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{x^T \Phi(x)}{\|x\|} = \infty \tag{2.18}$$

entonces, $\Phi(\mathbb{R}^r) = \mathbb{R}^n$

Demostración:

Ver[1], pág 133. ■

2.3. Definiciones de términos básicos

- $\overline{\Omega}$: Clausura topológica del conjunto Ω
- $\partial\Omega$: Frontera topoló gica del conjunto Ω
- $VI(K, F)$: Problema de desigualdad variacional
- $CP(K, F)$: Problema de complementariedad lineal
- $NCP(K, F)$: Problema de complementariedad no lineal.
- $\nabla\theta \equiv (\frac{\partial\theta}{\partial x_j})$: es el gradiente de una función $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $\nabla^2\theta \equiv (\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i x_j})$: es la matriz hessiana de una función $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- F_K^{nat} : es el mapa natural asociado al par (K, F)

- F_K^{nor} : es el mapa normal asociado al par (K,F)
- $dom(\Phi)$: es el dominio de una (multi) función Φ
- $ran(\Phi)$: es el rango de una (multi) función Φ
- $gph(\Phi)$: es el grafico de una (multi) función Φ
- $deg(\Phi,\Omega,p)$: es el grade de Φ en p relativo a Ω
- $deg(\Phi,\Omega) \equiv deg(\Phi,\Omega,0)$
- $ind(\Phi,x)$: es el indice de Φ en x
- $\prod_K(x)$: es la proyección euclideana de x en el conjunto K
- $NE_{(K,u)}$: Equilibrio de Nash del juego.

Capítulo III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General

El problema de Equilibrio de Nash admite formulación como una desigualdad variacional y con esta formulación el problema presenta al menos una solución en espacios de dimensión finita.

Hipótesis especifica

- El problema de Equilibrio de Nash admite ser formulado como un problemas de desigualdad variacional..

- Existe al menos una solución al problema de Equilibrio de Nash en espacios de dimensión finita.

3.1.1. Capítulos fuera de Variables (cualitativo)

La variable que se presentan en este trabajo es la formulacion del problema de equilibrio de Nash como una desigualdad variacional.

3.1.2. Capítulos dentro de Variables (cuantitativo)

En este trabajo la variable indicada no sera sometida a procesos estadisticos, por tanto no se aplica.

3.2. Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores
Problema de Desigualdad variacional $VI(K,F)$	Problema de complementariedad CP	Se considera K un cono y K^* su cono dual, los cuales son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo: $x \in K$, $F_{(x)} \in K^*$, $x \perp F_{(x)}$
	Problema de complementariedad no lineal $NCP(K,F)$	Se considera K un cono, además debe ser es el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo: $x \geq 0$, $F_{(x)} \geq 0$, $x_i.F_i(x) = 0, \forall i = 1,2,3,...,n$

Capítulo IV

METODOLOÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis realizará una investigación de tipo básica científica y por su diseño es no experimental debido a que la variable formulación del problema de Equilibrio de Nash como un problema de Desigualdad variacional solo es observada y estudiada. Presenta un enfoque transversal debido a que esta variable no es manipulada en su estudio. Tiene una alcance descriptivo, pues se busca especificar y demostrar las propiedades importantes de la variable. No se pretende medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre las variables, pues el objetivo no es indicar si existe una relación directa o inversa entre variables de estudio. El trabajo a desarrollar pertenece a la línea de la optimización. La metodología a emplear durante la ejecución del proyecto consiste en un enfoque inductivo deductivo de las definiciones teoremas y corolarios, así como también de los resultados de recientes investigaciones.

4.2. Población y muestra

Al tratarse de un trabajo teórico con aplicaciones a problemas particulares, nuestra población sería la rama de la optimización y la muestra sería la formulación del problema de Equilibrio de Nash como una Desigualdad Variacional $VI(K;F)$.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de información documental

Para la realización de este proyecto se reviso material bibliográfico especializado y recopilación obtenida vía Internet relacionada al tema en interés.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

Por ser una investigación teorica, la técnica en mención no se aplica.

4.5. Análisis y procesamiento de datos

Luego de la recopilación de la información necesaria para sustentar nuestra tesis, se realizará el analisis de cada definición, teorema, corolario (si fuera el caso) para organizarlos; de tal manera que, serán enunciados por el orden de prioridad (información básica y fundamental hasta teoremas) que serán necesarios para la sustentación de la tesis. Por la característica propia del trabajo, no se realizó procedimiento estadístico alguno.

Capítulo V

RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

5.1.1. Formulación variacional del problema de Equilibrio de Nash

Un juego de dos personas (bimatrix) es un caso especial de un juego no cooperativo de $n-personas$. Para un juego de $n-personas$ se define un conjunto "N" de "n" jugadores, cada jugador $i \in N$ tiene asociado a él un conjunto de estrategias $K_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, ($n_i$ es un entero positivo) que pueden depender de las estrategias de los otros jugadores y una función utilidad

$$u_i : K \longrightarrow \mathbb{R},\ donde:\ K \equiv \prod_{i\in N} K_i \wedge u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$$

En este problema, cada jugador "i" intentará maximizar su utilidad para cada estrategia fija x_j de sus oponentes con $j \neq i$.

Un equilibrio de Nash del juego $NE(K,u)$ se define como un vector de estrategias $x^* \in K$ en el que ningún jugador puede aumentar su utilidad desvíandose unilateralmente de su estrategia de equilibrio x_i^*. Esto significa que para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$ se debe verificar:

$$u_i(x_i^*; x_{N-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{N-i}^*); \forall x_i \in K_i\ donde:\ x_{N-i} = (x_j : j \in N; j \neq i)$$

Por lo tanto, un equilibrio de Nash se caracteriza por la solución simultánea del siguiente problema de maximización de la utilidad para cada jugador $i \in N$

$$\max_{x_i \in K_i} u_i(x_i; x_{N-i}) \tag{1.1}$$

Para obtener la formulación del problema de Equilibrio de Nash como una desigualdad variacional, supóngase que cada conjunto de estrategias K_i es no vacío, cerrado, convexo y que cada jugador tiene al menos una estrategia, además, la función de utilidad $u_i(x_i;x_{N-i})$ para cada jugador i es una vez continuamente difereciable y pseudo-concava [1] con respecto a x_i para cada x_{N-i} fijo.

Dado que x_i^* es una solución optima del problema $(1{,}1)$ del jugador "i", se sigue del principio variacional de optimalidad que x_i^* satisface:

$$-\nabla_{x_i} u_i(x_i^*;x_{N-i}^*)^T.(x_i - x_i^*) \geq 0; \forall x_i \in K \tag{1.2}$$

Por consiguiente, si x^* es un punto de equilibrio de Nash entonces $x^* \in K$ y la siguiente desigualdad se mantiene:

$$F(x^*)^T.(x - x^*) \geq 0, \forall x \in K$$

donde:

$$F : \prod_{i \in N} \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow \prod_{i \in N} \mathbb{R}^{n_i} \; es\ dado\ por: \; F_i(x) = -\nabla_{x_i} u_i(x),\ i \in N \tag{1.3}$$

Así, x^* es una solución del problema de desigualdad variacional $VI(K,F)$ por consiguiente, no es dificil verificar que cualquier solución x^* de $VI(K,F)$ sea un punto de equilibrio de Nash del juego de "n" personas(la pseudoconvexidad de la función $u_i(.,x_{N-i})$ es necesaria para esta implicación inversa.

En general, la función "F" definida en$(1{,}3)$ es no simétrico (asimétrico). Como resultado de tal asimetria) no existe una formulación de optimizacion equivalente para un equlibrio de Nash.

5.1.2. Existencia de solución del problema de Equilibrio de Nash

Basado en las expresiónes

$$F_K^{nat}(x) = 0 \wedge F_K^{nor}(z) = 0$$

, la cual identifica las reformulaciones de ecuaciones de $VI(K,F)$, podemos probar fácilmente el siguiente resultado de existencia fundamental:

[1]Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y abierto, una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable es pseudo-concava si $f_{(y)} < f_{(x)}\ x,y \in D,\ x \neq y \implies \bigtriangledown f(x).(y-x) < 0$.

Teorema 5.1.1 *Sea. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado y sea $F : K \subseteq D \to \mathbb{R}^n$ una función continua en el conjunto abierto D , si F_K^{nat} y F_K^{nor} denotan respectivamente el mapa natural y el mapa normal del par (K,F), se tiene las siguientes dos afirmaciones:*

a) Si existe un conjunto abierto acotado $U \subseteq D$ tal que $deg(F_K^{nat}, U)$ está bien definido y es distinto de cero, entonces el $VI(K,F)$ tiene una solución en U.

b) Si existe un conjunto abierto delimitado U' tal que $deg(F_K^{nor}, U')$ está bien definido y es distinto de cero, entonces el $VI(K,F)$ tiene una solución x tal que $(x - F_{(x)}) \in U'$.

Demostración:

Ambas afirmaciones se concluyen inmediatamente de la propiedad del grado.

En efecto, si $deg(F_K^{nat}, U)$ está bien definido y no es cero, entonces F_K^{nat} tiene un cero en U; pero tal cero es tambien una solución de la $VI(K,F)$, teniendo en cuenta el resultado

$$x \in SOL(K,F) \longleftrightarrow F_K^{nat}(x) = 0$$

En el caso (b), F_K^{nor} tiene un cero, digamos ”z” en U' entonces por la proposición 2.2.4.

$$x \equiv \prod_k (z) \in SOL(K,F)$$

Ya que

$$0 = F_K^{nor}(z) = F_{(x)} + z - x$$

se sigue que

$$x - F_{(x)} \in U'$$

como se afirma. ■

Del teorema mencionado, resaltar que las condiciones de grado en (a) y (b) pertenecen a mapas diferentes: el primero, al mapa natural F_K^{nat} y el otro, al normal F_K^{nor}. Las conclusiones obtenidas sobre las soluciones al VI son algo diferentes y reflejan los distintos dominios de definición de estos. Según el teorema, la tarea de establecer la existencia de una solución para $VI(K,F)$ se reduce a verificar la condición de grado tanto en (a) como en (b).

La aplicación de este teorema se facilitará con un teorema clásico en topología que dice que cada función continua definida en un conjunto cerrado $\mathbb{R}^n$ tiene una extensión continua a todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Este resultado conocido como el teorema de Tietze-Urysohn, es válido en espacios métricos generales. Para nuestro propósito, aquí establecemos el resultado como un lema en espacios euclideanos.

Lema 5.1.1 *Sea $\Phi : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua definida en el conjunto cerrado no vacío S, existe una extension continua $\overline{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\overline{\Phi}_{(x)} = \Phi_{(x)}$ para todos los $x \in S$.*

Observación 5.1.1 *Consideremos la $VI(K,F)$, donde $F : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua . Supongamos que K es cerrado , si $\bar{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ denota una extension continua de "F" según lema (5.5.1), entonces $SOL(K,F) = SOL(K;\bar{F})$.*

Basado en esta observación, a continuación damos una condición suficientemente amplia para que $VI(K,F)$ tenga una solución. La prueba de existencia de solución en la siguiente proposición se basa en un argumento de homotopia que es muy estándar en muchos resultados de este tipo.

Es decir homotopizamos un mapa adecuado asociado a la VI (ejemplo ya sea el mapa natural o normal) con el mapa de identidad que se sabe que tiene un grado uno.

De forma general, podemos usar un mapa **simple** con un grado conocido distinto de cero como el mapa auxiliar para definir la homotopía . En el resto de esta seccion, estableceremos los resultados utilizando la homotopia entre el mapa natural F_K^{nat} y el mapa de identidad.

Proposición 5.1.1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado y $F : K \to \mathbb{R}^n$ continuo se tiene las siguientes afirmaciones*

a) existe un vector $x^{ref} \in K$ tal que el conjunto

$$L_< \equiv \{x \in K : F_{(x)}^T.(x - x^{ref}) < 0\} \ \ es \ \ acotado \ \ (posiblemente \ \ vacio)$$

b) existe un conjunto abierto acotado Ω y un vector $x^{ref} \in K \cap \Omega$ tal que

$$F_{(x)}^T.(x - x^{ref}) \geq 0; \forall x \in K \cap \overline{\Omega} \tag{1.4}$$

c) El $VI(K,F)$ tiene una solución.

Demostración:

Asumiendo la condición de (a) , sea Ω un conjunto abierto acotado que contenga

$$\{x^{ref}\} \cup L_<$$

Dado que Ω está abierto y contiene $L_<$, debemos tener $L_< \cap \partial\Omega = \emptyset$. En consecuencia (1.4) se mantiene y se sigue (b).

Supongamos que para (b) se tiene: $\overline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la extensión continua de Tietze-Urysohn de F.

Como $\overline{F}$ y F están de acuerdo con K, tenemos $\overline{F}^T_{(x)}(x - x^{ref}) \geq 0; \forall x \in K \cap \partial\Omega$.

Para simplificar, colocamos la barra en $\overline{F}$ y suponemos que F es un mapeo continuo definido en todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

Para demostrar que $SOL(K,F)$ es no vacío, argumentaremos por contradicción.

Supongase que este conjunto de soluciones esta vació. Dado que los ceros (si son muchos) de F_K^{nat} coinciden con la solución de $VI(K;F)$ y el último problema no tiene soluciones, tenemos

$$(F_K^{nat})^{-1}_{(0)} \cap \partial\Omega = \emptyset$$

Así $deg(F_K^{nat}, \Omega)$ está bien definido.

Afirmamos que este grado es distinto de cero.

En efecto, consideremos la homotopia:

$$H(x,t) \equiv x - \prod_K (t(x - F(x)) + (1-t)x^{ref}); (x,t) \in \overline{\Omega}x[0,1]$$

Entonces tenemos $H(x,0) = x - x^{ref}$; ya que $x^{ref} \in \Omega$, de donde resulta que $deg(H(.,0);\Omega)$ está bien definido y es igual a la unidad y además, $H(x,1) = F_K^{nat}(x)$.

Ahora mostramos que si $H(x,t) = 0$ para algunos $(x,t) \in \overline{\Omega}x(0,1)$, entonces $x \notin \partial\Omega$.

En efecto, supongamos que $H(x,t) = 0$ para algunos $0 < t < 1$.

Sin perdida de generalidad, podemos asumir $x \notin x^{ref}$ ya que según la definición de H tenemos

$$x \in K \wedge (y-x)^T[x - t(x - F(x)) - (1-t).x^{ref}] \geq 0, \forall y \in K$$

En particular, para $y = x^{ref}$ se deduce:

$$(x^{ref} - x)^T[t.F(x) + (1-t)(x - x^{ref})] \geq 0$$

lo que implica

$$(x^{ref} - x)^T F(x) \geq (\frac{1-t}{t})\|x - x^{ref}\|_2^2 > 0$$

Donde se mantiene la última desigualdad por que $t \in (0,1)$ y $x \neq x^{ref}$. Así ”x” no pertenece a $\partial\Omega$.

En consecuencia, por la propiedad de invarianza de homotopía del grado, deducimos que:
$deg(F_K^{nat}, \Omega) = deg(H(.,1); \Omega) = deg(H(.,0), \Omega) = 1$

Por el teorema (5.5.1), se deduce que $SOL(K;F)$ es no vacío, lo cual es una contradicción.

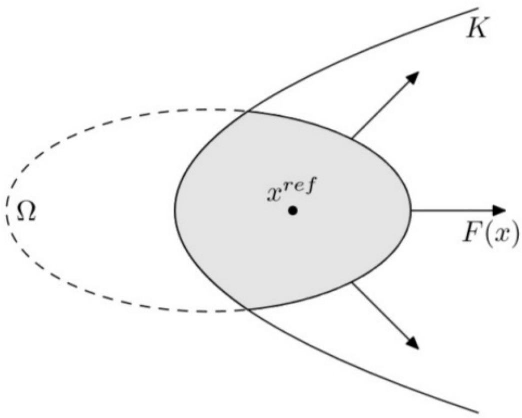
Así $(b) \Rightarrow (c)$. Si el conjunto $L_{\leq}$ está delimitado, entonces también lo es $L_{<}$, por lo tanto; $SOL(K,F)$ es no vacío.

Para mostrar la compacidad de $SOL(K;F)$, es suficiente observar que $SOL(K;F)$ es un subconjunto de $L_{\leq}$. ■

Observación 5.1.2 *El argumento de reemplazar a ”F” con su extensión continua $\overline{F}$ implica la aplicacion de una prueba téorica de grado.*

La condición (b) de la proposición anterior se ilustra en la siguiente figura:

Figura V.1: Condición (b) de la proposición 5.1.1.



Fuente:Facchinei y Pang, 2002, p.148

La cuál se conoce como la propiedad de no negatividad en el infinito. Esta condición es una generalización abstracta de la condición de signo opuesto en el conocido teorema del valor intermedio para una función escalar de una variable.

Ejemplo 5.1.1 *Considere el caso simple en el cual $n = 1$ y $K = \mathbb{R}^2$, si se toma a Ω como intervalo abierto delimitado, digamos (a,b) y x^{ref} como un punto arbitrario en este intervalo, la condición 2.2.1 estipula que $F(a)$ y $F(b)$ tienen signos opuestos. En este caso la proposición implica que F tiene un cero en el intervalo $[a,b]$. Así tenemos recuperado un resultado elemental en cálculo.*

La proposición (5.1.1) tiene muchos casos especiales, el primer caso especial es el siguiente resultado fundamental cuya prueba es rápida.

Corolario 5.1.1 *Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, convexo y $F : K \to \mathbb{R}^n$ una función continua, entonces el conjunto solución $SOL(K,F)$ es no vacío y compacto.*

Demostración:

El conjunto $L_{\leq}$ es obviamente compacto para cada elección de $x^{ref} \in K$ ■

Se deduce del corolario (5.1.1) que la caja restringuida $VI(K,F)$ donde K es un rectángulo compacto y ”F” es continua, siempre tiene una solución.

En lugar de la suposición de compactación en el anterior corolario, podemos suponer ciertas condiciones sobre la función ”F” para establecer la misma condición sobre $SOL(K;F)$. El siguiente resultado es otra consecuencia de la proposición (5.1.1) .

Corolario 5.1.2 *Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado, convexo y $F : K \to \mathbb{R}^n$ una función continua si existe un vector x^{ref} en K tal que*

$$F_{(x)}^T.(x - x^{ref}) \geq 0; \forall x \in K$$

entonces la $VI(K,F)$ tiene una solución.

Demostración:

El supuesto implica claramente que el conjunto $L_{<}$ esta vacío. ■

Otra clase de problemas que permiten un conjunto ilimitado K, es la clase de $VI_s(K,F)$ çoercitivo”, donde el mapa ”F” satisface una cierta propiedad de crecimiento a medida que $x \in K$ crece en norma.

Existen diferentes condiciones de coercitividad, hemos visto uno de estos en (2.12) la siguiente condición es un debilitamiento de (2.12) para algunos $x^{ref} \in K$ y $\varsigma \geq 0$

$$\liminf_{\substack{x \in K \\ \|x\| \to \infty}} \left(\frac{F(x)^T (x - x^{ref})}{\|x\|^{\varsigma}} \right) > 0 \tag{1.5}$$

Equivalentemente, esta condición postula la existencia de una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in K$ con una norma suficientemente grande, se tiene:

$$F(x)^T (x - x^{ref}) \geq c\|x\|^{\varsigma}$$

En base a esta observación, el siguiente resultado se prueba facilmente.

Proposición 5.1.2 *Siendo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado y $F : K \to \mathbb{R}^n$ continuo, si existe un vector $x^{ref} \in K$ y un escalar $\xi \geq 0$ tal que (1.5),se verifica, entonces el $VI(K,F)$ tiene un conjunto de soluciones compactas no vacías.*

Demostración:

Basta con notar que la condicion de coercitividad (1.5) implica la delimitación del conjunto $L_{\leq}$ en la proposicion (5.1.1). ■

El siguiente resultado identifica una condición necesaria y suficiente para que el $VI(K,F)$ tenga una solución. La prueba de este resultado es bastante elemental: tradicionalmente, la proposición a continuación junto con el corolario (5.1.1) era la base para derivar todos los resultados de existencia conocidos para la VI.

Proposición 5.1.3 *Siendo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado y $F : K \to \mathbb{R}^n$ continuo. El conjunto solucion $SOL(K,F)$ es no vacio si y solo si existe un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $int(E) \neq \phi$ tal que el $VI(K \cap E, F)$* **restringuido** *tiene solución en el $int(E)$*

Demostración:

Si la $VI(K,F)$ tiene una solución "x", simplemente tome a E como una bola euclideana cerrada con esa solución como centro.

Es directo ver que x debe resolver la $VI(K \cap E, F)$, por lo tanto, se cumple la condición necesaria.

En sentido contrario, supongamos que existe un conjunto E con la propiedad indicada y supongamos que existe un x^* el cuál es un elemento de $SOL(K \cap E, F) \cap intE$.

Sea $y \in K$ arbitrario, como K es convexo y $x^* \in intE$ se deduce que para algunas $\tau \in (0,1)$, el vector $x^* + \tau(y - x^*) \in K \cap E$.

Por lo tanto, ya que $x^* \in SOL(K \cap E, F)$ tenemos $\tau(y - x^*)^T F(x^*) \geq 0$ consecuentemente $x^* \in SOL(K,F)$, como se quería. ■

Para ilustrar los resultados de existencia detallados hasta ahora, los aplicamos a continuación para obtener el siguiente resultado de existencia para el problema de equilibrio de Nash.

Proposición 5.1.4 *Siendo cada K_i subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^{n_i}$ y que cada θ_i sea continuamente diferenciable. Supongamos que para cada tupla fija $\bar{x}_i$ la funcion $\theta_i(x_i, \bar{x}_i)$ es* *convexa en x_i entonces el conjunto de tuplas de Equilibrio de Nash es no vacio y compacto*

Demostración:

Según la proposición (2.2.2), el problema de Equilibrio de Nash es equivalente a $VI(K,F)$, donde:

$$K = \prod_{i=1}^{N} K_i \quad \wedge F_{(x)} = (\bigtriangledown_{x_i}.\theta_i(x))_{i=1}^{N}$$

Puesto que cada K_i es compacto y convexo, por lo tanto, también lo es K, por otra parte F es continua. En consecuencia, según el corolario (5.1.1), se sigue la conclusión deseada. ■

Un caso especial del problema de Equilibrio de Nash es el problema de silla de montar, por tanto, el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 5.1.3 *Sean X e Y subconjuntos convexos compactos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Siendo $L : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Silla concavo -convexo continuamente diferenciable, el conjunto de puntos de silla del triple$(L;X;Y)$ es no vacío y compacto. Además se verifica:*

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} L(x,y) = \max_{y\in Y}\min_{x\in X} L(x,y$$

Demostración:

Sea $K_1 \equiv X$, $K_2 \equiv Y$, $\theta_1(x,y) \equiv L(x,y)$, y $\theta_2(x,y) \equiv -L(x,y)$

Aplicando la proposición (5.1.4) se deduce la primera afirmación del corolario.

La segunda afirmación se sigue del teorema (2.2.1). ■

Capítulo VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Constratación de hipotesis con los resultados

1. La hipotésis específica uno afirma que el Problema de Equilibrio de Nash admite una formulación como un problema de desigualdad variacional y, según los resultados obtenidos en el capítulo cinco de la presente investigación, se comprueba tal afirmación, en la cual dicha formulación es:

$$-\nabla_{x_i} u_i(x_i^*; x_{N-i}^*)^T.(x_i - x_i^*) \geq 0; \forall x_i \in K$$

   Donde x_i^* es una solución óptima del problema $\max_{x_i \in K_i} u_i(x_i; x_{N-i})$

2. La hipotésis específica dos afirma que existe al menos una solución al Problema de Equilibrio de Nash y, de acuerdo a los resultados obtenidos, se tiene que siendo K_i subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^{n_i}$ y θ_i una función continuamente diferenciable y suponiendo que para cada tupla fija $\overline{x}_i$ la función $\theta_i(x_i, \overline{x}_i)$ es convexa en x_i, entonces el conjunto de tuplas de Equilibrio de Nash es no vacío y compacto.

6.2. Constratación de resultados con otros estudios similares

1. De acuerdo a [9], quien en su investigación presenta algunas importantes propiedades de la teoría de grado en dimensión finita e infinita y muestra una aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias, corroba la utilidad de la teoría de grado topológico no solo en la línea de la programación matemática sino también en el campo de las ecuaciones

diferenciales.

2. En [10], los autores indican que el concepto de grado topológico de una función se ha convertido en una herramienta de vital importancia, con aplicaciones principalmente en el establecimiento de teoremas de existencia, lo cual se corroboró en la presente investigación, pues se usó como una herramienta para la demostración de existencia de solución al Problema de Equilibrio de Nash.

3. La investigación titulada Perfeccionamiento de equilibrio de Nash desarrollado en [11] nos da noción de algunas deficiencias del Problema de Equilibrio de Nash, lo cual conlleva al autor a obtener un refinamiento más estricto: el equilibrio regular. La necesidad de tal refinamiento induce a realizar intentos previos como son el equilibrio perfecto, el propio y el esencial, los cuales son desarrollados, además de establecerse las relaciones existentes entre ellos. Esta investigación nos abre puertas a desarrollar otros tipos de equilibrios existentes.

4. La investigación realizada en [13] refuerza lo investigado debido a que el autor se centra en generalizar la teoría de optimización a problemas en los que la función de estudio sea no diferenciable. La importancia de este estudio radica en que muchos problemas de aplicación con frecuencia encuentran funciones con un número finito de puntos de no diferenciabilidad.

5. En las demostraciones realizadas en la presente investigación, se trabaja con desigualdades variacionales, así como también problemas de complentariedad, lo cual es bastante similar con [14], pues en esta investigación titulada SOBRE EL USO DE LAS DESIGUALDADES VARIACIONALES PARA EL CÁLCULO DEL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD NO LINEAL se muestra la relación fuerte entre la programación matemática con los problemas de complementariedad no lineal (NCP) y de los problemas de desigualdades variacionales (VIP) se plantea cómo esta relación ha dado lugar a numerosos esfuerzos investigadores orientados a resolverlos.

6. En esta investigación no se desarrolla ningún algoritmo que permita encontrar los equilibrios de Nash; pero en [8] se puede encontrar la solución de un problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$ usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregam.

7. La investigación TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER, APLICACIONES AL ANÁLISIS Y AL CÁLCULO DE LA VARIABLE COMPLEJA desarrollado en [7] permite contrastar la utilidad del gardo topológico, inclusive en el campo de la variable compleja.

CONCLUSIONES

1. Con respecto al objetivo general y, en respuesta a la hipótesis general, se concluye que sí es posible establecer una formulación matemática al Problema de Equilibrio de Nash considerando el conjunto
$$K \equiv \prod_{i \in N} K_i$$
donde K_i es el conjunto de estrategias y la función:
$$F : \prod_{i \in N} \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow \prod_{i \in N} \mathbb{R}^{n_i} \; donde \;\; F_i(x) = -\nabla_{x_i} u_i(x), \; i \in N$$
También se concluye que sí es posible establecer la existencia de solución del Problema de Equilibrio de Nash. Para la comprobación de este resultado se demuestra que el conjunto de tuplas de equilibrio de Nash es no vacío y esto se logra bajo la supoción de que cada K_i es un subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^{n_i}$ y que cada θ_i sea continuamente diferenciable y convexa.

2. Con respecto al objetivo específico uno y en respuesta a la hipótesis especifica uno, se concluye que la formulación matemática al problema de Equilibrio de Nash es la que se representa como una desiguladad variacional, la cuál es de la forma:
$$F(x^*)^T.(x - x^*) \geq 0, \forall x \in K$$
donde: x^* es una solución del problema de desigualdad variacional $VI(X,F)$

3. Con respecto al objetivo específico dos, y en respuesta a la hipótesis específica dos, se concluye que sí existe al menos una solución al Problema de Equilibrio de Nash. Se llega a esta conclusión en base al siguiente teorema:
Siendo cada K_i subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^{n_i}$ y que cada θ_i sea continuamente

diferenciable, supongamos que para cada tupla fija $\overline{x}_i$ la funcion $\theta_i(x_i, \overline{x}_i)$ es convexa en x_i, entonces el conjunto de tuplas de equilibrio de Nash es no vacío y compacto.

RECOMENDACIONES

1. Usar el **teorema de punto fijo de Kakutami** para demostrar el corolario (5.1.1) desarrollado en la presente investigación que afirma:
   Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, convexo y $F: K \to \mathbb{R}^n$ una función continua entonces el conjunto solución $SOL(K,F)$ es no vacío y compacto.
   Considere el mapa de valores establecidos $\phi : K \longrightarrow K$ donde para cada $x \in K$ se tiene $\phi_{(x)} \equiv argmin\{y^T F_{(x)} : y \in K\}$

2. Analizar el **teorema de punto fijo de Brouwer** para demostrar el corolario (5.1.1), considerando la definición de mapa natural $F^{nat}_{(K)}$

3. Estudiar la formulación variacional del Problema de **Equilibrio de tráfico**, el cual consiste en encontrar un par (h,u) de flujos de ruta y costos de viaje mínimos llamado equilibrio del usuario del tráfico, de modo que se satisfagan

   $$0 \leqslant C_p(h) - u_w \perp h_p \geq 0, \forall w \in \omega \wedge p \in \wp_w$$

   $$u_w \geq 0, w \in \omega$$

   A primera vista, las condiciones anteriores no son del todo un problema de complementariedad o desigualdad variacional; pero bajo un supuesto razonable sobre las funciones de costo y demanda de viaje, de ellas, es posible establecer una formulación equivalente a un NCP (F) donde la función de definición F está dada por:

   $$F_{(h,u)} \equiv \begin{pmatrix} C_(h) - \Omega^T u \\ \Omega h - d_{(u)} \end{pmatrix}$$

donde Ω es la matriz de incidencia (par OD, ruta) cuyas entradas son:

$$\omega_{wp} \equiv \begin{cases} 1, & si\ p \in \wp_w \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4. Estudiar la formulación variacional del problema de equilibrio perfecto de Markov, el cual es un modelo de mercado oligopolístico de teoría de juegos en el que dos o más empresas intentan establecer el precio de un producto homogéneo en un horizonte temporal infinito. Se puede simplificar el estudio considerando un modelo de duopolio en el que cada empresa toma su turno para establecer el precio y se compromete con él durante el período en el que se tomó la acción y el siguiente periodo, cuando otro informe responde. La clase de ítems se basa en que la acción de una firma en el periodo actual depende solo de la acción del oponente en el último periodo. Cada empresa busca maximizar el valor actual descontado de su beneficio al elegir los precios en intervalos de tiempo discretos, siendo el pago instantáneo de la empresa una función de los precios actuales y no del tiempo.

5. En general, queda a criterio particular de cada investigador continuar con el estudio de la formulación variacional de una serie de modelos de equilibrio económico los cuales pueden formularse como desigualdades variacionales y/o problemas de complementariedad. Adicional a los planteados se tiene el modelo de equilibrio de Walrasian general de Arrow-Debreu para encontrar precios de productos básicos, actividades sectoriales y consumos de consumo en una economía perfectamente competitiva, un modelo de equilibrio de mercado que es la base de los precios de energía **PIES** y **NEMS** desarrollados en el Departamento de EE. UU. (PIES es el acrónimo de Proyecto Independencia del Sistema de Energía, y NEMS es para el Sistema Nacional de Modelado de Energía), y un modelo de equilibrio de precios espacial para el cálculo de los precios, suministros y demandas de los productos básicos en una red de mercados espacialmente separados.

Bibliografía

[1] F.FACCHINEI, J. SHI PANG. (2003 *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. New York, United States of America: Editorial Springer.

[2] PATRICK T.HARKER: *Lectures on Computation of Equilibria with Equation-Based Methods*, UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN, 1993.

[3] JONATHAN F.BARD: *PRACTICAL BILEVEL OPTIMIZATION Algorithms and Applications, 1998.*

[4] TIROLE, J. (1990) *La teoría de la organización industrial* (1ra. Ed.). Barcelona, España: Editorial Ariel, S.A.

[5] HINDLE, T. (2008) *MANAGEMENT las 100 ideas que hicieron historia* (1ra. Ed.). Lima, Perú: Editorial el Comercio.

[6] NATIONAL GEOGRAPHIC. (2014) *Prisioneros con dilemas y estrategias dominates* . Madrid, España: Editorial EDITEC.

[7] ÁNGULO,E.(2013). *Teoría de grado topologico de Brouwer* (Tesis de maestria). Universidad Nacional de el Salvador, El salvador, El Salvador.

[8] MANDUJANO.J.A.(2013). *Solución de un problema de desigualdad variacional en* $\mathbb{R}^n$ *usando el metodo del punto proximal exacto con distancia de Bregman* (Tesis de licenciatura).Universidad Nacional del callao, Callao, PERÚ.

[9] HERRON, S. (Setiembre 1997). Teoría de grado. *Revista de la facultad de ciencias, 5(1), 60-70.*

[10] CARLOS, E. AZOFEIFA, Z.(2003). Una introducción a la teoría del grado topológico. *Revista Tecnología en marcha, 6(4), 38-51.*

[11] SANTIANI, E.(2005). *Perfeccionamiento en equilibrio de Nash* (Tesis delicenciatura). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

[12] PAPA, E. RAMIREZ, L.(Junio 2016).Método Proximal para Problemas de Desigualdad Variacional: Caso no Monótono . *Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos , 19(1), 29-39.*

[13] PAZ, M.(2011). *Desigualdades Variacionales, Soluciones y Aplicaciones* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Ingenieria, Lima, Perú.

[14] BLANCO, L. LEMA, C. PEDREIRA, L.(Julio 2018).Sobre el uso de las desigualdades variacionales para el cálculo del problema de complementariedad no lineal.. *Revista Facultad de CC. Económicas y Empresariales.*

[15] MUÑOZ, L.(2008). *Algunos comentarios sobre la teoria de juegos y la teoria de puntos fijos, desde el punto de vista de la teoría de correspondencias* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Ingenieria, Lima, Perú.

[16] MASKIN, E.(Abril 2009).Equilibrio de Nash y diseño de Mecanismos . *Revista Redalyc, 14(40), 119-123.*

ANEXOS

Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPOTESIS	METODOLOGIA	POBLACIÓN
GENERAL ¿Que caracteristicas se debe establecer para la existencia de solución en espacios de dimensión finita del Problema de Equilibrio de Nash? ESPECIFICO 1 ¿Cómo será la formulación variacional del problema de Equilibrio de Nash? ESPECIFICO 2¿Cómo se determina la existencia de solución del problema de Equilibrio de Nash?	GENERAL:Determinar una formulación matemática y probar la existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash. ESPECIFICO 1:Mostrar una formulación matemática del problema de Equilibrio de Nash. ESPECIFICO 2: Demostrar la existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash.	GENERAL: El problema de Equilibrio de Nash admite formulación variacional y con esta formulación el problema presenta al menos una solución en espacios de dimensión finita. ESPECIFICO 1: El problema de Equilibrio de Nash admite ser formulado como un problema de desigualdad variacional. ESPECIFICA 2: Existe al menos una solución al problema de Equilibrio de Nash.	La investigación es descriptiva de tipo científico-teórica con un enfoque inductivo deductivo de las definiciones teoremas y corolarios.	Al tratarse de un trabajo teórico con aplicaciones a problemas particulares, no existe población que estudiar, sin embargo nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}^n$.