UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“MÉTODO DE SUBGRADIENTE PROYECTADO PARA OPTIMIZACIÓN CONVEXA NO DIFERENCIABLE EN ESPACIOS DE HILBERT”

SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

JHONA ELIZABETH RAMOS FLORES

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"MÉTODO DE SUBGRADIENTE PROYECTADO PARA OPTIMIZACIÓN CONVEXA NO DIFERENCIABLE EN ESPACIOS DE HILBERT"

Ramos Flores, Jhona Elizabeth

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Secretario

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Lic. Sofía Irena Duran Quiñones
Asesora

Callao – Perú

2019

DEDICATORIA

A mis padres, Feliciano y Josefa por el apoyo incondicional.

A mi esposo e hijo, Joel y Alejandro, por estar a mi lado.

AGRADECIMIENTOS

Como detalle final de este trabajo de tesis expreso mis agradecimientos.

A mi asesora, Lic. Sofía Irena Duran Quiñones por las sugerencias y observaciones que fueron necesarias para concluir satisfactoriamente con este trabajo de tesis.

A todos mis profesores de la escuela de matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por los conocimientos brindados.

Al Dr. Erik Papa Quiroz y al Lic. Moisés Lázaro Carrión por su apoyo y paciencia, en el desarrollo de esta investigación.

A los profesores de Módulo Mg. Mirna Manco Caycho, Mg. Edgar Zárate Sarapura, Dr Manuel Efraín Carbajal Peña por sus aportes en el avance de este trabajo de tesis.

A mis compañeros de clases, por todas las experiencias vividas y por sus consejos para seguir adelante.

ÍNDICE

FIGURAS DE CONTENIDO

Índice de Figuras

RESUMEN

El presente trabajo investigación se refiere al estudio del Método de Subgradiente proyectado no necesariamente diferenciable pero con restricciones sobre un conjunto convexo.

El método de subgradiente proyectado al igual que otros métodos de optimización consiste en aplicar un algoritmo para dar solución a un determinado problema de optimización convexa no diferenciable.

Este estudio surge ante la escasa bibliografía de este método y por su importancia en la matemática aplicada.

El presente trabajo de investigación es de tipo básico, con un diseño no experimental, se usó el método deductivo- demostrativo y pertenece a la línea de optimización.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es presentar el estudio del método de subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert, que se dividirá en tres partes en primer lugar se presentara las herramientas básicas de espacios de Hilbert en segundo lugar se presentara los elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert y por último se demostrara la convergencia de la sucesión $\{x^k\}$, todo este trabajo se realizara de una manera sencilla para el buen entendimiento del lector interesado.

ABSTRACT

This research paper refers to the study of the Subgradient Method not necessarily differentiable but with restrictions on a convex set.
The projected subgradient method as well as other optimization methods consists of applying an algorithm to solve a certain convex optimization problem that is not distinguishable.
This study arises from the scarce bibliography of this method and its importance in applied mathematics.
The present research work is of a basic type, with an experimental design and the deductive-demonstrative method was used and belongs to the line of optimization.

The main objective of this research work is to present three important parts for the study of the subgradient method designed for non-differentiable convex optimization in Hilbert spaces, first the basic tools of spaces of Hilbert second will be presented the fundamental elements of analysis convex in spaces of Hilbert and finally will de tested the convergence of the succession $\{x^k\}$, all this work will be done in a simple way for the good understanding of the interested reader.

INTRODUCCIÓN

En 1970 Rockafellar R. da a conocer al mundo una obra muy importante sobre el estudio análisis convexo, con ella se dio un gran avance en el área de optimización, una rama de la matemática aplicada.

Esta obra dio origen más adelante a los métodos de optimización convexa, métodos que tienen el propósito de resolver un determinado problema de optimización con algún algoritmo establecido.

El área de optimización no sería posible de estudiar si no fuera también por las contribuciones de Kantorovich y Dantzig quienes con sus estudios en programación lineal dieron las bases teóricas a la optimización.

En la actualidad existen muchos métodos de optimización convexa dentro de las cuales se tiene a los métodos de optimización no diferenciable por ejemplo el método de la secante, método de subgradiente, métodos Bundle, entre otros. En este trabajo de investigación presentaremos el estudio del método de subgradiente proyectado por sus aplicaciones a la optimización entera y continua.

Para el desarrollo de este trabajo de investigación en el primer capítulo realizaremos la formulación del problema y plantearemos los objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo nos apoyaremos de referencias bibliográficas para construir el marco teórico el cual consistirá en hacer un resumen de las definiciones básicas de análisis real, algunas herramientas de espacios de Hilbert y elementos fundamentales de análisis convexo, donde las demostraciones serán en principio, todas ellas referenciadas.

En el tercer capítulo detallaremos las variables de investigación y la hipótesis que nos permitirán resolver el problema general.

En el cuarto capítulo se detallará la metodología de investigación aplicada en nuestro trabajo de investigación, la cual es de tipo básico, con un diseño no experimental donde se usó el método deductivo- demostrativo y que pertenece a la línea de optimización.

En el quinto capítulo se detallará los resultados obtenidos en [1] los cuales son, resultados previos de convergencia y la demostración del teorema de convergencia finalmente se resolverá un ejemplo extraído de [10] donde aplicaremos todo lo estudiado.

Finalmente podemos concluir el estudio del método de subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert, el cual puede servir como referencia para futuros trabajos de investigación que se puedan realizar, pues hay detalles por explorar, tanto en el aspecto teórico como computacional, dado su importancia en los distintos campos de la ingeniería y economía.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

La optimización convexa con el pasar de los años ha sido tema de estudio pues en la actualidad se han establecido muchos métodos de optimización convexa para poder resolver diversos problemas de optimización. Esto no implica que cada problema de optimización convexa se resuelva con un determinado método.

Mencionaremos a los métodos de optimización convexa diferenciable y los métodos de optimización convexa no diferenciable, los dos se caracterizan por emplear un algoritmo para resolver un determinado problema de optimización convexa, la diferencia entre las dos es que los métodos de optimización convexa no diferenciable resultan más complejos a la hora de determinar el algoritmo con el cual se dará solución al problema de optimización, pues presentan más dificultad que los métodos de optimización convexa diferenciable, es por eso que surge la problemática de estudiar el método subgradiente proyectado, un método de optimización convexa no diferenciable que necesita de técnicas propias para su aplicación.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

¿Es posible estudiar el Método de Subgradiente Proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert para minimizar el modelo dado en (1) y (2) mediante el algoritmo (7) y (8)?

Donde:

Sea H el espacio de Hilbert, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y C un subconjunto cerrado y convexo de H, y consideremos una función convexa y continua

$$f: H \to \mathbb{R}$$

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \tag{1}$$

$$\text{Sujeto a} \quad x \in C \tag{2}$$

Sea $P_C: H \to C$ la proyección ortogonal sobre C, el algoritmo del subgradiente proyectado es definido de la siguiente manera: Tomar un punto inicial arbitrario

$$x^0 \in H \tag{7}$$

Dado x^k, si $0 \in \partial f(x^k)$ entonces finalizar. De lo contrario, tomar $u^k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^k)$,$u^k \neq 0$, sea $n_k = max\{1, \|u^k\|\}$ y definir

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \frac{\alpha_k}{n_k} u^k\right) \tag{8}$$

Dónde: $\partial_\varepsilon f(x)$ es un ε –subdiferencial de f en x.

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Es posible presentar herramientas básicas de espacios de Hilbert?
- ¿Es posible presentar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert?
- ¿Es posible probar la convergencia de $\{x^k\}$?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Estudiar el Método de Subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciales en espacios de Hilbert para minimizar el modelo dado en (1) y (2) mediante el algoritmo (7) y (8).

1.3.2. Objetivos específicos

- Estudiar algunas herramientas de espacios de Hilbert
- Estudiar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert
- Determinar la convergencia de $\{x^k\}$.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórico

Una de las limitaciones teóricas de este trabajo de investigación es la poca bibliografía y los escasos estudios sobre el método de subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert.

Además, dado que en los cursos presentados en el plan curricular de la carrera de Matemática no se expande los conocimientos sobre optimización, el desarrollo de este trabajo puede ayudarnos a ampliar los conocimientos de nuestros estudios de pregrado.

1.4.2. Temporal

La presente investigación se llevó a cabo en un período de 3 meses, el cual estará comprendido del mes de setiembre al mes de noviembre del 2018.

1.4.3. Espacial

La presente investigación se llevó a cabo en la Universidad Nacional del Callao, con el apoyo del asesor de tesis y el profesor del ciclo de tesis.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Internacionales

Loreto (2005) en su tesis *“Subgradiente Espectral Proyectado”* se propone una alternativa para resolver el problema dual Lagrangeano al usar subgradientes con ideas que sustentan el método de gradiente espectral proyectado dado que con este método se puede predecir un valor optimo, además aporta un novedoso parámetro que ha mejorado la velocidad de convergencia en otro tipo de métodos [9].

Este trabajo de investigación realiza un estudio del método de subgradiente espectral proyectado para minimizar sobre convexos con lo cual define propiedades propias del método en base a la subgradiente, esto nos ayudó a tener una visión para hacer nuestro estudio en el método se subgradiente proyectado.

Nava (2015) en su tesis *“Funciones convexas no diferenciables”*

Se planteó el objetivo de estudiar diversos métodos (subgradiente, bundle y métodos con operador próximo) utilizados para resolver problemas de optimización no diferenciable para aplicarlos a diversos problemas y comparar los resultados con otros métodos establecidos por el autor, donde él autor se menciona que la convergencia de todos los métodos estudiados no depende del punto inicial elegido lo cual resulta más fácil al momento de aplicarlos a problemas no diferenciable.[11].

Este trabajo de investigación realizo de manera detallada él estudio de los métodos de optimización no diferenciable lo cual nos da una visión amplia acerca de cómo se aplican estos métodos a los problemas y sus diferencias las definiciones lemas, teoremas trabajadas por el autor permitirá construir nuestro marco teórico en funciones convexas no diferenciables.

2.1.2 Nacionales

Navarro (2013) en su tesis *“Algunas aplicaciones y extensión del método del subgradiente”*

Realizo un estudio del método subgradiente y sus aplicaciones para el caso irrestricto como para el caso con restricciones tomando en cuenta las dificultades que pueden ocurrir con el método. Además también realiza un estudio sobre un algoritmo para resolver desigualdades varacionales [12].

Nos apoyaremos de esta tesis por el estudio que realiza el autor al método de subgradiente para el caso con restricciones (donde tomaremos en cuenta los resultados de convergencia) y sus aplicaciones.

Borda (2013) en su tesis *“Convergencia del Método de punto proximal con distancia homogénea de orden r en optimización convexa”.*

Se presentó un nuevo, método de punto proximal basado en núcleo de orden homogéneos “r” donde utiliza una función convexa y cerrada, además muestra las propiedades de convergencia del método para una solución óptima del problema (P),[4].

De este trabajo de investigación se tomara algunas definiciones de análisis real y elementos fundamentales de análisis convexo que el autor menciona como preliminares para realizar el estudio del método subgradiente proyectado.

2.2 Marco:

2.2.1 Teórico

En esta sección presentaremos definiciones, proposiciones, lemas y teoremas importantes extraídos de [12].

▪ Símbolos y Notaciones

En esta sección se presentara la simbología y notaciones a usar a lo largo de todo el trabajo.

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \{\, x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_n) : x_i \in \mathbb{R}$**,** para todo $i, \dots .., n\}$

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{++} = \{\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_n) \in R^n : x_i > 0$**,** para todo $i, \dots .., n\}$

$\mathbb{R}_+$: el conjunto de los números reales no negativos

$\mathbb{R}_{++}$: el conjunto de los números reales positivos

$x^k \to x$, denota $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$

∇f: el gradiente de f.

$B(\bar{x}, \varepsilon)$=$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$: la bola abierta de centro $\bar{x}$ y radio ε.

Dado $x = (x_1, x_2, \dots \dots .., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ significa que $x_i \geq 0$, para todo $i = 1, \dots .., n$.

$\nabla^2 f(x)$ denota la matriz hessiana de f en el punto x.

$lim\, inf_{k\to+\infty} f(x^k) = sup_n inf_{k\geq n}\{f(x^k)\}$

$lim\, sup_{k\to+\infty} f(x^k) = inf_n sup_{k\geq n}\{f(x^k)\}$

Dado $g: X \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$, $x \in argmax\{g(y): y \in X\}$, denotada $g(x) \geq g(y)$, para todo $y \in X$.

Dado $g: X \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{z} \in argmax\{g(y): y \in X\}$, denotada $g(z) \leq g(y)$, para todo $y \in X$.

En la siguiente sección se presentara conceptos básicos para el desarrollo de la investigación la cual se dividirá de la siguiente manera, mencionaremos términos básicos de análisis real, herramientas de espacios de Hilbert, y elementos fundamentales de análisis convexo para esto nos apoyaremos en [7], [2], [6] y [11], alguno de estos resultados solo serán referenciados pues el material bibliográfico es extenso.

- **Conceptos básicos de análisis real.**

Definición 2.2.1. Una sucesión de números reales es una función $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Escribiremos $\{x_1, .., x_n, ..\}$, o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente $\{x_n\}$ para indicar a la sucesión x.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ es limitada, cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$.

Definición 2.2.2. Diremos que un número real a es límite de una sucesión $\{x_n\}$ de números reales cuando para $\epsilon > 0$ existe un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, para todo $n > n_o$. Denotamos $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Simbolicamente:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$=$\forall\ \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \epsilon$.

Teorema 2.2.3. (Unicidad del límite). Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, entonces $a = b$.

Véase [8], página 85

Teorema 2.2.4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\{y_n\}$ es una sucesión limitada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Véase [8], página 156

Teorema 2.2.5. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$, si $b \neq 0$.

Véase [8], página 90

Corolario 2.2.6. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Si $x_{n\leq} y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

Véase [8], página 92

Definición 2.2.7. Sea una sucesión x_n limitada superiormente y tomemos $M_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Si $\{M_n\}$ converge, definimos el límite superior

$\lim_{n\to\infty} sup x_n = \lim_{n\to\infty} M_n$.

Definición 2.2.8. Sea una sucesión x_n limitada superiormente y tomemos

$m_n = inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Si $\{m_n\}$ converge, definimos el límite inferior

$$\lim_{n\to\infty} inf x_n = \lim_{n\to\infty} m_n$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión limitada; digamos con $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Escribiendo $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, tenemos

$$[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \supset X_n \supset \cdots$$

Para $a_n = inf X_n$ y $b_n = sup X_n$, obtenemos:

$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta$.

Por lo tanto existen los siguientes límites:

lim$a_n = sup a_n = sup_n inf X_n$.

lim$b_n = ínf b_n = inf_n sup X_n$.

Tambien se puede notar

$$sup_n inf X_n \leq \ inf_n sup X_n$$

Teorema 2.2.9. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de números reales, entonces $\lim_{n\to\infty} inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup \ x_n$

Véase [8], página 148

Teorema 2.2.10. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones limitadas de números reales, entonces las siguientes relaciones son válidas.

1. $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{i}\mathrm{nf} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup \ x_n$

2. $\lim_{n\to\infty} inf x_n + \lim_{n\to\infty} inf y_n \leq \lim_{n\to\infty} inf(x_n + y_n)$

3. $\lim_{n\to\infty} sup(x_n + y_n) \leq \lim_{n\to\infty} sup x_n + \lim_{n\to\infty} sup y_n$

4. Si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} sup x_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\ y_n$

Véase [3], página 148.

Teorema 2.2.11. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$, una serie convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Véase [8], página 106.

- **Límite de funciones**

Definición 2.2.12. Diremos que un número real L es el límite de f cuando x tiende para a denotado por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 2.2.13. (Teorema del Sandwich). Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f, g, h: X \to \mathbb{R}$. Si para todo $x \in X$, $x \neq a$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$,

Entonces

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Véase [8], página 155.

- **Funciones derivables en un intervalo**

Teorema 2.2.14. (Teorema del valor medio). Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Véase [8], página 213.

- **Herramientas de espacios de Hilbert.**
  - ✓ **Métricas y normas**

Definición 2.2.15. Sea X un conjunto no vacío. Una métrica o distancia sobre X es una función $d: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall z \in X$ (desigualdad triangular)

A un par (X, d) con X un conjunto no vacío y d una métrica en X, se le denomina espacio métrico.

Definición 2.2.16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. La norma en $\mathbb{K}$ es una aplicación:

$$\|\cdot\|: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

que satisface las siguientes condiciones: $\forall\ x, y \in \mathbb{K}$

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Definición 2.2.17. Diremos que una distancia d está inducida por una norma $\|\cdot\|$ si: $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$

Definición 2.2.18. Una norma se dice no arquimediana, si para todo $x, y \in \mathbb{K}$ satisface además la siguiente condición adicional:

iv. $\|x + y\| \leq max\{\|x\|; \|y\|\}$ (desigualdad triangular fuerte)

Al cumplirse solo las tres primeras condiciones diremos que la norma es arquimediana.

Definición 2.2.19. Una métrica en un conjunto X se dice no arquimediana si

$$d(x, y) \leq máx\{d(x, z), d(z, y)\} \qquad \forall x, y, z \in X$$

En particular, una métrica sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es no arquimediana si está inducida por una norma no arquimediana.

- **Elementos fundamentales de análisis convexo**

Definición 2.2.20. Sea $C \in \mathbb{R}^n$ y $K \in \mathbb{R}^n$ entonces

Un subconjunto C es llamado convexo si $\forall\, x.y \in C,\ y \forall\, t \in [0,1]$

$$tx + (1-t)y \in C.$$

Definición 2.2.21. Dado un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$. Se dice que x es una combinación convexa de elementos de C si existen; $p \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^{p} \subset [0,1]$ y $\{x_i\}_{i=1}^{p} \subset C$ tales que :

$$\sum_{i=1}^{p} t_i x_i = x \sum_{i=1}^{p} t_i = 1$$

Definición 2.2.22. Dado un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ no vacío, diremos que la cápsula convexa de C, la cual se denotará como $C_0(C)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a C.

Observación 2.2.23. La cápsula convexa $C_0(C)$ de un conjunto convexo C es también convexa. Más aún, la cápsula convexa de un conjunto C, es el menor conjunto convexo que contiene a C.

Definición 2.2.24. Los hiperplanos son conjunto definidos mediante:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, P^T, x = \alpha\}$$

Donde p es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Empleando la definición de conjunto convexo, se demuestra fácilmente que S es un conjunto convexo. Tomando $x, y \in S$, por la definición de S, se obtiene que $p^T.x = \alpha$ y $p^T.y = \alpha$. Para cualquier $\lambda \in [0,1]$, se obtiene:

$$p^T[\lambda x + (1-\lambda)y] = \lambda.p^T.x + (1-\lambda)p^T.y = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$$

Definición 2.2.25. Un conjunto C no vacio es un cono si $x \in C$ implica que $\alpha x \in C$ para todo $\alpha > 0$. Si además, C es convexo, se dice que es un cono convexo.

Definición 2.2.26. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $\bar{x} \in C$. El cono normal (cono de direcciones normales) en el punto $\bar{x}$ en relación al conjunto C es dado por:

$$N_C(\bar{x}) = \{d \in \ \mathbb{R}^n \ / \ \ \langle d, x - \bar{x} \rangle \leq \forall \ x \ \in C\}$$

Conos asintóticos

Teorema 2.2.27. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y cerrado, entonces:

$C_\infty(a) = C_\infty(b), \ \forall \, a,b \in C$

Además, $C_\infty = C_\infty(a) = C_\infty(b)$ es cerrado.

Véase [5], página 10.

Proposición 2.2.28. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y cerrado, entonces *C* es acotado, sí y sólo si, $C_\infty(a) = \{0\}$.

Véase [5], página 10.

- **Funciones convexas y asintóticas**

Definición 2.2.29. Sea $f: \mathbb{R}^n \ \to \overline{\mathbb{R}}$ es propia, un función de valores entendidos, definimos al dominio efectivo de f, denotado por $domf, a$

$$domf \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty.\}$$

Definición 2.2.30. $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es propia si

i)$domf \neq \emptyset,$

ii)$\forall x \in domf, f(x) < -\infty$

Definición 2.2.31. Una función f: $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es llamada convexa si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall \ \alpha \in \ [0,1].$$

Se dice que f es estrictamente convexa cuando la desigualdad es estricta $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,$

Tal que $x \neq$y.

Se dice que f es fuertemente convexa con módulo $\gamma > 0$, si: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n, y \ \forall \lambda\ \in \langle 0,1 \rangle$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y)\ <\ \lambda f(x) + (1-\ \lambda)f(y) - \gamma\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$

Se nota que una función fuertemente convexa es estrictamente convexa y una función estrictamente convexa es convexa.

Definición 2.2.32. $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior (sci) si $\forall\ \{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$ se tiene que

$$f(x) \leq \lim_{k\to\infty} f(\,x^k)$$

Definición 2.2.33. f es llamado cerrado si es sci.

Definición 2.2.34. $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$, definimos la función indicatriz de X como

$$\delta(x/X) = \begin{cases} 0 & si\ x \in X \\ +\infty & si\ x \notin X. \end{cases}$$

Definición 2.2.35. El conjunto de nivel de una función $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es dado por

$$L_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq \alpha\}$$

Definición 2.2.36 El epígrafo de una función $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, es el conjunto

$$epi(f) = \{(x,\lambda) \in\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / \ f(x) \leq \lambda\}$$

Teorema 2.2.37. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f es sci,

ii) $epi(f)$ es cerrado,

iii) $L_f(\alpha)$ es cerrado $\forall \alpha \in\ \mathbb{R}$.

Véase [5], página 16.

Proposición 2.2.38. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia sci y $a \in dom(f)$, entonces

$$f_\infty(d) = sup_{k>0} \frac{f(a+kd) - f(a)}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{f(a+kd)-f(a)}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{f(a+kd)}{k}$$

Véase [5], página 24.

- **Conjugación y sub-diferencial**

Definición 2.2.39. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama conjugación (en el sentido Fenchel) a la función siguiente:

$$f^*(x^*) = sup_{x\in domf}[\langle x, x^*\rangle - f(x)]$$

donde $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.40. Sea *f* una función convexa propia, y *sci*, entonces f^*es convexa propia y *sci*. Además $f^{**} = f$.

Véase [5], página 36.

Definición 2.2.41. La función conjugación de la función indicatriz de C, es llamada función soporte de C. S e tiene entonces

$$\delta^*(x^*|C) = sup_{x\in C}[\langle x, x^*\rangle - \delta(x|C)] = sup_{x\in C}\langle x, x^*\rangle.$$

Sea C un conjunto no vacio, se llama cono barrera de C al conjunto K definido por

$K = \{x^*: \delta^*(x^*|C) < +\infty\} = dom\{\delta^*(.|C)\}$.

Proposición 2.2.42. Sea una función convexa y sci, entonces f_∞ es la función soporte del $dom(f^*)$, es decir,

$$f_\infty(d) = \delta^*(d|dom(f^*))$$

Véase [5], página 44.

Definición 2.2.43. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Diremos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un subgradiente de f en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle, \forall\, z \in \mathbb{R}^n$$

E l conjunto de todos los subgradientes de f en x, se llama subdiferencial de f en x

Y lo denotamos por $\partial f(x)$.

Proposición 2.2.44. Sea f una función convexa propia, y $a \in dom(f)$, entonces,

$\partial f(a) \neq \emptyset$, sí y soló sí, $a \in int(dom(f))$

Véase [5], página 46.

Definición 2.2.45. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, $\mathcal{E} > 0$, diremos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un

$\mathcal{E}$ $-$subgradiente de f en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ cuando:

$$f(z) \geq f(x) - \langle y, z - x \rangle - \varepsilon, \forall\, z \in \mathbb{R}^n$$

Al conjunto de todos los $\mathcal{E}$ $-$subgradiente de f en x denotado por $\partial_\varepsilon f(x)$, se llama $\mathcal{E}$ $-$subgradiente de *f* en *x*.

Observación 2.2.46. $0 \in \partial_\varepsilon f(x)$, Si solo si, $f(x) \leq inf_{z \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mathcal{E}$.

Definición 2.2.47. Se denomina ***vector gradiente*** al vector de derivadas parciales y se le denota por:

$$\nabla f(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

Teorema 2.2.48. (Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker)

Si x^* es un minimo local regular del problema (pd), f y g_i, $i \in I(x^*)$, son diferenciables en x^* y g_i, $i \notin I(x^*)$, son continuas en x^*, entonces existen únicos ${\lambda_i}^* \in \mathbb{R}$, para todo $i \in I(x^*)$, tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \Sigma_{i \in I(x^*)} {\lambda_i}^* \nabla g_i(x^*) = 0 \\ {\lambda_i}^* \geq 0, \;\; para\ todo\ i \in I(x^*). \end{cases}$$

Véase [13], página 76.

- **Teorema de la Proyección**

El teorema de la proyección da condiciones suficientes para garantizar la existencia de una mínima distancia de un punto a un conjunto dado.

Definición 2.2.49. Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\bar{y} \notin C$, decimos que $P_C(\bar{y}) \in C$ es la proyección de $\bar{y}$ sobre C si $P_C(\bar{y})$ resuelve el problema de $min\{\|\bar{y} - x\| : x \in C\}$**.**

Esta última condición también puede ser denotada por:

$$P_C(\bar{y}) \in argmin\{\|\bar{y} - x\| : x \in C\}$$

Teorema 2.2.50. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío. Dado $\bar{y} \notin C$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $P_C(\bar{y}) \in C$ y $P_C(\bar{y})$ es la proyección de $\bar{y}$ sobre C.

b) $P_C(\bar{y}) \in C$ verifica $\langle \bar{y} - P_C(\bar{y}), x - P_C(\bar{y}) \rangle \leq 0$, para todo $x \in C$.

Véase [13], página 114.

Teorema 2.2.51. (De la proyección) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío y cerrado. $\bar{y} \notin C$, entonces existe una única proyección $P_C(\bar{y})$ de $\bar{y}$ sobre C.

Véase [13], página 115.

En esta sección daremos a conocer proposiciones lemas y teoremas que nos permitirán estudiar el método de subgradiente proyectado y también de analizar la convergencia de la sucesión para lo cual nos apoyaremos de [1] Alber, Y.,Iusem, A., Solodov, M. (1998).

Definición 2.2.52. Sea *H* un espacio de Hilbert y V un subconjunto no vacío de H. Se dice que una secuencia $\{x^k\} \subset H$ es cuasi-Fejer convergente en V si para todo $\bar{x} \in V$ existe $\tilde{k} \geq 0$ y una secuencia $\{\delta_k\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$ y $\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 + \delta_k$ para todo$k \geq \tilde{k}$. Esta definición se origina en (18) y ha sido elaborada en (9).

- **Enunciado del algoritmo y discusión de resultados relacionados**

Sea H el espacio de Hilbert, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y C un subconjunto cerrado y convexo de H, y consideremos una función convexa y continua

$$f: H \to \mathbb{R}$$

El problema que nos planteamos es:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \qquad (1)$$

$$\text{Sujeto a} \quad x \in C \qquad (2)$$

En la función $f: H \to \mathbb{R}$, asumimos que f es de valor finito para cada $x \in H$, para cada $\varepsilon \geq 0$ el ε-subdiferencial de f en x es el conjunto $\partial_\varepsilon f(x)$ definido por

$$f(x) = \{\mu \in H: f(y) - f(x) \geq \langle \mu, y - x \rangle - \varepsilon \ \ para\ todo\ y \in H\} \qquad (3)$$

Asumimos que $\partial_\varepsilon f$ es acotado sobre conjuntos acotados, es decir $\bigcup_{x \in B} \partial_\varepsilon f(x)$ es acotado para algún subconjunto acotado $B \in H.$

Tome una sucesión $\{\alpha_k\}$ de números reales no negativos que satisfacen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty \qquad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty \qquad (5)$$

Y una sucesión no creciente de números reales no negativos $\{\varepsilon_k\}$ tal que existe $\mu > 0$ que satisface

$$\varepsilon_k \leq \ \mu \alpha_k \qquad (6)$$

- **Definición del algoritmo**

Sea $P_C: H \to C$ la proyección ortogonal sobre C, el algoritmo es definido de la siguiente manera

$$x^0 \in H \qquad (7)$$

Paso iterativo

Dado x^k, *si* $0 \in \partial f(x^k)$ entonces pare. De lo contrario, tomar $u^k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^k), u^k \neq 0$, sea $n_k = max\{1, \|u^k\|\}$ y definir

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \frac{\alpha_k}{n_k} u^k\right) \qquad (8)$$

Donde α_k y ε_k satisfacen las ecuaciones (4)-(6)

Además una sucesión no decreciente de números reales no negativos $\{\varepsilon_k\}$ tal que existe $\mu > 0$ satisfaciendo $\varepsilon_k \leq \mu\alpha_k$.

- **Análisis de la convergencia**

Las proposiciones 1y 2 garantizan la convergencia de la sucesión $\{x^k\}$

Proposición 1. Si $\{\mathrm{x}^\mathrm{k}\}$ es quasi-Féjer convergente en V , entonces:

1. $\{\mathrm{x}^\mathrm{k}\}$ es acotado

2. $\left\{\|\mathrm{x}^\mathrm{k} - \bar{\mathrm{x}}\|^2\right\}$ converge para todo $\bar{\mathrm{x}} \in \mathrm{V}$, donde V es un subconjunto, no vacio, de H.

3. Si todos los puntos de acumulación débiles de $\{\mathrm{x}^\mathrm{k}\}$ pertenecen a V entonces $\{\mathrm{x}^\mathrm{k}\}$ es débilmente convergente, esto es, tiene un único punto de acumulación.

Véase, página 33.

Proposición 2. Sea $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\} \subset \mathbb{R}$. Asumir que $\alpha_k \geq 0$ para todo $k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\beta_k < 0$, y existe $\tilde{k} \geq 0$ tal $\beta_k \geq 0$ para $k \geq \tilde{k}$.Entonces:

i) Existe una subsucesión $\{\beta_{i(k)}\}$ de $\{\beta_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_{i(k)} = 0$

ii) Si, adicionalmente, existe $\theta > 0$ tal que $\beta_{k+1} - \beta_k \leq \theta\alpha_k$, para todo k entonces $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$.

Véase, página 36.

Proposición 3

i) $\|P_C(y) - P_C(z)\| \leq \|y - z\|, \ \forall\, y, z \in H$

ii) $\langle y - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle \geq 0, \forall\, y \in H, \forall\, \bar{y} \in C$

Véase, página 39.

Lema 1

Si el algoritmo genera una sucesión infinita y existe $\tilde{x} \in C$ y $\tilde{k} \geq 0$ tal que

$f(\tilde{x}) \leq f(x^k), \forall\, k \geq \tilde{k}$, entonces

i) $\{x^k\}$ es cuasi-Fejér convergente a $L(\tilde{x})$.

ii) $\{f(x^k)\}$ es convergente y $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(\tilde{x})$

iii) La sucesión $\{x^k\}$ es débilmente convergente a algún $\bar{x} \in L(\tilde{x})$

Véase, página 41.

Teorema

i) Si las ecuaciones (7) y (8) del algoritmo generan una sucesión infinita, entonces

$$\lim_{k\to\infty} inf f(x^k) = inf_{x\in C} f(x)$$

ii) Si el conjunto S^*, de soluciones del problema (1) y (2) es no vacío, entonces ó el algoritmo dado por (7) y (8) finaliza en alguna iteración k, en este caso $x^k \in S^*$, ó el algoritmo genera una sucesión infinita $\{x^k\}$ que converge débilmente para algún $\bar{x} \in S^*$.

iii) Si $S^* = \emptyset$, conjunto vacío, entonces $\{x^k\}$ no acotado.

Véase, página 48.

2.3 Definición de términos básicos

A continuación daremos algunas definiciones que nos ayudara a fundamentar la investigación

Optimización.-Optimización matemática (o bien, optimización o programación matemática) es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles. En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de función.

Método de subgradiente.-el método de optimización subgradiente es un procedimiento iterativo que puede ser usado para resolver el problema de maximizar (minimizar) una función cóncava no necesariamente diferenciable. En analogía con el clásico método del gradiente para funciones diferenciables, se define del método subgradiente para el caso convexo:

Paso 1 Iniciamos con un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y elegimos una sucesión de pasos dados por números positivos

$(l_k)_{=0}^{\infty}$.

Paso 2

Construimos la sucesión $x_{k+1} = x_k - l_k s_k$, con $s_k \in \partial f(x_k)$, que eventualmente converge a la solución óptima del problema PCI.

Calculamos un subgradiente $s_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$, si $s_{k+1} = 0$ paramos, x_{k+1} es el óptimo.

Caso contrario.

Paso 3

Proseguimos con el paso 2 hasta cumplirse una condición de parada establecida.

Algoritmo.- Es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad. Dados un estado inicial y una entrada, siguiendo los pasos sucesivos se llega a un estado final y se obtiene una solución.

Iteración.-Una iteración es el acto de repetir un proceso con el objetivo de alcanzar una meta deseada, objetivo o resultado. Cada repetición del proceso también se le denomina una “iteración”, y los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración.

Implementación de un algoritmo.-Implementar un algoritmo significa traducir el algoritmo a un lenguaje de programación de tal modo que sea interpretado por dicho lenguaje al momento de su ejecución.

Convergencia.-Se entiende por convergencia de un método numérico a la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.

Solución óptima.-Es la mejor solución de un problema propuesto

Espacios de Hilbert.-es una generalización del concepto de espacio euclidiano. Esta generalización permite que nociones y técnicas algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión dos y tres se extiendan a espacios de dimensión arbitraria, incluyendo a espacios de dimensión finita. Ejemplos de tales nociones y técnicas son la de ángulo entre vectores, ortogonalidad de vectores, el teorema de Pitágoras, proyección ortogonal, distancia entre vectores y convergencia de una sucesión.

CAPITULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1. Capítulos fuera de variables (cualitativo)

Hipótesis general

Si es posible presentar el Método de subgradiente proyectado para funciones convexas no diferenciales en espacios de Hilbert para

Minimizar $f(x)$ (1)

Sujeto a. $x \in C$. (2)

Mediante el algoritmo dado en (7) y (8).

Hipótesis específicas

- Si es posible presentar algunas herramientas de espacios de Hilbert.
- Si es posible presentar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert.
- Si es posible probar la convergencia $\{x^k\}$.

3.2 Operacionalización de variables

La variable de la investigación es el método de subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert.

Variable	Dimensiones	Indicadores
Método de subgradiente proyectado para optimización convexa no diferenciable	Herramientas de espacios de Hilbert.	Definir una función convexa y continua, $f: H \to \mathbb{R}$.
	Elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert.	Minimizar el modelo dado en (1) y (2) mediante el algoritmo (7) y (8).
	Convergencia de $\{x^k\}$.	$\{x^k\}$ Es una sucesión cuasi-fejer convergente.

CAPITULO IV

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 tipo y diseño de la investigación

Según Valderrama (2013) el presente trabajo de investigación es de tipo Básica, Pura o fundamental porque está destinada a aportar conocimientos científicos a la línea de optimización matemática, y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata [12].

Según Mertens (2005) el presente trabajo de investigación posee un diseño no experimental, pues es resulta complejo manipular las variables que presenta [9].

El método a utilizar en este trabajo de investigación es de tipo deductivo-demostrativo, pues nos apoyaremos de axiomas y definiciones para estudiar el método subgradiente proyectado de una manera didáctica, que servirá de motivación para la línea de optimización.

El presente trabajo de investigación se desarrollará de la siguiente manera:

En primer lugar, estudiaremos algunas herramientas de espacios de Hilbert.

En segundo lugar, estudiaremos elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert

Seguidamente, determinaremos la convergencia de la sucesión $\{x^k\}$, con las condiciones establecidas del método subgradiente proyectado.

Finalmente mediante un ejemplo explicativo verificaremos todo lo antes estudiado.

4.2 Población y muestra

La abstracción del trabajo realizar nos indica que no existe población y muestra que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla en un espacio de Hilbert H.

4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización del presente trabajo se utilizó la técnica de lectura analítica, con el propósito de comprender e interpretar los resultados encontrados en los libros, artículos, revistas, etc.

También se hizo la recopilación de investigaciones relacionadas a optimización, obtenidos de repositorio de la Universidad mayor de San Marcos, repositorio de la Universidad nacional del Callao, repositorio de la Universidad Simón Bolívar, repositorio de la Universidad autónoma metropolitana.

4.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

El presente trabajo de investigación no requiere técnicas para la recolección de la información de campo.

4.5 Análisis y procesamiento de datos

El presente trabajo de investigación no requiere de análisis y procesamiento de datos pues es de naturaleza no experimental.

CAPITULO V

RESULTADOS

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos en [1], en el cual detallaremos los resultados previos de convergencia y también la demostración del teorema de convergencia, ambos resultados serán necesarios para el estudio del método de subgradiente proyectado, finalmente se desarrollará un ejemplo extraído de [10] en donde aplicaremos todo lo investigado.

Para tal estudio partimos de lo siguiente:

Sea H el espacio de Hilbert, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y C un subconjunto cerrado y convexo de H, y consideremos una función convexa y continua

$$f: H \to \mathbb{R}$$

El problema que nos planteamos es:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \tag{1}$$

$$\text{Sujeto a} \quad x \in C \tag{2}$$

Sea $P_C: H \to C$ la proyección ortogonal sobre C, el algoritmo del subgradiente proyectado es definido de la siguiente manera: Tomar un punto inicial arbitrario

$$x^0 \in H \tag{7}$$

Dado x^k, si $0 \in \partial f(x^k)$ entonces finalizar. De lo contrario, tomar $u^k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^k)$,$u^k \neq 0$, sea $n_k = max\{1, \|u^k\|\}$ y definir

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \frac{\alpha_k}{n_k} u^k\right) \tag{8}$$

donde : $\partial_\varepsilon f(x)$ es un ε −subdiferencial de f en x.

5.1. RESULTADOS PREVIOS DE CONVERGENCIA

Las proposiciones 1y 2 garantizan la convergencia de la sucesión $\{x^k\}$.

Proposición 5.1.1. Si $\{x^k\}$ es quasi-Féjer convergente en V , entonces:

1. $\{x^k\}$ es acotado

2.$\{\|x^k - \bar{x}\|^2\}$ converge para todo $\bar{x} \in V$, donde V es un subconjunto, no vacío, de H.

3. Si todos los puntos de acumulación débiles de $\{x^k\}$ pertenecen a V entonces $\{x^k\}$ es débilmente convergente, esto es, tiene un único punto de acumulación.

Prueba i)

Para $k > \tilde{k}$, usando la definición 1 recursivamente, se tiene

$$\begin{aligned}\|x^k - \bar{x}\|^2 &\leq \|x^{k-1} - \bar{x}\|^2 + \delta_{k-1} \\ &\leq \|x^{k-2} - \bar{x}\|^2 + \delta_{k-2} + \delta_{k-1} \\ &\leq \|x^{k-3} - \bar{x}\|^2 + \delta_{k-3} + \delta_{k-2} + \delta_{k-1} \\ &\leq \left\|x^{\tilde{k}} - \bar{x}\right\|^2 + \sum_{j=\tilde{k}}^{k-1} \delta_j\end{aligned}$$

Por ser $\delta_j \geq 0$, $\forall j$ entonces para $k > \tilde{k}$

$$\|x^k - \bar{x}\|^2 \leq \left\|x^{\tilde{k}} - \bar{x}\right\|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j$$

Definiendo $r = \left\|x^{\tilde{k}} - \bar{x}\right\|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j$ tenemos

$$\|x^k - \bar{x}\|^2 \leq r$$

Así para $k > \tilde{k}$ se tiene $x^k \in B(\bar{x}, r)$, por eso que $\{x^k\}$ es acotada.

Prueba ii)

Por i) la sucesión $\{\|x^k - \bar{x}\|^2\}$ es acotada. Probaremos que esta sucesión tiene un solo punto de acumulación y de ahí $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ es convergente.

Sean v y ξ dos puntos de acumulación de $\{\|x^k - \bar{x}\|^2\}$, así existen $\{x^{j_k}\}$ y $\{x^{l_k}\}$ dos subsucesiones de $\{x^k\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{j_k} - \bar{x}\right\|^2 = v$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{l_k} - \bar{x}\|^2 = \xi$$

Sea $\tilde{k} > 0$ y fije $\lambda > 0$. Tomando $\hat{k}$ tal que $l_{\hat{k}} > \hat{k}$ y

$\|x^{l_k} - \bar{x}\| \leq \xi + \frac{1}{2}\lambda, \quad \forall\, k > \hat{k}$

Tome también $\bar{k} \geq \hat{k}$ tal que

$$\sum_{i=l_{\bar{k}}}^{+\infty} \delta_i \leq \frac{1}{2}\lambda$$

Usando recursivamente nuevamente la definición 1, tenemos para todo k tal que $j_k > l_{\bar{k}}$

$$\left\|x^{j_k} - \bar{x}\right\|^2 \leq \|x^{l_{\bar{k}}} - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=l_{\bar{k}}}^{j_k-1} \delta_i \leq \|x^{l_{\bar{k}}} - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=l_{\bar{k}}}^{+\infty} \delta_i$$

$$\leq \|x^{l_{\bar{k}}} - \bar{x}\|^2 + \frac{\lambda}{2} \leq v + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \leq v + \lambda \qquad (9)$$

Para $l_{\hat{k}} > \tilde{k} \;\wedge\; \bar{k} > \hat{k}$.

Tomando límite cuando k va para infinito tenemos

$$\xi \leq v + \lambda, \qquad \forall\, \lambda > 0$$

Esto implica que $\xi \leq v$. En efecto, tomando λ convergiendo para cero en la desigualdad anterior.

Cambiando los roles de $\{x^{l_k}\}$ y $\{x^{j_k}\}$ y siguiendo los pasos anteriores podemos probar que:

$$v = \xi$$

Por eso que la prueba está concluida, al tener $\left\{\|x^k - \bar{x}\|^2\right\}$ sólo un punto de acumulación.

Prueba iii)

Como $\{x^k\}$ es acotado, entender por análisis funcional $\{x^k\}$ tiene puntos de acumulación débiles. Probaremos que solo existe un único punto de acumulación débil.

Sean $\tilde{x}$ y $\hat{x}$ dos puntos de acumulación débiles de $\{x^k\}$, entonces existen $\{x^{\tilde{j}_k}\}$ y $\left\{x^{\hat{j}_k}\right\}$ subsucesiones de $\{x^k\}$ tal que

$\{x^{\tilde{j}_k}\}$ converge débilmente a $\tilde{x}$.

$\left\{x^{\hat{j}_k}\right\}$ converge débilmente a $\hat{x}$.

Por ii) existen π y ξ tal que

$\pi = \lim_{k\to\infty} \|x^k - \tilde{x}\|^2$ (pues $\tilde{x} \in V$por hipótesis)

$\xi = \lim_{k\to\infty} \|x^k - \hat{x}\|^2$ (pues $\hat{x} \in V$por hipótesis)

Sea $w = \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2$

Por otro lado

$$\left\|x^{\hat{j}_k} - \tilde{x}\right\|^2 = \left\|x^{\hat{j}_k} - \hat{x}\right\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 + 2\langle x^{\hat{j}_k} - \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle \quad (10)$$

$$\left\|x^{\tilde{j}_k} - \hat{x}\right\|^2 = \left\|x^{\tilde{j}_k} - \tilde{x}\right\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 + 2\langle x^{\tilde{j}_k} - \tilde{x}, \tilde{x} - \hat{x}\rangle \quad (11)$$

Definamos la función $f(x) = \langle x, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$, $\forall\, x \in H$.

Esta función es una funcional lineal, en efecto,

$$f(\lambda x + y, \hat{x} - \tilde{x}) = \langle \lambda x + y, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

$$= \lambda\langle x, \hat{x} - \tilde{x}\rangle + \langle y, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

$$=\lambda f(x) + f(y)$$

Luego la ecuación 10 y 11 lo podemos expresar así:

$$\left\|x^{\hat{J}_k} - \tilde{x}\right\|^2 = \left\|x^{\hat{J}_k} - \hat{x}\right\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 + 2f\left(x^{\hat{J}_k}\right) - 2\langle \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

$$\left\|x^{\tilde{J}_k} - \hat{x}\right\|^2 = \left\|x^{\tilde{J}_k} - \tilde{x}\right\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 + 2f\left(x^{\tilde{J}_k}\right) - 2\langle \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ y usando el resultado que

$x^{\tilde{J}_k}$ converge débilmente a $\tilde{x}$ entonces $f\left(x^{\tilde{J}_k}\right) \to f(\tilde{x})$

$x^{\hat{J}_k}$ converge débilmente a $\hat{x}$ entonces $f(x^{\hat{J}_k}) \to f(\hat{x})$

Se tiene que:

$$\pi = \xi + \mathrm{w} + 2\langle \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle - 2\langle \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

$$\xi = \pi + w + 2\langle \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle - 2\langle \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle$$

Cancelando

$$\pi = \xi + \mathrm{w} \tag{12}$$

$$\xi = \pi + w \tag{13}$$

De (12) y (13) tenemos que

$$\pi - \xi = w = \xi - \pi$$

Que implica que $w = 0$,

Esto es, $\hat{x} = \tilde{x}$

Por lo tanto $\{x^k\}$ solo se tiene un punto de acumulación débil y así converge débilmente.

Proposición 5.1.2. Sea $\{\alpha_k\}$ *y* $\{\beta_k\} \subset \mathbb{R}$.Asumir que $\alpha_k \geq 0$ para todo $\mathrm{k} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k < 0$, y existe $\tilde{k} \geq 0$ tal $\beta_k \geq 0$ para $\mathrm{k} \geq \tilde{k}$.Entonces:

i) Existe una subsucesión $\left\{\beta_{i(k)}\right\}$ de $\{\beta_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \beta_{i(k)} = 0$

ii) Si, adicionalmente, existe $\theta > 0$ tal que $\beta_{k+1} - \beta_k \leq \theta\alpha_k$, para todo k entonces $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$.

Prueba i)

Supongamos que no se cumple que existe una subsucesión $\{\beta_{i(k)}\}$ tal que, $\lim_{k\to\infty} \beta_{i(k)} = 0$.

$\Rightarrow$ existe $\sigma > 0$ y $\bar{k} \geq \tilde{k}$ tal que $\beta_k \geq \sigma,\ \forall\, k \geq \bar{k}$ multiplicando por α_k:

$$\alpha_k\beta_k \geq \alpha_k\sigma$$

Tomando la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k\beta_k \geq \sigma \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k$$

Tomando límite cuando ρ va para el infinito

$$+\infty > \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\beta_k \geq \sigma \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k = +\infty$$

Lo que es una contradicción.

Prueba ii)

Por i) existe una subsucesión $\{\beta_{i(k)}\}$ de $\{\beta_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \beta_{i(k)} = 0$

Por contradicción, si el resultado no es verdadero existe algún $\sigma > 0$ y otra subsucesión $\{\beta_{m(k)}\}$ de $\{\beta_k\}$ tal que

$\beta_{m(k)} \geq \sigma, \qquad \forall\, k$ (Δ)

Construiremos una tercera subsucesión $\{\beta_{j(k)}\}$ de $\{\beta_k\}$ tal que:

$$j(0) = min\{l \geq 0: \beta_l \geq \sigma\} \tag{14}$$

Y dado $j(2k)$:

$$j(2k+1) = \min\left\{l \geq j(2k): \beta_l \leq \frac{1}{2}\sigma\right\} \tag{15}$$

$$j(2k+2) = \min\{l \geq j(2k+1): \beta_l \leq \sigma\} \tag{16}$$

Observe que

$j(2k+1)$ existe pues $\lim_{k\to\infty} \beta_{i(k)} = 0 \rightarrow$ existen infinitos$\beta_{i(k)} \leq \frac{1}{2}\sigma$

$j(2k+2)$ existe pues por (Δ), existen infinitos $\beta_{m(k)} \geq \sigma$

Observe también por (15)

Para $j(2k) \leq l \leq j(2k+1) - 1$ se tiene $\beta_l \geq \frac{1}{2}\sigma$ (17)

De aquí, $\forall\ l \subset [j(2k), j(2k+1) - 1]$:

$$\alpha_l\beta_l \geq \frac{1}{2}\sigma\alpha_l$$

Tomando sumatoria en el intervalo $[j(2k), j(2k+1) - 1]$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \alpha_l\beta_l \geq \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1} \alpha_l\beta_l \geq \frac{1}{2}\sigma \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1} \alpha_l$$

Tomando sumatoria de k=0 hasta infinito

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\beta_k \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1} \alpha_l\beta_l \geq \frac{1}{2}\sigma \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1} \alpha_l \qquad (18)$$

Sea.

$$\psi_{k=} \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1} \alpha_l$$

Entonces de (18) se tiene que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k < +\infty$$

(pues $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\beta_k < +\infty$ y por desigualdad (18)) (⊡)

Por la propiedad de sumatoria convergente:

Si $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$

Se tiene de (⊡) que

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k = 0 \tag{19}$$

Por otro lado, de las ecuaciones (15) y (16) tenemos que

$\beta_{j(2k)} \geq \sigma \quad \wedge \;\; \beta_{j(2k+1)} \leq \frac{1}{2}\sigma,$

Así, $\sigma - \frac{\sigma}{2} \leq \beta_{j(2k)}$-$\beta_{j(2k+1)}$=$\beta_{j(2k)} - \beta_{j(2k)+1} + \beta_{j(2k)+1} - \beta_{j(2k)+2} +$ $\ldots\ldots+\beta_{j(2k+1)}$

= $\sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1}(\beta_l - \beta_{l+1})$

Por hipótesis $\beta_{k+1} - \beta_k \leq \theta\alpha_k, \forall\, k$. Usando este resultado en la desigualdad anterior se tiene:

$$\frac{\sigma}{2} \leq \beta_{j(2k)} - \beta_{j(2k+1)=} \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1}(\beta_l - \beta_{l+1}) \leq \sum_{l=j(2k)}^{j(2k+1)-1}\theta\alpha_l = \theta\psi_k \qquad (20)$$

La igualdad anterior es por la definición de ψ_k.

De (20) se tiene que

$$\frac{\sigma}{2} \leq \;\theta\psi_k$$

$$\rightarrow \left(\frac{\sigma}{2\theta}\right) \leq \psi_k, \forall\, k$$

Lo que contradice la ecuación (19) donde $\psi_k \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\lim_{k\to+\infty}\beta_k = 0$$

Proposición 5.1.3.

i) $\|P_C(y) - P_C(z)\| \leq \|y - z\|, \;\; \forall\, y, z \in H$

ii) $\langle y - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle \geq 0, \forall\, y \in H, \forall\, \bar{y} \in C$

Prueba

Recordemos inicialmente el problema y teorema de la proyección:

Sea $C \subset H$ un conjunto convexo no vacio y cerrado. Sea $y \notin C$ entonces existe un único punto $P_C(y) \in C$ tal que

a) $\|y - P_C(y)\| \leq \|y - x\|, \forall\, x \in C$

b) $\langle y - P_C(y), x - P_C(y)\rangle \leq 0, \forall x \in C$

Prueba i)

$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 = \langle P_C(x) - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle$

$=\langle P_C(x) - y + y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle$

$=\langle P_C(x) - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle + \langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle$

Como $P_C(x) \in C,$ entonces el segundo término es menor o igual a cero debido a la condición b), esto es,

$$\langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle \leq 0$$

Así tenemos que:

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle P_C(x) - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle$$

$$=\langle y - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle$$

$$=\langle \big(x - P_C(x)\big) + (y - x), P_C(y) - P_C(x)\rangle$$

De aquí tenemos:

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle + \langle y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle \ldots.$$

Como $P_C(y) \in C$ y aplicando una vez más b) tenemos que

$$\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq 0$$

Usando esta desigualdad en ($\boxdot$):

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle$$

Por propiedad de producto interno

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle y - x, P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq \|y - x\|\|P_C(y) - P_C(x)\|$$

Asumiendo que $P_C(x) \neq P_C(y)$ pues si $P_C(x) = P_C(y)$ el resultado es trivial tenemos:

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|y - x\|.$$

Prueba ii)

$$\langle y - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle = \langle y - P_C(y) + P_C(y) - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle$$

$$=\langle y - P_C(y), y - P_C(y)\rangle + \langle P_C(y) - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle$$

$$=\|y - P_C(y)\|^2 - \langle \bar{y} - P_C(y), y - P_C(y)\rangle$$

$$=\|y - P_C(y)\|^2 - \langle y - P_C(y), \bar{y} - P_C(y)\rangle$$

Los dos términos son no negativos: uno por ser norma y el otro por la propiedad b), Así, queda probada la propiedad ii).

Lema 5.1.4.

Si el algoritmo genera una sucesión infinita y existe $\tilde{x} \in C$ y $\tilde{k} \geq 0$ tal que.

$f(\tilde{x}) \leq f(x^k), \forall\, k \geq \tilde{k}$, entonces

i) $\{x^k\}$ es cuasi-Fejér convergente a $L(\tilde{x})$.

ii) $\{f(x^k)\}$ es convergente y $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(\tilde{x})$

iii) La sucesión $\{x^k\}$ es débilmente convergente a algún $\bar{x} \in L(\tilde{x})$

Prueba i)

Tome un punto arbitrario $x \in L(\tilde{x}) = \{y \in C : f(y) \leq f(\tilde{x})\}$.

Definamos

$$z^k = x^k - \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k}\right)\mu^k$$

$\beta_k = f(x^k) - f(x),$

Donde $\mu^k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^k)$, $\mu^k \neq 0$ y $\eta_k = max\{1, \|\mu^k\|\}$

De la ecuación (8) tenemos

$$x^k = P_C\left(x^k - \frac{\alpha_k}{\eta_k}\mu^k\right)$$

Y así $x^k \in C$, por eso $P_C(x^k) = x^k$ y por lo tanto

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|P_C(z^k) - P_C(x^k)\| \leq \|z^k - x^k\| = \left\|x^k - \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k}\right)\mu^k - x^k\right\|$$

Donde la desigualdad es por proposición 3 i) así,

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k}\right)\|\mu^k\| \leq \frac{\alpha_k}{\eta_k}(\eta_k) = \alpha_k \qquad (21)$$

Probaremos que $\{x^k\}$ es cuasi-fejér convergente a L $(\tilde{x})$.

En las siguientes igualdades y desigualdades estableceremos una sumable cota superior de $\frac{\alpha_k\beta_k}{n_k}$.

De (21) se tiene

$$\begin{aligned}
{\alpha_k}^2 + \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 &\geq \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 \\
&= 2\langle x^k - x, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&= 2\langle x^k - x, x^k - z^k\rangle + 2\langle x^k - x, z^k - x^{k+1}\rangle \\
&= 2\,\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle + 2\langle x^k - z^k, z^k - x^{k+1}\rangle + 2\langle z^k - x, z^k - x^k\rangle \\
&= 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle + 2\langle x^k - z^k, z^k - x^{k+1}\rangle + 2\langle z^k - x, z^k - P_C(z^k)\rangle
\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad es por propiedad de producto interno, en la segunda igualdad aumentamos y quitamos el vector z^k, en la tercera igualdad usamos que,

$z^k = x^k - \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k}\right)\mu^k$ y en la última igualdad usamos que:

$$x^{k+1} = P_C\left(x^k - \frac{\alpha_k}{\eta_k}\mu^k\right) = P_C(z^k)$$

De la proposición 3, ii) se tiene que $\langle y - \bar{y}, y - P_C(y)\rangle \geq 0, \forall\, y \in H\ \forall\, \overline{y} \in H$

Usando esto en la última igualdad tenemos:

$$\alpha_k{}^2 + \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 \geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle + 2\langle x^k - z^k, z^k - x^{k+1}\rangle$$

$$=2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle + 2\langle x^k - z^k, z^k - x^k\rangle + 2\langle x^k - z^k, x^k - x^{k+1}\rangle$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle - 2\|x^k - z^k\|^2 - 2\|x^k - z^k\|\|x^k - x^{k+1}\|$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle - 2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k{}^2}\|\mu^k\|^2 - 2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k}\|\mu^k\|$$

Donde la primera igualdad es por adicionar y quitar el vector x^k, la segunda desigualdad es por definición de norma y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la última desigualdad es por la definición de $z^k = x^k - \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k}\right)\mu^k$ y por la desigualdad (21).

Por la definición de $\eta_k = max\{1, \|\mu^k\|\}$ tenemos $\|\mu^k\| \leq \eta_k$, entonces;

$$2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k{}^2}\|\mu^k\|^2 \leq 2\frac{\alpha_k{}^2\eta_k{}^2}{n_k{}^2} = 2\alpha_k{}^2$$

$$-2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k{}^2}\|\mu^k\|^2 \geq -2\alpha_k{}^2$$

Linealmente, $\quad -2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k}\|\mu^k\| \geq -2\alpha_k{}^2$

Usando estas desigualdades en

$$\alpha_k{}^2 + \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle - 2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k{}^2}\|\mu^k\|^2 - 2\frac{\alpha_k{}^2}{\eta_k}\|\mu^k\|$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\langle \mu^k, x^k - x\rangle - 4\alpha_k{}^2$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}[f(x^k) - f(x) - \varepsilon_k] - 4\alpha_k{}^2$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}[f(x^k) - f(x)] - 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\varepsilon_k - 4\alpha_k{}^2$$

$$=2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k - 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\varepsilon_k - 4\alpha_k{}^2$$

$$\geq 2\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k - 2\alpha_k\varepsilon_k - 4{\alpha_k}^2$$

$$\geq 2\,\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k - \left(2\,\frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} + 4\right){\alpha_k}^2$$

$$\geq 2\,\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k - (2\mu + 4){\alpha_k}^2 \qquad (22)$$

Donde la segunda desigualdad anterior es por la definición de,

$$\partial_{\varepsilon_k} f(x^k) = \{s \in H : f(x) \geq f(x^k) + \langle s, x - x^k \rangle - \varepsilon_k\},$$

La segunda igualdad anterior es por la definición de $\beta_k = f(x^k) - f(x)$ la ultima desigualdad es por la ecuación (6).

$$\varepsilon_k \leq \mu\alpha_k$$

Así, llegamos a la desigualdad:

$${\alpha_k}^2 + \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 \geq 2\,\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k - (2\mu + 4)$$

Desde que $x \in L(\tilde{x})$ tenemos para todo $k \geq \tilde{k}$

$$f(x) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x^k)$$

De aquí $\beta_k = f\forall(x^k) - f(x) \geq 0$

De la desigualdad (22) tenemos $\forall\ k \geq \tilde{k}$:

$$0 \leq 2\,\frac{\alpha_k}{\eta_k}\beta_k \leq \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 + (2\mu + 5){\alpha_k}^2 \qquad (23)$$

Sea: $\delta_k = (2\mu + 5)\,{\alpha_k}^2 \qquad \gamma = \sum_{k=0}^{+\infty} {\alpha_k}^2$

Por la ecuación (5): $\sum_{k=0}^{+\infty} {\alpha_k}^2 < +\infty$, tenemos que $\gamma < +\infty$ y

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k = (2\mu + 5)\sum_{k=0}^{+\infty} {\alpha_k}^2 = (2\mu + 5)\,\gamma < +\infty$$

Así, de (23):

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 + \delta_k, \qquad \forall\ k \geq \tilde{k}$$

ii) Por i) $\{x^k\}$ es cuasi-Fejér convergente y por proposición 1 $\{x^k\}$ es acotado.

Sea B un conjunto acotado conteniendo $\{x^k\}$ y $\bar{\varepsilon}$=$Sup_k\{\varepsilon_k\}$, entonces:

$\mu^k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x^k) \subset \partial_{\bar{\varepsilon}} f(x^k) \subset \bigcup_{y\in B} \partial_{\bar{\varepsilon}} f(y)$ (24)

Por la hipótesis A)

$\partial_\varepsilon f$ es acotado sobre conjuntos acotados, esto es :

$$\bigcup_{y\in B} \partial_\varepsilon f(x)$$

Es acotado para cualquier subconjunto acotado B.

Debido a (24) y la hipótesis A), $\{\mu^k\}$ es acotado, por eso existe $\delta > 1$ tal que:

$$\|\mu^k\| \leq \delta, \forall\, k.$$

Por lo tanto, $\eta_k = max\{1, \|\mu^k\|\} \leq max\{1, \delta\} = \delta$

Por la ecuación (23) tenemos $\forall\, k \geq \tilde{k}$ y $x \in L(\tilde{x})$

$0 \leq \frac{2}{\delta}\alpha_k\beta_k \leq \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 + (2\mu + 5){\alpha_k}^2$ (25)

Sumando la ecuación (25) de $k = \tilde{k}$ a n:

$$\frac{2}{\delta}\sum_{k=\tilde{k}}^{n} \alpha_k\beta_k \leq \|x^0 - x\|^2 - \|x^{n+1} - x\|^2 + (2\mu + 5)\sum_{k=\tilde{k}}^{n} {\alpha_k}^2$$

$$\leq \|x^0 - x\|^2 + (2\mu + 5)\gamma \qquad (26)$$

Por la ecuación (26):

$$\sum_{k=\tilde{k}}^{+\infty} \alpha_k\beta_k \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)(\|x^0 - x\|^2 + (2\mu + 5)\gamma) < +\infty,$$

Lo que implica que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{\tilde{k}-1} \alpha_k \beta_k + \sum_{k=\tilde{k}}^{+\infty} \alpha_k \beta_k < +\infty \qquad (27)$$

Como $x \in L(\tilde{x})$, tomando $x = \tilde{x}$ se tiene

$$\beta_k = f(x^k) - f(\tilde{x})$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} - \beta_k &= f(x^{k+1}) - f(\tilde{x}) - f(x^k) + f(\tilde{x}) \\ &= f(x^{k+1}) - f(x^k) \\ &\leq \langle \mu^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle + \varepsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad es por la definición de $\partial_\varepsilon f(x)$ como,

$$\mu^{k+1} \in \partial_{\varepsilon_{k+1}} f(x^{k+1})$$

entonces,

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \langle \mu^{k+1}, x^k - x^{k+1} \rangle - \varepsilon_{k+1}$$

lo que implica que $f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq \langle \mu^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle + \varepsilon_{k+1}$.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} - \beta_k &\leq \|\mu^{k+1}\| \|x^{k+1} - x^k\| + \varepsilon_{k+1} \\ &\leq \|\mu^{k+1}\| \|x^{k+1} - x^k\| + \varepsilon_k \\ &\leq \|\mu^{k+1}\| \|x^{k+1} - x^k\| + \mu\alpha_k \\ &\leq \|\mu^{k+1}\| \alpha_k + \mu\alpha_k \\ &\leq \delta\alpha_k + \mu\alpha_k \\ &\leq (\delta + \mu)\alpha_k, \qquad (28) \end{aligned}$$

Donde la segunda desigualdad es debido a que $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k$ (es no creciente por dato), la tercera desigualdad es por (6), la cuarta desigualdad es por (21) y la quinta es por que $\|\mu^k\| \leq \delta, \forall\, k$.

Sea $\theta = \delta + \mu$.

Desde que $\beta_k \geq 0, \forall\ k \geq \tilde{k}$, de (28):

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k + (\delta + \ \mu)\alpha_k$$

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k + \theta\alpha_k$$

$$\beta_{k+1} - \beta_k \leq \ \theta\alpha_k$$

De (27)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\beta_k < +\infty$$

Se tiene que se cumple las hipótesis de la proposición 2, ii) entonces $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$ pero,

$\beta_k = f(x^k) - f(\tilde{x})$, así $\lim_{k\to+\infty} f(x^k) = f(\tilde{x})$.

Prueba iii)

Sea $\bar{x}$ un punto de acumulación de $\{x^k\}$, el cual existe pues $\{x^k\}$ es acotado por i).

Si $\{x^{j_k}\}$ es una subsucesión de $\{x^k\}$ el cual $\bar{x}$ es el límite débil, entonces desde que f es semicontinua inferior

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{k\to\infty} inf f\left(x^{j_k}\right) = \mathop{lim}_{k\to\infty} f(x^k) = f(\tilde{x}) \qquad (29)$$

De (29) se tiene que $\bar{x} \in L(\tilde{x})$,

Notando que $\bar{x} \in C$ pues C es cerrado y convexo, de aquí débilmente cerrado. Así probamos que todo punto de acumulación débil pertenece a $L(\tilde{x})$.

Usando proposición 1, $\{x^k\}$ tiene un único punto de acumulación, esto es, $\{x^k\}$ es débilmente convergente a algún $\bar{x} \in L(\tilde{x})$.

5.2 TEOREMA DE CONVERGENCIA

Teorema 5.2.1.

i) Si las ecuaciones (7) y (8) del algoritmo generan una sucesión infinita, entonces

$$\lim_{k\to\infty} inf f(x^k) = inf_{x\in C} f(x)$$

ii) Si el conjunto S^*, de soluciones del problema (1) y (2) es no vacío, entonces ó el algoritmo dado por (7) y (8) finaliza en alguna iteración k, en este caso $x^k \in S^*$, ó el algoritmo genera una sucesión infinita $\{x^k\}$ que converge débilmente para algún $\bar{x} \in S^*$.

iii) Si $S^* = \emptyset$, conjunto vacío, entonces $\{x^k\}$ no acotado.

Demostración

i) Sea $f^* = inf_{x\in C} f(x)$ (posiblemente infinito negativo-∞)

como $f^* \leq f(x), \forall x \in C$ (por ser ínfimo f^*)

Tomando en particular $x = x^k \in C$, entonces

$$f^* \leq f(x^k)$$

Tomando límite inferior cuando $k \to +\infty$ se tiene:

$$f^* \leq \lim_{k\to\infty} inf f(x^k) \qquad (\alpha)$$

Ahora debemos probar que

$$f^* \geq \lim_{k\to\infty} inf f(x^k) \qquad (\beta)$$

Por contradicción supongamos que

$$f^* < \lim_{k\to\infty} inf f(x^k)$$

Entonces existe $\tilde{x}$ tal que

$$f(\tilde{x}) < \lim_{k\to\infty} inf\, f(x^k) \qquad (30)$$

Por definición de límite inferior: $\lim_{k\to\infty} inf\, f(x^k) = sup_n inf_{k\geq n} f(x^k)$

$$f(\tilde{x}) < sup_n inf_{k\geq n} f(x^k)$$

De la definición de supremo, existe $n_0 \in \ \mathbb{N}$ tal que

$$f(\tilde{x}) < inf_{k\geq n_0} f(x^k)$$

Y de la definición de ínfimo

$$f(\tilde{x}) < f(x^k), \forall k \geq n_0$$

Del lema 1, ii) se tiene que

$$f(\tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x^k)$$

Y por ser límite $\lim_{k\to\infty} f\ (x^k) = \lim_{k\to\infty} inf f(x^k) = \lim_{k\to\infty} sup f(x^k)$

Por eso que $\lim_{k\to\infty} inf f(\,x^k) = f(\tilde{x})$

Lo que contradice a (30) y por lo tanto (β) es verdad. De (α) y (β) se tiene el resultado.

ii)

Desde que $S^* \neq \emptyset,$ tomando $x^* \in S^*$ y supongamos que el algoritmo no finaliza en ninguna iteración. Por la condición de optimalidad

$f(x^*) \leq f(x^k),\ \forall\ k$

Como $L(x^*) = \{y \in C : f(y) \leq f(x^*)\} = S^*$

Aplicando el lema 1, iii) para $\bar{x} = x^*$, $\tilde{k} = 0,$ concluimos que $\{x^k\}$ converge débilmente a algún $\bar{x} \in S^*$.

iii) Sea $S^* = \emptyset$ y supongamos que $\{x^k\}$ es acotado.

Sea $\{x^{k_j}\}$ una subsucesión de $\{x^k\}$ débilmente convergente (Teorema de Bolzano-Weiestrass) a $\bar{x} \in C,$ por la semicontinuidad inferior de f.

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{j\to\infty} inf f(\,x^{k_j}) = \lim_{k\to\infty} inf f(\,x^k) = f^* \qquad (31)$$

Donde la última igualdad es por el resultado (i).

De aquí $\bar{x} \in S^*$, lo que es una contradicción de haber supuesto que $\{x^k\}$ es acotado.

EJEMPLO 5.1.

Considere el siguiente problema

$$min\{f(x,y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

Donde $$f(x,y) = max\{-x, x+y, x-2y\}$$

Examinando $f(x,y) \leq c$, donde c es una constante

$$f(x,y) = max\{-x, x+y, x-2y\} \leq c$$

Entonces $-x \leq c\ ;\ x+y \leq c\ ; x-2y \leq c$

Para $c = 1$ $-x \leq 1\ ;\ x+y \leq 1\ ; x-2y \leq 1$

Graficando tenemos:

Para $c = 2$ $-x \leq 2\ ;\ x+y \leq 2\ ; x-2y \leq 2$

Graficando tenemos los conjuntos de nivel inferior:

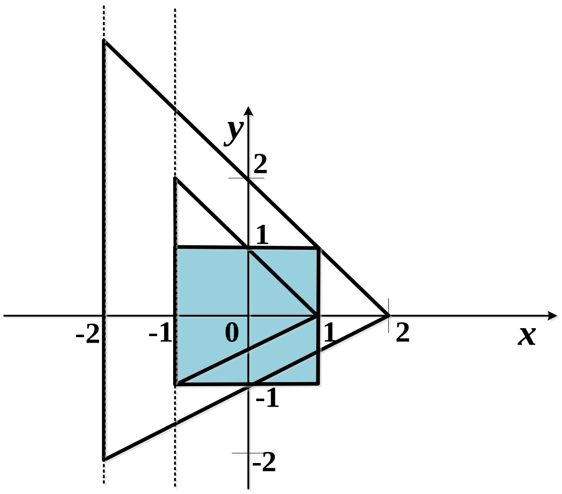

Figura 5.1 Conjuntos de nivel de la función objetivo.

Fuente: Elaboración propia.

Observando la gráfica vemos que los puntos de no diferenciabilidad son del tipo:

$(t, 0)$, (por ejemplo $(1,0),(2,0)$ etc)

$(-t, 2t)$, (por ejemplo $(-1,2),(-2,4)$ etc)

$(-t, -t)$, (por ejemplo $(-1,-1),(-2,-2)$ etc)

donde $t \geq 0$

observe que $(0,0) \in [-1,1] \times [-1,1]$ es un punto de mínimo global pues

$$f(0,0) = 0 \leq max\{-x, x+y, x-2y\} \qquad \forall x \in [-1,1], \forall y \in [-1,1]$$

Como $f_1(x,y) = -x,\ f_2(x,y) = x+y, f_3(x,y) = x-2y$

Son funciones convexas → por un resultado de análisis convexo

$$f(x,y) = max\{f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)\}$$

es una función convexa y como $(0,0)$ es una solución entonces $(0,0) \in \partial f(0,0)$

observe también que,

$$\partial f(0,0) = \{(S_1,S_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq f(0,0) + \langle (S_1,S_2),(x,y)-(0,0)\rangle\}$$

$$= \{(S_1,S_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0 + S_1 x + S_2 y, \forall x \in [-1,1], \forall y \in [-1,1]\ \}$$

Así tenemos que $(-1,0) \in \partial f(0,0)$ pues $f(x,y) \geq -x$

Así tenemos que $(1,1) \in \partial f(0,0)$ pues $f(x,y) \geq x+y$

Así tenemos que $(1,-2) \in \partial f(0,0)$ pues $f(x,y) \geq x-2y$

Ahora considere el punto $(x,y) = (1,0)$, entonces

$$\partial f(1,0) = \{(S_1,S_2) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \geq f(1,0) + \langle (S_1,S_2),(x,y)-(1,0)\rangle\}$$

Pues $f(1,0) = max\{-1,1,1\} = 1$, entonces

$$f(x,y) \geq 1 + S_1(x-1) + S_2 y$$

Tomando $(S_1,S_2) = (1,1)$ tenemos:

$$f(x,y) \geq 1 + (x-1) + y = x+y$$

Lo que es verdad por la definición de f. Entonces:

$$(1,1) \in \partial f(1,0)$$

Considere la dirección $d = -(1,1) = (-1,-1) \rightarrow d$ no es dirección de decenso de f en (1,0).

En efecto,

$f\big((1,0) + td\big) = f(1-t,-t),$ con $t > 0$

$$= max\{t, 1-t-t, 1-t+2t\} = 1+t$$

Y como $f(1,0) = 1 \rightarrow f(1,0) < f\big((1,0) + td\big) = 1 + t, t > 0$

Sin embargo, usaremos esta dirección para realizar una iteración del algoritmo subgradiente.

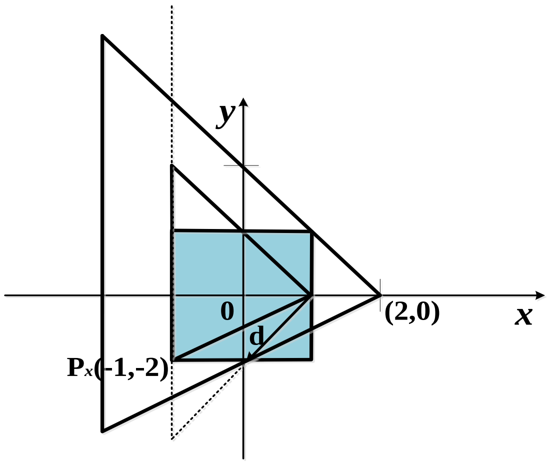

Figura 5.2 Conjunto de nivel de la función objetivo y proyección.

Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica el punto inicial es $(1,0)$ y la dirección inicial es $d = (-1,-1)$, donde

$$(1,1) \in \partial f(1,0)$$

Supongamos que damos una longitud de paso $\lambda = 2$ a lo largo de la dirección $d(-1,-1)$,

entonces, $(1,0) + \lambda d = (1,0) + 2(-1,-1) = (-1,-2)$, ver la gráfica.

Observamos que este punto está fuera de la región viable que es $[-1,1] \times [-1,1]$

Calculando la proyección de $(-1,-2)$ sobre el conjunto viable

$$X = [-1,1] \times [-1,1]$$

Esto es, el punto de proyección es aquel que resuelve el problema

$$\begin{cases} \min\|(x,y)-(-1,-2)\| \\ s.a. \\ (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \end{cases}$$

El cual es equivalente a:

$$\begin{cases} \min(x+1)^2+(y+2)^2 \\ s.a. \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

El cual es equivalente a:

$$\begin{cases} \min(x+1)^2+(y+2)^2 \\ s.a. \\ g_1(x,y) = x \leq 1 \\ g_2(x,y) = -x \leq 1 \\ g_3(x,y) = y \leq 1 \\ g_4(x,y) = -y \leq 1 \end{cases}$$

Analizando el punto $(-1,-1)$ que es un vértice de la región viable→ $I(-1,-1) = \{2,4\}$ (índices activos).

$$\nabla f(x,y) = (2(x+1), 2(y+2)) \rightarrow \nabla f(-1,-1) = (0,2)$$

$$\rightarrow -\nabla f(-1,-1) = (0,-2)$$

$$\nabla g_2 = (-1,0)$$

$$\nabla g_4 = (0,-1)$$

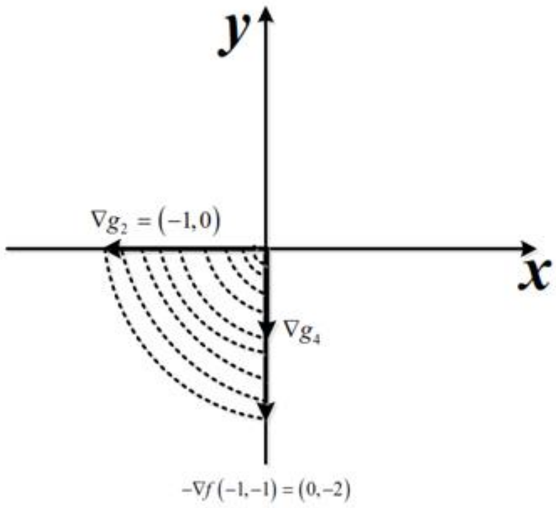

Figura 5.3 Combinación cónica

Fuente: Elaboración propia

Como el $-\nabla f(-1,-1)$ pertenece a la combinación cónica de $\nabla g_2 = (-1,-1)$ y

$\nabla g_4 = (-1,-1)$, entonces por la condición de KKT (-1,-1) es un punto solución del problema (por la convexidad de la función objetivo y las restricciones convexas).

Luego $(-1,-1)$ es un punto solución y por lo tanto $(-1,-1) = P_x(-1,-2)$ así $(-1,-1) = P_x\big((1,0) + 2(-1,-1)\big)$ es una iteracíon del algoritmo subgradiente.

CAPITULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis

De acuerdo con los resultados de herramientas de espacios de Hilbert, elementos fundamentales de análisis convexo y convergencia, verificamos, con las proposiciones y teoremas demostrados, que las hipótesis específicas son verdaderas.

6.2 Contrastación de los resultados con estudios similares

En Navarro (2013) observamos que el autor a realizado una presentación del método de subgradiente tanto para el caso con restricciones como para el caso irrestricto, sus aplicaciones y también resultados de convergencia, en nuestro trabajo en cambio, se realizó un estudio del método subgradiente proyectado con restricciones más didáctico de dicho resultado.

En Nava (2015) el autor hace un estudio de los métodos (subgradiente, bundle y métodos con operador próximo) aplicándolo a problemas de optimización donde enfatiza que la convergencia no depende del punto inicial elegido, menciona que los métodos de punto próximo y gradiente próximo son sencillos de implementar computacionalmente, pero nuestro trabajo se diferencia en trabajar solo hasta los resultados de convergencia del método subgradiente proyectado para funciones convexas no diferenciables quedando abierta para futuros trabajos, dado que todo algoritmo debe ser implementado y comparado.

En Borda (2013) se hace uso de definiciones importantes de análisis real y elementos básicos de análisis convexo con las cuales también concordamos en nuestro estudio y hacemos uso de ellas.

En Loreto (2005) se hace uso de definiciones importantes para problemas de optimización convexa, con las cuales también concordamos en nuestro trabajo y hacemos uso de ellas

6.3 Responsabilidad ética

Para garantizar la calidad ética del presente trabajo de investigación se destacan aspectos fundamentales a tomar en cuenta en su desarrollo como por ejemplo que existe un cuidado riguroso de la calidad y estándar científico.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado herramientas básicas de espacios de Hilbert, estas herramientas fueron necesarias porque permitieron dar las condiciones necesarias a nuestro problema, de lo cual podemos concluir que el espacio de Hilbert es un espacio completo en el cual se cumplen muchas propiedades necesarias para nuestro trabajo de investigación.

En este trabajo de investigación hemos presentado elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert, que fueron muy importantes porque la convexidad es parte fundamental en nuestra investigación, de lo cual podemos concluir que estos elementos fueron necesarios para poder aplicar el método de subgradiente proyectado para optimización convexa.

El determinar la convergencia de la sucesión que nos da algoritmo del método de subgradiente proyectado fue muy importante porque garantiza que el algoritmo empleado es correcto. De donde podemos concluir que la convergencia es parte fundamental para el estudio del método subgradiente proyectado.

Todo lo antes mencionado (las herramientas básicas de espacios de Hilbert, los elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert y determinar la convergencia de la sucesión) permite hacer el estudio del Método subgradiente y lo podemos concluir con un ejemplo explicativo en donde se da solución a un determinado problema de optimización convexa, con el método de subgradiente proyectado.

RECOMENDACIONES

Es recomendable este trabajo de tesis para aquellos estudiantes e investigadores que estudien extensiones del método de subgradiente, por ejemplo para funciones cuasi-convexas para la línea de matemática aplicada.

Es recomendable para futuras tesis, por ejemplo se podría hacer una investigación de la velocidad de convergencia del método y su aplicación a problemas concretos.

El trabajo de tesis puede servir como referencia para futuros trabajos de investigación que se puedan realizar, pues hay detalles por explorar, tanto en el aspecto teórico como computacional, dado su importancia en los distintos campos de la ingeniería y economía.

Este trabajo puede mejorarse, pues el algoritmo puede ser usado en el sentido computacional como actualmente se corroboran en distintas investigaciones en la actualidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alber, Y.,Iusem, A., y Solodov, M. (1998). On the projected subgradient method for nonsmooth convex optimization in a Hilbert space. *Mathematical Programmimg,* (81),23-35*.*

[2] Bazaraa, M., Sherali, H. y Shetty, C. (2006). *Nonlinear programming*: *Theory and Algorithms* (3° Ed.). New Jersey, Estados Unidos: John Wiley and Sons.

[3] Bartle R. (1992). The Elements of Real Analysis (2° Ed.). New York, Estados unidos: John Wiley and Sons.

[4] Borda, D. (2013). *Convergencia del Método de punto proximal con distancia homogénea de orden r en optimización convexa.*(tesis de pregrado).Universidad Nacional del Callao, Lima, Perú.

[5] Crouzeix J., Ocaña E. y Sosa W. (2003). *Análisis convexo,* Lima, Perú: IMCA.

[6] Izmailov A. y Solodov M. (2005). *Optimización (vol. 1): Condiciones de optimalidad, Elementos, Elementos de Analise Convexa e de Dualidad*, Rio de Janeiro, Brazil: IMPA.

[7] Kreyszig, E. (1978) *Introductory functional analysis with applications*. Toronto, Canadá: John Wiley and Sons.

[8] Lima E. (2004). *Análise Real (Vol. 1,7° Edición),* coloquio Matemática Universitaria, Rio de Janeiro, Brazil.

[9] Loreto,M.(2005). *Subgradiente espectral proyectado* (Tesis de doctorado). Recuperado de http://159.90.80.55/tesis/000133268.pdf

[10] Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* Thousand Oaks, Estados Unidos: Sage.

[11] Nava, R. (2015). *Funciones convexas no diferenciables* (Tesis de maestría).Recuperado de http://mat.izt.uam.mx/mcmai/documentos/tesis/Gen.12-O/Nava_Manzo_Rafael_Alejandro.pdf

[12] Navarro, F. (2013).*Algunas aplicaciones y extensión del método del subgradiente* (Tesis de maestría). Universidad nacional mayor de San Marcos, Lima, Perú.

[13] Papa, E. (2009). *Optimización Continua*: *Teoría y ejercicios*. Lima, Perú: Española.

[14] Valderrama, S. (2013). *Pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica*. Lima, Perú: San Marcos

[15] Rockafellar T. (1970), *Convex Analysis*. New York, Estados unidos: Princeton University Press.

ANEXOS

- **Matriz de consistencia**

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA Y POBLACIÓN
Problema General ¿Es posible estudiar el Método de subgradiente Proyectado para optimización convexa no diferenciable en espacios de Hilbert para, minimizar el modelo dado en (1) y (2) mediante el algoritmo (7) y (8)? **Problemas específicos** 1¿Es posible presentar herramientas básicas de espacios de Hilbert? 2¿Es posible presentar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert? 3¿E s posible probar de convergencia de $\{x^k\}$?	**Objetivo general** Estudiar el Método de subgradiente proyectado para optimización convexas no diferenciales en espacios de Hilbert para Minimizar $f(x)$ (1) Sujeto a. $x \in C$. (2) Mediante el algoritmo dado en (7) y (8) de una manera didáctica. **Objetivos específicos** 1.Estudiar algunas herramientas de espacios de Hilbert 2.Estudiar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert 3. Probar la convergencia de $\{x^k\}$.	**Hipótesis general** Si es posible presentar el Método de subgradiente proyectado para optimización convexas no diferenciales en espacios de Hilbert para Minimizar $f(x)$ (1) Sujeto a. $x \in C$. (2) Mediante el algoritmo dado en (7) y (8). **Hipótesis específicas** 1.Si es posible presentar algunas herramientas de espacios de Hilbert 2.Si es posible presentar elementos fundamentales de análisis convexo en espacios de Hilbert 3. Si es posible probar la convergencia de $\{x^k\}$.	**Tipo de investigación** El presente trabajo de investigación es de tipo básica. **Diseño de investigación** La presente investigación tiene un diseño no experimental. El método a utilizar es el método deductivo – demostrativo. **Población y muestra** La abstracción del trabajo realizar nos indica que no existe población y muestra que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla en un espacio de Hilbert H. **Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental** Para la realización de nuestro trabajo se reunió bibliografía especializada y recopilación de investigaciones relacionadas con el método de subgradiente proyectado para optimización convexa. **Plan de análisis estadísticos de datos** La presente investigación no requiere plan de análisis estadístico de datos.