UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“EXISTENCIA Y UNICIDAD GLOBAL DE UNA SOLUCIÓN SUAVE PARA UN SISTEMA PARABÓLICO EN $\mathbb{R}^n$ Y SUS APLICACIONES”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

SANTA MARÍA ALDORADÍN JOSÉ DEL CARMEN

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

EXISTENCIA Y UNICIDAD GLOBAL DE UNA SOLUCIÓN SUAVE PARA UN SISTEMA PARABÓLICO EN $\mathbb{R}^n$ Y SUS APLICACIONES

José Del Carmen Santa María Aldoradín

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Presidente

Vocal

Secretario

Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Asesor

Callao - Perú

Diciembre - 2019

DEDICATORIA

Este trabajo esta dedicado a mis padres Hernando y Liduvina
por ser los pilares fundamentales en mi desarrollo personal y profesional,
también a mis hermanos por su incondicional apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimado profesor Dionicio Orlando Moreno Vega por su apoyo incondicional y el tiempo dedicado en revisar y brindar las sugerencias pertinentes para el desarrollo de la investigación. Tambien a los profesores que hacen parte de mi jurado de Tesis, por la disponibilidad y paciencia que mostraron en la revisión del trabajo de tesis. Finalmente agradezco a mis amigos Nilton, Jonathan, Dany y Joel por su sincera amistad durante nuestra época en la universidad, asi como al personal administrativo.

Índice

RESUMEN

En este trabajo demostramos la existencia y unicidad de solución global suave para cierto sistema parabólico de la forma $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x_i}=D\Delta u$, donde u y f_i son funciones vectoriales y D es una matriz diagonal definida positiva. Consideramos que la condición inicial $u_\circ$ satisface $\|u_\circ-\bar{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}<r$, donde $\bar{u}\in\mathbb{R}^n$ es un vector fijo, de tal manera que f_i está definida en la bola de centro $\bar{u}$ y radio r y asumimos también que $\|u_\circ-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ es suficientemente pequeño.
Demostramos la existencia y unicidad de solución local suave teniendo en cuenta los principales resultados del análisis funcional como es el teorema del punto fijo de Banach y el teorema de Arzela - Ascoli, luego esta solucion se extiende de local a global considerando que el sistema parabólico admite un par de flujo de entropía. Finalmente mostraremos una aplicación a las ecuaciones de flujo de fluidos compresibles.

PALABRAS CLAVES:

SISTEMA PARABÓLICO
SOLUCIÓN SUAVE
TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH
PAR DE FLUJO DE ENTROPÍA
TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI.

ABSTRACT

The present text prove the existence and uniqueness of smooth global solution for certain parabolic systems of the form $\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x_i}=D\Delta u$, here u and f_i are vectors and D is a constant, positive matrix. We assume that the initial data $u_\circ$ satisfies $\|u_\circ-\bar{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}<r$,where $\bar{u}\in\mathbb{R}^n$ is fixed vector and f_i is defined in a r- ball about $\bar{u}$, and that $\|u_\circ-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$ is sufficiently small.

To demonstrate the existence and uniqueness of smooth local solution we'll consider the principal results of the functional analysis as the theorem of the fixed point of Banach and the theorem of Arzela - Ascoli, then this solution spreads it from local to global if we consider wich the system parabolic admit a entropy flux pair. Finally we will show an application to the equations of flux of fluids compressibles.

KEYWORDS:

PARABOLIC SYSTEM
SMOOTH SOLUTION
THEOREM OF THE FIXED POINT OF BANACH
ENTROPY FLUX PAIR
THEOREM OF ARZELA-ASCOLI.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) modelan matemáticamente fenómenos físicos, biológicos, químicos, económicos, de la ingeniería y otros. En particular las EDP del tipo parabólico representadas por la ecuación del calor son modelos clásicos de los fenómenos evolutivos y no estacionarios, las cuales principalmente tienen aplicaciones en la dinámica de fluidos. Las EDP parabólicas tienen en su estructura una derivada de primer orden respecto al tiempo y una o más derivadas de segundo orden respecto a variables espaciales.

Haciendo una mirada retrospectiva, las EDP parabólicas fueron inicialmente estudiadas por el matemático francés Jean Baptista Joseph Fourier (1768-1830) que establece el estudio de la transferencia de calor en sólidos y quien propuso expandir la solución de una ecuación en serie de funciones trigonométricas, según [11].

La motivación para el desarrollo de esta tesis es la aplicación de los resultados obtenidos en la investigación a las ecuaciones de flujo de fluidos compresibles. Según [12], nos dice que el flujo de los fluidos compresibles a través de medios porosos puede ser representado por un sistema de ecuación diferencial parcial de tipo parabólico, el cual justamente se estudiará en esta investigación.

Esta investigación esta basada en el trabajo de Hoff y Smoller [6] .El objetivo principal de este trabajo es demostrar la existencia y unicidad de solución global suave de un sistema parabólico en espacio de varias variables, considerando que la condición inicial se encuentra en $L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, además de aplicar estos resultados a fenomenos físicos que describen este modelo como es mencionado líneas arriba.

Para demostrar la existencia y unicidad de solución global suave usaremos el método que utiliza [5], aquí se estudia el sistema parabólico para el caso unidimensional, $x \in \mathbb{R}$, el autor sigue una secuencia lógica basada en garantizar la existencia de solución local al sistema parabólico estudiado definiendo una aplicación y un conjunto que le permitió garantizar las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach, posteriormente incluyo la definición de entropía para el sistema parabólico y así pudo extender dicha solución local a global. Cabe mencionar que nuestra investigación generaliza la variable espacial x a $\mathbb{R}^n$.

En el marco teórico se muestra las bases fundamentales que sostendran nuestro trabajo de investigación, primero estudiaremos la ecuación del calor para conocer la solución fundamental, luego se revisará los espacios métricos y espacios de Banach con la finalidad de enmarcar el conjunto en donde se garantizará la existencia de la solución así como el teorema del punto fijo de Banach que será fundamental para garantizar la existencia y unicidad de solución del sistema parabólico que estudiaremos, también se incluirá el estudio de los espacios L^p y L^p-vectoriales mostrando sus principales resultados que servirán como sustento en la investigación. Finalmente revisaremos los espacios de Sobolev, los espacios Holder continuos, algunos resultados importantes como el teorema de Arzela-Ascoli y algunas inmersiones continuas que son necesarias para algunas estimaciones que se usarán en la demostración de los lemas que se verán en el capítulo de Resultados.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) inicia en el siglo XVIII con el propósito de describir algunos fenómenos físicos básicos. En la actualidad se siguen estudiando las EDP en diversas áreas de estudio, ya que matemáticamente se puede modelar en áreas como las ciencias sociales, de la ingeniería y otras ciencias.

En este trabajo estudiaremos la siguiente ecuación diferencial parcial (EDP) denominada sistema parabólico:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} & = & D\Delta u \quad , \ u=u(x,t),\ x\in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Donde $u=(u^1,\ldots,u^m)$ es la función incógnita que va de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_0^+$ a $\mathbb{R}^m$,$f_i=(f_i^1,\ldots,f_i^m)$ son funciones que van de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$, y D es una matriz constante definida positiva.
Una manera de garantizar la existencia y unicidad de solución global suave de (1.1) lo da David Hoff y Joel Smoller en [5] para el caso unidimensional, ante esto nosotros vamos a tratar de garantizar que los resultados son también válidos para el caso de varias variables, para lo cual seguiremos la misma metodología de David Hoff y Joel Smoller en [5] para probar la existencia de una solución única, global y suave.

1.2 Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

1.2.1 Problema General

¿Será posible garantizar la existencia y unicidad de solución global suave del sistema parabólico (1.1)?

1.2.2 Problema Específicos

1. ¿Cuáles son las condiciones por establecer a las funciones u_0, f_i, u para poder garantizar la existencia y unicidad de solución local suave del sistema parabólico (1.1)?

2. ¿Cuáles son las condiciones por establecer al sistema parabólico (1.1) para garantizar la existencia y unicidad de solución global suave del problema?

3. ¿Será posible aplicar la existencia y unicidad de solución suave en algunos casos particulares como el de las ecuaciones de fluidos compresibles?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivos generales

Garantizar la existencia y unicidad de solución suave para el sistema parabólico (1.1).

1.3.2 Objetivos específicos

Tenemos los siguientes objetivos específicos:

1. Establecer condiciones adecuadas a las funciones u_0, f_i, u para poder garantizar la existencia y unicidad de solución local suave para el sistema parabólico (1.1).

2. Establecer condiciones adecuadas al sistema parabólico (1.1) para poder garantizar la existencia y unicidad de solución global suave para el sistema parabólico.

3. Aplicar la existencia y unicidad de la solución global suave del sistema parabólico (1.1) en algunos casos particulares como las ecuaciones de flujo de fluidos compresibles.

1.4 Justificación

Para poder garantizar la solución del sistema parabólico(1.1) estudiado es necesario definir el concepto de solución, es decir, aspectos de regularidad y de convergencia, además es fundamental analizar el conjunto en el cual se encontrará dicha solución y las características que debe satisfacer.

Por tal motivo, primeramente vamos a garantizar la existencia de una solución local por intermedio del teorema del punto fijo de Banach, considerando una aplicación definida en un espacio de Banach adecuado. Posteriormente, consideraremos que si el sistema parabólico (1.1) admite una entropía, está solución local podrá ser extendida. Finalmente mostraremos las ecuaciones de flujo de fluidos compresibles como aplicación del modelo.

Este trabajo servirá para motivar a que se siga investigando en el área de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y sus aplicaciones.

1.5 Limitantes de la investigación

Este trabajo se desarrolla bajo las siguientes condiciones: la condición inicial u_0 satisface $(u_0 - \bar{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, además las funciones $f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ donde $p = min\left\{k \in \mathbb{Z} : k > \dfrac{n}{2} + 1\right\}$, de esta forma se pueden realizar las estimaciones que permitan garantizar la existencia y unicidad de solución global suave.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

Se considera como antecedentes los siguientes trabajos de investigación por la relación que tienen con el tema de investigación.

A) **Antecedentes internacionales**

Yan, Zhixin y Tao[20], en su artículo titulado "Conservation laws I: viscosity laws" estudian un sistema parabólico con dato inicial similar al que estudiamos en la investigación, con la diferencia que la variable espacial "x" es unidimensional. Aquí el garantiza la existencia y unicidad de una solución local suave usando el teorema del punto fijo de Brouwer-Shauder.

Cerón[4], en un artículo titulado "Soluciones viscosas para un sistema de leyes de conservación" demuestra la existencia y unicidad local de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas cuasi lineales comúnmente llamadas leyes de conservación usando el teorema del punto fijo.

B) **Antecedentes nacionales**

Hinostroza[10], en la tesis "Existencia Global de soluciones suaves de un sistema parabólico no lineal" el autor tiene como principal objetivo probar la existencia de soluciones suaves para un sistema parabólico. Aquí estudia un sistema parabólico similar al que se está investigando, la única diferencia es que las soluciones están definidas en la recta. El define un conjunto y una aplicación contractiva sobre dicho conjunto para luego utilizar el Teorema del punto fijo y así garantizó la existencia de una solución local. Luego introdujo la definición de entropía al sistema parabólico para extender dicha solución y así tener una solución global suave.

Nina[18], en la tesis "Existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación $u_t + f(u)_x = \varepsilon D u_{xx}$ y sus aplicaciones" el autor tiene como principal objetivo garantizar la existencia global de soluciones suaves del tipo periódicas. En este trabajo el autor primero garantizó una solución local definiendo un conjunto y una aplicación para luego aplicar el Teorema de Punto Fijo. Además extendió esta solución considerando el concepto de entropía y finalmente se muestra la aplicación en la ecuación de dinámica de los gases con el propósito de garantizar una solución.

Loayza[17], en la tesis titulada "Aplicaciones del teorema punto fijo de Banach", publicada en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, escuela de Matemáticas, nos muestra el caso particular de la aplicación del teorema del punto fijo de Banach a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), para ello primero garantiza que encontrar una solución a la EDP es equivalente a que dicha solución satisfaga una ecuación del tipo integral, luego define una aplicación contractiva dada por la forma integral y aplica un corolario del teorema del punto fijo de Banach (corolario I.4.2). Lo realizado por Loayza es de guía para garantizar la existencia y unicidad local de la EDP que vamos a estudiar en la investigación.

2.2 Definición de terminos básicos

A continuación daremos algunas definiciones y notaciones que nos ayudará en la investigación.

Definición 2.2.1. *Dado* $u_\circ \in L^\infty(\mathbb{R}^n), f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ *decimos que* u *es solución local suave si* $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *para cada* $t \in [0,T]$*, existen* u_t*,* Δu*, y son holder continuos en* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *satisfaciendo* (1.1) *y además*

$$\lim_{t \to 0^+} u(\cdot,t) = u_\circ$$

en $L^2(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Definición de terminos básicos

- $p = min\left\{k \in \mathbb{Z} : k > \frac{n}{2} + 1\right\}$

- $L^p(\Omega) = \left\{u\, \text{medible en}\, \Omega \subset \mathbb{R}^n\, y \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty,\ 1 \leq p < +\infty\right\}$

- $\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

- $\sigma(E,E^{'})$: Topología débil mas fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\phi_f)_{f \in E'}$

- $L^\infty(\Omega) = \{u\, \text{medible en}\, \Omega \subset \mathbb{R}^n\, y\, |u(x)| \leq M\, \text{c.s en}\, \Omega\}$

- $\|u\|_\infty = \inf\{M > 0; |u(x)| \leq M, \text{c.s en}\, \Omega\}$

- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\, D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$

- $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$

- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$

- $V \hookrightarrow H$: V está inmerso continuamente en H.

2.3 Bases teóricas

2.3.1 Teorema del punto fijo

Recordemos que un espacio métrico es cualquier par (X,d), donde X es un conjunto no vacío, y d es una distancia sobre X, es decir, es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} d : X \times X & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

tal que para todo x, y, $z \in X$

(i) $d(x,y) = d(y,x)$,

(ii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

(iii) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Si (X,d) es un espacio métrico, se dice que $A \subset X$ es un conjunto abierto si para cada punto $a \in A$ existe un $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a,\varepsilon_a) \subset A$, donde por definición,

$$B(a,\varepsilon_a) = \{x \in X; d(x,a) < \varepsilon_a\}$$

De esta forma, queda definida sobre X una estructura de espacio topológico. En particular, un subconjunto $C \subset X$ será cerrado si y solo si su complementario $X - C$ es abierto.

Una propiedad fundamental de la topología asi definida sobre un espacio métrico, es que puede ser analizada mediante sucesiones. Es decir, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, se dice que converge a $x \in X$ en (X,d) si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

Una clase muy importante de espacios métricos la constituyen los espacios normados (sobre $\mathbb{R}$). Recordemos que un espacio normado (sobre $\mathbb{R}$) es cualquier par $(X,\|\cdot\|)$, tal que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $\|\cdot\|$ es una norma sobre X, es decir, es una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow [0,+\infty) \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

tal que para todo $x,y \in X$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

(iii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si X es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(x,y) = \|x-y\|\,,\ \ \forall x,y \in X$$

que se denomina la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|$

Un ejemplo de espacio normado lo constituye $\mathbb{R}^n$ dotado de las siguientes normas:

Definición 2.3.1. La norma euclideana de $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\|x\|_2$ se define como:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Definición 2.3.2. La norma máximo de $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\|x\|_\infty$ se define como:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Definición 2.3.3. La norma suma de $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\|x\|_1$ se define como:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Definición 2.3.4. Sean $\|.\|_p$ y $\|.\|_q$ dos normas en $\mathbb{R}^n$ se dice que $\|.\|_p$ y $\|.\|_q$ son equivalentes si y solo si existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|x\|_p \leq C_1 \|x\|_q \quad y \quad \|x\|_q \leq C_2 \|x\|_p \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Proposición 2.3.1. Dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Prueba, Ver [16],pag.18.

Definición 2.3.5. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado.Una sucesión $\{x_n\}$ en X es convergente, si X contiene un x tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Entonces escribimos $x_n \longrightarrow x$ y llamamos x el limite de $\{x_n\}$.

Observación 2.3.1. Si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

Definición 2.3.6. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado y sea$\{x_n\}$ una sucesión de vectores en X. Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es de cauchy sí, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Proposición 2.3.2. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces toda sucesión convergente en X es de cauchy.

Prueba, Ver [7],pag.29.

Observación 2.3.2. No toda sucesión de cauchy es convergente.

Definición 2.3.7. Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy en dicho espacio es convergente en el mismo. Un espacio de Banach es cualquier espacio normado que sea completo para la métrica inducida por la norma.

Lema 2.3.1. Sea X un espacio de Banach. Si F es un subespacio cerrado de X, entonces F es un espacio de Banach.

Demostración. Sea X un espacio de Banach y F un subespacio cerrado. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en F, entonces es una sucesión de Cauchy en X, y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Puesto que F es un subconjunto cerrado de X, concluimos por la cerradura de F que $x \in F$. Se deduce, que cada sucesión de Cauchy en F converge a un elemento de F, por lo tanto F es un espacio de Banach.

Resulta de interés el estudio de condiciones bajo las que una aplicación $T : X \longrightarrow X$ posee un punto fijo. Por conveniencia notacional, usaremos Tx para designar al transformado de x por T.

Definición 2.3.8. Sea (X,d) un espacio métrico, y consideremos una aplicación $T : X \longrightarrow X$. Se dice que T es contractiva, si existe $\alpha \in [0,1\rangle$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y), \quad \forall x,y \in X$$

Observación 2.3.3. Observese que si T es contractiva, en particular es continua, de hecho es uniformemente continua, como aplicación de (X,d) en sí mismo.

Teorema 2.3.1. (Teorema del Punto Fijo de Banach) Sean (X,d) un espacio métrico completo, y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva. Bajo estas condiciones, existe un y sólo un punto fijo de T, es decir, existe un y sólo un $\bar{x} \in X$ tal que

$$T\bar{x} = \bar{x}$$

Demostración. Como T es contractiva, sabemos que existe $\alpha \in [0,1\rangle$ tal que

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y), \quad \forall x,y \in X$$

Fijemos un punto fijo $x_0 \in X$, y de manera inductiva, definamos

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

o lo que es equivalente,

$$x_n = T^n x_0, \quad \forall n \geq 1,$$

Probaremos que (x_n) es de Cauchy. En efecto, para $m \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
d(x_{m+1},x_m) &= d(Tx_m,Tx_{m-1}) \\
&\leq \alpha d(x_m,x_{m-1}) \\
&= \alpha d(Tx_{m-1},Tx_{m-2}) \\
&\leq \alpha^2 d(x_{m-1},x_{m-2}) \\
\ldots &\leq \alpha^m d(x_1,x_0)
\end{aligned}$$

Así, por la desigualdad triangular y la formula de la suma de la progresión geométrica obtenemos para $n > m$

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1},x_n) \\
&\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0,x_1) \\
&= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

Puesto que $0 \leq \alpha < 1$, en el numerador tenemos $1 - \alpha^{n-m} < 1$ Consecuentemente,

$$d(x_m,x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \qquad (n > m)$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, es evidente que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = 0$$

, y por tanto,tenemos

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} d(x_m, x_n)$$

es decir, la sucesión (x_n) es de Cauchy en(X,d).

Como (X,d) es completo, existe un $\overline{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \overline{x},$$

luego, teniendo en cuenta que T es continua,

$$T\overline{x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = \overline{x},$$

y por consiguiente $\overline{x}$ es un punto fijo de T.

Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que $\hat{x}$ es otro punto fijo de T. En tal caso,

$$d(\overline{x}, \hat{x}) = d(\overline{T}x, \hat{T}x) \leq \alpha d(\overline{x}, \hat{x}),$$

es decir,

$$(1-\alpha) d(\overline{x}, \hat{x}) \leq 0,$$

con lo que al ser $\alpha < 1$, obtenemos que $d(\overline{x}, \hat{x}) = 0$, y por tanto $\overline{x} = \hat{x}$.

Corolario 2.3.1. Sean $(X, ||.||)$ un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de X, $T : Y \longrightarrow Y$ una aplicación contractiva. Entonces existe un y sólo un punto fijo de T.

Demostración. Basta darnos cuenta que $(Y, ||.||)$ es de Banach, puesto que Y es un subespacio cerrado. Luego por teorema del punto fijo se tiene el resultado.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Valor Medio). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todos los puntos del segmento $\langle a, a+v \rangle$ y $f_{|_{[a,a+v]}}$ continua ($[a, a+v] \subset U$) entonces:

$$\exists\ \theta \in \langle 0,1 \rangle \,/\, f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)$$

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \xi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(a+tv) \end{array}$$

Como $[a, a+v] \subset U$ y $f_{|_{[a,a+v]}}$ es continua, entonces ξ es continua en el intervalo de $[0,1]$, además para todo $t_0 \in \langle 0,1 \rangle$ tenemos:

$$\frac{\xi(t_0+t) - \xi(t_0)}{t} = \frac{f(a+(t_0+t)v) - f(a+t_0 v)}{t}$$

tomando límite cuando $t \to 0$

$$\xi'(t_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\xi(t_0+t) - \xi(t_0)}{t} = \frac{\partial}{\partial v} f(a+t_0 v) \tag{2.1}$$

luego ξ es diferenciable en $\langle 0,1 \rangle$ entonces por el Teorema de Valor Medio para funciones de una variable real

$$\exists\ \theta \in \langle 0,1 \rangle \,/\ \xi'(\theta) = \xi(1) - \xi(0)$$

por la definición

$$\xi'(\theta) = f(a+v) - f(a)$$

de (2.1)

$$\exists\ \theta \in \langle 0,1 \rangle \,/\ f(a+v) - f(a) = \frac{\partial}{\partial v} f(a+\theta v)$$

Definición 2.3.9. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación, se dice que f es Lipschtziana si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x-y\| \qquad \forall\ x, y \in X$$

Definición 2.3.10. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$, abierto y $0 < \gamma \leq 1$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función acotada, se dice que f es Holder continuo con exponente γ sí, y sólo si, existe $C > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\|_n \leq C \|x - y\|_m^\gamma \qquad \forall\ x, y \in X$$

Observación 2.3.4. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\bar{B}_r(\bar{u}))$ entonces es Lipschitz en $\bar{B}_r(\bar{u})$

En Efecto:

Como $f \in C^1(\bar{B}_r(\bar{u}))$ entonces $f \in C^1(B_r(\bar{u}))$

i,e f es diferenciable en $B_r(\bar{u})$ dado que $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ tenemos que los f_i son diferenciables en $B_r(\bar{u})$ y $\frac{\partial}{\partial x_k} f_i$ son continuos y por tanto acotados en $B_r(\bar{u})$ $\quad \forall\, i = 1, 2, ..., n\, \forall\, k = 1, 2, ..., n$

i,e

$$\exists\, M > 0 \,/\, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x) \right| \leq M; \ \forall \ \ x \in B_r(\bar{u}) \ \forall \ k = 1, 2, ..., n$$

Sean $x, y \in B_r(\bar{u})$, por la convexidad de $B_r(\bar{u})$

$$[x, y] \subset B_r(\bar{u})$$

Como f_i es diferenciable en $B_r(\bar{u})$ entonces f_i es diferenciable en el segmento $\langle x, y \rangle$ y por tanto continuo en $[x, y]$ entonces por el teorema (2.3.2) (T.V.M.)

$$\exists \theta \in \langle 0, 1 \rangle \,/\, f_i(y) - f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x + \theta(y - x))(y_i - x_i)$$

donde: $\quad v = y - x$

tomando el valor absoluto

$$\begin{aligned}
|f_i(y) - f_i(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x + \theta(y - x))(y_i - x_i) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x + \theta(y - x)) \right| |(y_i - x_i)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} M \,|(y_i - x_i)| \\
&= M \sum_{k=1}^{n} |(y_i - x_i)| \\
&= M \,\|y - x\|_1
\end{aligned}$$

entonces:

$$|f_i(y) - f_i(x)| \quad \leq \quad M \|y - x\|_1$$

Por la equivalencia de normas:

$$\exists\, C > 0 \,/\, \|y - x\|_1 \leq C \|y - x\|_\infty$$

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(y) - f_i(x)| \leq \bar{C} \|y - x\|_\infty$$

Donde $\bar{C} = MC$, asi tenemos

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq \bar{C} \|y - x\|_\infty \quad \forall x, y \in B_r(\bar{u})$$

f es Lipschitz en la bola abierta $B_r(\bar{u})$ pero necesitamos que f sea Lipschitz en la bola cerrada,entonces

Sean $x, y \in \bar{B}_r(\bar{u}) \Rightarrow \exists_n\ (x_n), (y_n) \subset B_r(\bar{u})\ /x_n \rightarrow x\ ,\ y_n \rightarrow y$
Como $x_n, y_n \in B_r(\bar{u}),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|f(y_n) - f(x_n)\|_\infty \leq \bar{C} \|y_n - x_n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por la continuidad de f cuando $n \rightarrow \infty$

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq \bar{C} \|y - x\|_\infty \quad \forall x, y \in \bar{B}_r(\bar{u}) \tag{2.2}$$

Definición 2.3.11. Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones definidas en $E \subset \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$. Se dice que $\{f_k\}$ converge uniformemente en E a una función f de E a $\mathbb{R}^m$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_\circ = k_\circ(\varepsilon)$ tal que si $k \geq k_\circ(\varepsilon)$ y $x \in E$ se tiene:

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Teorema 2.3.3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, supongamos que

(i) Existe un $c \in [a, b]$ tal que la sucesión $\{f_n(c)\}$ converge;

(ii) Todas la funciones f_n son derivables y las derivadas son continuas;

(iii) La sucesión de derivadas $\left\{f_n^{'}\right\}$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función g.

Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función f derivable en $[a,b]$ y ademas $f^{'} = g$.

Demostración. Ver[2],pag.322.

Definición 2.3.12. Sea $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones definidas en $E \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$. Se dice que F está uniformemente acotada en E cuando existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in A$ se tiene $\|f_\alpha(x)\| < M$.

Definición 2.3.13. Sea $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones definidas en $E \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$. Se dice que F es equicontinua en E cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo par $x_1, x_2 \in E$, $|x_1 - x_2| < \delta$ y todo $\alpha \in A$ se verifica:

$$\|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)\| < \varepsilon$$

.

Teorema 2.3.4 (Arzela-Ascoli). Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia infinita de funciones uniformemente acotada y equicontinua definidas en un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$. Entonces existe una sucesión $\{f_\alpha\}$ de funciones distintas de la familia dada que converge uniformemente en $E \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. Ver[13],pag.62.

2.3.2 Ecuación del calor

El objetivo de este capítulo es el estudio de la ecuación del calor $n-dimensional$.

$$u_t - \triangle u = 0 \tag{2.3}$$

y la ecuación del calor no homogenea

$$u_t - \triangle u = f \tag{2.4}$$

Aquí, $t > 0$ y $x \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. El desconocido es

$$u : U \times [0,\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u = u(x,t)$$

el laplaciano $\triangle$ es con respecto a la variable espacial $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\triangle u = \triangle_x u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

En (2.4) la función $f : U \times [0,\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ es dada

Buscaremos una solución de la ecuación del calor

$$u_t - \triangle u = 0, \quad para\, t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n$$

Supondremos que u es invariante mediante un cambio de escala, es decir, para $\lambda > 0$:

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u(\lambda^{\beta} x, \lambda t)$$

donde α y β son números reales a determinar.Puesto que

$$u_t(x,t) = \lambda^{\alpha+1} u_t(\lambda^{\beta} x, \lambda t), \quad \Delta u(x,t) = \lambda^{\alpha+2\beta} \Delta u(\lambda^{\beta} x, \lambda t)$$

tendremos,

$$0 = u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = \lambda^{\alpha+1} u_t(\lambda^{\beta} x, \lambda t) - \lambda^{\alpha+2\beta} \Delta u(\lambda^{\beta} x, \lambda t)$$

La elección natural para β sera por tanto $\beta = 1/2$. Esto implica que la invarianza natural bajo cambios de escala para la ecuación del calor es:

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u(\sqrt{\lambda} x, \lambda t),$$

donde α es arbitrario. En particular, si tomamos $\lambda = 1/t$, podemos buscar soluciones de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1) = \frac{1}{t^{\alpha}} v(\frac{x}{\sqrt{t}})$$

denotemos:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad \xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \quad \xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{t}}$$

Afirmación 2.3.1. *Para las derivadas de u, tenemos:*

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(\xi) - \frac{1}{2t^{\alpha+1}} \langle \nabla v(\xi), \xi \rangle \\ \Delta u &= \frac{1}{t^{\alpha+1}} \nabla v(\xi) \end{aligned}$$

donde: $v(\xi) = (\frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial \xi_n})$*, representa el vector gradiente.*

En efecto,

$$u_t = \frac{d}{dt}(\frac{1}{t^\alpha}) v(\xi) + \frac{1}{t^\alpha}\{\frac{d}{dt}(v(\xi))\}$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{t^\alpha}) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \quad y \quad \xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{t}}$$

tenemos:

$$\frac{d}{dt}(v(\xi)) = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \frac{d\xi_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt} = -\frac{1}{2t} \langle \nabla v(\xi), \xi \rangle$$

Asi

$$u_t = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(\xi) - \frac{1}{2t^{\alpha+1}} \langle \nabla v(\xi), \xi \rangle$$

además,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{t^{\alpha+1/2}} \cdot (\frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi_i}) \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2}$$

luego

$$\triangle u = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \triangle v(\xi)$$

sustituyendo en la ecuación (2.3), obetenemos:

$$\alpha v(\xi) + \frac{1}{2} \langle \nabla v(\xi), \xi \rangle + \triangle v(\xi) = 0$$

para simplicar, supongamos que v es radial. Es decir, $v(\xi) = w(|\xi|)$.

Afirmación 2.3.2. *entonces denotando* $r = |\xi|$, *tendremos:*

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{Nn-1}{r} w'(r) = 0 \tag{2.5}$$

En efecto,

$$r = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k}{r} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_k} = \frac{dw}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k}{r} \cdot \frac{dw}{dr}$$

luego

$$\nabla v = \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \xi \quad , \quad \langle \nabla v(\xi), \xi \rangle = \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \langle \xi, \xi \rangle = r w'(r)$$

además,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} = w'(r) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\xi_k^2}{r^3} \right) + w''(r) \cdot \frac{\xi_k^2}{r^2}$$

asi se tiene:

$$\triangle v = \frac{w''(r)}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \right) + w'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}{r^3} \right)$$

$$\triangle v = w''(r) + w'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right)$$

por tanto, reemplazando en (2.5) obtenemos:

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0$$

multiplicando por r^{n-1}, podemos escribir la ecuación (2.5) en la forma:

$$\left(r^{n-1} w'(r) \right)' + \left(\frac{1}{2} r^n w(r) \right)' + \left(\alpha - \frac{n}{2} \right) = 0$$

por tanto una elección adecuada de α es $\alpha = \frac{n}{2}$. Con ella tendremos:

$$r^{n-1} w'(r) + \frac{1}{2} r^n w = A$$

tomando para simplificar $A = 0$, tenemos:

$$w'(r) + \frac{1}{2} r w(r) = 0,$$

que es una ecuación en variables separables cuyas soluciones son
$w(r) = Be^{-\frac{r^2}{4}}$, con B arbitraria. Por tanto, tenemos una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$u(x,t) = \frac{B}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

cuando tomamos $B = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}$, obtenemos la llamada solución fundamental de la ecuación del calor:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

Observemos que la solución fundamental tiene una singularidad cuando
$t = 0$. La elección de la constante B esta motivada por la siguiente propiedad:

Lema 2.3.2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t)dx = 1 \qquad \forall t > 0$$

Haciendo el cambio de variable $z = x/(2\sqrt{t})$ *con* $(dx = (4t)^{\frac{n}{2}} dz)$, *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z_1^2+\ldots+z_n^2)} dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Lema 2.3.3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Sea

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Entonces

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Haciendo:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (x,y)=T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Asi,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\ &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-r^2}|JT|drd\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} re^{-r^2}drd\theta \\ &= 2\pi\int_{0}^{+\infty} re^{-r^2}dr \\ &= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^{+\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

2.3.3 Espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1\leq p<\infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ es Lebesgue integrable sobre Ω. La norma en $L^p(\Omega)$ esta dada por:

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

Para el caso en que $p=\infty$ definimos

$$L^\infty(\Omega)=\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}, u\; medible\; y\,|u(x)|\leq C\;\; cs.\; en\;\Omega\}$$

y

$$\|u\|_\infty \equiv \sup ess\, u = inf\,\{C > 0; |u(x)| \leq C \;\; cs.\, en\, \Omega\}$$

es una norma en $L^\infty(\Omega)$, asi tenemos

Proposición 2.3.3. $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$

Demostración. Ver [1],pag.26.

Definición 2.3.14. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que para cada $j \in [1,m]$,$\left|u^j\right|^p$ es Lebesgue integrable sobre Ω. La norma en $L^p(\Omega)$ esta dada por:*

$$\|u\|_p = \max_{1\leq j\leq m}\left\{\left[\int_\Omega \left|u^j(x)\right|^p dx\right]^{1/p}\right\}$$

Definición 2.3.15. *Para el caso en que $p = \infty$ definimos $L^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que para cada $j \in [1,m]$,$\left|u^j(x)\right| \leq C$ cs. en Ω. La norma en $L^\infty(\Omega)$ esta dada por:*

$$\|u\|_\infty = inf\left\{C > 0; \left|u^j(x)\right| \leq C \;\; cs.\, en\, \Omega,\ \forall j \in [1,m]\right\}$$

Proposición 2.3.4 (Desigualdad de Holder). Si $u \in L^p(\Omega)$ y $u \in L^q(\Omega)$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\, \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

donde $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demostración. Ver [1],pag.23.

Definición 2.3.16. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Si para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, se define la convolución de las funciones $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y la denotamos por $f * g$ a la expresión

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Teorema 2.3.5. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, entonces $f * g(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Demostración. Ver [9],pag.66.

Teorema 2.3.6 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ que converge casi siempre a una función f. Si existe una función $g \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

entonces f pertenece a $L^p(\Omega)$ y $\{f_n\}$ converge en $L^p(\Omega)$ a f.

Demostración. Ver [3],pag.67.

Teorema 2.3.7 (Teorema de la convergencia diferencial de Lebesgue). Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible según Lebesgue y sumable, es decir, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < +\infty$. Entonces se cumple:

$$\frac{1}{vol(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} f(x)dx = \oint_{B(x_0,r)} f(x)dx \longrightarrow f(x_0) \quad cuando \;\; r \longrightarrow 0$$

Demostración. Ver[15],pag.649.

2.3.4 Espacios $L^p(a,b;X)$ Vectoriales

Sea X un espacio de Banach y $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

El espacio $L^p(a,b;X)$ para $1 \leq p < +\infty$ es la colección de todas las funciones medibles

$$f : [a,b] \longrightarrow X$$

tal que

$$\int_a^b \|f(x)\|_X^p \, dx < +\infty$$

El espacio $L^\infty(a,b;X)$ es el conjunto de todas las funciones medibles

$$f : [a,b] \longrightarrow X$$

medibles que son esencialmente acotados, es decir

$$L^\infty(a,b;X) = \{f : [a,b] \longrightarrow X / \ \exists\, C > 0, \|f(x)\|_X \leq C, \ \ c.s. \ en \ [a,b]\}$$

Sobre el espacio $L^p(a,b;X)$ definimos la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(a,b;X)} : L^p(a,b;X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(x)\|_X^p \, dx \right)^{1/p} \end{aligned} \tag{2.6}$$

de igual manera en $L^\infty(a,b;X)$ definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^\infty(a,b;X)} : L^\infty(a,b;X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \sup_{a \leq x \leq b} ess \, \|f(x)\|_X \end{aligned} \tag{2.7}$$

Proposición 2.3.5. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < +\infty$, entonces

(a) La aplicación definida en (2.6) es un norma en $L^p(a,b;X)$,

(b) La aplicación definida en (2.7) es un norma en $L^\infty(a,b;X)$

Demostración. Ver[8]

Proposición 2.3.6. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < +\infty$, entonces

(a) $\left(L^p(a,b;X), \|\cdot\|_{L^p(a,b;X)}\right)$es un espacio de Banach

(b) $\left(L^\infty(a,b;X), \|\cdot\|_{L^\infty(a,b;X)}\right)$es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [8]

Definición 2.3.17. Definimos la convolución componente a componente de las funciones $f,g:$ $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y la denotamos por $f*g$ a la expresión

$$f*g=(f_1*g_1,f_2*g_2,...,f_m*g_m)$$

Teorema 2.3.8. Sean $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p\leq +\infty$ entonces para casi todo punto $x\in\mathbb{R}^n$ la función

$$\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p$$

Demostración. Sea $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es decir

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$$

por definición $|f_i(x)|\leq\|f(x)\|_\infty$

entonces

$$\|f_i\|_p\leq\|f\|_p \qquad i=1,2,...,m \quad y \;\; 1\leq p\leq+\infty$$

Así por la hipótesis tenemos

$\|f_i\|_1\leq\|f\|_1$ y $\|g_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq\|g\|_p$ entonces

$$\|f_i\|_1\|g_i\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p$$

pero por el teorema 2.3.5

$$\|f_i*g_i\|_p\leq\|f_i\|_1\|g_i\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p$$

$$\|f_i*g_i\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p, \qquad i=1,2,...,m$$

por lo tanto

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Proposición 2.3.7. Si para cada $t \in [0,T]$,$f(t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces se cumple:

$$\left\| \int_0^t f(s)ds \right\|_p \leq \int_0^t \|f(s)\|_p ds, \quad para\ p = 2, \infty$$

Demostración.

Sea

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), ..., f_n(x,t))$$

Para $p = 2$, Recordemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t f_i(x,s)ds \right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty^2 dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t f_i(x,s)ds \right|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t |f_i(x,s)|\, ds \right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t |f_i(x,s)|\, ds \right) \left(\int_0^t |f_i(x,w)|\, dw \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t \int_0^t |f_i(x,s)|\, |f_i(x,w)|\, dwds \right) dx \\
&\leq \int_0^t \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_i(x,s)|\, |f_i(x,w)|\, dx \right) dwds \\
&\leq \int_0^t \int_0^t \|f_i(s)\|_2 \|f_i(w)\|_2 \, dwds \\
&\leq \left(\int_0^t \|f_i(s)\|_2 \, ds \right) \left(\int_0^t \|f_i(w)\|_2) dw \right) \\
&\leq \left(\int_0^t \|f_i(s)\|_2 \, ds \right)^2
\end{aligned}$$

asi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t f_i(x,s)ds \right|^2 dx \leq \left(\int_0^t \|f_i(s)\|_2 \, ds \right)^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t f_i(x,s)ds \right|^2 dx \leq \left(\int_0^t \|f_i(s)\|_2 \, ds \right)^2 \leq \left(\int_0^t \|f(s)\|_2 \, ds \right)^2$$

asi tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t f_i(x,s)ds \right|^2 dx \leq \left(\int_0^t \|f(s)\|_2 \, ds \right)^2$$

por lo recordado al inicio de la demostración

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty^2 dx \leq \left(\int_0^t \|f(s)\|_2 \, ds \right)^2$$

es decir

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^t \|f(s)\|_2 \, ds \right)$$

por lo tanto

$$\left\| \int_0^t f(s)ds \right\|_2 \leq \left(\int_0^t \|f(s)\|_2 \, ds \right)$$

para el caso $p = +\infty$

$$\left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty \leq \int_0^t \|f(x,s)\|_\infty \, ds$$

tomando supremo escensial

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess \left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess \int_0^t \|f(x,s)\|_\infty \, ds \leq \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} ess \, \|f(x,s)\|_\infty \, ds$$

asi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess \left\| \int_0^t f(x,s)ds \right\|_\infty \leq \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess \, \|f(x,s)\|_\infty \, ds$$

es decir

$$\left\| \int_0^t f(s)ds \right\|_\infty \leq \int_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds$$

por lo tanto para $p = 2, \infty$

$$\left\| \int_0^t f(s)ds \right\|_p \leq \int_0^t \|f(s)\|_p ds$$

2.3.5 Espacio de Sobolev

Definición 2.3.18. *El espacio de Sobolev $W^{m,q}(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ se define por*

$W^{m,q}(\mathbb{R}^N) = \{v \in L^q(\mathbb{R}^N)$ tal que existe $D^\alpha v$ en el sentido debil y pertenece a $L^q(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq |\alpha| \leq m\}$

donde D^α es la derivada distribucional $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}.\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}$. La norma de $W^{m,q}$, denotada como $\|.\|_{W_{m,p}}$ es

$$\|v\|_{W_{m,q}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_0^q \right)^{1/q}$$

Definición 2.3.19. Sean V y H dos espacios de Hilbert con V subespacio de H $V \subset H$, diremos que V está inmerso continuemente en H y denotaremos por $V \hookrightarrow H$ si existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_H \leq C\|u\|_V$$

Teorema 2.3.9. Sea $k < m - \frac{n}{q} \leq k+1$, k un entero no negativo. Entonces

$$W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

donde:

a) $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{q}$, si $m - k - \frac{n}{q} < 1$

b) $0 < \lambda < 1$, si $m - k - \frac{n}{q} = 1$

Demostración. Ver[14],pag.54.

2.3.6 Los Espacios Holder Continuos

$H^l(\bar{\Omega})$ es el espacio de Banach de todas la funciones continuas $u(x)$ en Ω teniendo en $\bar{\Omega}$ sus derivadas continuas inclusive hasta el orden $[l]$ y un valor finito para la expresión:

$$\|u\|_{\Omega}^{(l)} = \langle u\rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_{\Omega}^{(j)}, \tag{2.8}$$

donde

$$\langle u\rangle_{\Omega}^{(0)} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|,$$

$$\langle u\rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} \left|D_x^j u\right|_{\Omega}^{(0)}, \langle u\rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{([l])} \left\langle D_x^{[l]} u\right\rangle_{\Omega}^{(l-[l])}$$

y $\sum_{(j)}$ denota la sumatoria de todas las posibles derivadas de u de orden j,
la igualdad (1.15) define una norma $\|u\|_{\Omega}^{(l)}$ en $H^l(\bar{\Omega})$

Sea $Q_T = \Omega \times \langle 0, T\rangle$

$H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$ es el espacio de Banach de todas la funciones $u(x,t)$ que son continuas en $\bar{Q}_T$, junto con todas las derivadas de la forma $D_t^r D_x^s$ para $2r+s<l$, y tiene una norma finita:

$$\|u\|_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}, \tag{2.9}$$

donde

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(0)} \equiv |u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u|,$$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} |D_t^r D_x^s u|_{Q_T}^{(0)},$$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)} + \langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{(l/2)}$$

$$\langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)} = \sum_{(2r+s=[l])} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l-[l])},$$

$$\langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{(l)} = \sum_{0<l-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{t,\,Q_T}^{(\frac{l-2r-s}{2})};$$

Denotaremos por $L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ el operador lineal parabólico diferencial con coeficientes reales

$$L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u. \tag{2.10}$$

asumiendo que los coeficientes del operador de (1.17) están definidas en una franja $\mathbb{R}^n \times \langle 0,T\rangle$, consideramos en este dominio el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{rcl} L(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})\,u(x,t) &=& f(x,t) \\ \\ u(x,0) &=& \varphi(x) \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

Teorema 2.3.10. Supongamos que $l > 0$ no es entero y que los coeficientes del operador L pertenece a la clase $H^{l,l/2}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Entonces para cualquier $f \in H^{l,l/2}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $\varphi \in H^{l+2}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ el problema (2.11) tiene una única solución de la clase $H^{l+2,l/2+1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Que satisfsace la desigualdad:

$$\|u\|_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}^{(l+2)} \leq c\left(\|f\|_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}^{(l)} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}^n}^{(l+2)}\right) \tag{2.12}$$

con la constante que no depende de f y φ

Demostración. Ver [19],pag.320.

2.3.7 Convergencia débil

Definición 2.3.20. Topología débil $\sigma(E,E^{'})$: *Topología débil mas fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones* $(\phi_f)_{f\in E'}$

Teorema 2.3.11. (Kakutani) *Sea E un espacio de Banach. entonces E es reflexivo si y solo si*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^{'})$

Demostración. Ver [9],pag. 67.

Definición 2.3.21. (Convergencia debil) Sea E un espacio de Banach y $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E. Entonces $u_\nu \rightharpoonup u$ si y solamente si $\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u_\nu \rangle$, para todo $\varphi \in E^{'}$

Teorema 2.3.12. Sea E un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E.

$$Si \ \ x_n \to x \, fuertemente, \ \ entonces \ \ x_n \rightharpoonup x \ \ debilmente \ \ en \, \sigma(E, E^{'})$$

Demostración. Ver[9],pag.35.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLE

3.1 Hipótesis general e hipótesis específicas

3.1.1 Hipótesis general

Existe una única solución global suave para el sistema parabólico (1.1).

3.1.2 Hipótesis específicas

1. Si $u_0 - \bar{u} \in L^\infty$, $f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$, $p = min\left\{k \in \mathbb{Z} : k > \dfrac{n}{2} + 1\right\}$
   Se garantiza la existencia y unicidad de solución local suave del sistema parabólico (1.1)

2. Si existe un par de flujo entropía-entropía (α, β) para el sistema (1.1).

   Se garantiza la existencia y unicidad de solución global suave del sistema parabólico (1.1).

3. Se garantiza la existencia y unicidad de solución global suave para el caso particular de un sistema de flujo de fluidos compresibles.

3.2 Variables de la investigación

u la cual es una función que va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^m$.

3.3 Operacionalización de las variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
u	La función u es el campo de velocidad del fluido viscoso, solución del sistema parábolico	Función suave en $\mathbb{R}^n \times [0;T]$	Función local suave Función global suave	$u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ t \in [0,T]$ u y Δu son Holder continuas en $\mathbb{R}^n \times [0;T]$ $\lim\limits_{t \to 0} u(t) = u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

CAPÍTULO IV

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo de diseño y diseño de la investigación

La investigación es del tipo científico básico, este tipo de tesis servirá para ampliar y profundizar el conocimiento del tema de investigación.
El diseño de investigación utilizado en el presente trabajo de investigación, es descriptivo-demostrativo.

4.2 Método de la investigación

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.3 Población y muestra

No aplica.

4.4 Lugar de estudio

FCNM-UNAC.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada como revistas científicas, libros, tesis en la biblóteca de la facultad y recopilación de información obtenida vía internet realizada al tema de interés en buscadores especializados como los repositorios de las universidades.

4.6 Plan de trabajo

Durante el desarrollo de la investigación, primero nos enfocamos en garantizar la existencia y unicidad de solución local, usando el teorema del punto fijo de Banach, posteriormente demostraremos las condiciones de suavidad de la solución. Luego definiremos el par de flujo de entropía-entropía que el sistema parabólico (1.1) admite para así poder extender la solución local a global. Finalmente mostraremos una aplicación de nuestros resultados al flujo de fluidos compresibles.

4.7 Análisis y procesamiento de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1 Existencia y unicidad de la solución local

En esta sección probaremos la existencia y unicidad de una solución local a nuestro problema, bajo las restricciones convenientes sobre u_0, f y D.
Nuestro objetivo es resolver el siguiente sistema parabólico de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = D\Delta u, \quad u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde:

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x,t) & \longmapsto & u(x,t) = (u^1(x,t), \ldots, u^m(x,t)) \end{array}$$

es nuestra función incognita, además:

$$\begin{array}{rccl} f_i: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & y & \longmapsto & f_i(y) = (f_i^1(y), \ldots, f_i^m(y)) \end{array}$$

es una función conocida tal que $f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$,

$$p = min\left\{k \in \mathbb{Z} : k > \frac{n}{2} + 1\right\}$$

$$
\begin{array}{rccl}
u_\circ : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\
 & x & \longmapsto & u_\circ(x) = (u_\circ^1(x), \ldots, u_\circ^m(x))
\end{array}
$$

es la condición inicial tal que $u_\circ \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, además D es una matriz diagonal definida positiva, es decir

$$D = diag(d_1, d_2, ..., d_m), \quad d_i > 0$$

y

$$\Delta u := (\Delta u^1, \ldots, \Delta u^m)$$

Observación 5.1.1. Como cada $f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|D^\alpha f_i(x)\| \leq M \quad \forall \ x \in \bar{B}_r(\bar{u}) \quad \forall i = 1, \ldots, n \ y \ |\alpha| = 0, 1, \ldots, p$$

Observación 5.1.2. Como f_i esta definido en $C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ entonces f_i es Lipschitz en $\bar{B}_r(\bar{u})$, por Observacíon (2.3.4)

Analicemos primero la ecuación homogénea correspondiente de (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0$$

esto es

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial t} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial t} \end{pmatrix}
-
\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Delta u^1 \\ \Delta u^2 \\ \vdots \\ \Delta u^m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

i,e)

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial t} - d_1 \Delta u^1 \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial t} - d_2 \Delta u^2 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial t} - d_m \Delta u^m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

si, y sólo si

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} - d_j \Delta u^j = 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,m$$

Sea $K^j(x,t)$ la solución fundamental para el operador $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) - d_j\Delta$,

$$K^j(x,t) = (4\pi d_j t)^{-\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{|x|^2}{4d_j t}\right)$$

Proposición 5.1.1. Existe $R > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial K^j}{\partial x_i}(\cdot,t) \right\|_1 \leq \frac{R}{\sqrt{t}} \quad \forall\, j = 1,\ldots,m \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$$

Demostración,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial K^j}{\partial x_i}(\cdot,t) \right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial K_j}{\partial x_i}(x,t)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| -\frac{2x_i}{4d_j t}(4\pi d_j t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4d_j t}} \right| dx \\
&= \frac{(4\pi d_j t)^{-n/2}}{2d_j t} \int_{\mathbb{R}^n} |x_i| e^{-\frac{|x|^2}{4d_j t}} dx \\
&= \frac{(4d_j t)^{-n/2}\pi^{-n/2}}{2d_j t} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{4d_j t}|z_i| e^{-|z|^2} |JT| dz \\
&= \frac{(4d_j t)^{-n/2}\pi^{-n/2}}{2d_j t} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{4d_j t}|z_i| e^{-|z|^2} (4d_j t)^{n/2} dz \\
&= \frac{\pi^{-n/2}\sqrt{4d_j}}{2d_j\sqrt{t}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_k^2} dz_k \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |z_i| e^{-z_i^2} dz_i \right) \\
&= \frac{\pi^{-n/2}\sqrt{4d_j}}{2d_j\sqrt{t}} (\sqrt{\pi})^{n-1} \left(\underbrace{2\int_0^{+\infty} z_i e^{-z_i^2} dz_i}_{1} \right) \\
&\leq \frac{\pi^{-1/2}}{\sqrt{min\{d_j :\ j = 1,\ldots,m\}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial K^j}{\partial x_i}(\cdot,t) \right\|_1 \leq \frac{R}{\sqrt{t}} \quad \forall\, j = 1,\ldots,m \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$$

Observación 5.1.3. Sea $\bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2, ..., \bar{u}^m) \in \mathbb{R}^m$ entonces

$$\bar{u}^j = K^j(\cdot, t) * \bar{u}^j \quad \forall\, j = 1, \ldots, m$$

En efecto: Por la definición y por el lema(2.1.1)

$$\begin{aligned}
(K^j(\cdot,t) * \bar{u}^j)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K^j(x-y,t)\bar{u}^j dy \\
&= \bar{u}^j \int_{\mathbb{R}^n} K^j(x-y,t) dy \\
&= \bar{u}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bar{u}^j = K^j(\cdot, t) * \bar{u}^j$$

El sistema (1.1) es equivalente

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial t} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^1(u)}{\partial x_i} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^2(u)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^m(u)}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u^1 \\ \Delta u^2 \\ \vdots \\ \Delta u^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^1(u)}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^2(u)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^m(u)}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u^1 \\ d_2 \Delta u^2 \\ \vdots \\ d_m \Delta u^m \end{pmatrix}$$

las condiciones iniciales

$$u^j(x, 0) = u_0^j(x) \quad \forall\, j = 1, \ldots, m$$

luego obtenemos el siguiente sistema equivalente a (1.1) para cada $j = 1, \ldots, m$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^j}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i^j(u)}{\partial x_i} & = & d_j \Delta u^j \\
\\
u^j(x,0) & = & u_0^j(x)
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

si el sistema (5.1) admite solución, entonces satisface la siguiente representación

$$
u^j(t) = K^j(t) * u_0^j - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t K_{x_i}^j(t-s) * f_i^j(u(s))ds, \quad j = 1, \ldots, m \tag{5.2}
$$

donde: $*$ denota la convolución y $K_{x_i}^j = \dfrac{\partial K^j}{\partial x_i}$
Comenzaremos definiendo el siguiente conjunto de funciones G_T por:

$$
G_T := \{u : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u(\cdot,t) - \overline{u}\|_\infty \leq r,\ 0 \leq t \leq T\}
$$

y el operador L en G_T por:

$$
\pounds(u)^j(t) = K^j(t) * u_0^j - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t K_{x_i}^j(t-s) * f_i^j(u(s))ds, \quad j = 1, \ldots, m \tag{5.3}
$$

La existencia y unicidad local de nuestro problema resulta de las propiedades de $\pounds$ en el siguiente lema.

Lema 5.1.1. Sea f_i, G_T y $\pounds$ definidos como arriba. Dado $s < r$, existe $T > 0$ tal que si $(u_0 - \overline{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\|u_0 - \overline{u}\|_\infty \leq s$, entonces $\pounds$ mapea G_T en si mismo y es una contracción en la norma $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mas aun dados
$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_p < T$, existe una constante $C = C(s, t_1, \ldots, t_p)$, tal que si $u \in G_T$ satisface:

a) $\|u(\cdot,t) - \overline{u}\|_2 \leq C \|u_0 - \overline{u}\|_2, \qquad 0 \leq t \leq T.$

b) $\|u_{x_i}(\cdot,t)\|_\infty \leq \dfrac{C}{\sqrt{t}}, \qquad 1 \leq i \leq n,\ 0 < t \leq T.$

c) $\|D_x^\alpha u(\cdot,t)\|_2 \leq C\frac{\|u_0-\overline{u}\|_2}{\sqrt{t-t_q}}, \qquad |\alpha| = q,\ q = 1,\ldots,p,\ t_q < t \leq T$

Entonces $\pounds(u)$ también satisface $(a),(b),y\ (c)$.

Demostración.

Primero probaremos que $\pounds$ aplica G_T en si mismo, esto es $\pounds(G_T) \subseteq G_T$

Sea $u \in G_T$ pdq: $\pounds u \in G_T$.

Para cada $j = 1,...,m$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left\|\pounds(u)^j(t)-\overline{u}^j\right\|_\infty &= \left\|K^j(t)*u_0^j-\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))\,ds-K^j(t)*\overline{u}^j\right\|_\infty \\
&= \left\|K^j(t)*(u_0^j-\overline{u}^j)-\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))\,ds\right\|_\infty \\
&\leq \left\|K^j(t)*(u_0^j-\overline{u}^j)\right\|_\infty+\sum_{i=1}^n\left\|\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))\,ds\right\|_\infty \\
&\leq \left\|K^j(t)\right\|_1\left\|u_0^j-\overline{u}^j\right\|_\infty+\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))\right\|_\infty ds \\
&\leq \left\|u_0-u^j\right\|_\infty+\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|f_i^j(u(s))\right\|_\infty ds \\
&= \left\|u_0-u^j\right\|_\infty+\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|f_i^j(u(s))-f_i^j(\overline{u})\right\|_\infty ds \\
&\leq s+C\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\|u(s)-\overline{u}\|_\infty\,ds \\
&\leq s+Cr\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\,ds \\
&\leq s+Cr\sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}} \\
&\leq r\left(\frac{s}{r}+C\sqrt{T}\right) \\
&\leq r, \quad \text{para T suficientemente pequeño tal que } \frac{s}{r}+C\sqrt{T}\leq 1
\end{aligned}
$$

luego,

$$\left\|\pounds(u)^j(t)-\overline{u}^j\right\|_\infty \leq r, para\ cada\ j=1,\ldots,m$$

asi,

$$\left\|\pounds(u)(t)-\overline{u}\right\|_\infty \leq r,\ 0\leq t\leq T$$

.

Ahora probaremos que $\pounds$ es una contracción, esto es

$$\left\|\pounds(u)-\pounds(v)\right\|_\infty \leq \alpha\left\|u-v\right\|_\infty \quad \alpha\in[0,1\rangle$$

$$\begin{aligned}
\left\|\pounds(u)^j(t)-\pounds(v)^j(t)\right\|_\infty &= \left\|\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))ds-\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(v(s))ds\right\|_\infty\\
&= \left\|\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*(f_i^j(u(s))-f_i^j(v(s)))ds\right\|_\infty\\
&\leq \sum_{i=1}^n\left\|\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*(f_i^j(u(s))-f_i^j(v(s)))ds\right\|_\infty\\
&\leq \sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)*(f_i^j(u(s))-f_i^j(v(s)))\right\|_\infty ds\\
&\leq \sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|f_i^j(u(s))-f_i^j(v(s))\right\|_\infty ds\\
&\leq C\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|u(s)-v(s)\right\|_\infty ds\\
&\leq C\left\|u-v\right\|_\infty\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1 ds\\
&\leq C\left\|u-v\right\|_\infty\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}}\\
&\leq C\sqrt{T}\left\|u-v\right\|_\infty
\end{aligned}$$

para T suficientemente pequeño tal que $C\sqrt{T}\leq 1$, tenemos:

$$\left\|\pounds(u)^j(t)-\pounds(v)^j(t)\right\|_\infty \leq \left\|u-v\right\|_\infty, para\ cada\ j=1,\ldots,m,\ 0\leq t\leq T$$

entonces,

$$\left\|\pounds(u)(t)-\pounds(v)(t)\right\|_\infty \leq \|u-v\|_\infty,\ 0\leq t\leq T$$

asi

$$\left\|\pounds(u)-\pounds(v)\right\|_\infty \leq \|u-v\|_\infty$$

a)

$$\begin{aligned}
\left\|\pounds u^j(\cdot,t)-\overline{u}^j\right\|_2 &= \left\|K^j(t)*u_0^j-\sum_{i=1}^n\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))ds\right\|_2\\
&\leq \left\|K^j(t)\right\|_1\left\|u_0^j-\overline{u}^j\right\|_2+\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))\right\|_2 ds\\
&\leq \left\|u_0^j-\overline{u}^j\right\|_2+\sum_{i=1}^n\int_0^t\left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|f_i^j(u(s))\right\|_2 ds
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|f_i^j(u(x,s))|=|f_i^j(u(x,s))-f_i^j(\overline{u})| &\leq |f_i(u(x,s))-f_i(\overline{u})|\\
&\leq M|u(x,s)-\overline{u}|\\
&\leq M\left(\sum_{j=1}^n|u^j(x,s)-\overline{u}^j|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|f_i^j(u(x,s))|^2 &\leq M^2\left(\sum_{j=1}^n|u^j(x,s)-\overline{u}^j|^2\right)\\
\int_{\mathbb{R}^n}|f_i^j(u(x,s))|^2dx &\leq M^2\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|u^j(x,s)-\overline{u}^j|^2dx\\
\left\|f_i^j(u(s))\right\|_2^2 &\leq M^2\sum_{j=1}^n\left\|u^j(s)-\overline{u}^j\right\|_2^2\leq M^2n\left\|u(s)-\overline{u}\right\|_2^2
\end{aligned}$$

asi

$$\left\|f_i^j(u(s))\right\|_2 \leq M\sqrt{n}\left\|u(s)-\overline{u}\right\|_2$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\pounds u^j(\cdot,t)-\overline{u}^j\right\|_2 &\le \left\|u_0^j-\overline{u}^j\right\|_2+M\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1 \|u(s)-\overline{u}\|_2\,ds\\
&\le \left\|u_0^j-\overline{u}^j\right\|_2+CMR\sqrt{n}\,\|u_0-\overline{u}\|_2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}}\\
&\le \|u_0-\overline{u}\|_2+CMR\sqrt{n^3}\sqrt{T}\,\|u_0-\overline{u}\|_2\\
&= C\,\|u_0-\overline{u}\|_2\,(\frac{1}{C}+MR\sqrt{n^3}\sqrt{T}),\forall j=1,\ldots,m\\
&\le C\,\|u_0-\overline{u}\|_2, \qquad (\frac{1}{C}+MR\sqrt{n^3}\sqrt{T})\le 1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\left\|\pounds(u)_{x_i}^j(t)\right\|_\infty &= \left\|K_{x_i}^j(t)*u_0^j-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))_{x_i}\,ds\right\|_\infty\\
&\le \left\|K_{x_i}^j(t)*u_0^j\right\|_\infty+\sum_{i=1}^{n}\left\|\int_0^t K_{x_i}^j(t-s)*f_i^j(u(s))_{x_i}\,ds\right\|_\infty\\
&\le \left\|K_{x_i}^j(t)\right\|_1\left\|u_0^j\right\|_\infty\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \left\|K_{x_i}^j(t-s)\right\|_1\left\|f_i^j(u(s))_{xi}\right\|_\infty ds\\
&\le \frac{R}{\sqrt{t}}\left\|u_0^j\right\|_\infty+R\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}}\left\|f_i^j(u(s))_{xi}\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

Como

$$
f_i^j(u(s))_{xi}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_i^j}{\partial u^k}(u(x,s))\cdot\frac{\partial u^k}{\partial x_i}(x,s)
$$

$$
\begin{aligned}
|f_i^j(u(x,s))_{xi}| &\le \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial f_i^j}{\partial u^k}(u(x,s))\right|\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_i}(x,s)\right|\\
&\le |f'(u(x,s))|\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_i}(x,s)\right|\\
&\le M_1\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_i}(x,s)\right|\\
&\le M_1\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_i}(\cdot,s)\right\|_\infty\\
&\le M_1 m\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot,s)\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

Asi

$$\left\| f_i^j(u(s))_{xi} \right\|_\infty \leq M_1 m \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot,s) \right\|_\infty$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left\| \pounds(u)_{x_i}^j(t) \right\|_\infty &\leq \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0^j \right\|_\infty + RM_1 n \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot,s) \right\|_\infty \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0 \right\|_\infty + CRM_1 n \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{(t-s)s}} \\
&= \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0 \right\|_\infty + CRM_1 n^2 \pi \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left(\frac{R \left\| u_0 \right\|_\infty}{C} + RM_1 n^2 \pi \right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \qquad \left(\frac{R \left\| u_0 \right\|_\infty}{C} + RM_1 n^2 \pi \right) \leq 1
\end{aligned}$$

c) (i) Primero demostraremos para ($|\alpha| = 1$)

$$\left\| \pounds(u)_{x_i}^j(t) \right\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left\| u_0 \right\|_2$$

$$\begin{aligned}
\left\| \pounds(u)_{x_k}^j(\cdot,t) \right\|_2 &= \left\| K_{x_k}^j(t) * u_0^j - \sum_{i=1}^n \int_0^t K_{x_i}^j(t-s) * \frac{\partial f_i^j}{\partial x_k}(u(s)) ds \right\|_2 \\
&\leq \left\| K_{x_k}^j(t) * u_0^j \right\|_2 + \sum_{i=1}^n \left\| \int_0^t K_{x_i}^j(t-s) * \frac{\partial f_i^j}{\partial x_k}(u(s)) ds \right\|_2 \\
&\leq \left\| K_{x_k}^j(t) \right\|_1 \left\| u_0^j \right\|_2 + \sum_{i=1}^n \int_0^t \left\| K_{x_i}^j(t-s) \right\|_1 \left\| \frac{\partial f_i^j}{\partial x_k}(u(s)) \right\|_2 ds \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0^j \right\|_2 + M \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{R}{\sqrt{t-s}} \left\| u_{x_k}(\cdot,s) \right\|_2 ds \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0^j \right\|_2 + MnR \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \frac{C \left\| u_0 \right\|_2}{\sqrt{s}} \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{t}} \left\| u_0 \right\|_2 + MnRC \left\| u_0 \right\|_2 \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{(t-s)s}} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left\| u_0 \right\|_2 \left(\frac{R}{C} + MnR\pi\sqrt{T} \right) \quad 0 = t_1 < t < T \quad \forall k = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

para T suficientemente pequeño tal que

$$\frac{R}{C}+MnR\pi\sqrt{T}\leq 1$$

tenemos

$$\left\|\pounds(u)^j_{x_i}(t)\right\|_2\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\|u_0\|_2\quad 0=t_1<t<T$$

(ii) Ahora demostraremos para $(|\alpha|=2)$

Sea

$$v(t)=\pounds(u)^j(t)\quad t_1<t_2<t<T$$

Afirmación 5.1.1.

$$v(t)=K^j(t-t_2)*v(t_2)-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds$$

En efecto,

$$K^j(t-t_2)*v(t_2)-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds$$

$$\begin{aligned}
&= K^j(t-t_2)*\left[K^j(t_2)*u^j_0-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_2}K^j_{x_i}(t_2-s)*f^j_i(u(s))ds\right]-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= K^j(t)*u^j_0-\sum_{i=1}^{n}K^j(t-t_2)*\int_{0}^{t_2}K^j_{x_i}(t_2-s)*f^j_i(u(s))ds-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= K^j(t)*u^j_0+\sum_{i=1}^{n}K^j(t-t_2)*\int_{0}^{t_2}K^j(t_2-s)*\frac{\partial f^j_i}{\partial x_i}(u(s))ds-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= K^j(t)*u^j_0+\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_2}K^j(t-s)*\frac{\partial f^j_i}{\partial x_i}(u(s))ds-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= K^j(t)*u^j_0-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_2}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= K^j(t)*u^j_0-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t}K^j_{x_i}(t-s)*f^j_i(u(s))ds\\
&= L(u)^j(t)
\end{aligned}$$

asi tenemos,

$$v(t) = K^j(t-t_2) * v(t_2) - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_2}^{t} K^j_{x_i}(t-s) * f^j_i(u(s))ds \quad t_1 < t_2 < t < T$$

Afirmación 5.1.2.

$$\left\| v_{x_j x_i}(t) \right\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{t-t_2}} \|u_0\|_2 \quad 0 = t_1 < t_2 < t < T$$

En efecto,

$$v_{x_i}(t) = K^j_{x_i}(t-t_2) * v(t_2) - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_2}^{t} K^j_{x_i}(t-s) * f^j_{i\ x_i}(u(s))ds$$

luego

$$v_{x_j x_i}(t) = K^j_{x_i}(t-t_2) * v_{x_j}(t_2) - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_2}^{t} K^j_{x_i}(t-s) * f^j_{i\ x_j x_i}(u(s))ds$$

entonces

$$\left\| v_{x_j x_i}(t) \right\|_2 \leq \left\| K^j_{x_i}(t-t_2) \right\|_1 \left\| v_{x_j}(t_2) \right\|_2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_2}^{t} \left\| K^j_{x_i}(t-s) \right\|_1 \left\| f^j_{i\ x_j x_i}(u(s)) \right\|_2 ds$$

acotemos: $\left\| f^j_{i\ x_j x_i}(u(s)) \right\|_2$

$$\begin{aligned}
f^j_{i\ x_j x_i}(u(x,s)) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f^j_i}{\partial x_i}(u(x,s))\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f^j_i}{\partial u^k}(u(x,s)) \cdot u^k_{x_i}(x,s)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f^j_i}{\partial u^k}(u(x,s)) \cdot u^k_{x_i}(x,s)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f^j_i}{\partial x^l \partial x^k}(u(x,s)) u^l_{x_j}(x,s)\right) u^k_{x_i}(x,s) + \frac{\partial f^j_i}{\partial u^k}(u(x,s)) u^k_{x_j x_i}(x,s)\right]
\end{aligned}$$

entonces

$$\left| f^j_{i\ x_j x_i}(u(x,s)) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 f_i^j}{\partial x^l \partial x^k}(u(x,s))u_{x_j}^l(x,s)\right)u_{x_i}^k(x,s)+\frac{\partial f_i^j}{\partial u^k}(u(x,s))u_{x_jx_i}^k(x,s)\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{l=1}^{m}\left(\left|\frac{\partial^2 f_i^j}{\partial x^l \partial x^k}(u(x,s))\right||u_{x_j}^l(x,s)||u_{x_i}^k(x,s)|\right)+\left|\frac{\partial f_i^j}{\partial u^k}(u(x,s))\right||u_{x_jx_i}^k(x,s)|\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{l=1}^{m}\left(M|u_{x_j}^l(x,s)||u_{x_i}^k(x,s)|\right)+M|u_{x_jx_i}^k(x,s)|\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\left[M|u_{x_i}^k(x,s)|\sum_{l=1}^{m}\left(|u_{x_j}^l(x,s)|\right)\right]+M\sum_{k=1}^{m}|u_{x_jx_i}^k(x,s)| \\
&\leq Mm\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty\left(\sum_{k=1}^{m}|u_{x_i}^k(x,s)|\right)+Mm|u_{x_jx_i}(x,s)| \\
&\leq Mm^2\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty|u_{x_i}(x,s)|+Mm|u_{x_jx_i}(x,s)| \\
&\leq Mm^2\left(\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty|u_{x_i}(x,s)|+|u_{x_jx_i}(x,s)|\right)
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\left|f_{i\ x_jx_i}^j(u(x,s))\right|^2 &\leq M^2m^2\left(\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty|u_{x_i}(x,s)|+|u_{x_jx_i}(x,s)|\right)^2 \\
&\leq 2M^2m^2\left(\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty^2|u_{x_i}(x,s)|^2+|u_{x_jx_i}(x,s)|^2\right) \\
\left\|f_{i\ x_jx_i}^j(u(s))\right\|_2^2 &\leq 2M^2m^2\left(\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty^2\|u_{x_i}(s)\|_2^2+\left\|u_{x_jx_i}(s)\right\|_2^2\right)
\end{aligned}
$$

asi

$$
\begin{aligned}
\left\|f_{i\ x_jx_i}^j(u(s))\right\|_2 &\leq 2M^2m^2\left(\left\|u_{x_j}(s)\right\|_\infty\|u_{x_i}(s)\|_2+\left\|u_{x_jx_i}(s)\right\|_2\right) \\
&\leq 2M^2m^2\left(\frac{C^2}{s}\|u_0\|_2+\frac{C}{\sqrt{s-t_2}}\|u_0\|_2\right) \\
&\leq 2M^2m^2\left(\frac{C^2}{t_2}\|u_0\|_2+\frac{C}{\sqrt{s-t_2}}\|u_0\|_2\right) \\
&\leq \overline{C}\|u_0\|_2\left(1+\frac{C}{\sqrt{s-t_2}}\right), \quad \overline{C}=max\left\{\frac{2M^2m^2C^2}{t_2};2M^2m^2\right\}
\end{aligned}
$$

luego

$$\begin{aligned}
\left\|v_{x_jx_i}(t)\right\|_2 &\leq \left\|K^j_{x_i}(t-t_2)\right\|_1 \left\|v_{x_j}(t_2)\right\|_2 + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}\left\|K^j_{x_i}(t-s)\right\|_1 \left\|f^j_{i\ x_jx_i}(u(s))\right\|_2 ds\\
&\leq \frac{R}{\sqrt{t-t_2}}\frac{C}{\sqrt{t_2}}\|u_0\|_2 + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}\frac{R}{\sqrt{t-s}}\overline{C}\,\|u_0\|_2\left(1+\frac{C}{\sqrt{s-t_2}}\right)ds\\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t-t_2}}\frac{R\|u_0\|_2}{\sqrt{t}} + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_2}^{t}\left[\frac{R\overline{C}}{\sqrt{t-s}}+\frac{R\overline{C}C}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_2}}\right]ds\\
&\leq \frac{C\zeta}{\sqrt{t-t_2}} + n\zeta\int_{t_2}^{t}\left[\frac{1}{\sqrt{t-s}}+\frac{C}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_2}}\right]ds\\
&\leq \frac{C\zeta}{\sqrt{t-t_2}} + n\zeta\left[\sqrt{t-t_2}+C\pi\right]\\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t-t_2}}\left[\zeta+n\zeta(t-t_2)+n\zeta C\pi\sqrt{t-t_2}\right]\\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t-t_2}}\left[\zeta+n\zeta T+n\zeta C\pi\sqrt{T}\right]\\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t-t_2}}, \quad \zeta+n\zeta T+n\zeta C\pi\sqrt{T}\leq 1
\end{aligned}$$

por tanto tenemos

$$\left\|D^\alpha_x £(u)^j(\cdot,t)\right\|_2 \leq C\frac{\|u_0-\overline{u}\|_2}{\sqrt{t-t_2}}, \qquad |\alpha|=2,\ t_2<t\leq T$$

(iii) De manera inductiva tenemos que

$$\left\|D^\alpha_x £(u)^j(\cdot,t)\right\|_2 \leq C\frac{\|u_0-\overline{u}\|_2}{\sqrt{t-t_q}}, \qquad |\alpha|=q,\ q=1,\ldots,p,\ t_q<t\leq T$$

Lema 5.1.2. Asumamos que $f_i \in C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ y que D es una matriz diagonal definida positiva. Entonces dados $s < r$ existe un $T > 0$ tal que, si $(u_0 - \bar{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\|u_0 - \overline{u}\|_\infty \leq s < r$, entonces el problema (1.1) tiene una única solución definida en $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Mas aún, u satisface las siguientes propiedades:

a) $\|u(\cdot,t) - \bar{u}\|_\infty \leq r \;\; 0 \leq t \leq T$

b) u_t y Δu son localmente Holder continuos en $\mathbb{R}^n \times (0,T)$

c) $\lim\limits_{t \to 0^+} u(\cdot,t) = u_\circ$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

d) $u(\cdot,t) - \bar{u} \in H^p(\mathbb{R}^n), \;\; 0 < t \leq T$

e) $\|u(\cdot,T) - \bar{u}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u_0 - \overline{u}\|_2$

Demostración. Utilizaremos el teorema del punto fijo para demostrar la existencia de una función que satisface la ecuacion (5.2). Así teniendo en cuenta el conjunto G_T por:

$$G_T := \{u : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u(\cdot,t) - \overline{u}\|_\infty \leq r,\, 0 \leq t \leq T\}$$

y el operador $\pounds$ sobre G_T por:

$$\pounds(u)^j(t) = K^j(t) * u_0^j - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t K_{x_i}^j(t-s) * f_i^j(u(s))ds \quad u \in G_T$$

entonces bajo estas hipótesis tenemos por el Lema 5.1.1

a) $\pounds$ aplica G_T en si mismo, esto es $\pounds(G_T) \subseteq G_T$

b) $\pounds$ es una contracción en G_T con la topología de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

i,e)

$$\begin{aligned} \pounds : G_T &\longrightarrow G_T \\ u &\longmapsto \pounds(u) \end{aligned}$$

además

$$\left\|\pounds(u) - \pounds(v)\right\|_\infty \leq \bar{K} \|u - v\|_\infty$$

Entonces para aplicar el teorema 2.3.1 del punto fijo solo faltaría demostrar que G_T es cerrado.

Afirmación 5.1.3.

$$G_T := \{u : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u(\cdot,t) - \bar{u}\|_\infty \leq r,\ 0 \leq t \leq T\}$$

es cerrado con la topología de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

En efecto:

Sea $u \in \bar{G_T}$ entonces $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G_T /\ \ u_n \longrightarrow u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

i,e)

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ n_\circ \in \mathbb{N}/\ \ n \geq n_\circ \Rightarrow \|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$$

como $u_n \in G_T \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|u_n - \bar{u}\|_\infty \leq r$

Entonces por la desigualdad triangular

$$\|u - \bar{u}\|_\infty \leq \|u_n - \bar{u}\|_\infty + \|u_n - u\|_\infty \leq r + \varepsilon$$

cuando $\varepsilon \to 0$

$$\|u - \bar{u}\|_\infty \leq r$$

así $u \in G_T$ entonces $\bar{G_T} \subseteq G_T$

por tanto G_T es cerrado.

ahora tenemos del teorema del punto fijo 2.3.1 que

$$\exists\ !\ \ u^* \in G_T \quad /\ \ \pounds(u^*) = u^*$$

donde u^* es obtenida como el limite en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la sucesión $\{u^l\}$ definida por $\quad u^0 = u_0 \quad$ y $u^{l+1} = \pounds(u^l)$.

Del lema (5.1.1) parte (c) fijemos $\delta > 0$ tal que $t_q < \delta < t$

$$\left\| D_x^\alpha (u^l)(\cdot,t) - \bar{u} \right\|_2 \leq \frac{C \|u_0 - \bar{u}\|_2}{\sqrt{\delta - t_q}}, \quad t_q < \delta < t \leq T \tag{5.4}$$

En nuestro caso $p = min\{k \in \mathbb{Z} : k > \frac{n}{2} + 1\}$, obtenemos $p > \frac{n}{2} + 1$ y $p - 1 \leq \frac{n}{2} + 1$, es decir:

$$1 < p - \frac{n}{2} \leq 2$$

aplicando el teorema 2.3.9, considerando $k = 1$ y $q = 2$ se tiene:

$$W^{p,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \tag{5.5}$$

donde:

a) $0 < \lambda \leq p - \frac{n}{2} - 1, \quad$ si $p - \frac{n}{2} - 1 < 1$

b) $0 < \lambda < 1, \quad$ si $p - \frac{n}{2} - 1 = 1$ (n es par)

De (2):

$$\begin{aligned} \left\| u_{x_i}^l(t) \right\|_{C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &\leq C_0 \sum_{|\alpha| \leq p} \left\| D_x^\alpha (u^l)(\cdot,t) \right\|_2, \quad t \in [0,T] \\ &\leq \frac{C_0 C}{\sqrt{\delta - t_0}} \|u_0 - \bar{u}\|_2, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

Luego $u_{x_i}^l$ es holder continuo en x con exponente λ

Afirmación 5.1.4. *$u_{x_i}^l$ es Holder continua en t*

Definamos la ecuación recursiva:

$$u_t^{l+1} - D\Delta u^l = -\sum_{i=1}^n f_i(u^l)_{x_i}$$

Derivando respecto a x_k, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tx_k}^l - D\Delta u_{x_k}^l &= -\sum_{i=1}^n (f_i^{'}(u^{l-1}) u_{x_i}^{l-1})_{x_k} \\ &= -\sum_{i=1}^n (f_i^{''}(u^{l-1}) u_{x_k}^{l-1} u_{x_i}^{l-1} + f_i^{'}(u^{l-1}) u_{x_i x_k}^{l-1}) \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
|u^l_{tx_k}(t)|^2 &\leq (|D\Delta u^l_{x_k}(t)| + \sum_{i=1}^{n} |f_i^{''}(u^{l-1}) u^{l-1}_{x_k} u^{l-1}_{x_i}(t)| + \sum_{i=1}^{n} |f_i^{'}(u^{l-1}) u^{l-1}_{x_i x_k}(t)|)^2 \\
&\leq C(|D\Delta u^l_{x_k}(t)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |f_i^{''}(u^{l-1}(t))|^2 |u^{l-1}_{x_k}(t)|^2 |u^{l-1}_{x_i}(t)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |f_i^{'}(u^{l-1}(t))|^2 |u^{l-1}_{x_i x_k}(t)|^2) \\
\left\| u^l_{tx_k}(t) \right\|_2^2 &\leq C(\int_{\mathbb{R}^n} |D\Delta u^l_{x_k}(t)|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |f_i^{''}(u^{l-1}(t))|^2 |u^{l-1}_{x_k}(t)|^2 |u^{l-1}_{x_i}(t)|^2 dx + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |f_i^{'}(u^{l-1}(t))|^2 |u^{l-1}_{x_i x_k}(t)|^2 dx) \\
&\leq C \|D\| \sum_{\beta=3} \left\| D^{\beta}_x u^l(t) \right\|_2^2 + CM_2 \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}(t)\|_\infty^2 \left\| u^{l-1}_{x_k}(t) \right\|_2^2 + CM_2 \sum_{i=1}^{n} \left\| u^{l-1}_{x_i x_k}(t) \right\|_2^2 \\
&\leq C(\frac{1}{\delta - t_q} + \frac{1}{\delta(\delta - t_q)}) \|u_0 - \bar{u}\|_2^2 \\
&\leq C(\frac{1}{\sqrt{\delta - t_q}} + \frac{1}{\sqrt{\delta(\delta - t_q)}})^2 \|u_0 - \bar{u}\|_2^2 \leq +\infty, \quad t \in (\delta, T)
\end{aligned}
$$

Sean $\delta \leq t^{'} < t^{''} \leq T$ y del teorema (2.3.7)

$$
\begin{aligned}
u^l_{j_{x_i}}(x,t^{''}) - u^l_{j_{x_i}}(x,t^{'}) &= \frac{1}{vol(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (u^l_{j_{x_i}}(y,t^{''}) - u^l_{j_{x_i}}(y,t^{'})) dy + g(r) \\
&= \frac{1}{vol(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \int_{t^{'}}^{t^{''}} u^l_{j_{x_i t}}(y,t) dt dy + g(r), \quad tal\ que\ \ g(r) \longrightarrow 0 \\
|u^l_{j_{x_i}}(x,t^{''}) - u^l_{j_{x_i}}(x,t^{'})| &\leq \frac{1}{vol(B(x,r))} \int_{t^{'}}^{t^{''}} \int_{B(x,r)} |u^l_{j_{x_i t}}(y,t)| dy dt + |g(r)| \\
&\leq \frac{1}{vol(B(x,r))} \int_{t^{'}}^{t^{''}} (vol(B(x,r))^{1/2} (\int_{B(x,r)} |u^l_{j_{x_i t}}(y,t)|^2 dy)^{1/2} dt + |g(r)| \\
&\leq \frac{sup \left\| u^l_{j_{x_i t}}(\cdot,t) \right\|_2}{(vol(B(x,r))^{1/2}} \int_{t^{'}}^{t^{''}} dt + |g(r)| \\
&\leq \frac{c}{\alpha_n r^{n/2}} |t^{''} - t^{'}| + |g(r)| \\
&\leq \frac{C}{\alpha_n} |t^{''} - t^{'}|^{1 - \frac{n}{n+2}} + |t^{''} - t^{'}|^{\frac{2}{n+2}}, \ \ considerando\ \ r = (t^{''} - t^{'})^{\frac{2}{n+2}} \\
&\leq (\frac{C}{\alpha_n} + 1) |t^{''} - t^{'}|^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Afirmación 5.1.5. $u^l_{j_{x_i}}$ es Holder continua en $\mathbb{R}^n \times (\delta, T)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|u_{j_{x_i}}^{l}(x^{''},t^{''})-u_{j_{x_i}}^{l}(x^{'},t^{'})| &\leq |u_{j_{x_i}}^{l}(x^{''},t^{''})-u_{j_{x_i}}^{l}(x^{''},t^{'})|^{+}|u_{j_{x_i}}^{l}(x^{''},t^{'})-u_{j_{x_i}}^{l}(x^{'},t^{'})| \\
&\leq C|t^{''}-t^{'}|^{\lambda_1}+C|x^{''}-x^{'}|^{\lambda} \\
&\leq C|(x^{''},t^{''})-(x^{'},t^{'})|^{\lambda_2}, \quad \lambda_2=max\{\lambda_1,\lambda\}
\end{aligned}$$

Afirmación 5.1.6. $u_{x_ix_i}^{l}$ es uniformemente Holder continuo en $\mathbb{R}^n\times(\delta,T)$

Prueba,

u es obtenido como el límite en $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ de la suseción $\{u^l\}$ definida por $u^0=u_o$ y $u^l=\pounds(u^{l-1})$

Usaremos el teorema 2.3.10 aplicando al sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t^l-D\Delta u^l &=& -\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u^{l-1})_{x_i} \\ u^l(x,\delta) &=& \pounds(u^{l-1})(\delta) \end{array}\right. \tag{5.6}$$

- Para $l=1$ consideremos $u_o=0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t^1-D\Delta u^1 &=& 0 \\ u^1(x,\delta) &=& \pounds(0)(\delta) \end{array}\right. \tag{5.7}$$

El sistema (5.7) tiene una solución u^1 de clase $H_{(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])}^{l^*+2,\frac{l^*}{2}+1}$ con $l^*=\lambda_2$ esto es por el teorema 2.3.10, pues $0\in H_{(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])}^{l^*,\frac{l^*}{2}}$ y $\pounds(u^0)(\delta)\in H_{(\mathbb{R}^n)}^{l^*+2}$. Pues $\pounds(0)(\delta)=(K*u_0)(\delta)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ debido a esto $|K(\delta)*u_0|_{\mathbb{R}^m}^{l^*+2}$ es finito. **En efecto,**

Como u_{ox_j} es uniformemente Holder continua con exponente l^*

$$\begin{aligned}
\frac{|[K(\delta)*u_o]_{x_ix_j}(x)-[K(\delta)*u_o]_{x_ix_j}(x^{'})|}{|x-x^{'}|^{l^*}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|K_{x_i}(z,\delta)|\frac{|u_{ox_j}(x-z)-u_{ox_j}(x^{'}-z)|}{|x-x^{'}|^{l^*}}dz \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|K_{x_i}(z,\delta)|dz \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\delta}}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
|K(\delta)*u_o|^{l^*+2}_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{[l^*+2]}\sup_{x,x'\in\mathbb{R}^n}\{\frac{|D_x^{l^*+2}[K(\delta)*u_o]_{(x)} - D_x^{l^*+2}[K(\delta)*u_o]_{(x')}|}{|x-x'|^{l^*}}\} \\
&\quad + \max_{\mathbb{R}^n}|[K(\delta)*u_o]_{(x)}| + \sum_{j=1}^{[l^*+2]}(\sum_j \max_{\mathbb{R}^n}|D_x^j[K(\delta)*u_o]_{(x)}|) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\delta}} + \|u_o\|_\infty + \frac{C}{\sqrt{\delta}}\|u_o\|_\infty + \frac{C}{\delta}\|u_o\|_\infty
\end{aligned}$$

Por tanto $\pounds(u_o)(\delta) \in H^{l^*+2}_{(\mathbb{R}^n)}$ y las hipótesis del teorema 2.3.10 son satisfechas.

- Ahora supongamos que u^{k-1} es de clase $H^{l^*+2,\frac{l^*}{2}+1}_{(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])}$ con (con $l^*=\lambda_2$). Luego u^{k-1} es continua y tienen derivadas continuas de la forma $D_t^r D_x^\beta$ para $2r+|\beta|<l^*+2$ y con $|u^{k-1}|^{(l^*+2)}_{Q_T} \leq C$, para algún C constante

  Como $l^*+2=\lambda_2+2 \Rightarrow [l^*+2]=2$ se sigue que

$$\sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\bar{Q}_T \\ |x-x'|<\delta_o \\ |\alpha|\leq 2}} \frac{|D_x^\alpha u^{k-1}(x,t) - D_x^\alpha u^{k-1}(x',t)|}{|x-x'|^{l^*}} \leq C$$

$$\sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in\bar{Q}_T \\ |t-t'|<\delta_o \\ |\alpha|\leq 2}} \frac{|D_x^\alpha u^{k-1}(x,t) - D_x^\alpha u^{k-1}(x,t')|}{|t-t'|^{l^*}} \leq C$$

  Por tanto $D_x^\alpha u^{k-1}$ son uniformemente Holder continuas en x y en t. De la misma manera como se probo en la afirmación 5.1.5 se sigue que $D_x^\alpha u^{k-1}$ es uniformemente Holder continua en $\mathbb{R}^n\times[\delta,T]$, además $f\in C^p$, por tanto $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u^{k-1}) \in C(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])$

  Debido a esto vamos a tener que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u^{k-1}) & \in & H^{l^*,\frac{l^*}{2}}_{(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])} \\ \pounds(u^{k-1})(\delta) & \in & H^{l^*+2}_{(\mathbb{R}^n)} \end{array}\right. \tag{5.8}$$

  Entonces por el teorema 2.3.10, tenemos $u^k \in H^{l^*+2,\frac{l^*}{2}+1}_{(\mathbb{R}^n\times[\delta,T])}$.

Como las acotaciones de $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(u^{k-1})$ y $\pounds(u^{k-1})(\delta)$ son uniformes entonces Δu^k, $u^k_{x_i}$, u^k_t son uniformemente Holder continuas.

Por el teorema de Arzela-Ascoli $\{u^k_{x_i}\}$, $\{\Delta u^k\}$ son pre compactos en $\mathbb{R}^n \times [\delta, T]$ esto es nos da una subsucesión $\{u^{k_j}_{x_i}\}$, $\{\Delta u^{k_j}\}$ que converge uniformemente a u_{x_i}, Δu sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \times [\delta, T]$ de ahí $u^{k_j} \to u$, $\Delta u^{k_j} \to \Delta u$

$$\left(u^k_t = D\Delta u^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u^{k-1}) \right) \to \left(u_t = D\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u) \right)$$

converge uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n \times [\delta, T]$. Como δ es arbitrario se sigue que Δu^k, $u^k_{x_i}$, u^k_t convergen a Δu, u_{x_i} u_t en conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ siendo localmente Holder continuos en $\mathbb{R}^n \times (0, T)$

De (5.4) por un corolario del Teorema de Kakutaní 2.3.11, existe $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$D^\alpha_x v \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \ y \ \ D^\alpha_x u^{l+1} \rightharpoonup D^\alpha_x v \ \ en\, L^2(\mathbb{R}^n) \quad (|\alpha| \leq p)$$

Debido a que $u^l_t \to u_t$, $\Delta u^l \to \Delta u$, $u_{x_i} \to u_{x_i}$, entonces $v = u$ y por (5.4) obtenemos:

$$\|D^\alpha_x(u) - \bar{u}\|_2 \leq C_1 \|u_0 - \bar{u}\|_2, \ \ (|\alpha| \leq p)$$

es decir, $u(\cdot, t) - \bar{u} \in H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < t \leq T$. De (5.4) tomando $t = T$ y $l \to +\infty$, tenemos:

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u_0 - \bar{u}\|_2$$

5.2 Existencia y unicidad de la solución global

Definición 5.2.1. Las funciones $\alpha : \overline{B}_r(\bar{u}) \to \mathbb{R}$ y $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) : \overline{B}_r(\bar{u}) \to \mathbb{R}^n$ forman un par de flujo de entropía-entropía para el sistema (1.1) si, para cada $i = 1, \cdots, n$ y $u \in \overline{B}_r(\bar{u})$,

$$\bigtriangledown \alpha(u)^t f_i^{'}(u) = \bigtriangledown \beta_i(u)^t \tag{5.9}$$

la entropía α siempre se asumirá que satisface

$$\delta |u - \bar{u}|^2 \leq \alpha(u) \leq \delta^{-1} |u - \bar{u}|^2, \quad u \in \overline{B}_r(\bar{u}) \tag{5.10}$$

para alguna constante positiva δ. Finalmente, α se dice que es consistente con la matriz D si

$$w^t D\alpha^{''}(u)w \geq 0 \tag{5.11}$$

satisface para todo $u \in \overline{B}_r(\bar{u})$ y $w \in \mathbb{R}^n$

Lema 5.2.1. Asumir que existe un par de flujo de entropía (α,β) para el sistema (1.1) satisfaciendo (5.9)-(5.11), y que D es una matriz diagonal positiva constante. Entonces existe una constante $C_2 \geq 1$ dependiendo solo de las propiedades de α y f en $\overline{B}_r(\bar{u})$ tal que, si u es cualquier solución de (1.1) en $\mathbb{R}^n \times [0,t]$ satisfaciendo (a)-(d) del Lema (5.1.2), entonces

$$\|u(\cdot,t)-\bar{u}\|_2 \leq C_2 \|u_0-\bar{u}\|_2, \qquad 0 \leq t \leq \bar{t}.$$

Prueba,

Sin pérdida de generalidad tomemos, $\beta_i(\bar{u}) = 0$, $i = 1,\cdots,n$

Multiplicando en (1.1) a la izquierda por $\bigtriangledown\alpha^t(u)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\bigtriangledown\alpha^t(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u)\right) &= \bigtriangledown\alpha^t(u)D\Delta u\\
(\alpha(u))_t+\sum_{i=1}^{n}\bigtriangledown\alpha^t(u)f_i^{'}(u)u_{x_i} &= \bigtriangledown\alpha^t(u)D\Delta u\\
(\alpha(u))_t+\sum_{i=1}^{n}(\beta(u))_{x_i} &= \sum_{i=1}^{n}(\bigtriangledown\alpha^t(u)Du_{x_i})_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(D\alpha^{''}(u)u_{x_i})^t u_{x_i}
\end{aligned}$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^n \times [t_o,\bar{t}]$:

$$\begin{aligned}
\iint(\alpha(u))_t dxdt+\sum_{i=1}^{n}\iint(\beta(u))_{x_i})dxdt &= \sum_{i=1}^{n}\iint(\bigtriangledown\alpha^t(u)Du_{x_i})_{x_i}dxdt\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\iint(D\alpha^{''}(u)u_{x_i})^t u_{x_i}dxdt\\
\int_{\mathbb{R}^n}(\alpha_{(u(\bar{t}))}-\alpha_{(u(t_o))})dx &= -\sum_{i=1}^{n}\iint_{\mathbb{R}^n\times[t_o,\bar{t}]}(D\alpha^{''}(u)u_{x_i})^t u_{x_i}dxdt\\
&\leq 0\\
\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_{(u(\bar{t}))}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\alpha_{(u(t_o))}dx
\end{aligned}$$

De (5.10):

$$\delta \|u(\cdot,\bar{t})-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\delta} \|u(\cdot,t_o)-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Por el lema (5.1.2) parte (c) $t_o \to 0^+$

$$\forall t \in (0,\bar{t}), \quad \|u(\cdot,t)-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \delta^{-2} \|u_o-\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Para la prueba del siguiente Lema que permitirá garantizar la existencia global de una solución usaremos la desigualdad de Sobolev

$$\|v\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq C_3 \|v\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|v\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.12}$$

Lema 5.2.2. Asumir que f esta en $C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ $(p \;\; definido\ en$ (5.1)$)$, que D es una matriz diagonal positiva constante, y que el sistema (1.1) admite un par de flujo de entropía (α,β) para el sistema (1.1) satisfaciendo (5.9)-(5.11). Sea C_1,C_2, y C_3 dadas como en el Lema 5.1.2, Lema 5.2.1 y (5.12), respectivamente. Entonces si $u_0 \in L^2 \cap L^\infty$, $\|u_0-\bar{u}\|_\infty \leq s <$

r y $C_1C_2C_3 \|u_0-\bar{u}\|_2 \leq s$ el problema de Cauchy (1.1) tiene una única solución global.

Prueba,

Vamos asumir que $\bar{u}=0$ en la prueba. Dado T del lema (5.1.1) y tomando $T_k = kT$, $k=1,2,\cdots$ Probaremos por inducción en K que existe una solución para $0 \leq t \leq T_k$ y satisface

$$\begin{aligned} &(a_k) \qquad \|u(\cdot,t)\|_\infty \leq r, \quad 0 \leq t \leq T_k \\ &(b_k) \qquad \|u(\cdot,T_k)\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1C_2 \|u_o\|_2 \end{aligned}$$

- $k=1$

  Por los item (a) y (e) del lema (5.1.2) se tiene que existe una solución de (1.1) en $(0,T)$

$$\begin{aligned} &(a_1) \qquad \|u(\cdot,t)-\bar{u}\|_\infty \leq r, \quad 0 \leq t \leq T \\ &(b_1) \qquad \|u(\cdot,T)-\bar{u}\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u_o-\bar{u}\|_2 \end{aligned}$$

- Asumamos que se satisfacen (a_k), (b_k) para alguna solución u de (1.1). De (5.13) (Desigualdad de Sobolev) se tiene:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,T_k)\|_\infty \leq C_3\|u(\cdot,T_k)\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}^n)} &\leq C_3\|u(\cdot,T_k)\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C_1C_2C_3\|u_o\|_2\end{aligned}$$

Como $C_1C_2C_3\|u_o\|_2 < s$, se tiene que $\|u(\cdot,T_k)\|_\infty \leq r$
Además $u(\cdot,T_k) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por el lema (5.1.2) entonces aplicamos el nuevo tiempo inicial T_k probaremos que la solución puede extenderse al tiempo T_{k+1}, luego:

$$\|u(\cdot,T_{k+1})\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|u(\cdot,T_k)\|_2$$

Y del lema (5.2.1) obtenemos:

$$\|u(\cdot,T_k)\|_2 \leq C_2\|u_o\|_2$$

Luego, $\|u(\cdot,T_{k+1})\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1C_2\|u_o\|_2$. Por tanto, se verifica para (a_{k+1}) y (b_{k+1})

Teorema 5.2.1. Asumiendo que f esta en $C^p(\bar{B}_r(\bar{u}))$ $(p\ \ definido\ en\ (5.1))$ y que el sistema (1.1) admite un par de flujo de entropía-entropía (α,β) satisfaciendo (5.9)-(5.11). Sea D una matriz diagonalizable con autovalores positivos, es decir

$$P^{-1}DP = A = diag(d_1,\cdots,d_m) > 0,$$

Y asumamos que

$$AP^t\alpha''(u)P \geq 0,\ \ u \in \bar{B}_r(\bar{u}).$$

Entonces el problema de Cauchy (1.1) tiene una solución global siempre que

$$\|u_o - \bar{u}\|_\infty < \frac{r}{\|P\|\|P^{-1}\|}$$

y que $\|u_o - \bar{u}\|_2$ suficientemente pequeño.

Prueba,

Sea $P^{-1}u = v, \to\ u = Pv$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u) &= D\Delta u\\
P\left[\frac{\partial v}{\partial t}+P^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u)\right] &= DP\Delta v\\
v_t+\sum_{i=1}^{n}(g_i(v))_{x_i} &= P^{-1}DP\Delta v
\end{aligned}
$$

Por tanto, obetenemos el sistema:

$$
\begin{cases}
v_t+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(v) = \Lambda\Delta v\\
v(x,0)=v_o
\end{cases}
\tag{5.13}
$$

Donde: $v_o=P^{-1}u_o,\ q_i=P^{-1}f_i(Pv),\ g_i\in C^p$ en el conjunto

$$
\left\{v:|v-P^{-1}\bar{u}|\leq\frac{r}{\|P\|}\right\}
$$

Denotamos las funciones: $A(v)=\alpha(Pv),\ B(v)=\beta(Pv)$. Se verifica que satisfacen (5.9)-(5.11).

$$
\bigtriangledown A(v)=\bigtriangledown\alpha(Pv)P
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\bigtriangledown A(v)g_i^{'}(v) &= \bigtriangledown\alpha(Pv)Pg_i^{'}(v)\\
&= \bigtriangledown\alpha(Pv)PP^{-1}f_i^{'}(Pv)P\\
&= \bigtriangledown\alpha(Pv)f_i^{'}(Pv)P\\
&= \bigtriangledown\beta(Pv)P\\
&= \bigtriangledown B(v)
\end{aligned}
$$

Como (α,β) satisfacen (5.10), existe $\delta>0$ tal que

$$
\delta|u-\bar{u}|^2\leq\alpha(u)\leq\frac{1}{\delta}|u-\bar{u}|^2
$$

Sabiendo que: $u = Pv \in \bar{B}_r(\bar{u}),\ v \in \bar{B}_{r_o}(\bar{v})\ , r_0 = \frac{r}{\|P\|}\ , \bar{v} = P^{-1}\bar{u}$, luego:

$$\delta|P(v-P^{-1}\bar{u})|^2 \leq \alpha(Pv) \leq \frac{1}{\delta}|P(u-P^{-1}\bar{u})|^2$$
$$\frac{\delta|v-P^{-1}\bar{u}|^2}{\|P^{-1}\|^2} \leq \alpha(Pv) \leq \frac{1}{\delta}\|P\|^2|u-P^{-1}\bar{u}|^2$$

Tomando

$$\bar{\delta} = \min\left\{\frac{\delta}{\|P^{-1}\|^2}, \frac{\|P\|^2}{\delta}\right\}$$

Por tanto

$$\bar{\delta}|v-\bar{v}|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\bar{\delta}}|v-\bar{v}|^2$$

Finalmente,

$$\Lambda A''(v) = \Lambda P^t \alpha''(Pv)P \geq 0$$

$$w^t \Lambda A''(v)w \geq 0,\ \ \forall w \in \bar{B}_{r_o}(\bar{v}),\ w \in \mathbb{R}^m$$

Como se satisfacen las hipótesis del lema (5.2.2), entonces existe una solución global para (5.13), lo cual implíca una solución global para (1.1).

5.3 Aplicación

Mostraremos la aplicación del resultado obtenido en el teorema 5.2.1 para los siguientes sistemas que modelan el flujo de fluidos compresibles.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_t + div(\rho u) & = & 0 \\ (\rho u_i)_t + div(\rho u_i + Pe_i) & = & 0 \\ (\rho S)_t + div(\rho S u) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.14}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_t + div(\rho u) & = & 0 \\ (\rho u_i)_t + div(\rho u_i + Pe_i) & = & 0 \\ (\rho E)_t + div(\rho E u + \rho u) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.15}$$

Donde:

- ρ=densidad, $u=(u_1,\cdots,u_n)$=velocidad

- P=presión, S=entropía, E=energía

Asumiendo P suave, $P(\rho,S)$, $(\forall\rho>0,[P_\rho>0])$
En (5.15) $P=(\rho,e)$, $E=e+\frac{|u|^2}{2}$, este sistema puede ser deducido de (5.14) y la relación fundamental entre e,S y ρ.
Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} U_t+\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(U) & = & I\Delta U \\ U(x,0) & = & U_0 \end{cases} \tag{5.16}$$

donde:

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u_1\\ \rho u_2\\ \rho u_3\\ \rho S\end{pmatrix}, f_1=\begin{pmatrix}\rho u_1\\ \rho u_1^2+P\\ \rho u_1u_2\\ \rho u_1u_3\\ \rho u_1S\end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix}\rho u_2\\ \rho u_2u_1\\ \rho u_2^2+P\\ \rho u_2u_3\\ \rho u_2S\end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix}\rho u_3\\ \rho u_3u_1\\ \rho u_3u_2\\ \rho u_3^2+P\\ \rho u_3S\end{pmatrix}, f_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, f_5=$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ Dado $(\bar\rho,\bar u,\bar S)$, con $\bar\rho>0$, $\bar u=0$, $\bar S=0$ (sin perdida de generalidad).

Definimos las funciones (α,β) candidatos para ser los flujos de entropía del sistema (5.14).

$$\alpha(\rho,u,S)=\frac{\rho|u|^2}{2}+\rho\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(\sigma,S)-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+C\rho S^2 \tag{5.17}$$

$$\beta_i(\rho,u,S)=\frac{\rho|u|^2u_i}{2}+\rho u_i\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(\sigma,S)-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+C\rho u_iS^2. \tag{5.18}$$

donde: $\bar P=P(\bar\rho,\bar S)$, y C es una constante positiva que va ser escogida después.
Mostraremos que:

$$\triangledown\alpha^t f_1^{'}=\triangledown\beta_1^t \tag{5.19}$$

Las derivadas se entienden son con respecto a $(\rho, \rho u, \rho S)$. Para facilitar el cálculo, sea:

$$w = (\rho, u, S) \ \ y \ \ z = (\rho, \rho u, \rho S).$$

(5.19) es equivalente a:

$$\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^t \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{df_1}{dw} = \left(\frac{d\beta_1}{dw}\right)^t \tag{5.20}$$

Verifiquemos (5.20):

$$\frac{d\alpha}{dw} = \begin{bmatrix} \frac{\rho|u|^2}{2} + \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{P(\sigma,S)-\bar{P}}{\sigma^2} d\sigma + \frac{P(\rho,S)-\bar{P}}{\rho} + CS^2 \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{P_s}{\sigma^2} d\sigma + 2C\rho S \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Como $w = \left(z_1, \frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \frac{z_4}{z_1}, \frac{z_5}{z_1}\right)$, se sigue que:

$$\frac{dw}{dz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1^2} & \frac{1}{z_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{z_3}{z_1^2} & 0 & \frac{1}{z_1} & 0 & 0 \\ -\frac{z_4}{z_1^2} & 0 & 0 & \frac{1}{z_1} & 0 \\ -\frac{z_5}{z_1^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_2}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{u_3}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{S}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$
\left[\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^t\cdot\frac{dw}{dz}\right]^t = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{u_1}{\rho} & -\frac{u_2}{\rho} & -\frac{u_3}{\rho} & -\frac{S}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\rho|u|^2}{2}+\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(\sigma,S)-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+\frac{P(\rho,S)-\bar P}{\rho}+CS^2 \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P_s}{\sigma^2}d\sigma+2C\rho S \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\frac{\rho|u|^2}{2}+\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P(\sigma,S)-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+\frac{P(\rho,S)-\bar P}{\rho}-S\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P_s}{\sigma^2}d\sigma-CS^2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P_s}{\sigma^2}d\sigma+2CS \end{bmatrix}
$$

Por otro lado,

$$
\frac{df_1}{dz} = \begin{bmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_1^2+P_\rho & 2\rho u_1 & 0 & 0 & P_S \\ u_1u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ u_1u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ u_1S & \rho S & 0 & 0 & \rho u_1 \end{bmatrix} \tag{5.23}
$$

Luego,

$$
\left[\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^t\cdot\frac{dw}{dz}\cdot\frac{df_1}{dz}\right]^t = \begin{bmatrix} \frac{u_1|u|^2}{2}+u_1\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+u_1\frac{P-\bar P}{\rho}+u_1P_\rho+Cu_1S^2 \\ \frac{\rho|u|^2}{2}+\delta u_1^2+\delta\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P-\bar P}{\sigma^2}d\sigma+(P-\bar P)+C\rho S^2 \\ \rho u_1u_2 \\ \rho u_1u_3 \\ u_1P_S\rho u_1\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{P_s}{\sigma^2}d\sigma+2C\rho u_1S \end{bmatrix}
$$

$$
= \left(\frac{d\beta_1}{dw}\right)^t
$$

Los cálculos para β_2 y β_3 son similares. Esto prueba que se cumple ((5.9)).
Ahora calculemos la matriz Hesiana $\dfrac{d^2\alpha}{dz^2}$ en $(\bar{\delta},0,0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dz^2} &= \left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dw^t}{dz}\frac{d\alpha}{dw}\right)\right]\frac{dw}{dz} && (5.24)\\
&= \left[\frac{d}{dw}\left(\frac{d\alpha^t}{dw}\frac{dw}{dz}\right)\right]^t\frac{dw}{dz} && (5.25)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\frac{d}{dw}\left[\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)^t\cdot\frac{dw}{dz}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{P_\rho}{\rho}-S\frac{P_S}{\rho^2} & -u_1 & -u_2 & -u_3 & \frac{P_S}{\rho}-S\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P_{SS}}{\sigma^2}d\sigma-2CS \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{P_S}{\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P_{SS}}{\sigma^2}d\sigma+2C
\end{bmatrix}^t
$$

Reemplazando obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right|_{(\bar{\rho},0,0)} &= \begin{bmatrix}
\frac{P_\rho}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{P_S}{\bar{\rho}} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{P_S}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 2C
\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
\frac{P_\rho(\bar{\rho},0)}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{P_S(\bar{\rho},0)}{\bar{\rho}^2} \\
0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\
\frac{P_S(\bar{\rho},0)}{\bar{\rho}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2C}{\bar{\rho}}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Como $\bar{\rho}$ y $P_\rho(\bar{\rho},0)$ son positivos y C positivo, $\dfrac{d^2\alpha}{dz^2}$ es definida positiva en $z=0$ y por lo tanto en una vecindad de 0. La hipótesis 5.11 esta satisfecha si D es diagonalizable y suficientemente cerca a un multiplo de la matriz identidad, en efecto

$$
\begin{aligned}
w^t D\alpha'' w &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \frac{P_\rho}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{P_S}{\bar{\rho}^2} \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ \frac{P_S}{\bar{\rho}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2C}{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{P_\rho x_1^2}{\bar{\rho}} + \frac{x_2^2}{\bar{\rho}} + \frac{x_3^2}{\bar{\rho}} + \frac{x_4^2}{\bar{\rho}} + \frac{2P_S}{\bar{\rho}} x_1 x_5 + \frac{2C}{\bar{\rho}} x_5^2 \\
&\geq \frac{1}{\bar{\rho}}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \frac{x_1^2}{4\bar{\rho}} - \frac{8P_S^2 x_5^2}{\bar{\rho}^3} + \frac{2C}{\bar{\rho}} x_5^2 \\
&\geq \frac{1}{8\bar{\rho}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + (\frac{2C}{\bar{\rho}} - \frac{8P_S^2}{\bar{\rho}^3}) x_5^2 \\
&\geq \varepsilon_0 \|w\|^2
\end{aligned}
$$

Considerando: $\varepsilon_0 = min\{\frac{1}{8\bar{\rho}}, (\frac{2C}{\bar{\rho}} - \frac{8P_S^2}{\bar{\rho}^3})\}$, para C suficientemente grande.

Además α y $\frac{d\alpha}{dz}$ se anula en $z = 0$. por lo tanto se sigue que:

$$\delta |z|^2 \leq \alpha \leq \delta^{-1} |z|^2$$

para algún $\delta > 0$ y para z en una vecindad de 0, así se cumple (5.10).

Tenemos probado que el par de flujo de entropía- entropía (α, β) satisfacen las condiciones (5.9)-(5.11).

CAPÍTULO VI

DISCUSIONES

- En el sistema parabólico que estudiamos se consideró a D como una matriz constante positiva y diagonalizable, sería interesante analizar los resultados para una matriz D cuyos valores sean dependientes de la variable espacial x.

- Para garantizar la existencia y unicidad de la solución global suave fue necesario considerar que el sistema parabólico admita un par de flujo de entropía (α, β), satisfaciendo las ecuaciones (5.9),(5.10), (5.11).

- Hemos considerado en este trabajo soluciones suaves en el sentido de la definición dada en el capítulo 2, por lo que sería interesante analizar las soluciones suaves en otro sentido topológico como por ejemplo soluciones discontinuas o soluciones débiles.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Hemos propuesto una metodología con enfoque inductivo deductivo para demostrar la existencia y unicidad de soluciones suaves de un sistema parabólico en $\mathbb{R}^n$, hemos hecho incapié en demostrar exaustivamente cada lema y teorema que nos hemos planteado en la investigación con el fin de aplicar estos resultados a las ecuaciones de flujo de fluidos compresibles, hemos definido el problema de condición inicial sobre el espacio normado L^∞ y L^2 bajo esta hipótesis se demostró, según el Lema (5.1.1) y (5.1.2), la existencia y unicidad de solución local suave. Está solución se extendió de local a global considerando que el sistema parábolico (1.1) admite un par de flujo de entropía (α, β) satisfaciendo las ecuaciones (5.9), (5.10), (5.11), para garantizar la solución global se demostraron los Lemas (5.2.1), (5.2.2) y el Teorema (5.2.1). Finalmente se mostró la aplicación para un sistema parabólico que modela el flujo de fluidos compresibles en el cual se verifico detalladamente que satisfaga las hipótesis del teorema (5.2.1) para garantizar la existencia y unicidad dela solución globlal suave.

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1. La finalidad de esta investigación es que pueda ser una guía importante para profundizar el estudio de las EDP del tipo parabólico y así los estudiantes tengan el interes por inclinarse a esta línea de investigación.

2. Para una mejor comprensión de la metodología que se siguió para poder garantizar la existencia y unicidad global de una solución suave del problema estudiado en la investigación, se recomienda leer la referencia [5] y [6].

3. En el estudio de esta investigación se reviso con más frecuencia los libros [1], [9], [15] y [14] para abarcar los puntos importantes y necesarios para el estudio del sistema parabólico (1.1) que se analizó, por lo cual es recomendable la lectura de los mismos para su mejor comprensión.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ADAMS, R.A, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] BARTLE, R.G, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*, , Mexico, 1989.

[3] BARTLE, R.G, *The Elements of Integration*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1966.

[4] CERÓN, M.O, *Soluciones Viscosas para un Sistema de Leyes de Conservación. Tesis de Maestría para la obtención del titulo de Académico de Magister en Matemáticas*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.(2007), p. 15-25.

[5] D. HOFF AND J. SMOLLER, *Solutions in the large for Certain Nonlinear Parabolic Systems*, Ann. Inst., Henri Poincare, 1985.

[6] D. HOFF AND J. SMOLLER, *Global Existence for Systems of Parabolic Conservation Laws in Several Spaces Variables*, Journal of Diferential equations 68, 210-220, 1987.

[7] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis With Applications*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1978.

[8] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol II/A, Springer - Verlag, New York, 1989.

[9] H. BRÉZIS, *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones*, Editorial Alianza E., Madrid, 1984.

[10] HINOSTROZA CABALLERO, NILTON,*Existencia global de soluciones suaves de un sistema parabólico no lineal*,Universidad Nacional del Callao, 2013.

[11] Iório, Valeria, *EDP Un curso de graduación*, Instituto de Matematicas y Ciencias Afines,UNI. 1999.

[12] J. C. da Mota y D. Marchesin, *Combustion fronts in Petroleum Reservoirs*, Mat. Contemporanea, vol8, 1995.

[13] M. De Guzman, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoria de estabilidad y control*, Editorial Alhambra, Madrid, 1975.

[14] L. A. Medeiros y M. Milla Miranda, *Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogeneos*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[15] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Vol. 19 , American Math. Society, Berkeley, agosto, 1997.

[16] Lages Lima, Elon, *Curso de Análise*, Vol.II, Técnicos e científicos Editora S.A., São Paulo, 1981

[17] Loayza Cerrón, J. R. (2006). *Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach.*

[18] Nina Huaman, Dany, *Existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación $u_t + f(u)_x = \varepsilon D u_{xx}$ y sus aplicaciones*, Universidad Nacional del Callao, 2014.

[19] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, *Linear equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc. Translation, Providence, 1968.

[20] YAN, JIN, CHENG, ZHIXIN, & TAO, MING.(2007), *Conservation laws I: viscosity solutions.*, Revista Colombiana de Matemáticas, 41(1), 81-90.

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de Consistencia