UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN DE NAVIER-STOKES A LA SOLUCIÓN DE EULER”

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

JOEL JOSÉ CÓRDOVA FUENTES

Callao, Diciembre, 2019

PERÚ

Bellavista, 15 de mayo 2019.

Señor

Joel José Cordova Fuentes.

Presente.-

RESOLUCIÓN DECANAL Nº 131-2019-D-FCNM.- Bellavista, 15 de mayo 2019.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto la solicitud recibida el 06 de setiembre 2019 (Expediente Nº 910-2018-FCNM) por cuyo intermedio el Bachiller en Matemática CORDOVA FUENTES, Joel José, solicita designación de Jurado Evaluador, profesor asesor y, aprobación de su proyecto de investigación, con el fin de titularse por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis.

CONSIDERANDO:

Que, el Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao vigente, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU, de fecha 30 de octubre 2018, en su artículo 73° establece los requisitos y procedimientos para la titulación profesional mediante la modalidad de presentación y sustentación individual de una tesis;

Que, mediante los Artículos 25° y 26° del Capítulo I JURADOS PARA LA OBTENCION DEL GRADO ACADÉMICO DE BACHILLER, TÍTULO PROFESIONAL, TÍTULO DE SEGUNDA PROFESIÓN O TÍTULO DE SEGUNDA ESPECIALIDAD PROFESIONAL del acotado Reglamento, establecen que el Jurado Evaluador es propuesto por el Comité Directivo de la Unidad de Investigación de la Facultad, los docentes miembros deben ser nombrados o contratados a TC o DE y debe estar integrado por tres (03) docentes titulares y un (01) docente suplente; el presidente, es el docente ordinario de mayor categoría y antigüedad entre los miembros propuestos; el secretario y vocal son designados en orden de prelación decreciente; el profesor asesor elegido por el alumno siendo en este caso el profesor Mg. MORENO VEGA, Dionicio Orlando;

Que, en efecto, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, mediante Oficio Nº 056-2019-UI-FCNM recibido el 15 de mayo 2019, comunica que el Proyecto de Investigación del graduando ha sido evaluado por el Comité Directivo de la Unidad de Investigación, consecuentemente se encuentra óptimo en cuanto a los requisitos señalados por las directivas vigentes proponiendo, al mismo tiempo, el Jurado Evaluador del Proyecto de Investigación titulado: "CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN DE NAVIER-STOKES A LA SOLUCIÓN DE EULER";

Estando a lo glosado; con cargo a dar cuenta al correspondiente Órgano de Gobierno de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática y, en uso de las atribuciones que le confiere los Arts. 187° y 189° del Estatuto de la Universidad y al numeral; 70.2 del Art. 70° de la Ley Universitaria, Ley N° 30220;

R E S U E L V E:

1° **DESIGNAR** el Jurado Evaluador del Proyecto de Investigación para obtener el título profesional de Licenciado en **Matemática** por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis, titulado "CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN DE NAVIER –STOKES A LA SOLUCIÓN DE EULER"; presentado por el Bachiller CORDOVA FUENTES, Joel José, Jurado que está integrado por los siguientes profesores:

Mg. SOTELO PEJERREY, Alfredo	: Presidente
Lic. ÁVILA CELIS, César Augusto	: Vocal
Mg. LÁZARO CARRIÓN, Moisés Simón	: Secretario

2° RECOMENDAR, que dicho Jurado debe remitir su dictamen colegiado al Decano de la Facultad, dentro del plazo máximo de quince (15) días calendarios, contados a partir de la fecha de recepción del expediente y de la presente Resolución, de acuerdo con las normas reglamentarias vigentes sobre la materia.

3° Transcribir la presente Resolución al Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Comisión de Grados y Títulos, Unidad de Investigación e interesado, para conocimiento y fines.

Regístrese, comuníquese y archívese.
Fdo. Mg. ROEL MARIO VIDAL GUZMÁN.-Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.-Sello.-

Lo que transcribo para su conocimiento y fines consiguientes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

Mg. Roel Mario Vidal Guzman
Decano

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de tesis a Dios por permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional.
A mis padres, quienes son los pilares fundamentales de mi vida y que gracias a sus consejos han sabido guiarme para convertirme en un profesional.

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar con este trabajo, que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud.

- A mis padres y Hermanos, por el apoyo incondicional.
- A mi asesor de Tesis, el profesor Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega, quién me brindo los conocimientos suficientes en pregrado, para poder desarrollar cualquier tipo de trabajo.
- A los profesores que hacen parte de mi jurado de Tesis, por la disponibilidad y paciencia que mostraron en la revisión del trabajo.
- A mis compañeros de esta querida universidad, asi como también a los personales administrativos.

Índice

RESUMEN

CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN DE NAVIER-STOKES A LA SOLUCIÓN DE EULER

Joel José Córdova Fuentes

Diciembre - 2019

Asesor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

Sea v^ν una solución de la ecuación de Navier-Stokes con viscosidad ν en un dominio abierto Ω en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, y considere v^0 la solución de la ecuación de Euler en Ω. En 1983 Tosio Kato probó que para soluciones regulares, $v^\nu \to v^0$ en $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega))$ cuando $\nu \to 0$ si y solamente si $\nu\|\nabla v^\nu\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$, donde $X = L^2([0,T] \times \Gamma_{c\nu})$, siendo $\Gamma_{c\nu}$ una capa de espesor, $c\nu$, cerca de la frontera. Mostraremos que las condiciones de Kato es equivalente a $\nu\|w(v^\nu)\|_X^2 \to 0$ cuando $\nu \to 0$, donde $w(v^\nu)$ es la vorticidad de v^ν, y también equivalente a $\nu^{-1}\|v^\nu\|_X^2 \to 0$ cuando $\nu \to 0$.

Para ello, primero deduciremos ambas ecuaciones, luego garantizaremos la existencia y unicidad de dichas soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler. Finalmente, al demostrar dichas equivalencias estaríamos analizando la convergencia de la solución de la ecuación de Navier-Stokes hacia la solución de la ecuación de Euler.

Palabras Claves: Ecuación de Navier-Stokes y ecuación de Euler.

ABSTRACT

CONVERGENCE OF THE NAVIER-STOKES SOLUTION'S TO THE EULER SOLUTION'S

Joel José Córdova Fuentes

December - 2019

Adviser: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

Let v^ν be a solution to the Navier-Stokes equations with viscosity ν in a bounded domain Ω in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, and let v^0 be the solution to the Euler equations in Ω. In 1983 Tosio Kato showed that for sufficiently regular solutions, $v^\nu \to v^0$ in $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega))$ as $\nu \to 0$ if and only if $\nu\|\nabla v^\nu\|_X^2 \to 0$ as $\nu \to 0$, where $X = L^2([0,T] \times \Gamma_{c\nu})$, $\Gamma_{c\nu}$ being a layer of thickness $c\nu$ near the boundary. We show that Kato's condition is equivalent to $\nu\|w(v^\nu)\|_X^2 \to 0$ as $\nu \to 0$, where $w(v^\nu)$ is the vorticity (curl) of v^ν, and is also equivalent to $\nu^{-1}\|v^\nu\|_X^2 \to 0$ as $\nu \to 0$.

For this, first we will deduce both equations, then we will guarantee the existence and uniqueness of these solutions of the Navier-Stokes and Euler equation's. Finally, by demonstrating these equivalences we would be analyzing the convergence of the solution of the Navier-Stokes equation's to the solution of the Euler equation's.

Key Words: Navier-Stokes equation's and Euler equation's.

INTRODUCCIÓN

La pregunta acerca de: si las solución de la ecuación de Navier-Stokes converge a la solución de la ecuación de Euler cuando la viscosidad tiende a cero, llamado desvanecimiento de la viscosidad, sobre un dominio con frontera es un problema abierto en la mecánica de fluidos en las matemáticas. Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de sus limites está dado por Tosio Kato en [8], con condiciones de extensión dado por Temam y Wang en [17] y Wang en [18], probablemente representan lo más cercano que alguien ha llegado a resolver esta interrogante.

La condición clave de Kato requiere que la norma L^2 del gradiente de la velocidad en una capa limite de ancho proporcional a la viscosidad, no explote demasiado rápido a medida que la viscosidad desaparezca (condición (iii) en el teorema 8). Temam y Wang en [17] y [18] muestran que, incrementando ligeramente el tamaño de la capa limite, solo se necesita considerar las derivadas tangenciales de las componentes tangenciales de la velocidad o las derivadas tangenciales de los componentes normales de la velocidad.

Dejamos el tamaño de la capa limite de Kato sin cambios y mostramos que el gradiente de la velocidad puede ser reemplazado por la vorticidad en la condición de Kato. También establecemos otra condición necesaria y suficiente para que la energia promedio en la capa limite desaparezca con la viscosidad. Ambas condiciones tienen un significado físico inmediato que las de Kato, aunque es posible que no sean fáciles de verificar o refutar.

La necesidad de nuestras condiciones se desprende fácilmente de las condiciones de Kato; es la suficiencia de las condiciones lo que requiere una modificación del argumento de Kato.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

En este trabajo consideraremos las siguientes Ecuaciones Diferenciales Parciales, que modelan el comportamiento de los fluidos.

Ecuación de Euler:

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \bar{p} = \bar{f}, \text{ para fluidos no viscosos.}$$

Ecuación de Navier-Stokes:

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = \nu \Delta v + f, \text{ para fluidos viscosos.}$$

Sea v^ν la solución de la ecuación de Navier-Stokes con viscosidad ν en un dominio abierto Ω en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, y consideremos v^0 la solución de la ecuación de Euler en Ω. En 1983, **Tosio Kato** mostró que para soluciones regulares, $v^\nu \to v^0$ en $L^2([0,T]; L^2(\Omega))$ cuando $\nu \to 0$ si y solo si $\nu \|\nabla v^\nu\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$, donde $X = L^2([0,T] \times \Gamma_{c\nu})$, siendo $\Gamma_{c\nu}$ una capa de espesor, $c\nu$, cerca de la frontera. Mostraremos que las condiciones de Kato es equivalente a $\nu \|w(v^\nu)\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$, y también equivalente a $\nu^{-1} \|v^\nu\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$.

1.2 Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema general

¿Cuáles son las condiciones que se debería tener para que la solución de la ecuación de Navier-Stokes converja a la solución de la ecuación de Euler?

Problemas específicos

1. ¿De donde provienen dichas ecuaciones?

2. ¿Será posible la existencia y unicidad de ambas ecuaciones?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo General

Estudiar la convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Deducir las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler.

2. Garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler.

1.4 Justificación

Según lo observado en la descripción del problema, las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se diferencian por la inclusión del término de viscosidad "ν", siendo nulo en el caso de Euler y diferente de cero en Navier-Stokes. La investigación está desarrollada en un espacio el cual se garanticen la existencia de soluciones de cada ecuación y posteriormente verifique su convergencia. Para esto es necesario, que cada solución de dichas ecuaciones estén en sus espacios respectivos. Este trabajo sirve como motivación para que se siga investigando en el área de matemática y quizás estar cada vez más cerca del "problema abierto" acerca de la mecánica de fluidos.

1.5 Limitantes de la investigación

En este trabajo se desarrolla bajo las siguientes condiciones: la solución de la ecuación de Euler $v^0 \in C^1\left([0,T]; C^{d+\epsilon}(\Omega)\right)$, $2 \leq d$, mientras que la solución de la ecuación de Navier-Stokes, $v^\nu \in L^2\left([0,T]; H^m(\Omega)\right)$, con estos supuestos se logra obtener el resultado deseado, caso contrario, no se logra la convergencia.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

La finalidad de esta tesis, es estudiar lo que sucede con las soluciones de Navier-Stokes cuando la viscosidad tiende a cero. En resumen, queremos saber si las soluciones de Navier-Stokes converge a la soluciones de Euler en algún sentido apropiado. El primer resultado en esta dirección fue obtenido por Kato en [8], con un criterio sobre la norma del gradiente de la velocidad en una región próxima a la frontera. Después, Teman y Wang [16, 17], sustituyeron la norma de la derivada por una condición de integrabilidad de la presión cerca de la frontera y Wang, [18], obtiene un criterio sobre las derivadas tangenciales, en una región mayor del que fue usado por Kato. Una discusión más detallada de ese asunto puede ser encontrada en [12].

2.2 Definición de Términos Básicos

A continuación daremos algunas definiciones y notaciones, que nos ayudará en la investigación.

Definición 1. *Espacios L^p. Se define $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones vectoriales $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles y tales que $|f|^p$ es integrable. Si $f \in L^2(\Omega)$, se define:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^p$$

En particular:

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v dx$$

Definición 2. *El espacio de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$*

$H^m(\mathbb{R}^N) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que existe $D^\alpha v$ en el sentido debil y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$

Notaciones.

Usaremos las siguientes notaciones para abreviar algunas expresiones:

1. div $v = \sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial v^j}{\partial x_j}$ es el campo de divergencia de v.

2. $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_N} \right)^t$ es el operador gradiente.

3. $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ es el operador de Laplace.

4. $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ representa la Derivada Material.

5. $\|.\|_0$ denota la norma en L^2.

6. $|.|_\infty$ denota la norma en L^∞.

7. $\|.\|_m$ denota la norma de Sobolev.

8. C_0^∞ es el espacio de las funciones infinitamente contínuas con soporte compacto.

9. Cuando $m = 0$, tenemos $H^0 = L^2$.

10. $Lip([0, T], X)$ es el espacio de las funciones de Lipschitz que toma valores en X.

11. $\|.\|_{C^\gamma}$ denota la norma de Hölder, para $0 < \gamma < 1$.

2.3 Bases Teóricas

Vamos a introducir las definiciones, lemas, teoremas usados en este trabajo.

Proposición 1 (Desigualdad de Hölder). *Suponga que* $1 \leq p, q \leq \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Entonces, si* $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$. *Tenemos*

$$\int_U |u.v| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)} \tag{2.1}$$

Demostración. Ver [2].

Lema 1 (**Desigualdad de Grönwall**).

(*i*) *Sea η una función absolutamente contínua no negativa en $[0,T]$,*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \tag{2.2}$$

donde, $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones no negativas en $[0,T]$. Entonces

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)ds\right)\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right] \tag{2.3}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

(*ii*) *En particular, si*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) \text{ en } [0,T] \text{ y } \eta(0) = 0,$$

Entonces

$$\eta \equiv 0, \text{ en } [0,T]$$

Demostración. Ver [2].

Definición 3. *El espacio de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$*

$H^m(\mathbb{R}^N) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que existe $D^\alpha v$ en el sentido debil y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$

donde D^α es la derivada distribucional $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}.\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}$. La norma de H^m, denotada como $\|.\|_m$ es

$$\|v\|_m = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_0^2\right)^{1/2}$$

El espacio de Sobolev H^m es generalizada para el caso $m = s \in \mathbb{R}$, considerando el funcional

$$\|.\|_s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

definido por:

$$\|v\|_s = \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

donde, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de Schwarz de funciones suaves C^∞ con decaimento al infinito. $S(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty\, , \forall \alpha, \beta\}$, con $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)|$.
Aqui $\widehat{v}$ denota la transformada de Fourier de v.

Lema 2 (**Desigualdad de Sobolev**). *El espacio $H^{s+k}(\mathbb{R}^N)$, $s > N/2$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ esta inmerso continuamente en el espacio $C^k(\mathbb{R}^N)$. Es decir, existe $c > 0$ tal que*

$$|v|_{C^k} \leq c\|v\|_{s+k}, \ \ \forall v \in H^{s+k}(\mathbb{R}^N) \tag{2.5}$$

Demostración. Ver [3].

Lema 3.

(i) Para todo $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, existe $c > 0$ tal que para todo u, $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^m(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u.v\|_m \leq c\{|u|_\infty \|D^m v\|_0 + \|D^m u\|_0 |v|_\infty\} \tag{2.6}$$

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(u.v) - u.D^\alpha v\|_0 \leq c\{|\nabla u|_\infty \|D^{m-1}v\|_0 + \|D^m u\|_0 |v|_\infty\} \tag{2.7}$$

(ii) Para todo $s > N/2$, $H^s(\mathbb{R}^N)$ es un algebra de Banach. Es decir, existe $c > 0$ tal que para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u.v\|_s \leq c\|u\|_s \|v\|_s \tag{2.8}$$

Definición 4. *Dada Cualquier función radial*

$$\rho(|x|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \ \rho \geq 0, \ \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1 \tag{2.9}$$

Define el "Modificador"$\mathcal{J}_\epsilon v$ de funciones $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, por:

$$\left(\mathcal{J}_\epsilon v\right)(x) = \epsilon^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) v(y) dy, \ \epsilon > 0 \tag{2.10}$$

Lema 4. *Sea $\mathcal{J}_\epsilon$ definido en la ecuación* (2.10)*, entonces $\mathcal{J}_\epsilon$ es una función C^∞ y*

(i) Para cada $v \in C^0(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{J}_\epsilon v \longrightarrow v$ uniformemente en cualquier conjunto compacto Ω en $\mathbb{R}^N$ y

$$|\mathcal{J}_\epsilon v|_\infty \leq |v|_\infty. \tag{2.11}$$

(ii) Conmuta con la derivada distribucional

$$D^\alpha \mathcal{J}_\epsilon(v) = \mathcal{J}_\epsilon(D^\alpha v), \ \forall |\alpha| \leq m, \ v \in H^m(\mathbb{R}^N). \tag{2.12}$$

(iii) Para todo $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{J}_\epsilon u)\, v dx = \int_{\mathbb{R}^N} u\, (\mathcal{J}_\epsilon v)\, dx. \tag{2.13}$$

(iv) Para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{J}_\epsilon v$ converge a v en H^s y la taza de convergencia en la norma H^{s-1} es lineal en ϵ:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \|\mathcal{J}_\epsilon v - v\|_s = 0, \tag{2.14}$$

$$\|\mathcal{J}_\epsilon v - v\|_{s-1} \leq c\epsilon \|v\|_s. \tag{2.15}$$

(v) Para todo $v \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $\epsilon > 0$, tenemos,

$$\|\mathcal{J}_\epsilon v\|_{m+k} \leq \frac{C_{mk}}{\epsilon^k} \|v\|_m, \tag{2.16}$$

$$|\mathcal{J}_\epsilon D^k v|_\infty \leq \frac{C_k}{\epsilon^{N/2+k}} \|v\|_0. \tag{2.17}$$

Demostración. Ver [13].

Teorema 1 (**Teorema de Picard en espacios de Banach**). *Sea $\mathcal{O} \subseteq B$ un subconjunto abierto de un espacio de Banach B y considere $F : \mathcal{O} \longrightarrow B$ que satisface*

(i) F mapea $\mathcal{O}$ para B.

(ii) F es localmente Lipschitz, es decir, para cualquier $X \in \mathcal{O}$ existe $L > 0$ y una vecindad abierta $U_X \subset \mathcal{O}$ de X tal que

$$\|F(X_1) - F(X_2)\|_B \leq L \|X_1 - X_2\|_B, \; \forall X_1, X_2 \in U_X$$

Entonces para cualquier $X_0 \in \mathcal{O}$, existe un tiempo T tal que la EDO

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} &= F(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{X}_{t=0} &= X_0 \in \mathcal{O} \end{aligned} \tag{2.18}$$

tiene una única solución local $X \in C^1((-T, T); \mathcal{O})$.

Demostración. Ver [5].

Teorema 2 (**Continuación de una EDO autónoma en un espacio de Banach**). *Sea $\mathcal{O} \subset B$ un subconjunto abierto de un espacio de Banach B, y sea $F : \mathcal{O} \longrightarrow B$ es um operador localmente Lipschitz. Entonces la única solución $X \in C^1([0,T);\mathcal{O})$ para la EDO autónoma*

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X) \\ X|_{t=0} &= X_0 \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

existe globalmente en el tiempo, o $T < \infty$ y $X(t)$ sale del conjunto abierto $\mathcal{O}$ cuando $t \nearrow T$.

Demostración. Ver [5].

Lema 5 (**Interpolación en el espacio de Sobolev**). *Dado $s > 0$, existe una constante c_s tal que para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $0 < s' < s$,*

$$\|v\|_{s'} \leq c_s \|v\|_0^{1-s'/s} \|v\|_s^{s'/s}. \tag{2.19}$$

Demostración. Ver [1].

Definición 5. *Dado B un espacio de Banach y una sucesión de funciones f_ϵ en B, diremos que f_ϵ converge fuertemente en B, si existe $f \in B$ tal que $\|f_\epsilon - f\|_B \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Usamos la notación $f_\epsilon \to f$ para denotar convergencia fuerte.*

Dado un espacio de Hilbert H con producto interno $(u,v)_H$, la sucesión de u_ϵ se dice que converge debilmente para $u \in H$ si para todo $v \in H$ tenemos, $(u_\epsilon, v) \to (u,v)$ cuando $\epsilon \to 0$. Denotamos por $u_\epsilon \rightharpoonup u$ la convergencia debil.

Teorema 3 (**teorema de Banach-Alaoglu**). *Sea u_ϵ una sucesión limitada en $H^m(\mathbb{R}^N)$, entonces tiene una subsucesión que converge debilmente para algún $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$, es decir, $u_\epsilon \rightharpoonup u$.*

Demostración. Ver [14].

Lema 6. *Sea w un campo de vectores suave con divergencia nula en $\mathbb{R}^N$ y considere q un escalar suave tal que*

$$|w(x)||q(x)| = \mathcal{O}(|x|^{1-N}) \text{ , cuando } |x| \nearrow \infty. \tag{2.20}$$

Entonces w y ∇q son ortogonales, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w.\nabla q \; dx = 0. \tag{2.21}$$

Proposición 2 (Descomposición de Hodge). *Sea $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ un campo de vectores suaves, que decrece rápidamente $|x| \nearrow \infty$. Entonces*

(i) La ecuación:

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= w \\ \text{div } v &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución suave v tal que $|v| \to 0$ cuando $|x| \nearrow \infty$ si, y solamente, si

$$\text{div } w = 0. \tag{2.22}$$

(ii) Si div $w = 0$*, entonces la solución v es determinada de forma constructiva por*

$$v = -\text{rot } \psi, \tag{2.23}$$

donde la función de corte ψ satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta\psi = w \tag{2.24}$$

La forma explícita para v es

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K_3(x-y).w(y)dy \tag{2.25}$$

donde el núcleo matricial K_3 es dado por

$$K_3(x)h = \frac{1}{4\pi}\frac{x \times h}{|x|^3}, \; h \in \mathbb{R}^3 \tag{2.26}$$

Nos referimos a las ecuaciones (2.25) y (2.26) como la *Ley de Biot-Savart* en $3D$.

Proposición 3 (Descomposición de Hodge en $\mathbb{R}^N$). *Para cada vector $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tiene uma única descomposición ortogonal*

$$v = w + \nabla q \;, \quad div\; w = 0 \tag{2.27}$$

con las siguientes propiedades

(i) w, $\nabla q \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $w \perp \nabla q$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, esto es, $(w, \nabla q) = 0$.

(iii) Para cualquier multi-índice β de la derivada D^β, $|\beta| \geq 0$.

$$\|D^\beta v\|_0^2 = \|D^\beta w\|_0^2 + \|\nabla D^\beta q\|_0^2$$

Demostración. Ver [13].

Proposición 4 (Estimativa de Teoria Potencial).

Sea v un campo de velocidad suave con divergencia nula, $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y considere $w = \mathrm{rot}\, v$. Entonces:

$$|\nabla v|_\infty \leq c\left(1 + \ln^+ \|v\|_3 + \ln^+ \|w\|_0\right)(1 + |w|_\infty) \tag{2.28}$$

donde

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \textit{se} \quad x > 1, \\ 0, & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

Para probar la proposición, necesitamos de lo siguiente

Estimativa de la Teoría Potencial en el Espacio de Hölder

Sea K_N el operador integral definido por:

$$K_N f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x-y) f(y) dy \tag{2.29}$$

donde el núcleo K_N es suave en el exterior de $x = 0$ y homogéneo de grado $1 - N$

$$K_N(\lambda x) = \lambda^{1-N} K_N(x),\ \forall \lambda > 0,\ x \neq 0 \tag{2.30}$$

El núcleo $P_N = \nabla K_N$ es homogéneo de grado $-N$:

$$P_N(\lambda x) = \lambda^{-N} P_N(x),\ \forall \lambda > 0,\ x \neq 0 \tag{2.31}$$

P_N tiene la siguiente propiedad:

$$\int_{|x|=1} P_N ds = 0 \tag{2.32}$$

y define el Operador integral Singular con valor principal:

$$P_N f(x) = PV \int_{\mathbb{R}^N} P_N(x-y) f(y) dy \tag{2.33}$$

Lema 7. *Sea $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $0 < \gamma < 1$ con soporte compacto, definimos $m_f = m(sup(f)) < \infty$; m representa la medida de Lebesgue. Define la escala de comprimiento R, por $R^N = m_f$. Considere el operador integral singular P_N, que satisface las ecuaciones* (2.29)-(2.33)*. Entonces existe una constante c independiente de R y f tal que*

$$|P_N f|_\infty \leq c\{\|f\|_{C^\gamma} \epsilon^\gamma + \max\left(1, \ln \frac{R}{\epsilon}\right) |f|_\infty\},\ \forall \epsilon > 0 \tag{2.34}$$

Prueba de la proposición 4. Recordar que la vorticidad w determina la velocidad v de la ecuación de vorticidad, por medio del operador no local

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_N(x-y).w(y,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.35}$$

Donde K_N satisface (2.30). Además, ∇v puede también ser calculado a partir de w

$$\nabla v(x) = cw(x) + P_3 w(x) \tag{2.36}$$

Donde $P_3 w$ es el operador integral singular definido por la integral de Cauchy con valor principal

$$P_3 w(x) = PV \int_{\mathbb{R}^3} \nabla K_3(x-y) w(y) dy$$

Considere una función de corte $\rho \in C^\infty$ tal que $\rho(r) = 0$ para $r > 2R_0$, $\rho(r) = 1$ para $r < R_0$ y $\rho \geq 0$. Descomponer $P_3 w(x)$ en dos partes:

$$\begin{aligned} P_3 w(x) &= PV \int_{\mathbb{R}^3} \nabla K_3(x-y) \rho(|x-y|) w(y) dy + PV \int_{\mathbb{R}^3} \nabla K_3(x-y) \left[1 - \rho(|x-y|)\right] w(y) dy \\ &:= (\nabla v)_1(x) + (\nabla v)_2(x) \end{aligned}$$

Ahora usamos el lema anterior.
Si w tiene soporte en el interior de una esfera de radio R, entonces: aplicando la relación (2.34) a $(\nabla v)_1$, tenemos que para cualquier $\epsilon > 0$

$$|(\nabla v)_1|_\infty \leq c\{\|w\|_{C^\gamma} \epsilon^\gamma + \max\left(1, \ln \frac{R_0}{\epsilon}\right) |w|_\infty\}$$

Por la desigualdad de Sobolev (2.5) implica que $\|w\|_{C^\gamma} \leq c\|w\|_2$, $\forall w \in H^2(\mathbb{R}^3)$, luego

$$\begin{aligned} |(\nabla v)_1|_\infty &\leq c\{\|w\|_2 \epsilon^\gamma + \max\left(1, \ln \frac{R_0}{\epsilon}\right) |w|_\infty\} \\ &\leq c\{\|v\|_3 \epsilon^\gamma + \max\left(1, \ln \frac{R_0}{\epsilon}\right) |w|_\infty\} \end{aligned}$$

Además, por la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$|(\nabla v)_2|_\infty \leq c R_0^{-N/2} \|w\|_0$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\nabla v|_\infty &\leq c|w|_\infty + |P_3 w|_\infty \\ &\leq c|w|_\infty + |(\nabla v)_1|_\infty + |(\nabla v)_2|_\infty \\ &\leq c|w|_\infty + c\{\|v\|_3 \epsilon^\gamma + \max\left(1, \ln \frac{R_0}{\epsilon}\right) |w|_\infty\} + c R_0^{-N/2} \|w\|_0 \end{aligned}$$

Tomando $0 < \epsilon < R_0$, cuando $\epsilon = 1$ si $\|v\|_3 \leq 1$ e $\epsilon = \|v\|_3^{-\gamma}$ si $\|v\|_3 \geq 1$ e $R_0^{N/2} = \|w\|_0$, finalmente, tenemos

$$|\nabla v|_\infty \leq c\left(1 + \ln^+ \|v\|_3 + \ln^+ \|w\|_0\right)(1 + |w|_\infty)\,.$$

$\square$

Definición 6. *El espacio $C_w([0,T]; H^s(\mathbb{R}^3))$ denota las funciones continuas en el intervalo $[0,T]$ con valores en $H^s(\mathbb{R}^3)$ con la topología debil, esto es, para cualquier $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ fijo, $[\varphi, u(t)]_s$, es una función escalar contínua sobre $[0,T]$, donde:*

$$(u,v)_s = \sum_{\alpha \leq s} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Formulación y Proyección de Leray

De la ecuación de Euler o Navier Stokes de flujos incompresibles, considerando $V = (v^i_{x_j})$ y $P = (p_{x_i x_j})$ la matriz hesiana, tenemos:

$$\frac{DV}{Dt} + V^2 = -P + \nu \Delta V$$

Como $trV = \text{div } v$, tomando el trazo en la ecuación arriba, obtenemos:

$$\frac{D}{Dt}(\text{div } v) + trV^2 = -\Delta p + \nu \Delta(\text{div } v)$$

y $\text{div } v = 0$ para flujos incompresibles, obtenemos

$$-\Delta p = tr(\nabla v)^2 \tag{2.37}$$

cuya solución es

$$p(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} M(x-y) tr(\nabla v(y,t))^2 dy \tag{2.38}$$

donde la solución fundamental M es

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se} \quad N = 2, \\ \dfrac{1}{(2-N)w_N} |x|^{2-N}, & \text{se} \quad N \geq 3. \end{cases} \tag{2.39}$$

y w_N es el área de la superficie de una esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$.

Entonces, si tenemos la velocidad, tenemos la presión.

Por otro lado, diferenciando sobre la integral para calcular ∇p, obtenemos

$$\nabla p(x,t) = C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x-y}{|x-y|^N} tr(\nabla v(y,t))^2 dy \tag{2.40}$$

Sustituyendo en la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{Dv}{Dt} = -C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x-y}{|x-y|^N} tr(\nabla v(y,t))^2 dy + \nu \Delta v \tag{2.41}$$

Recordemos que en el **lema (6)** probamos que un campo con divergencia nula v y la gradiente de p, tanto con v y p decrecen rápidamente cuando $|x| \nearrow \infty$, son ortogonales,

$$(v, \nabla p) = \int_{\mathbb{R}^N} v.\nabla p \, dx = 0$$

Así denotando el operador de proyección sobre el campo de divergencia nula por $\mathcal{P}$, esto es $\mathcal{P}v = w$ y $\operatorname{div} w = 0$; $\mathcal{P}v = v$ si, y solamente, si $\operatorname{div} v = 0$. Podemos denotar la forma equivalente a la ecuación (2.41) como:

$$v_t = \mathcal{P}(-v.\nabla v) + \nu \Delta v \tag{2.42}$$

Lema 8 (**Descomposición de Hodge en** H^m)**.** *Cada campo de vector $v \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, tiene una única descomposición ortogonal $v = w + \nabla \phi$, tal que el operador de Leray $\mathcal{P}v = w$ que proyecta sobre las funciones con divergencia nula, satisface:*

(i) $\mathcal{P}v, \nabla \phi \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $\quad \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{P}v.\nabla \phi dx = 0, \quad div \quad \mathcal{P}v = 0 \quad y$

$$\|\mathcal{P}v\|_m^2 + \|\nabla \phi\|_m^2 = \|v\|_m^2 \tag{2.43}$$

(ii) $\mathcal{P}$ *conmuta con la derivada distribucional,*

$$\mathcal{P}D^\alpha v = D^\alpha \mathcal{P}v, \ \forall v \in H^m, \ |\alpha| \leq m \tag{2.44}$$

(iii) $\mathcal{P}$ *conmuta con los modificadores* $\mathcal{J}_\epsilon$*,*

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{J}_\epsilon v\right) = \mathcal{J}_\epsilon \left(\mathcal{P}v\right), \ \forall v \in H^m, \ \epsilon > 0 \tag{2.45}$$

(iv) $\mathcal{P}$ *es simétrico,*

$$\left(\mathcal{P}u, v\right)_m = \left(u, \mathcal{P}v\right)_m.$$

Demostración. Ver [13].

Lema 9. *Sea $\psi \in H^{1,p}(\Omega)$ para $p \in [1,\infty]$ con $\psi = 0$ en Γ. Existe una constante C independiente de p tal que para δ suficientemente pequeño*

$$\|\psi\|_{L^p(\Gamma_\delta)} \leq C\delta\|\nabla\psi\|_{L^p(\Gamma_\delta)}$$

Definiremos el vórtice $w(v)$ como una matriz antisimétrica $d \times d$, tal que:

$$w(v) = \frac{1}{2}[\nabla v - (\nabla v)^T]. \tag{2.46}$$

Lo cual nos brinda la siguiente identidad,

$$\begin{aligned} 2w(u) \cdot w(v) &= \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T) \cdot (\nabla v - (\nabla v)^T) \\ &= \nabla u \cdot \nabla v - \nabla u \cdot (\nabla v)^T. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Lema 10. *Para todo $u, v \in H^1(\Omega)$ con $\operatorname{div} v = 0$, tal que $(u\cdot\nabla v)\cdot n = 0$ sobre Γ, entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = 2\int_\Omega w(u) \cdot w(v).$$

Demostración. Como $\operatorname{div} v = 0$, tenemos: $\nabla u \cdot (\nabla v)^T = \partial_j u^i \partial_i v^j = \partial_j(u^i \partial_i v^j) = \operatorname{div}(u \cdot \nabla v)$. Luego, si $u, v \in C^\infty(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega w(u) \cdot w(v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \nabla u \cdot (\nabla v)^T \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega \operatorname{div}(u \cdot \nabla v) \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (u \cdot \nabla v) \cdot n \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se obtiene por la densidad de $C^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Lema 11. *Para todo $u \in V$, $v \in C^1(\Omega)$, tenemos*

$$(u, u \cdot \nabla v) = -(v, u \cdot \nabla u).$$

Demostración. Observemos que ambos lados de la igualdad tienen sentido por la regularidad de u y v. Luego,

$$\begin{aligned} (u, u \cdot \nabla v) &= \int_\Omega u^i u^j \partial_j v^i = \int_\Omega u^j \partial_j (v^i u^i) - \int_\Omega u^j v^i \partial_j u^i \\ &= \int_\Omega u \cdot \nabla(u \cdot v) - \int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v \\ &= -\int_\Omega (\operatorname{div} u) u \cdot v + \int_\Gamma (u \cdot n) u \cdot v - \int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v \\ &= -\int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v. \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema de Green en la igualdad anterior, requerimos que $u, \text{div } u \in L^2(\Omega)$ y $u \cdot v \in H^1(\Omega)$ (ver, por ejemplo, teorema I.1.2 de [15]).

Lema 12. *Para todo* $u \in H^1(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$ *con* $\text{div } v = 0$ *sobre* Ω, *tal que* $(v \cdot n)u = 0$ *sobre* Γ, *entonces:*

$$(v, u \cdot \nabla u) = 2(v, u \cdot w(u)).$$

Demostración. Supongamos que $u \in C^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\int_\Omega (u \cdot w(u)) \cdot v = \frac{1}{2}\int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v - \frac{1}{2}\int_\Omega (u \cdot (\nabla u)^T) \cdot v.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (u \cdot (\nabla u)^T) \cdot v &= u^i \partial_j u^i v^j \\ &= \frac{1}{2}\partial_j (u^i u^i) v^j \\ &= \frac{1}{2} v \cdot \nabla |u|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto de la primera expresión, tenemos

$$\int_\Omega (u \cdot (\nabla u)^T) \cdot v = -\frac{1}{2}\int_\Omega \text{div } v |u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma (v \cdot n)|u|^2 = 0,$$

Por la densidad de $C^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, nos brinda el resultado.

Estimaciones A priori

Sea v^ν la solución de la ecuación de Navier-Stokes,

$$v_t^\nu(x,t) + v^\nu(x,t) \cdot \nabla v^\nu(x,t) = -\nabla p(x,t) + \nu \Delta v^\nu(x,t) + f(x,t)$$

Multiplicando por $v(x,t)$, tenemos:

$$\begin{aligned} v_t^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) + v^\nu(x,t) \cdot \nabla v^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) = -\nabla p(x,t) \cdot v^\nu(x,t) \\ + \nu \Delta v^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) + f(x,t) \cdot v^\nu(x,t) \end{aligned}$$

Luego integramos sobre Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_t^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) + \int_\Omega v^\nu(x,t) \cdot \nabla v^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) = -\int_\Omega \nabla p(x,t) \cdot v^\nu(x,t) \\ + \nu \int_\Omega \Delta v^\nu(x,t) \cdot v^\nu(x,t) + \int_\Omega f(x,t) \cdot v^\nu(x,t) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_\Omega v^\nu(x,t)\cdot\nabla v^\nu(x,t)\cdot v^\nu(x,t)=\frac{1}{2}\int_\Omega v^\nu\cdot\nabla(v^\nu(x,t))^2=-\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}v^\nu\cdot(v^\nu(x,t))^2=0$$

$$\int_\Omega \nabla p(x,t)\cdot v^\nu(x,t)=\int_{\partial\Omega}p(x,t)\cdot v^\nu(x,t)-\int_\Omega p(x,t)\cdot\mathrm{div}(v^\nu(x,t))=0$$

$$\begin{aligned}\nu\int_\Omega \Delta v(x,t)^\nu\cdot v^\nu(x,t) &= \nu[\int_{\partial\Omega}\nabla v^\nu(x,t)\cdot v^\nu(x,t)-\int_\Omega \nabla v^\nu(x,t)\cdot\nabla v^\nu(x,t)]\\ &= -\nu\int_\Omega|\nabla v^\nu(x,t)|^2\end{aligned}$$

$$\int_\Omega v_t^\nu(x,t)\cdot v^\nu(x,t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|v^\nu(x,t)|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\nu(x,t)\|^2$$

Reemplazando en la primera expresión, tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\nu\|\nabla v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}=(f,v^\nu)$$

Integrando de 0 a t,

$$\frac{1}{2}\|v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\nu\int_0^t\|\nabla v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_0^t(f,v^\nu)dt$$

$$\|v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\nu\int_0^t\|\nabla v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)}=\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t(f,v^\nu)dt \qquad (2.48)$$

Ahora consideremos v^0 solución de la ecuación de Euler, de manera análoga, tendremos:

$$\|v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t(\bar{f},v^0)dt \qquad (2.49)$$

A partir de estos supuestos y nuestras hipótesis de f y $\bar{f}$ se deduce:

$$\|v^\nu\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\le C \qquad (2.50)$$

Luego de (2.48), tenemos:

$$2\nu\|\nabla v^\nu\|^2_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\le\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|v^\nu\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))}$$

De (2.50) y como por hipótesis $f\in L^1([0,T];L^2(\Omega))$

$$\nu\|\nabla v^\nu\|^2_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\le C \qquad (2.51)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\nu^{1/2}\|\nabla v^\nu\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))} &= \nu\int_0^T 1\cdot\|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \nu^{1/2}\|1\|_{L^2[0,T]}\cdot\|\nabla v^\nu\|_{L^2([0,T];L^2(\Omega))}\\ &\le C\end{aligned} \qquad (2.52)$$

La penúltima desigualdad resulta de Holder.

Capa Límite

En [8], Kato construye una capa límite de velocidad: Un campo de velocidad variable con el tiempo que es distinto de cero solamente de una distancia $\delta > 0$ de Γ y que es igual a $\bar{v}$ en Γ . Primero demuestra que existe una función matricial cerca de la frontera que es cero en Γ y tal que:

$$\bar{v} = \text{div}\bar{a} = \partial_k \bar{a}_{jk} \text{ en } \Gamma$$

La construcción de Kato hacia $\bar{a}$ muestra, sin perdida de generalidad, una regularidad sobre $\bar{v}$. A continuación, se define una función $z \in C^\infty(\Omega)$ cuyo soporte se encuentra en Γ_δ, definido por:

$$z(x) = \zeta(\rho(x)/\delta),$$

donde, $\zeta : [0, \infty) \to [0, 1]$ función de corte suave, con $\zeta(0) = 1$ y $\zeta(r) = 0$ para $r \geq 1$ y ρ es la distancia de x a Γ.

Finalmente consideremos,

$$u = \text{div}(z\bar{a}) = z\text{div}\bar{a} + \bar{a} \cdot \nabla z.$$

Dada la suavidad de $\bar{a}$ heredada de $\bar{v}$ se sigue que $u \in C^1([0, T]; C^{k-1}(\Omega))$, donde $k = 1$ para 2 dimensiones y $k = 2$ para dimensiones superiores a 2. En dimensiones mayores a 3, $u \in C^1([0, T] \times \Omega)$, el cual es suficiente para que las derivadas sean limitadas (ver la ecuación (4.6) de [8]), con ayuda del **Lema 9**,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} &\leq C\delta^{1/2} & \|\partial_t u\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))} &\leq C\delta^{1/2} \\ \|\nabla u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} &\leq C\delta^{-1/2} & \|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} &\leq C, \\ \|\nabla u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} &\leq C\delta^{-1}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

De manera similar, cuando supongamos que $\bar{v} \in C^1([0, T]; C^2(\Omega))$, tenemos:

$$\|\Delta u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\delta^{-3/2}. \tag{2.54}$$

En dimensión 2, debemos construir u de manera diferente para no perder regularidad sobre $\bar{v}$. Empleando la función corriente para $\bar{v}$; esto es, una función ψ tal que $\bar{v} = \nabla^\perp\psi = (-\partial_2\psi, \partial_1\psi)$. Dado ψ, construimos una nueva función corriente ψ_0 definido sobre Γ_δ al restarle de ψ su valor constante en la componente mas cercana de Γ, entonces $\psi_0 = 0$ sobre Γ y $\bar{v} = \nabla^\perp\psi_0$ sobre Γ_δ. Finalmente, definimos la velocidad de capa límite de u por:

$$u = \nabla^\perp(z\psi_0) = z\nabla^\perp\psi_0 + \psi_0\nabla^\perp z.$$

Como ψ_0 gana regularidad sobre $\bar{v}$ de una derivada, $u \in C^1([0, T] \times \Omega)$ y las estimativas de (2.48) se sigue de manera similar.

2.3.1 Deducción de las Ecuaciones en $\mathbb{R}^3$

Consideremos una porción de fluido (líquido o gás), que en el instante $t = 0$, ocupa una región del espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Una manera de describir su movimiento es dar una función flujo $\phi(\alpha, t)$ tal que, para cada $\alpha \in \Omega$, la curva $t \to \phi(\alpha, t)$ describe la trayectoria de la partícula que ocupa la posición α en el instante $t = 0$.

Podemos tambien dar la velocidad $v(x, t)$ de la partícula que, en el instante t, ocupa la posición x. La relación

$$v(\phi(\alpha, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\alpha, t),\ \alpha \in \Omega, \tag{2.55}$$

sigue inmediatamente de las definiciones. Así, conociendo ϕ y sabiendo invertir la función ϕ_t, definida por

$$\phi_t(x) = \phi(x, t),$$

se obtiene $v(x, t)$ por la fórmula

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\phi_t^{-1}(x), t)].$$

Reciprocamente, si el campo de velocidades $v(x, t)$ fuera conocido, se obtiene $\phi(\alpha, t)$ resolviendo, para cada $\alpha \in \Omega$, la ecuación diferencial ordinária con condición inicial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(\alpha, t) &= v(X(\alpha, t), t) \\ X(\alpha, 0) &= \alpha \end{aligned} \tag{2.56}$$

(conocido como la ecuación de la trayectoria), y definiendo $\phi(\alpha, t)$ como siendo igual al valor de la solución de (2.56) en el instante de tiempo t. Vamos admitir que la función flujo ϕ_t existe y tiene todas las propiedades de diferenciabilidad e invertibilidad que fueran necesarias.(sea diferenciable con inversa diferenciable)

Teorema de Transporte y la Derivada Material

Dada una función $f(x, t)$ en el dominio de $X(\Omega, t)$, $x \in \Omega$, y una trayectoria $X(\alpha, t)$, calculemos la derivada en relación al tiempo de la función compuesta.

$$f_X(t) = f(X(t), t).$$

Usando la regla de la cadena, llamamos el resultado $f_X'(t)$ de derivada de f a lo largo de X. Obtenemos,

$$\begin{aligned} f_X'(t) &= \nabla f(X(t), t).\frac{dX}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) \\ &= \left(v.\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(t), t) \end{aligned}$$

Definamos la derivada material de f por la fórmula:

$$\frac{Df}{Dt} = v.\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2.57}$$

Teorema 4 (**Teorema de Transporte**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio abierto, acotado con frontera suave, y sea X una trayectoria de partículas. Entonces para cualquier función suave $f(x,t)$ se cumple*

$$\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} f(x,t)dx = \int_{X(\Omega,t)} \left[\frac{Df}{Dt} + f div\ v\right](x,t)dx \tag{2.58}$$

Demostración.

Haciendo en la integral del lado izquierdo de (2.58) el cambio de variable $x = \phi_t(y)$, obtenemos:

$$\int_\Omega f(\phi_t(y),t)J(y,t)dy \tag{2.59}$$

donde J denota el determinante jacobiano:

$$J(y,t) = det\left(\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq 3}.$$

Como, por hipótesis, ϕ_t es siempre inversible, $J(x,t)$ nunca se anula. Y, como el jacobiano es contínuo y $J(y,0)$ es igual a 1 para todo $y \in \Omega$, entonces el determinante arriba es siempre positivo, teniendo haber sido innecesario tomar el valor absoluto de J en (2.59). La integral que resultó del cambio de variable tiene domínio de integración independiente del tiempo. Podemos por lo tanto cambiar el orden de derivación e integración. Obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} f(x,t)dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\phi(y,t),t)\right]J(y,t)dy \\ &+ \int_\Omega f(\phi(y,t),t)\frac{\partial J}{\partial t}(y,t)dy\end{aligned} \tag{2.60}$$

Luego de la primera integral que aparece del lado derecho de la igualdad arriba. La derivada en el integrando es la derivada de f calculada a lo largo de una trayectoria. Aparece entonces la derivada material que acabamos de definir. Obtenemos así que esta primera integral es igual a:

$$\int_\Omega \frac{Df}{Dt}(\phi(y,t),t)J(y,t)dy,$$

la cual, a través del cambio de variable $x = \phi_t(y)$, vemos que es igual a

$$\int_{X(\Omega,t)} \frac{Df}{Dt}(x,t)dx.$$

Vamos ahora calcular la última integral en (2.60). Debemos calcular la derivada del jacobiano,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix},$$

en el punto (y,t). Conmutando las derivadas, usando (2.55) y la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y,t) = \frac{\partial}{\partial y_j}\left[v_i(\phi(y,t),t)\right] = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\phi(y,t),t)\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y,t).$$

Aplicando las propiedades usuales de los determinantes y omitiendo, por el momento, los puntos donde las derivadas son calculadas, vemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_k}\dfrac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

El primero de estas tres sumatorias de determinantes es igual al producto $(\partial v_1/\partial x_1)J$, pues los términos correspondientes a $k=2$ e $k=3$ son iguales a $(\partial v_1/\partial x_k)$ veces un determinante con lineas repetidas. Afirmación análoga vale para las otras dos sumatorias. Obtenemos, entonces:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} v$$

donde el jacobiano y su derivada son calculados en el punto (y,t) y la divergente $\operatorname{div} v$ es calculado en el punto $(\phi(y,t),t)$. De ahí, vemos:

$$\int_{\Omega} f(\phi(y,t)),t)\frac{\partial J}{\partial t}(y,t)dy = \int_{\Omega} f(\phi(y,t),t)\left[(\operatorname{div} v)(\phi(y,t),t)\right] J(y,t)dy,$$

que es igual, via el cambio $x = \phi_t(y)$, a

$$\int_{X(\Omega,t)} f(x,t) \text{div } v(x,t) dx,$$

lo que demuestra (2.58).

Incompresibilidad y Conservación de Masa

Denotaremos por $\rho(x,t)$, o simplemente ρ, la densidad de masa del fluido. Por definición, ρ es una función tal que la masa de la porción de fluido que ocupa una región Ω en el instante t es dado por

$$\int_{\Omega} \rho(x,t) dx.$$

La hipótesis de que la masa se conserva se traduce en la ecuación

$$\int_{\Omega} \rho(x,0) dx = \int_{X(\Omega,t)} \rho(x,t) dx,$$

válida para todo $t \geq 0$, donde Ω es arbitrário. Asumiendo como hipótesis que ρ tiene derivadas contínuas, y aplicando entonces el teorema de Transporte, tenemos:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{X(\Omega,t)} \rho(x,t) dx = \int_{X(\Omega,t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{ div } v \right) (x,t) dx.$$

Como Ω es un abierto cualquiera, ocupado por el fluido en el instante t, entonces esta función es identicamente nula. Así obtenemos la *ecuación de la conservación de masa*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{ div } v = 0 \tag{2.61}$$

Usando la definición de derivada material (2.57) y la identidad

$$\text{div}(fu) = \nabla f.u + f \text{div } u,$$

la ecuación en (2.61) puede ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$$

La condición de que el volumen de cualquier porción de fluido puede ser preservado por el flujo es descrita por la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_{X(\Omega,t)} dx = 0 \tag{2.62}$$

Si esta condición fuera satisfecha, el teorema de transporte aplicado a la función constante $f \equiv 1$, implica

$$\int_{\Omega} \text{div } v \, dx = 0$$

que es válida para todo abierto Ω. De ahí se concluye que el divergente de la velocidad es nulo

$$\text{div } v = 0 \tag{2.63}$$

La recíproca tambien es verdadera, o sea, las ecuaciones en (2.63) y (2.62) son equivalentes.

LLamaremos al fluido de incompresible si el fluido satisface (2.63). Por otro lado, note que ρ es constante a lo largo de las trayectorias de las partículas. En nuestro caso, consideraremos $\rho = 1$.

Conservación de Momento

El momento (lineal) de una porción de fluido que ocupa, en el instante t, la región $X(\Omega, t)$ es dado por la integral

$$\int_{X(\Omega,t)} \rho(x,t)v(x,t)dx.$$

Por la segunda ley de Newton, la derivada en relación al tiempo de esta cantidad es igual a la fuerza total actuando en $X(\Omega, t)$. Esta es igual a la suma de las fuerzas externas que actuan en el fluido (peso, fuerza de Coriolis, mismo fuerzas electro-magnéticas) y de las fuerzas internas, ejercidas sobre $X(\Omega, t)$ por el restante del fluido. Denotaremos la fuerza total externa por $f(x, t)$. Esto es, la fuerza externa total actuando en la porción de fluido que, en el instante t, ocupa la región $X(\Omega, t)$, es dado por

$$\int_{X(\Omega,t)} \rho(x,t)f(x,t)dx$$

En cuanto a las fuerzas internas, supongamos sean ellas *fuerzas de contacto* o *tensiones.* Despreciamos entonces acciones a distancia entre las partículas del fluido y supongamos que exista un *campo de tensiones* $\tau(x, t, n)$ que de la fuerza de contacto por unidad de área actuando en una superfície perpendicular a n en el punto x, en el instante t. Mas precisamente, la fuerza ejercida por el resto del fluido en la porción de fluido que, en el instante t, ocupa la región cerrada $X(\Omega, t)$, delimitada por la superfície $\partial X(\Omega, t)$, es dada por:

$$\int_{\partial X(\Omega,t)} \tau(x,t,n)dS_x,$$

donde n denota el vector unítario normal a $\partial X(\Omega, t)$, apuntando para fuera. El teorema de Cauchy (ver [6], párrafo 7) garantiza que, si el fluido satisfice la segunda ley de Newton, entonces τ depende linealmente de n, o sea, existe una función matricial $S(x, t)$ tal que

$$\tau(x,t,n) = S(x,t)n.$$

En particular, $\tau(x,t,-n) = -\tau(x,t,n)$, lo que es consecuencia de la tercera ley de Newton.

La segunda ley de Newton entonces queda expresada por la siguiente integral,

$$\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} \rho v dx = \int_{X(\Omega,t)} \rho f dx + \int_{\partial X(\Omega,t)} SndS_x.$$

Podemos calcular la derivada del lado izquierdo de esta ecuación, aplicando el Teorema de Transporte a cada componente. Usando el Teorema de la Divergencia, obtenemos:

$$\int_{X(\Omega,t)} \left[\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \text{ div } v - \rho f - \text{div}S\right] dx = 0 \tag{2.64}$$

donde div$S$ denota el vector que tiene la i-ésima componente igual al divergente del i-ésimo vector-lineal de S. Usando (2.61), tenemos:

$$\frac{D}{Dt}(\rho v) + \rho v \text{ div } v = \rho \frac{Dv}{Dt},$$

y usando la ecuación en (2.64), resulta la *ecuación de la Conservación de Momento*:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f + \text{div } S. \tag{2.65}$$

Fluidos no viscosos. Ecuación de Euler

Las ecuaciones de la Conservación de la Masa (2.61) y de Momento (2.65) son insuficientes para describir el fluido: para completar la descripción necesitamos relacionar S con las otras variables. Si supusieramos que las fuerzas internas actuan apenas perpendicularmente a la superfície $X(\Omega,t)$ (ausencia de atrito o *viscosidad*), Sn debe ser siempre paralelo a n o, equivalentemente, existe una función $p(x,t)$ tal que

$$S(x,t) = -p(x,t)Id,$$

donde Id denota la matriz identidad. La función p es llamada *presión* y

$$\text{div } S = -\nabla p.$$

Estas hipótesis todavia son insuficientes: (2.61) y (2.65) consisten ahora de cuatro ecuaciones escalares para cinco incógnitas v_1, v_2, v_3, ρ *y* p. Una salida es suponer que el fluido es incompresible. Lo que es una buena aproximación para el caso de los líquidos. Usando (2.61) y (2.57), obtenemos entonces la *ecuación de Euler* para un fluido no viscoso e incompresible, denotando tambien por $\rho = 1$ el valor constante de la densidad de masa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v &= -\nabla p + f \\ \text{div } v &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Al intentar obtener formas para la matriz S que incluyan fuerzas de viscosidad, argumentos físicos y matemáticos (ver [11], [4] e [6, párrafo 16]), nos permiten concluir que, en primera aproximación, S debe ser dada por

$$S = -p\, Id + \nu'(\operatorname{div} v) Id + \nu(G + G^t), \tag{2.67}$$

donde, ν y ν' son constantes, G^t denota la transpuesta de G, que denota la matriz ∇v:

$$G = \nabla v = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \tag{2.68}$$

para completar el sistema formado por las ecuaciones en (2.61), (2.65), (2.67) y considerando el fluido incompresible, div $v = 0$, luego

$$\operatorname{div}(G + G^t) = \Delta v.$$

La ecuación de conservación de momento (2.65) se escribe entonces,

$$\frac{Dv}{Dt} = f - \nabla p + \nu \Delta v \tag{2.69}$$

conocida como la *ecuación de Navier-Stokes*.

La constante $\nu \geq 0$ es llamado el *coeficiente de viscosidad*.

Un fluído viscoso e incompresible es descrito entonces por las ecuaciones en (2.69) y (2.63).

2.3.2 Existencia y Unicidad de soluciones para las ecuaciones de Navier Stokes y Euler

Primero estudiaremos la existencia local y Unicidad. Despues, probaremos el criterio de Beale-Kato-Majda para garantizar la existencia global.

Unicidad de la Solución de la ecuación de Euler o Navier-Stokes

Proposición 5. *Sean v_1 y v_2 dos soluciones suaves para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes con respectivas fuerzas externas F_1, F_2 y la misma viscosidad ($\nu \geq 0$). Supongamos que esas soluciones existen en un intervalo de tiempo común $[0,T]$, T fijo, v_i decrece rápidamente en el infinito, donde $v_i(.,t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ y $F_i \in L^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3))$. Entonces*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|v_1 - v_2\|_0 \leq \left[\|(v_1 - v_2)|_{t=0}\|_0 + \int_0^T \|F_1 - F_2\|_0 \, dt\right] \exp\left(\int_0^T |\nabla v_2|_\infty \, dt\right) \quad (2.70)$$

Demostración. Sean v_1 y v_2 dos soluciones suaves para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes con respectivas fuerzas externas F_1 y F_2.

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i}{Dt} &= -\nabla p_i + \nu \Delta v_i + F_i \\ \text{div } v_i &= 0 \\ v_i|_{t=0} &= v_{0i} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Además supongamos que estas soluciones existen en un intervalo de tiempo común $[0,T]$ y que decrece rápidamente cuando $|x| \nearrow \infty$, de modo que $v_i \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Denota $\widetilde{v} = v_1 - v_2$, $\widetilde{p} = p_1 - p_2$ y $\widetilde{F} = F_1 - F_2$ y tomemos la diferencia de las ecuaciones (2.71) para obtener:

$$\widetilde{v}_t + v_1.\nabla\widetilde{v} + \widetilde{v}.\nabla v_2 = -\nabla\widetilde{p} + \nu\Delta\widetilde{v} + \widetilde{F}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $\widetilde{v}$, integrando sobre $\mathbb{R}^3$, y denotando por $(.,.)$ las integrales correspondientes, obtenemos:

$$(\widetilde{v}_t, \widetilde{v}) + (v_1.\nabla\widetilde{v}, \widetilde{v}) + (\widetilde{v}.\nabla v_2, \widetilde{v}) = -(\nabla\widetilde{p}, \widetilde{v}) + \nu(\Delta\widetilde{v}, \widetilde{v}) + \left(\widetilde{F}, \widetilde{v}\right)$$

Por otro lado, integrando por partes y usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\widetilde{v})\,\widetilde{v} = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla.\nabla\widetilde{v})\,\widetilde{v} = -\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\widetilde{v}|^2$$

Donde los términos de frontera se anulan porque asumimos que v decrece rápidamente en el infinito. También,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v_1.\nabla\widetilde{v})\,\widetilde{v} = \int_{\mathbb{R}^3} v_1.\nabla\left(\frac{1}{2}\widetilde{v}^2\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\text{div}\,(v_1)\,.\widetilde{v}^2 = 0$$

En el término de la presión, podemos integrar por partes, para obtener

$$-\left(\nabla \widetilde{p}, \widetilde{v}\right) = \left(\widetilde{p}, \operatorname{div} \widetilde{v}\right) = 0$$

pues $\widetilde{v}$ es de divergencia nula. Por lo tanto

$$\left(\widetilde{v}_t, \widetilde{v}\right) + \nu \left(\nabla \widetilde{v}, \nabla \widetilde{v}\right) = -\left(\widetilde{v}.\nabla v_2, \widetilde{v}\right) + \left(\widetilde{F}, \widetilde{v}\right)$$

y usando la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{v}(.,t)\right\|_0^2 + \nu \left\|\nabla \widetilde{v}(.,t)\right\|_0^2 \leq \left|\nabla v_2(.,t)\right|_\infty \left\|\widetilde{v}(.,t)\right\|_0^2 + \left\|\widetilde{F}(.,t)\right\|_0 \left\|\widetilde{v}(.,t)\right\|_0 \qquad (2.72)$$

y aplicando el Lema de Grönwall, tenemos:

$$\left\|v_1 - v_2\right\|_0 \leq \left[\left\|(v_1 - v_2)|_{t=0}\right\|_0 + \int_0^T \left\|F_1 - F_2\right\|_0 dt\right] \exp\left(\int_0^T \left|\nabla v_2\right|_\infty dt\right)$$

Corolário 1 (Unicidad de Soluciones)**.** *Consideremos v_1 y v_2 dos soluciones suaves de las ecuaciones* (2.71) *sobre* $[0,T]$ *con misma condición inicial y fuerza* $F \in L^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3))$, *donde* $v_i(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *. Entonces* $v_1 = v_2$

Demostración. Usando la proposición anterior, para cada $t \in [0,T]$, tenemos

$$\left\|v_1 - v_2\right\|_0 \leq \left[\left\|(v_1 - v_2)|_{t=0}\right\|_0 + \int_0^T \left\|F_1 - F_2\right\|_0 dt\right] \exp\left(\int_0^T \left|\nabla v_2\right|_\infty dt\right)$$

y como $v_1|_{t=0} = v_2|_{t=0} = v_0$, $F_1 = F_2 = F$, obtenemos

$$v_1 = v_2$$

Existencia Global de Soluciones para el problema regularizado

Dada la ecuación

$$\begin{aligned} v_t + v.\nabla v &= -\nabla p + \nu \Delta v \\ \operatorname{div} v &= 0 \\ v|_{t=0} &= v_0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Nosotros usamos una ecuación aproximada para la ecuación de Euler o Navier-Stokes que satisface la condición del teorema de Picard, regularizando las ecuaciones, y usando el operador $\mathcal{J}_\epsilon$, tenemos:

$$\begin{aligned} v_t^\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon \left[\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) .\nabla \left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) \right] &= -\nabla p^\epsilon + \nu \mathcal{J}_\epsilon \left(\mathcal{J}_\epsilon \Delta v^\epsilon \right) \qquad (2.74) \\ \operatorname{div} v^\epsilon &= 0 \\ v^\epsilon|_{t=0} &= v_0 \end{aligned}$$

Aplicando la Proyección de Leray, eliminamos p^ϵ y la condición de incompresibilidad div $v^\epsilon = 0$, proyectando estas ecuaciones para el espacio de funciones con divergencia nula.

$$V^s = \left\{ v \in H^s(\mathbb{R}^N) : \operatorname{div} v = 0 \right\} \tag{2.75}$$

Como el operador proyección de Leray $\mathcal{P}$ conmuta con las derivadas, modificadores y $\mathcal{P}v^\epsilon = v^\epsilon$, tenemos

$$v_t^\epsilon + \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon \left[\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) .\nabla \left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) \right] = \nu \mathcal{J}_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon \tag{2.76}$$

De las ecuaciones regularizadas de Euler o Navier-Stokes en la ecuación (2.74), obtenemos una EDO en el espacio de Banach V^s

$$\begin{aligned} \frac{dv^\epsilon}{dt} &= F_\epsilon(v^\epsilon) \\ v^\epsilon|_{t=0} &= v_0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Donde

$$\begin{aligned} F_\epsilon(v^\epsilon) &= \nu \mathcal{J}_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon \left[\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) .\nabla \left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon \right) \right] \\ &= F_\epsilon^1(v^\epsilon) - F_\epsilon^2(v^\epsilon) \end{aligned} \tag{2.78}$$

Definición 7 (**Definición de solución suave para el problema regularizado**). *Una solución suave para el problema regularizado es una función $v^\epsilon(x,t)$ que satisface* (2.77), *donde $v^\epsilon \in C^1([0,\infty); V^m)$ con $v^\epsilon|_{t=0} = v_0$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.*

Teorema 5 (**Existencia Global de Soluciones para el problema regularizado).** *Dada una condición inicial $v_0 \in V^m$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, para cualquier $\epsilon > 0$ existe para todo tiempo una única solución $v^\epsilon \in C^1([0,\infty); V^m)$ para la ecuación regularizada (2.77).*

Proposición 6 (**Existencia de soluciones Locales para el problema regularizado).** *Considere una condición inicial $v_0 \in V^m$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Entonces:*

(i) Para cualquier $\epsilon > 0$, existe una única solución $v^\epsilon \in C^1([0,T_\epsilon); V^m)$ para la EDO (2.77), donde $T_\epsilon = T(\|v_0\|_m, \epsilon)$.

(ii) En cualquier intervalo de tiempo $[0,T]$, donde la solución $v^\epsilon \in C^1([0,T]; V^0)$, tenemos:

$$\sup_{0\le t\le T} \|v^\epsilon\|_0 \le \|v_0\|_0 \tag{2.79}$$

Demostración.

Primero vamos a probar la existencia de soluciones regularizadas v^ϵ localmente en el tiempo. Mostraremos que la función F_ϵ en la ecuación (2.78) mapea V^m para V^m es localmente Lipschitz.

Note que $F_\epsilon : V^m \longrightarrow V^m$, pues $\mathrm{div} v^\epsilon = 0$, $\mathcal{P}$ mapea en campos de vectores con divergencia nula y $\mathcal{J}_\epsilon$ conmuta con las derivadas.

La definición de espacio de Sobolev y la estimativa (2.16) para modificadores, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|F^1_\epsilon(v^1) - F^1_\epsilon(v^2)\right\|_m &= \nu \left\|\mathcal{J}^2_\epsilon \Delta\left(v^1 - v^2\right)\right\|_m \\ &\le \nu \left\|\mathcal{J}^2_\epsilon\left(v^1 - v^2\right)\right\|_{m+2} \\ &\le \frac{c\nu}{\epsilon^2}\left\|v^1 - v^2\right\|_m \end{aligned} \tag{2.80}$$

Por otro lado, de la desigualdad (2.6) y de la propiedad conmutativa (2.45) de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{J}_\epsilon$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|F^2_\epsilon(v^1) - F^2_\epsilon(v^2)\|_m &\le \|\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon\{(\mathcal{J}_\epsilon v^1).\nabla\left[\mathcal{J}_\epsilon(v^1 - v^2)\right]\}\|_m + \|\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon\{\left[\mathcal{J}_\epsilon(v^1 - v^2)\right].\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^2)\|_m \\ &\le c\{|\mathcal{J}_\epsilon v^1|_\infty \|D^m \mathcal{J}_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)\|_0 + \|D^m \mathcal{J}_\epsilon v^1\|_0 |\mathcal{J}_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)|_\infty \\ &\quad + |\mathcal{J}_\epsilon(v^1 - v^2)|_\infty \|D^m \mathcal{J}_\epsilon \nabla v^2\|_0 + \|D^m \mathcal{J}_\epsilon(v^1 - v^2)\|_0 |\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^2|_\infty\} \end{aligned}$$

de las propiedades de los modificadores (2.16) y (2.17), tenemos:

$$\|F^2_\epsilon(v^1) - F^2_\epsilon(v^2)\|_m \le \frac{c}{\epsilon^{3/2+1+m}}\left(\|v^1\|_0 + \|v^2\|_0\right)\|v^1 - v^2\|_m \tag{2.81}$$

Luego, combinando (2.80) y (2.81) tenemos,

$$\|F_\epsilon(v^1) - F_\epsilon(v^2)\|_m \le c(\|v^1\|_0, \|v^2\|_0, \epsilon)\|v^1 - v^2\|_m \tag{2.82}$$

Por lo tanto, F_ϵ es localmente Lipschitz en cualquier conjunto abierto:

$$O^M = \{v \in V^m / \|v\|_m < M\}$$

por el teorema de Picard, entonces dada cualquier condición inicial $v_0 \in V^m$, existe una única solución $v_\epsilon \in C^1([0, T_\epsilon); V^m \cap O^M)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, para algún $T_\epsilon > 0$.

Para la prueba de (ii), considere $v^\epsilon \in C^1([0, T); V^0)$.

De la ecuación (2.77), multiplicamos por v^ϵ y luego integrando sobre $\mathbb{R}^3$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}(v^\epsilon)^2 dx \;=\; \nu\int_{\mathbb{R}^3} v^\epsilon \mathcal{J}_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} v^\epsilon \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon\left[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\right] dx$$

usando las propiedades de los modificadores y el operador $\mathcal{P}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}(v^\epsilon)^2 dx &= \nu\int_{\mathbb{R}^3}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)(\mathcal{J}_\epsilon \Delta v^\epsilon)dx - \int_{\mathbb{R}^3}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)dx \\
&= \nu\int_{\mathbb{R}^3}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\Delta(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\nabla\left((\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)^2\right) dx \\
&= -\nu\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(div\ \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\right)\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Como div $v^\epsilon = 0$ entonces div $\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon = 0$.

Luego.

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|_0^2 + 2\nu\|\nabla\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_0^2 = 0$$

y desde que $\nu \geq 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|_0^2 \leq 0$$

Como la función $t \longmapsto \|v^\epsilon(t)\|_0^2$ es decreciente

$$\|v^\epsilon\|_0 \;\leq\; \|v_0^\epsilon\|_0,\ \forall t \geq 0$$

Por lo tanto,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|v^\epsilon\|_0 \leq \|v_0\|_0.$$

Observación 1 (Solución Global). *Usando el Teorema de Continuación de una EDO autónoma en un espacio de Banach, la solución puede ser continuada en todo tiempo,* *pues si* $T_\epsilon < \infty$ *entonces* $\lim_{t\to T_\epsilon} \|v^\epsilon(.,t)\|_m = \infty$*. Por otro lado, en la relación* (2.82) *con* $v^2(x,t) = 0$*, tenemos*

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon(.,t)\|_m \leq c(\|v^\epsilon\|_0, \epsilon)\|v^\epsilon\|_m$$

y por (2.79)*, tenemos*

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon(.,t)\|_m \leq c(\|v_0\|_0, \epsilon)\|v^\epsilon\|_m$$

usando el lema de Grönwall, obtenemos

$$\|v^\epsilon(.,t)\|_m \leq \exp\left(cT_\epsilon\right)$$

contradiciendo lo supuesto. Por lo tanto $T_\epsilon = \infty$*.*

Existencia de Soluciones Suaves para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes

En la subsección anterior, probamos la existencia global y unicidad de soluciones para el problema regularizado. Esto es, para cualquier viscosidad fija, $\nu \geq 0$, y cualquier parámetro de regularización $\epsilon > 0$, existe una única solución $v^\epsilon \in C^1([0,\infty); V^m)$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ para la ecuación regularizada (2.77)

$$\begin{aligned}
\frac{dv^\epsilon}{dt} &= \nu \mathcal{J}_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon\left[\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\right).\nabla\left(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\right)\right] \\
v^\epsilon|_{t=0} &= v_0
\end{aligned}$$

Mostramos ahora, desde que $m > 3$, que existe un intervalo de tiempo $[0,T]$ y una subsucesión (v^ϵ) convergente para una función $v \in C([0,T]; C^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T]; C(\mathbb{R}^3))$.

Definición 8 (**Definición de Solución Suave para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes**). *Una solución suave para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes es una función* v *en el sentido clásico tal que cumpla* (2.42)*, donde* $v \in C([0,T]; C^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T]; C(\mathbb{R}^3))$ *con* $v|_{t=0} = v_0$*.*

Teorema 6 (**Existencia de Soluciones locales para las ecuaciones**)**.**

Dada una condición inicial $v_0 \in V^m$*,* $m \geq 3$*, entonces*

(i) Existe un tiempo T *y* $c_m > 0$*, con*

$$T \leq \frac{1}{c_m\|v_0\|_m} \tag{2.83}$$

tal que para cualquier viscosidad, $0 \leq \nu < \infty$*, existe una única solución* $v^\nu \in C([0,T]; C^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T]; C(\mathbb{R}^3))$*, para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes. La solución* v^ν *es el límite de una subsucesión de soluciones aproximadas,* v^ϵ*, en las ecuaciones* (2.77) *y* (2.78)*.*

(ii) Las soluciones aproximadas v^ϵ y el límite v^ν satisface las siguientes estimativas de energía:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|v^\epsilon\|_m \;\leq\; \frac{\|v_0\|_m}{1-c_mT\|v_0\|_m} \tag{2.84}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|v^\nu\|_m \;\leq\; \frac{\|v_0\|_m}{1-c_mT\|v_0\|_m}$$

(iii) Las soluciones aproximadas y el límite v^ν son uniformemente limitados en el espacio $L^\infty([0,T];H^m(\mathbb{R}^3))$, $Lip([0,T];H^{m-2}(\mathbb{R}^3))$ y $C_w([0,T];H^m(\mathbb{R}^3))$.

Para demostrar el teorema anterior, necesitamos de la siguiente proposición.

Proposición 7 (**Estimativa de Energía** H^m)**.**
Sea $v_0 \in V^m$. Entonces la única solución regularizada $v^\epsilon \in C^1([0,\infty);V^m)$ para la ecuación (2.77) *satisface*

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \nu\|\mathcal{J}_\epsilon\nabla v^\epsilon\|_m^2 \leq c_m|\nabla\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty\|v^\epsilon\|_m^2 \tag{2.85}$$

Demostración. Sea v^ϵ es una solución suave para la ecuación (2.77)

$$v_t^\epsilon = \nu\mathcal{J}_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]$$

Tomando la derivada D^α, $|\alpha|\leq m$, y luego multiplicando por $D^\alpha v^\epsilon$ e integrando sobre $\mathbb{R}^3$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(D^\alpha v_t^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon) &= (\nu D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon^2\Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon) - (D^\alpha\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon)\\
&= -\nu(\mathcal{J}_\epsilon^2 D^\alpha\Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon) - (\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon)\\
&\quad - (D^\alpha\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)] - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon)\\
&= -\nu\|\mathcal{J}_\epsilon D^\alpha\nabla v^\epsilon\|_0^2 - (\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon)\\
&\quad - (D^\alpha\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)] - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon)
\end{aligned}$$

luego, usando los **lemas (4), (8)** y el teorema de Divergencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon) &= (\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], \mathcal{P}D^\alpha v^\epsilon)\\
&= ((\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon), \mathcal{J}_\epsilon D^\alpha v^\epsilon)\\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon, \nabla\,(\mathcal{J}_\epsilon D^\alpha v^\epsilon)^2)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{div}\ \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon, (\mathcal{J}_\epsilon D^\alpha v^\epsilon)^2\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sumando sobre $|\alpha| \leq m$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|_m^2 + \nu\|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 &\leq \|v^\epsilon\|_m \sum_{|\alpha \leq m} \|D^\alpha[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)] - [(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]\|_0 \\
&\leq c_m\|v^\epsilon\|_m \left(|\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty \|D^{m-1}\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_0 + \|D^m \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_0 |\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\epsilon\right) \\
&\leq c_m|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|_m^2 + \nu\|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leq c_m|\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2.
$$

Demostración. [Prueba del Teorema 6] Primero vamos a mostrar que la familia (v^ϵ) de soluciones regularizadas es uniformemente limitada en H^m. De la estimativa (2.85) y la desigualdad de Sobolev (2.5), desde que $m > N/2 + 1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|_m^2 &\leq c_m|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2 \\
&\leq c_m\|v^\epsilon\|_m^3
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

y por lo tanto, para todo ϵ,

$$
\sup_{0\leq t\leq T} \|v^\epsilon\|_m \leq \frac{\|v_0\|_m}{1 - c_m T\|v_0\|_m} = \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T\|v_0\|_m} \tag{2.87}
$$

Así la familia (v^ϵ) es uniformemente limitada en $C([0,T]; H^m)$, $m > 3/2$, desde que $T < (c_m\|v_0\|_m)^{-1}$.

Además, la familia (dv^ϵ/dt) es uniformemente limitado en H^{m-2}. La ecuación (2.77) implica que, para $m \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{dv^\epsilon}{dt}\right\|_{m-2} &\leq \nu\|\mathcal{J}_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon\|_{m-2} + \|\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]\|_{m-2} \\
&= A_1 + A_2
\end{aligned}
$$

- Estimativa para A_1.

$$
\begin{aligned}
A_1 &\leq c\nu\|\mathcal{J}_\epsilon^2 v^\epsilon\|_m \\
&= c\nu\|\mathcal{J}_\epsilon(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_m \leq c\nu\|\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_m \leq c\nu\|v^\epsilon\|_m
\end{aligned}
$$

- Estimativa para A_2.

$$
\begin{aligned}
A_2 &\leq c\|(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_{m-2} \\
&\leq c\left[|\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty \|D^{m-2}\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 + \|D^{m-2}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 |\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty\right].
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\|D^{m-2}\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_0 \leq c\|\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_m \leq c\|v^\epsilon\|_m$$

esta última estimativa por (2.16).

$$\|D^{m-2}(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 \leq c\ \|\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon\|_{m-2} \leq\ \|v^\epsilon\|_m$$

$$|\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty \leq |v_\epsilon|_\infty \leq c\ \|v^\epsilon\|_m$$

esto último por la inmersión continua en el espacio C^k.

$$|\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty = |\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon|_\infty \leq |\nabla v^\epsilon|_\infty \leq c\|\nabla v^\epsilon\|_{m-2}.$$

Así,

$$A_2 \leq c\|v^\epsilon\|_m^2$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{dv^\epsilon}{dt}\right\|_{m-2} \leq c\nu\|v^\epsilon\|_m + c\|v^\epsilon\|_m^2$$

y como $\|v^\epsilon\|_m$ es uniformemente limitado, dado $0 \leq \nu < \infty$ la familia (dv^ϵ/dt) es uniformemente limitada en H^{m-2}.

Lema 13. *La familia (v^ϵ) es una subsucesión de Cauchy en $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))$. En particular, existe una constante $c = c(\|v_0\|_m, T)$ tal que para todo ϵ y ϵ', tenemos:*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leq c\, max(\epsilon, \epsilon')$$

Demostración. Usando la ecuación (2.77), haciendo algunos cálculos similares como antes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2 &= \nu\left(\mathcal{J}_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'}^2\Delta v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\right)\\
&\quad -\left(\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)] - \mathcal{P}\mathcal{J}_{\epsilon'}[(\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}).\nabla(\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'})], v^\epsilon - v^{\epsilon'}\right)\\
&= T_1 + T_2
\end{aligned}$$

- Estimativa para T_1.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'}^2\Delta v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}) &= ((\mathcal{J}_\epsilon^2 - \mathcal{J}_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon, v^\epsilon - v^{\epsilon'}) - \|\mathcal{J}_{\epsilon'}\nabla(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0^2\\
&\leq ((\mathcal{J}_\epsilon^2 - \mathcal{J}_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon, v^\epsilon - v^{\epsilon'})\\
&\leq \|(\mathcal{J}_\epsilon^2 - \mathcal{J}_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\
&\leq \left(\|(\mathcal{J}_\epsilon^2 - Id)\Delta v^\epsilon\|_0 + \|(\mathcal{J}_{\epsilon'}^2 - Id)\Delta v^\epsilon\|_0\right)\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\
&\leq [c\epsilon\|(\mathcal{J}_\epsilon + Id)\Delta v^\epsilon\|_1 + c\epsilon'\|(\mathcal{J}_{\epsilon'} + Id)\Delta v^\epsilon\|_1]\,\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\
&\leq [c\epsilon\,(\|\mathcal{J}_\epsilon\Delta v^\epsilon\|_1 + \|\Delta v^\epsilon\|_1) + c\epsilon'\,(\|\mathcal{J}_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon\|_1 + \|\Delta v^\epsilon\|_1)]\\
&\quad .\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\
&\leq \left[c\epsilon\left(\frac{c}{\epsilon}\|v^\epsilon\|_3 + \|v^\epsilon\|_3\right) + c\epsilon'\left(\frac{c}{\epsilon'}\|v^\epsilon\|_3 + \|v^\epsilon\|_3\right)\right]\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\
&\leq c\max(\epsilon,\epsilon')\|v^\epsilon\|_3\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

- Estimativa para T_2, utilizando también las mismas herramientas y el hecho que v^ϵ es de divergencia nula.

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)] - \mathcal{P}\mathcal{J}_{\epsilon'}[(\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}).\nabla(\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'})], v^\epsilon - v^{\epsilon'}) = \\ ((\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon - v^{\epsilon'}) \\ +(\mathcal{J}_{\epsilon'}[(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon - v^{\epsilon'}) \\ +(\mathcal{J}_{\epsilon'}[\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'}).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon - v^{\epsilon'}) \\ +(\mathcal{J}_{\epsilon'}((\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}).\nabla[(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})v^\epsilon]), v^\epsilon - v^{\epsilon'}) \\ +(\mathcal{J}_{\epsilon'}((\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}).\nabla(\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})), v^\epsilon - v^{\epsilon'}) \\ = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5.\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (2.6) y (2.5), obtenemos:

$$\begin{aligned}|R_1| &\leq \|(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]\|_0 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq \{\|(\mathcal{J}_\epsilon - Id)[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]\|_0 + \|(\mathcal{J}_{\epsilon'} - Id)[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]\|_0\}\, \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq [c\epsilon\|(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1 + c\epsilon'\|(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1]\, \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c \max(\epsilon, \epsilon')\|(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c \max(\epsilon, \epsilon')\|v^\epsilon\|_m^2 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0.\end{aligned}$$

Para la siguiente estimativa usamos (2.16), (2.15):

$$\begin{aligned}|R_2| &\leq \|(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 \|\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0 \\ &\leq c\,[\|(\mathcal{J}_\epsilon - Id)v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 + \|(\mathcal{J}_{\epsilon'} - Id)v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0]\, \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c\{c\epsilon\|v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1 + c\epsilon'\|v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1\}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c \max(\epsilon, \epsilon')\|v^\epsilon.\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_1 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c \max(\epsilon, \epsilon')\|v^\epsilon\|_m^2 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0.\end{aligned}$$

Análogamente para el resto,

$$\begin{aligned}|R_4| &\leq c\|(\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}).\nabla[(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\epsilon')v^\epsilon]\|_0 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c\{|\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}|_\infty \|(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'})\nabla v^\epsilon\|_0 + \|v^{\epsilon'}\|_0 |\nabla(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_{\epsilon'} v^\epsilon)|_\infty\}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c \max(\epsilon, \epsilon')\|v^\epsilon\|_m \|v^{\epsilon'}\|_m \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|R_3| &\leq c\|\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'}).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c\left[|\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})|_\infty \|\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)\|_0 + \|\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0 |\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)|_\infty\right] \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ &\leq c\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2 \|v^\epsilon\|_m.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_5 &= (\mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}.\nabla[\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})], \mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}.\nabla[\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})].\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'}.\nabla[(\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'}))^2]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (\mathrm{div}\ \mathcal{J}_{\epsilon'} v^{\epsilon'})[\mathcal{J}_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})]dx = 0.
\end{aligned}
$$

Luego, combinando los resultados y de la desigualdad (2.84), llamando $M = M(\|v_0\|_0, T)$, tenemos:

$$
\frac{d}{dt}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leq c(M)[\max(\epsilon, \epsilon') + \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0]
$$

$$
\begin{aligned}
\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 &\leq \exp(c(M).T)\,[\int_0^T \exp(-c(M)s)\,c(M)\max(\epsilon, \epsilon')ds + \|v_0^\epsilon - v_0^{\epsilon'}\|_0] \\
&\leq \exp(c(M)T)\,[\max(\epsilon, \epsilon') + \|v_0^\epsilon - v_0^{\epsilon'}\|_0] - \max(\epsilon, \epsilon')
\end{aligned}
$$

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leq c(M,T)\max(\epsilon, \epsilon') \tag{2.88}
$$

Esta ultima desigualdad la obtenemos, pues $v_0^\epsilon = v_0^{\epsilon'}$.

Así v^ϵ es una subsucesión de Cauchy en $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$ y como el espacio $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$ es completo, luego v^ϵ converge fuertemente en $v^\nu \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3))$.

Vamos ahora aplicar el **lema (5)** para la diferencia $v^\epsilon - v^\nu$. Tomando $s = m$, usando (2.87) y de la convergencia de v^ϵ, obtenemos:

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|v^\epsilon - v^\nu\|_{m'} \leq c(\|v_0\|_m, T)\epsilon^{1-m'/m}
$$

de aquí, para todo $m' < m$ tenemos convergencia fuerte en $C([0,T]; H^{m'}(\mathbb{R}^3))$.

Como $0 < 7/2 < m' < m$, eso implica convergencia fuerte en $C([0,T]; C^2(\mathbb{R}^3))$, esto es debido a que si $s > N/2 + k$ y $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$, entonces $v \in C^k(\mathbb{R}^N)$.

También de la ecuación,

$$
v_t^\epsilon = \nu\mathcal{J}_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{J}_\epsilon[(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon).\nabla(\mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon)]
$$

Por lo tanto,
$$v_t^\epsilon \to \nu\Delta v^\nu - \mathcal{P}(v^\nu.\nabla v^\nu) \text{ em } C([0,T], C(\mathbb{R}^3))$$
Por otro lado, $v_t^\epsilon \to v_t^\nu$ en el sentido distribucional, pues considere $\varphi \in C_0^\infty$, luego
$$\langle v_t^\epsilon, \varphi \rangle = -\langle v^\epsilon, \varphi_t \rangle$$
Tomando limite a ambos lados tenemos, y luego usando la definición de derivada distribucional
$$-\langle v^\epsilon, \varphi_t \rangle \quad \longrightarrow \quad -\langle v^\nu, \varphi_t \rangle = \langle v_t^\nu, \varphi \rangle$$
Por lo tanto,
$$v_t^\nu = \nu\Delta v^\nu - \mathcal{P}(v^\nu.\nabla v^\nu)$$
Por la equivalencia del problema, entonces v^ν satisface la ecuación de Euler o Navier-Stokes.

Para probar el (iii) del teorema 6 usaremos las nociones de convergencia débil. Nosotros tenemos que,
$$\sup_{0\le t\le T} \|v^\epsilon\|_m \le M \tag{2.89}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \left\| \frac{dv^\epsilon}{dt} \right\|_{m-2} \le M_1 \tag{2.90}$$

de ahí v^ϵ es uniformemente limitado en el espacio de Hilbert $L^2([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$, por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión que converge débilmente para
$$v^\nu \in L^2([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3)) \tag{2.91}$$
Luego, para cada t,
$$\|v^\nu\|_m \le M$$
Esto, implica que $v^\nu \in L^\infty([0,T], H^m(\mathbb{R}^3))$.

Un argumento similar, aplicado a la estimativa (2.90) muestra que $v^\nu \in Lip([0,T]; H^{m-2}(\mathbb{R}^3))$.

Además, v es continua en la topología débil de $H^m(\mathbb{R}^3)$, para probar que $v \in C_w([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$.

Como $v^\epsilon \longrightarrow v^\nu$ em $C([0,T]; H^{m'})$. Se sigue que,
$$[\varphi, v^\epsilon(.,t)] \longrightarrow [\varphi, v^\nu(.,t)] \text{ uniformemente em } [0,T] \text{ para qualquer } \varphi \in H^{-m'}(\mathbb{R}^3).$$

Usando el hecho que $H^{-m'}(\mathbb{R}^3)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^3)$ para $m' < m$, tenemos $[\varphi, v^\epsilon(.,t)] \longrightarrow [\varphi, v^\nu(.,t)]$ uniformemente en $[0,T]$, para cualquier $\varphi \in H^{-m}(\mathbb{R}^3)$.

Esto implica que $v^\nu \in C_w([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$.

Teorema 7 (**Continuidad en la norma superior**). *Sea v^ν la solución descrita en el teorema* (6). *Entonces*

$$v^\nu \in C([0,T); V^m) \cap C^1([0,T); V^{m-2})$$

Demostración. En virtud de la ecuación de Navier-Stokes, es suficiente mostrar $v^\nu \in C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$.
Como $v^\nu \in C_w([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$, es suficiente mostrar que la norma $\|v(t)\|_m$ es una función continua en el tiempo, pues si tenemos lo anterior, considerando $t_0 \in [0,T]$, luego

$$\begin{aligned}\|v^\nu(.,t) - v^\nu(.,t_0)\|_m^2 &= (v^\nu(.,t) - v^\nu(.,t_0), v^\nu(.,t) - v^\nu(.,t_0)) \\ &= (v^\nu(.,t), v^\nu(.,t)) - 2\,(v^\nu(.,t), v^\nu(.,t_0)) + (v^\nu(.,t_0), v^\nu(.,t_0))\end{aligned}$$

Como $v^\nu \in C_w([0,T], H^m(\mathbb{R}^3))$, y $v^\nu(.,t_0) \in H^m(\mathbb{R}^3)$, tenemos

$$v^\nu(.,t) \longrightarrow v^\nu(.,t_0) \text{ fracamente.}$$

Además por la continuidad de la $\|v(t)\|_m$, tenemos que $\|v(t)\|_m \to \|v(t_0)\|_m$. Sustituyendo en la igualdad anterior, obtenemos que $v^\nu \in C([0,T], H^m(\mathbb{R}^3))$.

- Caso 1: $\nu = 0$

  Por la desigualdad (2.87) y usando el hecho que para t fijo,

  $$\limsup_{\epsilon \to 0} \|v^\epsilon\|_m \geq \|v^0\|_m$$

  obtenemos

  $$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v^0\|_m \leq \frac{\|v_0\|_m}{1 - c_m T \|v_0\|_m} \tag{2.92}$$

  Del hecho que $v^0 \in C_w([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$, tenemos

  $$\liminf_{t \to 0^+} \|v^0(.,t)\|_m \geq \|v_0\|_m.$$

  De la estimativa (2.92), tenemos

  $$\limsup_{t \to 0^+} \|v^0(.,t)\|_m \leq \|v_0\|_m.$$

  Por lo tanto, $\lim_{t \to 0^+} \|v^0(.,t)\|_m = \|v_0\|_m$. Esto nos da la continuidad fuerte para la derecha en $t = 0$. Como el análisis que hicimos para las ecuaciones de Euler es reversible en el tiempo, podemos igualmente mostrar continuidad fuerte para la izquierda en $t = 0$.

Resta mostrar continuidad en la norma $\|.\|_m$ de la solución para $t \neq 0$.
Considere un tiempo $T_0 \in [0, T]$ y la solución $v^0(., T_0)$. En este tiempo fijado, $v^0(., T_0) = v_0^{T_0} \in H^m(\mathbb{R}^3)$ y a partir de la relación (2.87),

$$\|v_o^{T_0}\|_m \leq \frac{\|v_0\|_m}{1 - c_m T_0 \|v_0\|_m} \tag{2.93}$$

Así, podemos tomar $v_0^{T_0}$ como dato inicial, construir en un intervalo de tiempo y de manera similar resolver la ecuación regularizada (2.77). Obtenemos soluciones aproximadas $v_{T_0}^{\epsilon}(., t)$ que satisfacen la relación (2.86),

$$\frac{d}{dt}\|v_{T_0}^{\epsilon}\|_m \leq c_m |\mathcal{J}_\epsilon \nabla v_{T_0}^{\epsilon}|_\infty \|v_{T_0}^{\epsilon}\|_m \leq c_m \|v_{T_0}^{\epsilon}\|_m^2$$

podemos pasar a un limite en $v_{T_0}^{\epsilon}$ como antes y encontrar una solución $\widehat{v}$ para la ecuación de Euler en un intervalo de tiempo $[T_0 - T', T_0 + T']$ con dato inicial v_{T_0}. Siguiendo las mismas estimativas como arriba, obtenemos que el tiempo T' satisface la restricción

$$0 < T' < \frac{1}{c_m \|v_0\|_m} - T_0$$

Además, esta solución $\widehat{v}$ debe concordar con v^0 en $[T_0 - T', T_0 + T'] \cap [0, T]$ en virtud de la unicidad de soluciones y del hecho que v^0 y $\widehat{v}$ coincide en $t = T_0 \in [0, T]$. Siguiendo el argumento anterior usado para mostrar que $\|v^0\|_m$ es continua en $t = 0$, concluimos que $\|\widehat{v}\|_m$ es continua en T_0. Luego $\|v^0\|_m$ es continua en T_0.

Como $T_0 \in [0, T]$ es arbitrario, tenemos apenas demostrado que $\|v^0\|_m$ es una función continua en $[0, T]$ y por el hecho de que $v^0 \in C_w([0, T]; H^m(\mathbb{R}^3))$, obtenemos,

$$v^0 \in C([0, T]; H^m(\mathbb{R}^3)).$$

- Caso 2: $\nu > 0$

Tras el inicio del argumento en el caso 1, se obtiene que v tiene continuidad fuerte para la derecha en t=0, de manera análoga sucede aquí. Note que la estimativa de energía H^m implica una información adicional para el caso $\nu > 0$. Esto es, integrando respecto de 0 a T en la relación (2.85), tenemos

$$\frac{1}{2}\|v^\epsilon(., T)\|_m^2 - \frac{1}{2}\|v_0\|_m^2 + \nu \int_0^T \|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 dt \leq \int_0^T c_m |\nabla \mathcal{J}_\epsilon v^\epsilon|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2 dt$$

$$\nu \int_0^T \|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 dt \leq \frac{1}{2}\|v_0\|_m^2 - \frac{1}{2}\|v^\epsilon(., T)\|_m^2 + c_m \int_0^T \|v^\epsilon\|_m^3 dt$$

y de la estimativa (2.84), tenemos

$$\nu \int_0^T \|\mathcal{J}_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 dt \leq M$$

donde $M = M(\|v_0\|_m, T)$.

Luego el limite $v^\nu \in L^2([0,T]; H^{m+1}(\mathbb{R}^3))$ (el limite dependerá de ν y no es verdad para la ecuación de Euler).
Así, para casi todos los $T_0 \in [0,T], v(., T_0) \in H^{m+1}(\mathbb{R}^3)$. En particular, para cualquier $\delta > 0$, existe $T_0 < \delta$ con $v(., T_0) = v_0^{T_0} \in H^{m+1}(\mathbb{R}^3)$.
Tomando $v_0^{T_0}$ como dato inicial y repitiendo la construcción de existencia anterior con $m+1$ en vez de m, tenemos una solución en $C([T_0, T']; H^{\tilde{m}}(\mathbb{R}^3))$, para todo $\tilde{m} < m+1$.

Es suficiente controlar $\|v_{T_0}^\epsilon\|_m$ independiente de ϵ. Siguiendo las estimativas para el intervalo de tiempo T' en términos de los datos iniciales, como antes, podemos mostrar $T \leq T' \leq \dfrac{1}{c_m}\|v_0\|_m$. Una vez mas, por unicidad de soluciones, esta solución es idéntico a v^ν en su intervalo de existencia. Como $\delta > 0$ fue arbitrario, esto implica $v^\nu \in C((0,T].H^m(\mathbb{R}^3))$. Combinando, con la continuidad fuerte a derecha en $t = 0$, resulta $v^\nu \in C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$.

Observación 2. *En la construcción anterior, los datos iniciales solo controla el tiempo de existencia de la solución, desde que*

$$T < \frac{1}{c_m \|v_0\|_m} \tag{2.94}$$

El hecho de que la solución $v \in C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^3))$, implica que puede ser continuado en el tiempo, desde que $\|v(.,t)\|_m$ permanece limitada. Esto es, la construcción de una solución en un intervalo de tiempo $[0,T]$, donde T satisface la desigualdad (2.94). En el tiempo T, se escoge $v(x,T)$ como datos iniciales para una nueva solución y repetir el proceso, continuando la solución en un intervalo de tiempo $[T, T_1]$ para lo cual

$$T_1 < \frac{c}{\|v(.,T)\|_m}$$

Es evidente que el proceso puede ser continuado, para todo tiempo o hasta que $\|v(.,t)\|_m$ se vuelva infinita.

Corolário 2. *Dada una condición inicial $v_0 \in V^m$, $m \geq [N/2]+2$, entonces para cualquier viscosidad, $\nu \geq 0$, existe un tiempo máximo de existencia T^* (posiblemente infinito) y una solución única $v^\nu \in C([0,T^*); V^m) \cap C^1([0,T^*); V^{m-2})$ para la ecuación de Euler o Navier-Stokes.*
Además, si $T^* < \infty$ entonces necesariamente $\lim_{t \to T^*} \|v^\nu(.,t)\|_m = \infty$.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLE

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis general

Considerando las condiciones del teorema de Kato, mostraremos la convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler.

3.1.2 Hipótesis específico

1 Por el teorema de transporte, conservación de Momento y Masa, deduciremos las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler.

2 Para garantizar la existencia de la solución de Navier-Stokes ó Euler es necesario usar la hipótesis de que encontrar la solución a dicha ecuación equivale a encontrar un operador F_ϵ para el problema regularizado y luego usar el teorema de Picard, posteriormente vía límite se encontraría para el problema original de Navier-Stokes (Euler).

3.2 Variable de la investigación

En este trabajo, definiremos nuestra variable v^ν como el campo de velocidad del fluido viscoso de la ecuación de Navier-Stokes, con $v^\nu \in L^2\left([0,T]; H^m(\Omega)\right)$.

3.3 Operacionalización de variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
v^ν	La función v^ν es el campo de velocidad del fluido viscoso, solución de la ecuación de Navier-Stokes	$v^\nu \to v^0$ uniformemente en $L^2(\Omega)$, cuando $\nu \to 0$. (convergencia de soluciones)	$\mathbb{R}^d$, $2 \leq d$	$v^0 \in C^1\left([0,T]; C^{d+\epsilon}(\Omega)\right)$ $v^\nu \in L^2\left([0,T]; H^m(\Omega)\right)$

Definición operacional de la variable

En el trabajo, nuestra definición operacional con relación a nuestra variable será la de cómo v^ν , un fluido viscoso, se aproxima a v^0 , un fluido no viscoso, a medida que ν se vuelva cada vez más pequeño, $\nu \to 0$. Para ello emplearemos la estimación de v^ν en su ecuación, posteriormente con resultados de los espacios de Sobolev demostraremos 4 lemas que serán requeridos para la convergencia de la solución de la ecuación de Navier-Stokes a la solución de la ecuación de Euler.

CAPÍTULO IV

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo de diseño y diseño de la investigación

En este trabajo se muestra un tipo de investigación no experimental, cuyo diseño es Longitudinal, ya que nos centramos en cómo cambia la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler, mediante la convergencia.

4.2 Método de la investigación

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.3 Población y Muestra

La población de nuestro trabajo está conformado por el conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales y se tomó como muestra de estudio dos ecuaciones diferenciales parciales: Navier-Stokes y Euler.

4.4 Lugar de estudio

El lugar de estudio es en la línea de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la realización de nuestro trabajo de tesis se revisará bibliografía especializada y recopilación de informaciones obtenidas vía internet, proyectos (paper) y libros relacionados al tema.

4.6 Plan de Trabajo

Durante el desarrollo del proyecto, primero nos enfocamos en deducir las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler, para ello haremos uso de las EDO, el teorema de transporte y la conservación de Momento y Masa, posteriormente garantizamos sus respectivas soluciones de manera global, en esta parte definiremos el espacio apropiado para que ambas soluciones de dichas ecuaciones existan y finalmente con otras condiciones demostraremos el resultado de Kato y así demostrar la convergencia de las soluciones de Navier-Stokes a las soluciones de Euler.

4.7 Análisis y procedimientos de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1 Convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler

Para lograr el objetivo de la Tesis, lo escribiremos en 2 teoremas que acontinuación se presenta:

Teorema 8 (Kato)**.** *Supongamos que* $v_0^\nu \in H$*,* H *es el espacio de la funciones de divergencia libre* $v \in L^2(\Omega)$ *con* $v \cdot n = 0$ *en* Γ *en el sentido trazo, y* $v_0^0 \in C^1\left([0,T]; C^{k+\epsilon}(\Omega)\right)$*. Además, supongamos que:*

(a) $v_0^\nu \to v_0^0$ *en* $L^2(\Omega)$*, cuando* $\nu \to 0$*,*

(b) $f \in L^1([0,T]; L^2(\Omega))$*,*

(c) $\|f - \bar{f}\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))} \to 0$*, cuando* $\nu \to 0$*.*

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $v^\nu(t) \to v^0(t)$ *en* $L^2(\Omega)$*, cuando* $\nu \to 0$ *uniformemente sobre* $t \in [0,T]$*,*

(ii) $v^\nu(t) \to v^0(t)$ *en* $L^2(\Omega)$*, cuando* $\nu \to 0$ *débilmente para todo* $t \in [0,T]$*,*

(iii) $\nu \int_0^T \|\nabla v^\nu\|^2_{L^2(\Omega)} dt \to 0$*, cuando* $\nu \to 0$*,*

(iii') $\nu \int_0^T \|\nabla v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})} dt \to 0$*, cuando* $\nu \to 0$*,*

donde $\Gamma_{c\nu}$ *es la frontera de ancho* $c\nu$ *con* $c > 0$*, fijo pero arbitrario.*

Teorema 9. *La siguiente condición es equivalente a las del* ***Teorema*** **8***,*

(iii") $\nu \int_0^T \|w(v^\nu)\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})} dt \to 0$*, cuando* $\nu \to 0$*.*

*Además, si la solución $v^0 \in C^1([0,T] \times C^2(\Omega))$, entonces la condición (iii') y las condiciones del **Teorema 8** son equivalentes a la siguiente condición:*

(iii"') $\nu^{-1}\int_0^T \|v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt \to 0$, cuando $\nu \to 0$

Al demostrar la equivalencia de estos teoremas, damos a entender que con 2 nuevas condiciones podemos obtener el resultado que Kato demostró, la cual consiste en la convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler.

Mostraremos las equivalencias $(iii') \to (iii'') \to (i)$, posteriormente $(iii') \to (iii''') \to (i)$. Y con esto daremos culminación a este trabajo.

Afirmación 1: $(iii') \to (iii'')$, es trivial, ya que, por el **Lema (10)**, tenemos:

$$\|w\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})} = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}.$$

integrando de 0 a T y multiplicando por ν, obtenemos:

$$\nu\int_0^T \|w\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt = \frac{1}{2}\nu\int_0^T \|\nabla v\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt.$$

Luego, cuando $\nu \to 0$, se tiene: $\nu\int_0^T \|w\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt \to 0$.

Afirmación 2: *(iii") $\to$ (i).*

Considerando $\delta = c\nu$. Se sigue de (2.48) y (2.49) que para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\|v^\nu(t) - v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|v^\nu(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(v^\nu(t), v^0(t)) \\
&\leq \|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^T (f, v^\nu(t))dt + \|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +2\int_0^T (\bar{f}, v^0)dt - 2(v^\nu, v^0) \\
\|v^\nu(t) - v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \alpha_1 - 2(v^\nu, v^0 - u) + 2\|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +2\int_0^T \left[(f, v^\nu) + (\bar{f}, v^0)\right] dt, \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

donde:

$$\alpha_1 = \|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(v^\nu, u)$$

Por otro lado, observemos que: $\alpha_1 \to 0$ uniformemente en $[0,T]$, cuando $\nu \to 0$, desde que $\delta = c\nu$. Debido a:

$$\begin{aligned}
|\alpha_1| &\leq \left| \|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \right| + 2\,|(v^\nu, u)| \\
&\leq C\left| \|v^\nu(0)\|_{L^2(\Omega)} - \|v^0(0)\|_{L^2(\Omega)} \right| + 2\|v^\nu\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} \\
&\leq C\|v^\nu(0) - v^0(0)\|_{L^2(\Omega)} + C\nu^{1/2}
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad por (2.50), (2.53) y de la hipótesis del **item (a)**.

Reescribiremos la expresión: $2\|v^0(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(v^\nu, v^0 - u)$, para ese propósito, consideremos $\phi = v^0 - u$ como una función de prueba,

$$\begin{aligned}
(v^\nu, v^0 - u) - (v^\nu(0), v^0(0) - u(0)) &= \int_0^t \big[(v^\nu, v^\nu \cdot \nabla(v^0 - u)) - \nu(\nabla v^\nu, \nabla(v^0 - u)) \\
&\quad + (f, v^0 - u) + (v^\nu, \partial_t(v^0 - u))\big]\, dt \\
(v^\nu, v^0 - u) &= (v^\nu(0), v^0(0) - u(0)) + \int_0^t \big[(v^\nu, v^\nu \cdot \nabla(v^0 - u)) \\
&\quad - \nu(\nabla v^\nu, \nabla(v^0 - u)) + (f, v^0 - u) + (v^\nu, \partial_t(v^0 - u))\big]\, dt,
\end{aligned}$$

Multiplicando por -2, tenemos:

$$\begin{aligned}
-2(v^\nu, v^0 - u) &= -2(v^\nu(0), v^0(0) - u(0)) - 2\int_0^t \big[(v^\nu, v^\nu \cdot \nabla(v^0 - u)) \\
&\quad - \nu(\nabla v^\nu, \nabla(v^0 - u)) + (f, v^0 - u) + (v^\nu, \partial_t(v^0 - u))\big]\, dt
\end{aligned}$$

Sumando la expresión: $2\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ a ambos lados y separando un término de la integral, se tiene:

$$\begin{aligned}
-2(v^\nu, v^0 - u) + 2\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2(v^\nu(0), v^\nu(0)) - 2(v^\nu(0), v^0(0)) + 2(v^\nu(0), u(0) \\
&\quad + 2\int_0^t (f, u)dt + \int_0^t \big[-2(v^\nu, v^\nu \cdot \nabla(v^0 - u)) \\
&\quad + 2\nu(\nabla v^\nu, \nabla(v^0 - u)) - 2(f, v^0) - 2(v^\nu, \partial_t(v^0 - u))\big]\, dt \\
-2(v^\nu, v^0 - u) + 2\|v^\nu(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \alpha_2 + \int_0^t \big[-2(v^\nu, v^\nu \cdot \nabla(v^0 - u)) + 2\nu(\nabla v^\nu, \nabla(v^0 - u)) \\
&\quad - 2(f, v^0) - 2(v^\nu, \partial_t(v^0 - u))\big]\, dt \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

donde:

$$\alpha_2 = 2(v^\nu(0), v^\nu(0)) - 2(v^\nu(0), v^0(0)) + 2(v^\nu(0), u(0)) + 2\int_0^t (f, u)dt,$$

para lo cual,

$$\begin{aligned}
|\alpha_2| &\leq 2\left|(v^\nu(0), v^\nu(0)-v^0(0))\right| + 2\,|(v^\nu(0), u(0))| + 2\int_0^t |(f,u)|dt \\
&\leq 2\|v^\nu(0)\|_{L^2(\Omega)}.\|v^\nu(0)-v^0(0)\|_{L^2(\Omega)} + 2\|v^\nu(0)\|_{L^2(\Omega)}.\|u(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +2\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}.\|u\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&\leq 2\|v^\nu(0)\|_{L^2(\Omega)}.\|v^\nu(0)-v^0(0)\|_{L^2(\Omega)} + 2\|v^\nu(0)\|_{L^2(\Omega)}.\|u(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +2\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}.\|f\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))}
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\alpha_2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$ en $[0,T]$ por las hipótesis del **item (a), (b)** y (2.53).

Por otro lado, del último término de (5.2), es:

$$\int_0^t \left[-2(v^\nu, \partial_t(v^0-u))\right] dt = -2\int_0^t (v^\nu, \partial_t v^0)dt + 2\int_0^t (v^\nu, \partial_t u)dt.$$

Como v^0 es solución de la Ecuación de Euler, se tiene:

$$\int_0^t (v^\nu, \partial_t v^0)dt = -\int_0^t \left[(v^\nu, v^0\cdot\nabla v^0) + (v^\nu, \bar{f})\right] dt.$$

Además por (2.50) y (2.53),

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t (v^\nu, \partial_t u)\right| &\leq \int_0^t \|v^\nu\|_{L^2(\Omega)}.\|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v^\nu\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}.\|\partial_t u\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\nu^{1/2}.
\end{aligned}$$

Luego de (5.1), podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\|v^\nu(t)-v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + 2\int_0^t (v^\nu, \partial_t u) + 2\int_0^t \left[(f, v^\nu) + (\bar{f}, v^0) - (f, v^0) - (v^\nu, \bar{f})\right. \\
&\quad \left. -\left(v^\nu, v^\nu\cdot\nabla(v^0-u)\right) + \nu\left(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\right) + (v^\nu, v^0\cdot\nabla v^0)\right] dt \\
\|v^\nu(t)-v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \alpha + 2\int_0^t \left[(f-\bar{f}, v^\nu - v^0) - \left(v^\nu, v^\nu\cdot\nabla(v^0-u)\right)\right. \\
&\quad \left. +\nu\left(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\right) + (v^\nu, v^0\cdot\nabla v^0)\right] dt,
\end{aligned}$$

donde: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\int_0^t (v^\nu, \partial_t u)$ y $\alpha \to 0$, cuando $\nu \to 0$. Pero,

$$\begin{aligned}
\left((v^\nu - v^0), (v^\nu - v^0)\cdot\nabla v^0\right) &= (v^\nu, v^\nu\cdot\nabla v^0) - (v^\nu, v^0\cdot\nabla v^0) - (v^0, v^\nu\cdot\nabla v^0) + (v^0, v^0\cdot\nabla v^0) \\
&= (v^\nu, v^\nu\cdot\nabla v^0) - (v^\nu, v^0\cdot\nabla v^0).
\end{aligned}$$

Los términos anteriores se desvanecen por el Teorema de Green y la regularidad de v^0. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
\|v^\nu(t)-v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \alpha + 2\int_0^t \left[\big(f-\bar{f}, v^\nu - v^0\big) - \big((v^\nu - v^0), (v^\nu - v^0)\cdot\nabla v^0\big)\right. \\
&\quad \left. +(v^\nu, v^\nu\cdot\nabla u) + \nu\big(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\big)\right] dt \qquad (5.3)\\
&\leq \alpha + R + 2\int_0^t\int_\Omega \left|v^\nu - v^0\right|^2 .|\nabla v^0| dt,
\end{aligned}$$

donde:

$$R = \int_0^t \left[2\left(f-\bar{f}, v^\nu - v^0\right) + 2\nu\left(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\right) + 2(v^\nu, v^\nu\cdot\nabla u)\right] dt \qquad (5.4)$$

Acotaremos los 3 términos de R:

- Primer término,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|(f-\bar{f}, v^\nu - v^0)\right| dt &\leq \int_0^t \|f-\bar{f}\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|v^\nu - v^0\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \|v^\nu - v^0\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\cdot\int_0^t \|f-\bar{f}\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&= \|v^\nu - v^0\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}\cdot\|f-\bar{f}\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

  Por la hipótesis del **item (c)**, entonces: $\int_0^t \left|(f-\bar{f}, v^\nu - v^0)\right| dt \to 0$, cuando $\nu \to 0$.

- Segundo término,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \big(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\big) dt\right| &\leq \nu\left|\int_0^t (\nabla v^\nu, \nabla v^0) dt\right| + \nu\left|\int_0^t (\nabla v^\nu, \nabla u) dt\right| \\
&= \nu\left|\int_0^t (\nabla v^\nu, \nabla v^0) dt\right| + 2\nu\left|\int_0^t (w(v^\nu), w(u)) dt\right| \\
&\leq \nu\int_0^t \|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Omega)}.\|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\quad +2\nu\int_0^t \|w(v^\nu)\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.\|w(u)\|_{L^2(\Gamma_\delta)} dt \\
&\leq \nu\|\nabla v^0\|_{L^\infty([0,t];L^2(\Omega))}.\int_0^t \|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\quad +C\nu\int_0^t \|w(v^\nu)\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.\|\nabla u\|_{L^2(\Gamma_\delta)} dt \\
&\leq C\nu\|\nabla v^\nu\|_{L^1([0,t];L^2(\Omega))} + C\nu\delta^{-1/2}\|w(v^\nu)\|_{L^1([0,t];L^2(\Gamma_\delta))}.
\end{aligned}$$

Usando el **Lema (10)** y (2.53). Cuando $\nu \to 0$, la primera expresión tiende a 0 por (2.52). Para la segunda expresión, desde que $\delta = c\nu$,

$$\begin{aligned}
\nu\delta^{-1/2}\|w(v^\nu)\|_{L^1([0;t];L^2(\Gamma_\delta))} &= C\nu^{1/2}\|w(v^\nu)\|_{L^1([0;t];L^2(\Gamma_{c\nu}))} \\
&\leq C\nu^{1/2}t^{1/2}\|w(v^\nu)\|_{L^2([0;t];L^2(\Gamma_{c\nu}))} \\
&= Ct^{1/2}\left(\nu\int_0^t \|w(v^\nu)\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

El cual, por la hipótesis *(iii")* tiende a 0, cuando $\nu \to 0$.

- Tercer término, aplicamos los **Lemas (11), (12), (9)**, además de (2.53) y (2.51), para obtener:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t (v^\nu, v^\nu \cdot \nabla u)dt\right| &= \left|\int_0^t (u, v^\nu \cdot \nabla v^\nu)dt\right| = 2\left|\int_0^t (u, v^\nu \cdot w(v^\nu))dt\right| \\
&\leq 2\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\int_0^t \|v^\nu\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.\|w(v^\nu)\|_{L^2(\Gamma_\delta)}dt \\
&\leq C\delta\int_0^t \|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.\|w(v^\nu)\|_{L^2(\Gamma_\delta)}dt \\
&\leq C\delta^{1/2}\|\nabla v^\nu\|_{L^2([0,T];L^2(\Gamma_\delta))}.\delta^{1/2}\|w(v^\nu)\|_{L^2([0,T];L^2(\Gamma_\delta))} \\
&\leq C\left(\delta\int_0^t \|w(v^\nu)\|^2_{L^2(\Gamma_\delta)}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Debido a la hipótesis (*iii"*), tiende a 0, desde que $\delta = C\nu$.

De (5.3), tenemos:

$$\begin{aligned}
\|v^\nu(t) - v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \alpha + R + 2\int_0^t\int_\Omega |v^\nu(t) - v^0(t)|^2.|\nabla v^0|dt \\
&\leq \alpha + R + \int_0^t \|v^\nu(t) - v^0(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}dt
\end{aligned}$$

Aplicando la Desigualdad Generalizada de *Grönwall*, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|v^\nu - v^0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (\alpha + R) + \int_0^t \|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}.(\alpha + R).\left(e^{\int_0^z \|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}dz}\right)ds \\
&\leq (\alpha + R)\left(1 + \|\nabla v^0\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}.t.e^{\|\nabla v^0\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))}}\right)
\end{aligned}$$

Así, cuando $\nu \to 0$, tenemos que: $(\alpha + R) \to 0$ y la expresión siguiente es acotada.

Por lo tanto, $v^\nu(t) \to v^0(t)$ en $L^2(\Omega)$, cuando $\nu \to 0$, uniformemente sobre $t \in [0, T]$.

Afirmación 3: *(iii') → (iii"')*, es trivial ya que por el **Lema (9)**, tenemos:

$$\begin{aligned}\nu^{-1}\int_0^T \|v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt &\leq \nu^{-1}\int_0^T C\nu^2\|\nabla v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt\\ &= C\nu\int_0^T \|\nabla v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt\end{aligned}$$

Como la expresión derecha tiende a 0, cuando $\nu \to 0$. Por lo tanto, se obtiene el resultado.

Afirmación 4: *(iii"') → (i)*

Así como en la prueba del item *(iii") → (i)*, el único cambio que hacemos es como acotamos el segundo y tercer término de R de (5.4).

Para acotar el segundo término en R, hacemos:

$$\left|\nu\int_0^t \big(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\big)\,dt\right| \leq \nu\left|\int_0^t (\nabla v^\nu, \nabla v^0)dt\right| + \nu\left|\int_0^t (\nabla v^\nu, \nabla u)dt\right|.$$

En el término derecho aplicamos el teorema de Green para tener, $(\nabla v^\nu, \nabla u) = -(v^\nu, \Delta u)$, ya que u se desvanece en la frontera Γ. Luego usando (2.54)

$$\begin{aligned}\left|\nu\int_0^t \big(\nabla v^\nu, \nabla(v^0-u)\big)\,dt\right| &\leq \nu\int_0^t \|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Omega)}.\|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}dt + \nu\int_0^t |(v^\nu, \Delta u)|\,dt\\ &\leq \nu\int_0^t \|\nabla v^\nu\|_{L^2(\Omega)}.\|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}dt + \nu\int_0^t \|v^\nu\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.\|\Delta u\|_{L^2(\Gamma_\delta)}dt\\ &\leq C\nu\|\nabla v^\nu\|_{L^1([0,t];L^2(\Omega))} + C\nu^{-1/2}\int_0^t \|v^\nu\|_{L^2(\Gamma_\delta)}dt\\ &\leq C\nu\|\nabla v^\nu\|_{L^1([0,t];L^2(\Omega))} + Ct^{1/2}\left(\nu^{-1}\int_0^t \|v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_\delta)}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Cuando $\nu \to 0$, usando la hipotesis *(iii"')*, converge a 0.

Luego, para el tercer término de R, acotaremos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t (v^\nu, v^\nu\cdot\nabla u)dt\right| &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)}\int_0^t \|v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_\delta)}dt\\ &\leq \frac{C}{\nu}\int_0^t \|v^\nu\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}dt,\end{aligned}$$

por la hipótesis *(iii"')*, converge a 0.

Luego de (5.3) y aplicando la Desigualdad Generalizada de *Grönwall*, se tiene:

$$\|v^\nu - v^0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\alpha + R)\left(1 + \|\nabla v^0\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))}.t.e^{\|\nabla v^0\|_{L^1([0,T];L^2(\Omega))}}\right)$$

Así, cuando $\nu \to 0$, $\alpha + R \to 0$. Por lo tanto:

$v^\nu(t) \to v^0(t)$ en $L^2(\Omega)$, cuando $\nu \to 0$ uniformemente en $[0, T]$.

CAPÍTULO VI

DISCUSIONES

1. Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido.

2. En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Euler son las que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Estas ecuaciones se llaman así en honor de Leonhard Euler quién las dedujo directamente de las leyes de Newton. Su expresión corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes cuando la viscosidad es despreciable, es decir, $\nu = 0$.

3. En nuestro trabajo fueron usados algunos resultados de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Funcional.

4. Uno de los problemas de este presente trabajo era la de garantizar la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$, ya que por el momento solo es posible en el sentido clásico, fuera de ello, no es posible la unicidad.

5. Acerca de la convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución Euler, todavía es un problema abierto en la mecánica de fluidos para las matemáticas.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

1. Se probó la existencia y unicidad de soluciones de ambas ecuaciones, usando el Teorema de Picard en espacios de Banach.

2. Luego, por el teorema de Continuación de una EDO autónoma en un espacio de Banach, llamada criterio de Beale-Kato-Majda, extendemos las soluciones de manera global.

3. Hemos observado con ayuda del Teorema de Kato, como la solución de la ecuación de Navier-Stokes converge a la solución de la ecuación de Euler, mediante la equivalencia de teoremas.

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1. Este trabajo tiene la finalidad de brindar un apoyo al tema de mecánica de fluidos formulados con las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler. Recomendaría que los lectores interesados, primero se detengan en la deducción de estas ecuaciones, para mayor detalle ver [6].

2. Para entender la metodología realizada para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de Navier-Stokes y Euler, se recomienda leer [13].

3. En la ultima parte del trabajo de tesis, acerca de la convergencia de las soluciones de Navier-Stokes a las soluciones de Euler, pueden leer [8], luego [16, 17] y finalmente [18], para un mejor entendimiento, ademas de, una secuencia lógica de como cada vez se fue reemplazando los datos para llegar a un mismo resultado.

4. Para una mejor comprensión con respecto a las ecuaciones de Euler, leer [10], y para las ecuaciones de Navier-Stokes, leer [15].

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adams R. A., **Sobolev Space**, Academic, New York, 1975.

[2] Evans L. C., **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society. vol 19.

[3] Folland G. B., **Introduction to Partial Differential Equations**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[4] Gurtin M., Martins L.,**Cauchy's theorem in classical physics**, Arch. Rat. Mech. Anal. 60, pag. 305-324, 1976.

[5] Hartman P., **Ordinary Differential Equations**, Boston, 1982.

[6] Hughes T., Marsden J., **A Short Course in Fluid Mechanics**, Publish or Perish, 1976.

[7] John F., **Partial Differential Equations**, Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] Kato T., **Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary**, In: S. S. Chern (ed.) Seminar on nonlinear PDE, MSRI, 1984.

[9] Kelliher J., **On Kato's condition for vanishing viscosity**, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 1711-1721.

[10] Koch H.,**Transport and instability for perfect fluids**. Math. Ann., 323(3):491-523, 2002.

[11] Kreiss H., Lorenz J., **Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes equations**, Academic-Press, 1989.

[12] Lopes M. C., **Boundary Layers and the vanishing viscosity limit for incompressible $2D$ flow**, 2008.

[13] Majda A., Bertozzi A., **Vorticity and Incompressible Flow**, Cambridge University Press, 2002.

[14] Royden H. L., **Real Analysis**, Macmillan, New York, 1968.

[15] Temam R., **Navier-Stokes equations**. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition. 2,9.

[16] Temam R., Wang X., **The convergence of the solutions of the Navier-Stokes equations to that of the Euler equations**, Appl. Math. Lett. 10 (1997), 29–33.

[17] Temam R., Wang X., **On the behavior of the solutions of the Navier-Stokes equations at vanishing viscosity**, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. dedicated to the memory of E. De Giorgi, Serie IV XXV (1998) 807–828.

[18] Wang X., **A Kato type theorem on zero viscosity limit of Navier-Stokes flows**, Indiana Univ. Math. J. 50 (Special Issue): 223-241, 2001.

ANEXO

ANEXO 1: Matriz de Consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Determinación del problema Consideremos v^ν la solución de la ecuación de Navier-Stokes con viscosidad ν en un dominio Ω en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ y consideremos v^0 la solución de la ecuación de Euler. En 1983, **Tosio Kato** mostró que para soluciones regulares, $v^\nu \to v^0$ en $L^2\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ cuando $\nu \to 0$ si y solo si $\nu\|\nabla v^\nu\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$, donde: $X = L^2\left([0,T] \times \Gamma_{c\nu}\right)$. Mostraremos que las condiciones de Kato es equivalente a $\nu\|w(v^\nu)\|_X^2 \to 0$, cuando $\nu \to 0$, además de $\nu^{-1}\|v^\nu\|_X^2 \to 0$ cuando $\nu \to 0$. **Formulación del problema** Lo que se pretende analizar y responder es lo siguiente: *Problema General*:¿Cuáles son las condiciones para que la solución de Navier-Stokes converja a la solución de Euler? *Problemas Específicos* 1. ¿ De dónde provienen dichas ecuaciones? 2. ¿ Será posible la existencia y unicidad de ambas ecuaciones?	**Objetivo general** Estudiar, las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler, asi como la convergencia de la solución de Navier-Stokes a la solución de Euler. **Objetivos específicos** **1**. Deducir las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler. **2**. Garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler.	**Hipótesis general** Considerando las condiciones del teorema de Kato, mostraremos la convergencia. **Hipótesis específico** **1**. Por el teorema de transporte, conservación de Momento y Masa deduciremos las ecuaciones. **2**. Para garantizar la existencia de la solución de Navier-Stokes (Euler) es necesario usar la hipótesis de que encontrar la solución a dicha ecuación equivale a encontrar un operador F_ϵ para el problema regularizado y luego usar el teorema de Picard, posteriormente via limite se encontraría para el problema original de Navier-Stokes (Euler). **3**. Para los lemas y las estimativas, se requiere de algunos resultados en espacios de Sobolev.	**Tipo de investigación** El estudio de la investigacion es de carácter científico-teórico. **Diseño de la investigación** Durante el desarrollo del proyecto, primero deducimos ambas ecuaciones, para ello, hacemos uso de las EDO, el teorema de Transporte y la conservación de Momento y Masa, posteriormente garantizamos sus soluciones de manera global, definimos el espacio apropiado para que ambas soluciones existan y finalmente con otras condiciones, demostraremos el resultado de Kato, así obtenemos la convergencia de las soluciones.	La población en nuestro trabajo está conformado por el conjunto de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y se tomó como muestra de estudio dos ecuaciones: Navier-Stokes y Euler.