UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

"ENERGÍA DEL VACÍO CUÁNTICO A DOS LOOPS: DETERMINACIÓN DE SU EQUIVALENCIA CON LA ENERGÍA DE PUNTO CERO EN UN CAMPO ESCALAR REAL AUTOINTERACTUANTE EN LAS PLACAS DE CASIMIR"

JORGE ABEL ESPICHÁN CARRILLO

(PERIODO DE EJECUCIÓN: DEL 01.01.2021 AL 31.12.2021)

(RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 080-2021-R)

Callao, 2021

DEDICATORIA

A Dios, por darme la vida y por su amor que me entrega cada día.

A mis padres Esther y Moisés, por todo el amor que me entregaron, su constante aliento en mi formación profesional y por sus enseñanzas y consejos.

A mi esposa Dina, mi compañera, por su amor, paciencia, comprensión y apoyo incondicional en todo momento.

AGRADECIMIENTO

A la UNAC que, a través de su VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando con mucho esmero y responsabilidad la realización de las tareas de investigación.

A la Sra. Susana Raquel Rivas Huash, Secretaria de la Unidad de Investigación, por el apoyo brindado en la digitación y diagramación de los textos de los informes trimestrales y el informe final del proyecto de investigación.

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo de investigación, estudiamos la energía del vacío cuántico, a partir de la relación que se obtiene del potencial efectivo a dos loops; y de la energía de punto cero. Con el propósito de encontrar las expresiones correspondientes, y sobre la consideración de métodos funcionales en el formalismo de integrales de trayectoria, se determinó el potencial efectivo a dos loops. El estudio es desarrollado para una teoría $\lambda\phi^4$ de un campo escalar real $\phi(x)$ en dimensión (3+1).

Iniciamos el estudio, con la revisión del modelo que permite obtener el potencial efectivo para un loop. Seguidamente, presentamos el procedimiento para obtener a dos loops. Sobre la aproximación que el punto mínimo del potencial clásico ϕ_0 coincide con el campo clásico ϕ_c, se obtiene el potencial efectivo a dos loops, y cuando es comparado con la energía de punto cero se observa una diferencia entre ellos, que proviene no solo del hecho de considerar a dos loops, sino de la presencia de la constante de autoacoplamiento λ. Un resultado de este tipo es conocido en la literatura como Ambigüedad de punto cero. Asimismo, para el caso de un loop se muestra que es nula, en las placas de Casimir.

Palabras claves: Potencial efectivo en loops, efecto Casimir, energía de punto cero.

ABSTRACT

In this research work, we study the energy of the quantum vacuum, from the relationship obtained from the effective potential at two loops; and zero-point energy. In order to find the corresponding expressions, and on the consideration of functional methods in the path integrals formalism, the effective potential at two loops was determined. The study is developed for a theory $\lambda\phi^4$ of a real scalar field $\phi(x)$ in (3 + 1) dimension.

We begin the study, with the review of the model that allows to obtain the effective potential for one loop. Next, we present the procedure to get two loops. On the approximation that the minimum point of classical potential ϕ_0 coincides with the classical field ϕ_c, the effective potential at two loops is obtained, and when it is compared with the zero-point energy a difference is observed between them, which comes not only from the fact of considering two loops, but of the presence of the self-interacting constant λ . Such a result is known in the literature as Zero Point Ambiguity. In addition, for the case of a loop, it is shown to be null, in the Casimir plates.

Key words: Effective potential in loops, Casimir effect, zero-point energy.

INTRODUCCIÓN

En la teoría cuántica de campos el estado del vacío es usualmente definido como el estado de mínima energía del sistema en consideración, o aún más como el estado que es aniquilado por los operadores de aniquilación (Caminha, 2015). La identificación del vacío es un paso importante para realizar predicciones físicas de la teoría.

Un método conveniente para determinar el estado del vacío es calculando el potencial efectivo, que es la funcional generadora de las funciones de Green irreductibles de una partícula cuyo momento externo se anula. El estado del vacío de la teoría corresponde al mínimo del potencial efectivo (Jackiw, 1974) (Coleman & Weinberg, 1973).

El potencial efectivo es una herramienta importante para el estudio de la quiebra espontánea de simetría, determinación de la energía del vacío, en la renormalización de la masa y de la constante de acoplamiento (Denimar & Pereira & Nogueira, 2005). Por ejemplo, para un campo escalar $\phi(x)$ el potencial efectivo es dado en el primer orden en la expansión. Normalmente son utilizados métodos funcionales (integrales de trayectoria) en el cálculo del estado del vacío y de las cantidades asociadas (energía, momento, etc…).

Por otro lado, el vacío puede ser visto formado por un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, cada uno con una frecuencia bien definida. Todo oscilador cuántico tiene una energía de punto cero en el estado del vacío debido a las fluctuaciones cuánticas.

En este trabajo de investigación y, en la aproximación a dos loops, se determinó la ambigüedad de punto cero para un campo escalar auto interactuante en las placas de Casimir. Para esto, se encontró la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero, en la aproximación que el punto mínimo del potencial clásico coincide con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

La energía del vacío determinada como el mínimo del potencial efectivo puede ser interpretada como la energía de punto cero excepto por un término extra. Este término extra surge cuando un parámetro de escala no es incluido en la función zeta de Riemann generalizada asociada al operador Hamiltoniano para la suma sobre la energía de punto cero. (Myers, 1987).

En el Efecto Casimir, para un campo escalar real de masa nula, el mínimo del Potencial Efectivo es idéntico a la suma de las energías del punto cero. Pero, es sugerido que, en el caso de un campo escalar real masivo y/o sujeto a interacción, el mínimo del Potencial Efectivo no es idéntico a la suma de las energías de punto cero. (Blau & Visser, 1988).

En la aproximación de un loop para un campo escalar real autointeractuante, la ambigüedad de punto cero es nula, cuando es correctamente regularizada, lo que implica que las dos definiciones llevan al mismo valor para la energía del vacío. Sin embargo, dicho resultado reposa crucialmente en el hecho que, en la aproximación de un loop, el punto mínimo ϕ_0, del potencial clásico coincide con el campo clásico ϕ_{cl}. (Nogueira & Maia, 1997).

En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática se dicta la asignatura Teoría Cuántica de Campos II, en la cual un tópico que se desarrolla es el Potencial Efectivo. De esta manera, este trabajo de investigación es considerado como una aplicación del referido tema.

1.2. Formulación del problema

Por todo lo expuesto, se planteó e intentó resolver las siguientes interrogantes:

Problema General

En un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir, ¿Cómo se puede determinar la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero?

Problemas Específicos

¿De qué manera, el Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante permitirá determinar la energía del vacío cuántico?

En la aproximación a dos loops, ¿Cuál es la coincidencia del punto mínimo del potencial clásico con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas?

1.3 Objetivos

Objetivo General

Determinar la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir.

Objetivos Específicos

1. Determinar la energía del vacío cuántico a partir del Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante.

2. Definir la coincidencia del punto mínimo del potencial clásico con el campo clásico del funcional generador de la función de Green conexas en la aproximación a dos loops.

1.4 Limitantes de la Investigación

Los métodos para determinar la energía del vacío son diversos y se usan para estudiar la fuerza atractiva entre las placas de Casimir. Debido a las fluctuaciones del vacío cuántico que se encuentran entre las placas de Casimir existen los modos de vibración estacionarios que es menor a los modos de fluctuación externo, causando un desbalance de modos vibracionales, tal que la presión externa es mayor y lleva a que las placas se acercan.

En este sentido, la limitante teórica de la investigación se establece en el ámbito de la teoría cuántica de campos, específicamente en la energía del vacío. Aún más, nuestra referencia teórica se limita, principalmente, a lo que describe el potencial efectivo (Ryder, 1985), (Peskin & Schroeder, 1995), la energía de Casimir (Plunien & Muller & Greiner, 1986), y en las publicaciones (Myers, 1987), (Nogueira & Maia, 1997), que hacen referencia a la energía del vacío como la suma de las energías del punto cero.

Por otro lado, debido al tiempo que llevará realizar las diversas etapas del proyecto: revisión e interpretación de la información bibliográfica y su traducción al castellano en la mayoría de los casos; la determinación del potencial efectivo a dos loops; el cálculo de la energía del vacío en las placas de Casimir y el análisis e interpretación de los resultados obtenidos, se establece el plazo de 12 meses como límite temporal para el desarrollo de todo el proyecto.

La limitante espacial se encuentra dentro del enfoque teórico de la cuantización de campos escalares reales y la energía del vacío cuántico para campos escalares reales.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Antecedentes: Internacional

Myers (1987), "demostró que cuando la energía del vacío es obtenida a partir de métodos funcionales como el potencial efectivo cuántico a un loop, puede ser interpretado como la suma sobre las energías de punto cero de los modos cuánticos del campo excepto que surge un término $\zeta(0)$, la dependencia de escala de la variación cuadrática de la acción desaparece. Esta dependencia de escala es diferente de cero cuando los contratérminos de renormalización son considerados en la acción por una transformación de escala, caso en el cual se debe adicionar a la suma sobre las energías de punto cero un término proporcional a $\zeta(0)$ para obtener la energía del vacío correcto".

La expresión que se obtuvo de la energía del vacío a partir del potencial efectivo a dos loops, como resultado de esta investigación, pudo ser contrastado con el resultado que se presenta en este artículo para un loop.

Nogueira y Maia (1997), "Es este artículo los autores investigan una posible diferencia entre el potencial efectivo y la energía de punto cero. Ellos definen la ambigüedad de punto cero como la diferencia entre estas dos definiciones de la energía del vacío. Considerando la técnica de la función zeta de Riemann consiguen obtener cantidades renormalizadas, que les permite mostrar que la ambigüedad de punto cero desaparece, lo cual implica que las dos definiciones antes mencionadas para la energía del vacío coinciden para una clase de geometrías y un potencial general. Asimismo, muestran explícitamente que el término extra obtenido por Myers desaparece cuando un parámetro de escala es consistentemente introducido en las funciones zeta de tal manera que no tengan dimensiones".

A diferencia del trabajo citado, lo que se realizo fue calcular la ambigüedad de punto cero en segundo orden, es decir, obtener el potencial efectivo en la aproximación de dos loops, entre dos placas de Casimir.

2.1.2. Antecedentes: Nacional

No se encontraron referencias bibliográficas relacionadas al proyecto en el ámbito nacional al formular el proyecto.

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

a. Energía de punto cero

La energía de punto cero, es la más baja que un sistema cuántico puede tener (es la energía del estado fundamental del sistema). Su origen radica en el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, es decir, una partícula en movimiento, si se conoce exactamente su posición no así su momento. Asimismo, existe una incertidumbre entre las medidas del tiempo y la energía.

A partir del modelo del Oscilador Armónico se puede obtener la energía del punto cero (Espichán, 2014). La ecuación diferencial que define este modelo es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\,\psi(x)\,,$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2}\psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad .$$

Esta ecuación puede ser reducida, si definimos las siguientes magnitudes

$$\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad\qquad \beta = \frac{m\omega}{\hbar}$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \beta^2 x^2 \psi(x) + \alpha\,\psi(x) = 0 \,.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\xi = \beta^{1/2} x \,,$$

a partir del cual es posible obtener:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right)\psi(\xi) = 0 \,,$$

la cual es conocida como la ecuación de Hermite - Gauss, cuya solución es dada por:

$$\psi(\xi) = NH(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

donde N es la constante de normalización y $H(\xi)$ son los polinomios de Hermite. Ahora, de la primera y segunda derivada, tenemos

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)H(\xi) = 0$$

Ecuación diferencial de Hermite. Una forma analítica para estos polinomios, asumimos que pueden ser escritas como:

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i$$

$$\frac{dH(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \xi^{i-1}$$

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i\,\xi^{i-2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i \xi^{i-2} \,,$$

$$\frac{d^2 H(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}\, \xi^i \ ,$$

de esta manera,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}\, \xi^i - 2\xi \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \xi^{i-1} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}\, \xi^i - 2\sum_{i=0}^{\infty} i a_i \xi^{i} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left((i+2)(i+1)a_{i+2} - 2i a_i + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) a_i \right) \xi^i = 0 \, .$$

Los términos encerrados entre corchetes deben ser nulos, es decir

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} - 2i a_i + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) a_i = 0$$

de aquí se obtiene la siguiente relación de recurrencia para los coeficientes:

$$a_{i+2} = \frac{2i - \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}{(i+2)(i+1)} a_i$$

donde $i = 0,1,2,3,\cdots$. Así, conocidos los coeficientes a_0 y a_1 del polinomio de Hermite se pueden determinar todos los otros coeficientes utilizando la relación de recurrencia.

Por otro lado, en Mecánica Cuántica para que una función de onda sea aceptable debe ser cuadráticamente integrable. Además, como el polinomio de Hermite es un desarrollo con infinitos términos y crece exponencialmente, se tiene que la función de onda es infinita cuando x o ξ es más infinito o menos infinito. Para evitar esta dificultad, es necesario detener el polinomio para un valor de $i = k$, es decir, a_k será el último coeficiente no nulo del desarrollo. Así, haciendo $i = k$

$$a_{k+2} = \frac{2k - \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

y como a_k es el último término no nulo, entonces, $a_{k+2} = 0$ que implica

$$2k - \left(\frac{\frac{2mE}{\hbar^2}}{\frac{m\omega}{\hbar}} - 1 \right) = 0\,,$$

de donde

$$E = \left(k + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega\,,$$

siendo ω la frecuencia del oscilador y k es el número cuántico que toma valores $0,1,2,3,\cdots$. El estado $k = 0$ es el de menor energía, es decir, es el estado fundamental o la energía de punto cero (Espichán, 2014).

b. Potencial Efectivo a un Loop

El potencial efectivo es definido como el valor esperado del operador Hamiltoniano calculado en el estado que minimiza dicho valor esperado. De acuerdo con esta definición tiene la interpretación de densidad de energía. En una teoría cuántica de campos el potencial efectivo es una generalización cuántica del potencial clásico, donde el vacío cuántico es obtenido del mínimo de potencial.

El potencial efectivo puede ser expresado como una expansión en loop (que coincide con una expansión en potencias de $\hbar$), de modo que es dado por una suma del término clásico con correcciones que representan el efecto de interacción del campo con el vacío cuántico.

Para obtener el potencial efectivo consideramos los métodos funcionales en el formalismo de las integrales de trayectorias (Ryder, 1985), (Jackiw, 1974).

El funcional generador de las funciones de Green conexas $W[J]$ es dado por

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}\,,$$

y en el formalismo de las integrales de trayectoria, la expresión anterior es representada por

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = N\int \mathcal{D}\phi(x)\exp\left(\tfrac{i}{\hbar}\int\left\{\mathcal{L}+\phi J\right\}d^4x\right) = N\int \mathcal{D}\phi(x)\exp\left(\tfrac{i}{\hbar}S[\phi,J]\right).$$

El campo clásico es definido como el valor esperado del vacío en la presencia de una fuente externa

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)},$$

además, el vacío cuántico se puede obtener de la expresión anterior en el límite $J \mapsto 0$.

El funcional generador de las funciones de Green (irreductibles de una partícula) es una funcional del campo clásico, y puede ser obtenido a partir de una transformada funcional de Legendre como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x),$$

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)}{n!}\int d^4x\phi_c(x)\cdots\phi_c(x),$$

tal que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(x).$$

Cuando $J \mapsto 0$ el campo clásico es una constante, debido a la invariancia traslacional del vacío.

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\Big|_{\phi_c}\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n),$$

donde

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\delta^n\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)\cdots\delta\phi_c(x_n)}\Bigg|_{\phi_c=0}.$$

En el caso del campo clásico constante, todos los términos en la expansión se anulan, excepto el primero. La transformada de Fourier

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+\cdots+k_n)e^{i(k_1x_1+\cdots k_nx_n)}\Gamma^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)$$

entonces

$$\Gamma[\phi_c]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+\cdots+k_n)e^{i(k_1x_1+\cdots k_nx_n)}\Gamma^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n),$$

$$\Gamma[\phi_c]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}\int d^4xe^{i(k_1+\cdots+k_n)x}e^{i(k_1x_1+\cdots k_nx_n)}\Gamma^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n),$$

y expandiendo $\Gamma^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)$ alrededor de $k_i=0$

$$\Gamma^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)=\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)+O^2$$

$$\Gamma[\phi_c]=\int d^4x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}\int d^4xe^{i(k_1+\cdots+k_n)x}e^{i(k_1x_1+\cdots k_nx_n)}\left(\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)+O^2\right)\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n),$$

$$\Gamma[\phi_c]=\int d^4x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\delta^4(x+x_1)\cdots\delta^4(x+x_n)\left(\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)+O^2\right)\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n),$$

$$\Gamma[\phi_c]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)}{n!}\int d^4x\phi_c(x)\cdots\phi_c(x),$$

Para $\phi_c=a,$

$$\Gamma[a]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(n)}(0,\cdots,0)a^n}{n!}\int d^4x,$$

De manera análoga, se puede definir

$$\Gamma[\phi_c]=\int d^4x\left(-U(\phi_c)+\frac{A(\phi_c)}{2}\partial_\mu\phi_c\partial^\mu\phi_c+\cdots\right),$$

Sin embargo, al determinar $U(\phi_c)$, debe mantener la ventaja principal, es decir que estén presentes todos los estados de vacíos, para luego obtener el verdadero estado fundamental. Para

$$U(a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \Gamma^{(n)}(0,\cdots,0),$$

cada nivel de loop relaciona una suma infinita correspondiente a todas las posibles líneas externas. De

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = N\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left(\tfrac{i}{\hbar}\int \{\mathcal{L} + \phi J\} d^4x\right) = N\int \mathcal{D}\phi(x)\exp\left(\tfrac{i}{\hbar} S[\phi, J]\right).$$

tenemos

$$\left.\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} = \hbar J(x).$$

Ahora, vamos a considerar que $S[\phi, J]$ sea estacionario en ϕ_0, es decir

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi_0(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi_0^3(x) - J(x) = 0,$$

Expandiendo $S[\phi, J]$ alrededor de ϕ_0

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0)(\phi(y) - \phi_0) + \cdots$$

Además,

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \int d^4x \left.\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0) + \frac{1}{2!}\int d^4x d^4y \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0)(\phi(y) - \phi_0) + \cdots$$

$$\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} = -\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\delta^4(x-y)$$

Haciendo $\eta(x) = \phi(x) - \phi_0$

y luego reescalamos el campo $\phi \to \hbar^{\frac{1}{2}}\phi$ tenemos

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J]}\int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\tfrac{i}{2}\int d^4x \eta(x)(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0))\eta(x)\right).$$

Pasando al espacio Euclideano

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J]}\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int d^4x \eta(x)(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0))\eta(x)\right),$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J]}\left\{\det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

y como $\det A = e^{Tr \ln A}$

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = Ne^{\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]}\left\{\exp Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{i}{\hbar}W[J] = \frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J] + \ln\left\{\exp Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{i}{\hbar}W[J] = \frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J] - \frac{1}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right),$$

$$W[J] = S[\phi_0,J] + \frac{i\hbar}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right),$$

$$W[J] = S[\phi_0] + \hbar\int d^4x\phi_0 J(x) + \frac{i\hbar}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right).$$

Además, de

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x),$$

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar\int d^4x\phi_0 J(x) + \frac{i\hbar}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right) - \int d^4x\phi_c(x)J(x).$$

Debemos tener $S[\phi_c]$ en función de $S[\phi_0]$. Para esto, de

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)},$$

tenemos

$$\phi_c(x) = \hbar\phi_0(x).$$

entonces

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar\int d^4x\phi_0 J(x) + \frac{i\hbar}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right) - \hbar\int d^4x\phi_0(x)J(x).$$

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c] + \frac{i\hbar}{2}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right).$$

Ahora $\phi_c = a$, se tiene $\Gamma[a] = \Omega U(a)$, y $S[a] = -\Omega V(a)$,

$$U(a) = V(a) - \frac{i\hbar}{2}\Omega^{-1}Tr\ln\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right).$$

En el límite clásico, el potencial efectivo se comporta como el potencial clásico (Ryder, 1985), (Jackiw, 1974).

2.2.2. Conceptual

El estudio de la equivalencia entre la energía del vacío a dos loops y la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir pueden ser realizados; por lo tanto, otras equivalencias para otros campos pueden ser considerados.

2.3. Definición de términos básicos

Efecto Casimir

Es la manifestación de las fluctuaciones de energía que aparecen en el estado del vacío de un sistema cuántico. Este efecto es una pequeña fuerza atractiva que surgen entre dos placas conductoras descargadas paralelas, debido a que el espacio entre las placas es diferente del espacio externo, las fluctuaciones cuánticas del vacío son también diferentes, resultando en una diferencia de fuerzas dentro y fuera de las placas (Plunien & Muller & Greiner, 1986).

Potencial Efectivo en Loops

Es una función del valor esperado del campo o de los campos escalares de la teoría y es una herramienta muy útil para estudiar si una teoría presenta quiebra espontánea de simetría. El potencial efectivo se puede expresar en una expansión en potencias de $\hbar$, cuyo resultado es una suma del término clásico con correcciones que representan el efecto de interacción del campo con el vacío cuántico. Es decir, se tiene la expansión en loops del potencial efectivo (Ryder, 1985), (Jackiw, 1974).

Energía de punto cero

Es la energía menor que un sistema cuántico tiene. Además, dicha energía está asociada al estado fundamental del sistema (Espichán, 2014).

Renormalización

Es una teoría que permite aislar y remover términos divergentes en el límite de altas energías, que surgen en la teoría cuántica de campos en el cálculo de correcciones radiativas (Caminha, 2015).

CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis General

La energía del vacío cuántico a dos loops permitirá determinar la equivalencia con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir.

3.1.2. Hipótesis Específicas

1. El Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante permitirá determinar la energía del vacío cuántico.

2. En la aproximación a dos loops, el punto mínimo del potencial clásico establecería una coincidencia con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas.

3.2. Definición conceptual de variables

Las variables identificadas en la hipótesis general se pueden definir conceptualmente de la forma que se indica a continuación:

Variable Independiente:
La energía de punto cero (EPC): Al cuantizar un campo escalar se obtiene un conjunto infinito de osciladores, cada uno con una energía de punto cero.

Variable Dependiente:
La energía del vacío cuántico a dos loops (EVDL): Se obtiene del mínimo del potencial efectivo a dos loops.

3.3 Operacionalización de variable

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente Energía de punto cero	Cuantización del campo escalar real	Ambigüedad de punto cero	$\frac{EPC}{EVDL}$	Deductivo	Analítica
Dependiente Energía del vacío cuántico a dos loops	Energía del vacío para campos escalares reales	Mínimo del potencial efectivo a dos loops	$\frac{dV}{d\phi} = 0$	Deductivo	Analítica

CAPÍTULO IV: DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto estuvo enmarcado en el tipo de investigación aplicada, cualitativa y transversal. A esta investigación le correspondió el código UNESCO 221212 y el código del Plan Nacional CTI 04050203.

El diseño de la investigación a desarrollar fue teórico y consistió en determinar la expresión del potencial efectivo a dos loops y, a partir de ella, obtener la energía del vacío cuántico con la finalidad de deducir la relación de equivalencia con la energía de punto cero.

4.2. Método de investigación

El Método de la investigación fue del tipo analítico deductivo. Tomando en consideración el procedimiento seguido para obtener el potencial efectivo a un loop en las placas de Casimir (Nogueira & Maia, 1997) y realizando los cálculos adecuados se procedió a determinar primero el potencial efectivo en la aproximación de dos loops y, a continuación, derivar la expresión de la energía del vacío cuántico en las placas de Casimir.

A seguir, se determinó la relación de la energía del vacío cuántico en las placas de Casimir, obtenidas del potencial efectivo a dos loops y de la suma de la energía de punto cero. Se encontró que la existe una diferencia entre esas dos expresiones, dependientes de $\hbar^2$ o de la constante de autoacoplamiento.

4.3. Población y muestra

Dada la naturaleza de la investigación no correspondió determinar población y muestra porque no se realizó un tratamiento estadístico de datos.

4.4. Lugar de estudio y período desarrollado

El proyecto se desarrolló en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callo – Trabajo Remoto; y fue ejecutado en un período de 12 (doce) meses, comprendidos del 01.01.2021 al 31.12.2021.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

4.5.1 Técnica usada para la recolección de la Información

La técnica usada durante el proceso de la investigación, con el propósito de conseguir la información pertinente a los objetivos formulados y resolver las preguntas planteadas en el proyecto, consistió principalmente en el análisis documental, a las ya consideradas en el proyecto de investigación, de las siguientes fuentes:

Libros:

- **CAMINHA, M. (2015)**: En el capítulo 10, muestran cómo obtener el potencial efectivo a primer orden para “D” dimensiones y usando el “Método del campo de fondo” determinan el potencial efectivo a un loop para el caso de un campo escalar real.

- **PESKIN, M. & SCHROEDER, D. (1995)**: En el capítulo 11, en el Modelo de Sigma Lineal determinan la Acción Efectiva, así como el potencial efectivo, considerando los contras términos en la densidad lagrangiana.

- **ITZYKSON C. & ZUBER, J. B. (1985):** En el capítulo 9, presenta como determinar la acción efectiva y a través del método máxima pendiente el potencial efectivo

Artículos:

- **Iliopoulos, Itzykson y Martin (1975).** En el marco de las integrales funcionales en teoría de campos, los autores presentan un enfoque unificado de la expansión de perturbación de acuerdo con el número de loop. Determinan el potencial efectivo a dos loop para el caso de un campo escalar autointeractuante.

- **Nogueira y Maia (1995).** En este artículo los autores muestran que la Ambigüedad de punto cero, para una geometría en las placas de Casimir en dimensión del espacio-tiempo $N = m + 1$, para un campo escalar masivo autointeractuante y considerando un potencial efectivo a un loop; la Ambigüedad renormalizada, es nula.

- **Barone, Cavalcanti y Farina (2004).** En este trabajo los autores determinan la primera corrección radiativa para la energía de Casimir de un campo escalar con una autointeracción $\lambda\phi^4$ en la presencia de dos placas paralelas, considerando tres condiciones de frontera: Dirichlet-Dirichlet; Neumann-Neumann y Dirichlet-Neumann, usando regularización dimensional y analítica.

4.5.2 Instrumentos usados para la recolección de la Información

El instrumento usado para la recolección de la información ha sido la ficha de registro de datos, en la que se han considerado las citas, referencias y algunas notas aclaratorias que han sido necesarias incluir en la investigación para dar cuenta de los aportes bibliográficos en los que la investigación se apoya.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Con el potencial efectivo en la aproximación de dos loops, obtenido teóricamente, se determinó la energía del vacío cuántico en las placas de Casimir. Luego, se consideró la energía del punto cero en las placas de Casimir (Nogueira & Maia, 1995).

A continuación, se compararon las expresiones obtenidas, del potencial efectivo a dos loops y la energía de punto cero, para la energía del vacío en las placas de Casimir, y se determinó si existe una diferencia entre estas dos definiciones.

Finalmente, la expresión teórica obtenida se contrasto con el correspondiente resultado aceptado, (Nogueira & Maia, 1995) y se discutió dichos resultados.

CAPÍTULO V: RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

Determinación del potencial efectivo a dos loops

Usando el método de evaluar la funcional generadora, se expande la acción hasta el cuarto orden, y se obtiene el potencial efectivo a dos loops. A continuación, considerando la función Zeta generalizada, se determinó la energía del vacío en las placas de Casimir, a partir de la energía de punto cero y potencial efectivo. A diferencia de (Nogueira & Maia, 1995) quienes determinaron el potencial efectivo a un loop en las placas de Casimir, aquí se tiene a dos loop.

Como se ha mencionado, el potencial efectivo puede ser obtenido por métodos funcionales, considerando el formalismo de integrales de trayectorias.

El Funcional Generador de las funciones de Green Irreductible de una partícula es una funcional de $\phi_c(x)$ y no de $J(x)$, y se puede obtener por una transformada funcional de Legendre (Ryder, 1985):

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x),$$

donde

$$\phi_c(x) = \frac{\langle 0^+|\hat{\phi}|0^-\rangle_J}{\langle 0^+|0^-\rangle_J} = \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)}$$

es el campo clásico, definido como el valor esperado del vacío en la presencia de una fuente externa $J(x)$; y $W[J(x)]$ es el funcional generador de las funciones de Green conexas.

Además, el vacío cuántico se obtiene en el límite $J(x) \to 0$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(x).$$

y en ese caso $\phi_c(x)$ es una constante, debido a la invariancia traslacional del vacío, dada por $\langle\phi\rangle$, tal que es una solución de

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}\right|_{\langle\phi\rangle} = 0.$$

De aquí, se tiene que el vacío cuántico $\langle\phi\rangle$ es un punto estacionario de $\Gamma[\phi_c]$, es decir, se comporta como una acción, de ahí que es conocido como una acción efectiva. Más aún, en el caso $\hbar \to 0$, la acción efectiva se convierte en una acción clásica.

La idea es expandir la acción (Ryder, 1985), (Itzykson & Zuber, 1985), (Iliopoulos & Itzykson & Martin, 1975):

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \int d^4x \left.\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0) +$$

$$+ \int d^4x d^4y \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0)(\phi(y) - \phi_0) +$$

$$+ \int d^4x d^4y d^4z \left.\frac{\delta^3 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0)(\phi(y) - \phi_0)(\phi(z) - \phi_0) +$$

$$+ \int d^4x d^4y d^4z d^4k \left.\frac{\delta^4 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(k)}\right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0)(\phi(y) - \phi_0)$$

$$(\phi(z) - \phi_0)(\phi(k) - \phi_0) + \cdots$$

donde

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} = \hbar J(x);$$

$$\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} = -\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\delta(x-y)$$

$$\left.\frac{\delta^3 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)}\right|_{\phi_0} = -V'''(\phi_0)\delta(x-y)\delta(x-z)$$

$$\left.\frac{\delta^4 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(k)}\right|_{\phi_0} = -V''''(\phi_0)\delta(x-y)\delta(x-z)\delta(x-k)$$

Reemplazando en la expresión anterior, tenemos

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \int d^4x\hbar J(x)\left(\phi(x) - \phi_0\right)$$

$$-\int d^4x d^4y \left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\delta(x-y)\left(\phi(x)-\phi_0\right)\left(\phi(y)-\phi_0\right)$$

$$-\int d^4x d^4y d^4z\, V'''(\phi_0)\delta(x-y)\delta(x-z)\left(\phi(x)-\phi_0\right)\left(\phi(y)-\phi_0\right)\left(\phi(z)-\phi_0\right)$$

$$-\int d^4x d^4y d^4z d^4k V''''(\phi_0)\delta(x-y)\delta(x-z)\delta(x-k)\left(\phi(x)-\phi_0\right)$$

$$\left(\phi(y)-\phi_0\right)\left(\phi(z)-\phi_0\right)\left(\phi(k)-\phi_0\right) + \cdots$$

Haciendo

$$\phi' = \phi - \phi_0,$$

Se tiene

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \hbar\int d^4x J(x)\,\phi'(x) - \int d^4x\phi'(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi'(x) -$$

$$-\int d^4x\, \phi'(x)V'''(\phi_0)\phi'(x)\phi'(x) - \int d^4x\phi'(x)\phi'(x)V''''(\phi_0)\phi'(x)\phi'(x) + \cdots$$

El siguiente paso, es sustituir en la siguiente expresión, además de considerar $\phi'(x) = \phi(x)$

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]}$$

es decir,

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi \, exp\left(\frac{-i}{2\hbar}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right.$$

$$\left.\frac{-i}{2\hbar}\int d^4x\,\phi(x)V'''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) - \frac{i}{2\hbar}\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) + \cdots\right)$$

Es conocido, que para tener la expansión en loop, es decir en potencias de $\hbar$, se hace ϕ por $\hbar^{\frac{1}{2}}\phi$, entonces

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi \, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right.$$

$$\left.\frac{-i\hbar^{\frac{1}{2}}}{2}\int d^4x\,\phi(x)V'''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) - \frac{i\hbar}{2}\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) + \cdots\right)$$

Como el trabajo es encontrar una expresión para $\hbar^2$, es inmediato observar del término donde aparece $\hbar^{\frac{1}{2}}$ no llevará a este caso, razón por la cual, no se considerará en los cálculos, así se tiene

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi \, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right.$$

$$\left.-\frac{i\hbar}{2}\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) + \cdots\right),$$

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi \left\{exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)\right.$$

$$\left. exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x)\right)\right\}$$

La segunda exponencial, entre corchetes, del lado derecho se expande:

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)$$

$$\left\{1 - \frac{i\hbar}{2}\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) + \vartheta(\hbar^2)\right\},$$

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\left[\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)\right.$$

$$-\frac{i\hbar}{2}\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)\times$$

$$\left.\times\int d^4x\phi(x)\phi(x)V''''(\phi_0)\phi(x)\phi(x) + \cdots\right],$$

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right)\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)$$

$$\left[1 - \frac{\frac{i\hbar}{2}\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)\int d^4x\phi^2(x)V''''(\phi_0)\phi^2(x)}{\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}\right],$$

donde

$$\int \mathcal{D}\phi\, exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right) = \left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

entonces

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J]\right)\left\{det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[1 - \frac{\frac{i\hbar}{2}\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) V''''(\phi_0) exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

Además, de

$$detA = exp(TrLnA)$$

se tiene

$$exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J]\right)\left\{exp\left(TrLn\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[1 - \frac{\frac{i\hbar}{2}\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) V''''(\phi_0) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

Considerando logaritmos, en ambos miembros

$$\frac{i}{\hbar}W[J] = \frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J] - \frac{1}{2}TrLn\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right) +$$

$$Ln\left[1 + \frac{\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) V''''(\phi_0) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\frac{i}{\hbar}W[J] = \frac{i}{\hbar}S[\phi_0, J] - \frac{1}{2}TrLn\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right) +$$

$$+\frac{\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) V''''(\phi_0) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}$$

$$W[J] = S[\phi_0, J] + \frac{i\hbar}{2} TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right) -$$

$$-\frac{i\hbar^2}{2}\frac{\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) V''''(\phi_0) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}$$

Es inmediato observar la contribución de $\hbar^2$, en el tercer término. Es la relación que se buscaba.

Para continuar con este desarrollo, consideremos el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

De este modo

$$\frac{d^4V(\phi)}{d\phi^4} = -\lambda$$

entonces

$$W[J] = S[\phi_0, J] + \frac{i\hbar}{2} TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right) +$$

$$+\frac{i\hbar^2\lambda}{2}\frac{\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\phi^4(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

El punto importante, con esta expresión es que existe una contribución de $\hbar^2$, el cual es un indicio que resultados encontrados en (Nogueira & Maia, 1995) existe una diferencia.

Ahora, para encontrar el campo clásico, de la definición (Ryder, 1985),

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)}$$

y como en la expresión (1), la dependencia en J se encuentra en el primer término del lado derecho, entonces

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \vartheta(\hbar)$$

Es decir, a orden cero de $\hbar$ el campo clásico $\phi_c(x)$ es igual al campo $\phi_0(x)$.

Para determinar el potencial efectivo, sustituimos (1) en

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x),$$

es decir

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_0, J] + \frac{i\hbar}{2} TrLn\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_0)\right) +$$

$$+\frac{i\hbar^2\lambda}{2}\frac{\int d^4x \int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}} -$$

$$-\int d^4x J(x)\phi_c(x) \qquad (2)$$

Sin embargo, se debe tener $S[\phi_c]$ en términos de $S[\phi_0]$; para eso, se considera

$$\phi_0 = \phi_c - \phi_1$$

entonces

$$S[\phi_0] = S[\phi_c] - \int d^4x \phi_1(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x)}\bigg|_{\phi_0} + \vartheta(\hbar^2)$$

$$S[\phi_0] = S[\phi_c] - \hbar \int d^4x\phi_1(x)J(x) + \vartheta(\hbar^2)$$

Sustituyendo en (2), se tiene

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c] + \frac{i\hbar}{2} TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right) +$$

$$+\frac{i\hbar^2\lambda}{2}\frac{\int d^4x\int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\phi_0)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}$$

Para lo cual se ha considerado $J \to 0$. Situación que lleva a un campo clásico constante, $\phi_c = a$, y se obtiene el potencial efectivo. Además, recordando, que (Ryder, 1985),

$$\Gamma[a] = -\Omega V_{ef}(a)$$

$$S[a] = -\Omega V(a),$$

entonces

$$V_{ef}(a) = V(a) - \frac{i\hbar}{2\Omega} TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right) -$$

$$-\hbar^2\frac{i\lambda}{2\Omega}\frac{\int d^4x\int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}}$$

De aquí los términos de interés son

$$V_{ef}^2(a) = -\frac{i\hbar}{2\Omega} TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right) -$$

$$-\hbar^2\frac{i\lambda}{2\Omega}\frac{\int d^4x\int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\phi(x)\right)}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

donde el superíndice en V_{ef}^2 indica el orden del loop. Es decir, es el potencial efectivo a dos loops.

Además, como

$$\int \mathcal{D}\phi\, \phi^4(x) exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\phi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\phi(x)\right) =$$

$$\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^{-\frac{5}{2}}$$

entonces

$$V_{ef}^2(a) = -\frac{i\hbar}{2\Omega}TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right) - \hbar^2\frac{i\lambda}{2\Omega}\frac{\int d^4x\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^{-\frac{5}{2}}}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}},$$

$$V_{ef}^2(a) = -\frac{i\hbar}{2\Omega}TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right) - \hbar^2\frac{i\lambda}{2\Omega}\frac{\int d^4x}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^2},$$

$$V_{ef}^2(a) = -\frac{i\hbar}{2\Omega}TrLn\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right) - \hbar^2\frac{i\lambda}{2}\frac{1}{\left\{det\left(\partial_\mu\partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^2}. \quad (4)$$

Esta expresión representa el potencial efectivo a dos loops.

Energía del punto cero en las placas de Casimir

La energía de punto cero, es la más baja que un sistema cuántico puede tener (es la energía del estado fundamental del sistema). Su origen radica en el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, es decir, una partícula en movimiento, si se conoce exactamente su posición no así su momento. Asimismo, existe una incertidumbre entre las medidas del tiempo y la energía.

Del modelo Oscilador Armónico se puede obtener la energía del punto cero, a partir de

$$E = \left(k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

siendo ω la frecuencia del oscilador y k es el número cuántico que toma valores $0,1,2,3,\cdots$. El estado $k=0$ es el de menor energía, el estado fundamental o la energía de punto cero.

La energía total de punto cero en las placas de Casimir, es

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\hbar}{2}\omega_i$$

donde la suma es sobre todo los modos de vibración, autovalores del operador hamiltoniano.

$$\omega_i = \sqrt{p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V''_{cl}(\phi_0)}.$$

Como en estos casos, se considera, las direcciones perpendiculares al eje de las placas; los momentos son continuos, así

$$E = \frac{1}{aL^2}\frac{\hbar}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L^2 \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\sqrt{p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V''_{cl}(\phi_0)}$$

donde L^2 es el área de las placas, a es la distancia entre las placas y ϕ_0 es el mínimo para el potencial clásico $V(\phi)$.

Como se va a comparar con el caso de potencial efectivo; consideramos la función Zeta asociado al operador hamiltoniano (Myers, 1987)

$$\zeta_H(s - {}^1\!/_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left[p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V''_{cl}\right]^{1/2 - s}$$

De aquí, la energía de punto cero es dada por (Nogueira & Maia, 1997).

$$E = L^2 \frac{\hbar}{2} \lim_{s\to 0} [\zeta_H(s - {}^1\!/_2)]$$

Así, de

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k[k^2 + A^2]^{-s} = \frac{\pi^{3/2}\Gamma(s - 3/2)}{\Gamma(s)} (A^2)^{3/2-s}$$

y de

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 + C^2]^{-u} = -\frac{1}{2} C^{-2u} +$$

$$+ \frac{\pi^{1/2}}{2C^{2u-1}\Gamma(u)} \left[\Gamma\left(u - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi C)^{u-1/2} K_{u-1/2}(2n\pi C) \right]$$

donde $K_u(x)$ son las funciones de Bessel modificadas de segunda especie, se tiene

$$\zeta_H(s - {}^1\!/_2) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^{\frac{3}{2}-s} + a \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^{2-s} +$$

$$+a \frac{4\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^{2-s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(na (V_{cl}'')^{\frac{1}{2}} \right)^{s-2} K_{s-2}(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}})$$

En el límite $s \to 0$, se tiene

$$\zeta_H(-{}^1\!/_2) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^{\frac{3}{2}} + a \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(-2)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^2 +$$

$$+a \frac{4\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} (V_{cl}'')^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(na (V_{cl}'')^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} K_{-2}(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}})$$

De esta manera, la energía de punto cero, con las placas es

$$E = L^2 \frac{\hbar}{2}\left\{ \frac{\pi^2}{(2\pi)^2}\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}} + a\frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma(-2)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\,(V_{cl}'')^2 + \right.$$

$$\left. + a\frac{4\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\,(V_{cl}'')^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}K_{-2}(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}})\right\} \tag{5}$$

Para el caso sin placas, en el mismo volumen, la suma de las energías de punto cero es

$$E^0 = \frac{\hbar}{2}L^2\int_0^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\sqrt{p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V_{cl}''(\phi_0)}$$

y en este caso la función Zeta generalizada asociada al operador hamiltoniano es

$$\zeta_H(s - {}^1\!/_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left[p^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V_{cl}''\right]^{{}^1\!/_2 - s}$$

Siguiendo los pasos, del caso anterior, se tiene

$$\zeta_H^0(s - {}^1\!/_2) = a\frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\,(V_{cl}'')^{2-s} .$$

Para límite $s \to 0$, la energía sin placas es

$$E^0 = L^2\frac{\hbar}{2}a\frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma(-2)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\,(V_{cl}'')^2 . \tag{6}$$

Por otro lado, es conocido, que diferencias de energías son las cantidades que se miden (Nogueira & Maia, 1995).

En este caso del Efecto Casimir, a partir del cálculo de la densidad de energía del vacío obtenida como diferencia de la densidad de energía con

placas y sin placas en un volumen $L^2 a$. Esto es, debido a que las placas introducen modificaciones en el espectro de energía de los modos normales del vacío.

La densidad de energía del vacío, con placas y sin placas es

$$\varepsilon(a) = \frac{E - E^0}{L^2 a} .$$

Entonces, la densidad de energía en las placas de Casimir, para la energía de punto cero, de (5) y (6), es:

$$\varepsilon(a) = \frac{\hbar}{2a} \frac{\pi}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} (V''_{cl})^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{\hbar}{2} \frac{4\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} (V''_{cl})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} K_{-2}(2na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}) ,$$

$$\varepsilon(a) = -\frac{\hbar}{24a\pi} (V''_{cl})^{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar}{8\pi^2} (V''_{cl})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} K_{-2}\left(2na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}\right). \quad (7)$$

Energía del vacío cuántico a dos loops en las placas de Casimir

Para asociar el potencial efectivo en las placas de Casimir, satisfaciendo las condiciones de frontera tipo Dirichlet, separadas una distancia a, se considera la función Zeta generalizada del operador $\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(a)\right)$.

Se tiene de (4)

$$V_{ef}^2(a) = -\frac{i\hbar}{2\Omega} TrLn\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(a)\right) - \hbar^2 \frac{i\lambda}{2} \frac{1}{\left\{det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''(a)\right)\right\}^2} \quad (8)$$

y de la relación (Nogueira & Maia, 1995).

$$Ln\, det\left(\partial_\mu \partial^\mu + V''\,(a)\right) = -\left.\frac{d\zeta\,(s)}{ds}\right|_{s=0} - Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\ ,$$

y considerando (8), en el espacio Euclideano, se tiene

$$V_{ef}^2(a) = \frac{\hbar}{2\Omega}\left[\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right] +$$

$$+\hbar^2\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\left\{exp\left(-\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} - Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}^2}\ ,$$

$$V_{ef}^2(a) = \frac{\hbar}{2\Omega}\left[\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right] +$$

$$+\hbar^2\frac{\lambda}{2}\left\{exp\left(\left.\frac{d\zeta\,(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}^2 .$$

Siguiendo el procedimiento anterior, la función Zeta generalizada del operador $O = \left(\partial_\mu \partial^\mu + V''\,(a)\right)$, en las placas de Casimir es

$$\zeta_O(s) = \frac{\Omega}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + V''_{cl}\right]^{-s}$$

y de (Nogueira & Maia, 1995)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k[k^2 + A^2]^{-s} = \frac{\pi^{3/2}\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)}(A^2)^{3/2-s}$$

entonces, y dejando de lado el término $\frac{\Omega}{a}$, el cual consideramos al final de los cálculos:

$$\zeta_0(s) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{\frac{3}{2}-s} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s}\frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2 + \frac{a^2 V''_{cl}}{\pi^2}\right]^{\frac{3}{2}-s}$$

además, de (Nogueira & Maia, 1995)

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n^2+C^2]^{-u}=-\frac{1}{2}C^{-2u}+$$

$$+\frac{\pi^{1/2}}{2C^{2u-1}\Gamma(u)}\left[\Gamma\left(u-\frac{1}{2}\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi C)^{u-1/2}K_{u-1/2}(2n\pi C)\right]$$

donde $K_u(x)$ son las funciones de Bessel modificadas de segunda especie, se tiene

$$\zeta_0(s)=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{\frac{3}{2}-s}+a\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{2-s}+$$

$$+a\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(na(V''_{cl})^{1/2}\right)^{s-2}K_{s-2}(2na(V''_{cl})^{1/2}) \quad (9)$$

Como es de interés $\zeta_0(s=0)$, entonces de

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)}=0$$

y

$$\lim_{s\to 0}\left\{a\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(na(V''_{cl})^{1/2}\right)^{s-2}K_{s-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})\right\}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to 0}\left\{a\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{2-s}\left(na(V''_{cl})^{1/2}\right)^{s-2}K_{s-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})\right\}$$

así, como de

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{\Gamma(s)}=0$$

entonces

$$\lim_{s\to 0}\left\{a\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{\Gamma(s)}(V''_{cl})^{2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(na(V''_{cl})^{1/2}\right)^{s-2}K_{s-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})\right\}=0$$

De esta manera,

$$\zeta_0(0)=\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2$$

Ahora, de (9) calculamos

$$\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0}=\frac{\Omega}{a}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)(V''_{cl})^{\frac{3}{2}}+2\Omega\frac{\pi}{(2\pi)^3}(V''_{cl})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})}{(na(V''_{cl})^{1/2})^2}$$

$$-\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2\left\{Ln\left(\frac{V''_{cl}}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\}.$$

Entonces

$$\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0}+Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)=$$

$$\frac{\Omega}{a}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)(V''_{cl})^{\frac{3}{2}}+2\Omega\frac{\pi}{(2\pi)^3}(V''_{cl})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})}{(na(V''_{cl})^{1/2})^2}$$

$$-\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2\left\{Ln\left(\frac{V''_{cl}}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\}+Ln(2\pi\mu^2)\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2 \quad (10)$$

Así, el potencial efectivo es

$$V_{ef}^2(a)=-\frac{\hbar}{2\Omega}\left[\frac{\Omega}{a}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)(V''_{cl})^{\frac{3}{2}}+2\Omega\frac{\pi}{(2\pi)^3}(V''_{cl})^2\times\right.$$

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})}{(na(V''_{cl})^{1/2})^2}-\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2\left\{Ln\left(\frac{V''_{cl}}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\}\right.$$

$$+Ln(2\pi\mu^2)\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2\Big]+$$

$$+\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\frac{d\zeta(s)}{ds}\bigg|_{s=0}+Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}^2$$

donde en el último término, se reemplaza por (10). De esta manera, el potencial efectivo a dos loops en las placas de Casimir es dado por

$$V_{ef}^2(a)=-\frac{\hbar}{2a}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)(V''_{cl})^{\frac{3}{2}}-\hbar\frac{\pi}{(2\pi)^3}(V''_{cl})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}(2na(V''_{cl})^{1/2})}{(na(V''_{cl})^{1/2})^2}+$$

$$\frac{\hbar\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V''_{cl})^2\left\{Ln\left(\frac{V''_{cl}}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\}+$$

$$+\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\frac{d\zeta(s)}{ds}\bigg|_{s=0}+Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}^2$$

Cálculo del potencial efectivo sin placas de Casimir

En este caso, se tiene

$$\zeta_O^0(s)=\frac{\Omega}{a}\int_0^{\infty}dn\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[k^2+\frac{\pi^2n^2}{a^2}+V''_{cl}\right]^{-s}$$

Así

$$\zeta_O^0(s)=\frac{\Omega}{a}\int_0^{\infty}dn\frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)}[n^2\pi^2/a^2+V''_{cl}]^{\frac{3}{2}-s}$$

$$\zeta_O^0(s)=\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}[V''_{cl}]^{2-s}$$

$$\zeta_O^0(s=0)=\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}[V''_{cl}]^2$$

y

$$\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V_{cl}'')^2\left\{Ln\left(\frac{V_{cl}''}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\}.$$

Entonces

$$\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0) =$$

$$\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V_{cl}'')^2\left\{Ln\left(\frac{V_{cl}''}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\} + Ln(2\pi\mu^2)\Omega\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}[V_{cl}'']^2 \qquad (11)$$

Así, el Potencial efectivo, sin placas de Casimir

$$V_{ef}^{2,0}(a) = \frac{\hbar}{2}\frac{\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{2!}(V_{cl}'')^2\left\{Ln\left(\frac{V_{cl}''}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right\} +$$

$$+\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}^2$$

donde en el último término se debe reemplazar por (11). Así, la densidad de energía del vacío obtenida del potencial efectivo es dada por la diferencia

$$V_{ef} = V_{ef}^2 - V_{ef}^{2,0}$$

$$V_{ef} = -\frac{\hbar}{2a}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}} - \hbar\frac{\pi}{(2\pi)^3}(V_{cl}'')^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}\left(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)^2} +$$

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}_{10}^2 -$$

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\left.\frac{d\zeta(s)}{ds}\right|_{s=0} + Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}_{11}^2 \qquad (12)$$

Los subíndices "10" y "11" indican que se deben considerar las expresiones (10) y (11), respectivamente.

Un cálculo de las dos últimas expresiones lleva a

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\frac{d\zeta(s)}{ds}\bigg|_{s=0}+Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}_{10}^2-$$

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}\left\{exp\left(\frac{d\zeta(s)}{ds}\bigg|_{s=0}+Ln(2\pi\mu^2)\zeta(0)\right)\right\}_{11}^2=$$

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}exp\left\{\frac{-2\Omega}{32\pi^2}(V_{cl}'')^2\left(Ln\left(\frac{V_{cl}''}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right)\right\}\times$$

$$\left[exp\left\{\frac{2\Omega}{12a\pi}(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}}+\frac{2\Omega\pi^2}{720a^4}-\frac{2\Omega\lambda\pi^2\phi_0^4}{1440a^4m^4}\right\}-1\right]\approx$$

$$\frac{\hbar^2\lambda}{2}exp\left\{\frac{-2\Omega}{32\pi^2}(V_{cl}'')^2\left(Ln\left(\frac{V_{cl}''}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right)\right\}\times$$

$$\left[\frac{\Omega}{6a\pi}(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}}+\frac{\Omega\pi^2}{360a^4}-\frac{\Omega\lambda\pi^2\phi_0^4}{720a^4m^4}\right]. \qquad (13)$$

Ahora, para el caso $ma \ll 1$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{-2}\left(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{1}{a^2V_{cl}''}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_2\left(2na(V_{cl}'')^{\frac{1}{2}}\right)}{(n)^2}$$

y como $V_{cl}''=m^2+\frac{\lambda}{2}\phi_0^2$, se tiene

$$\frac{1}{a^2 V''_{cl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(2na\left(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{(n)^2} = \frac{1}{a^2 V''_{cl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(2nam\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{(n)^2}$$

Además, de la relación (Gradshteyn & Ryzhik, 1994)

$$K_2(x) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 \Gamma(2)$$

entonces

$$\frac{1}{a^2 V''_{cl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(2nam\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{(n)^2} = \frac{1}{2a^4 m^2\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}\right) V''_{cl}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^4} =$$

$$\frac{\pi^4}{180 a^4 m^2\, V''_{cl}} \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}\right)}$$

Para $\lambda \ll 1$

$$\frac{\pi^4}{180 a^4 m^2\, V''_{cl}} \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}\right)} = \frac{\pi^4}{180 a^4 m^2\, V''_{cl}} \left(1-\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}+\frac{\lambda}{2}\frac{\phi_0^2}{m^2}-\cdots\right).$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{-2}\left(2na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(na(V''_{cl})^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\pi^4}{180 a^4 m^2\, V''_{cl}} - \frac{\pi^4 \lambda \phi_0^2}{360 a^4 m^4\, V''_{cl}} \qquad (14)$$

De esta manera, sustituyendo (13) y (14) en (12), se tiene

$$aV_{ef} = -\frac{\hbar}{24\pi}(V''_{cl})^{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar \pi^2}{1440 a^3} + \frac{\hbar \pi^2 \lambda \phi_0^4}{2880 a^3 m^4} +$$

$$\frac{\hbar^2 \lambda}{2} exp\left\{\frac{-2\Omega}{32\pi^2}(V''_{cl})^2\left(Ln\left(\frac{V''_{cl}}{2\pi\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right)\right\} \times$$

$$\left[\frac{\Omega}{6\pi}(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}}+\frac{\Omega\pi^2}{360a^3}-\frac{\Omega\lambda\pi^2\phi_0^4}{720a^3m^4}\right]. \qquad (15)$$

Por otro lado, haciendo el mismo tratamiento en la expresión para la energía de punto cero en (7) se tiene

$$\varepsilon(a)=-\frac{\hbar}{24\pi}(V_{cl}'')^{\frac{3}{2}}-\frac{\hbar\pi^2}{1440a^3}+\frac{\hbar\pi^2\lambda\phi_0^4}{2880a^3m^4} \qquad (16)$$

Resaltamos, que la expresión para la energía de punto cero en las placas de Casimir, dado por (16), y la densidad de energía del vacío debido al potencial efectivo a dos loops, dada por (15), tienen una diferencia, a saber, el cuarto término de (15).

Por otro lado, para determinar la fuerza de Casimir, recordamos que se obtiene a partir de

$$F_{Cas}=-\frac{\partial(\varepsilon a)}{\partial a}$$

es decir, de las expresiones (15) y (16), se tiene que el segundo y tercer término contribuyen al cálculo de la fuerza de Casimir. Así como el cuarto término de (15), toda vez que contienen la separación a entre las placas.

5.2. Resultados Inferenciales

Puesto que no se ha realizado un tratamiento estadístico para los resultados obtenidos, no se han analizados estos más allá de los resultados presentados en la sección anterior con el fin de poder tomar decisiones y realizar predicciones.

5.3. Otro tipo de resultados

A partir del conocimiento de la densidad de energía del vacío, vía la energía de punto cero o el potencial efectivo a dos loops, se puede obtener la fuerza de Casimir entre las placas.

CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

En el proyecto de investigación se formuló la Hipótesis General que establecía que la energía del vacío cuántico a dos loops permite determinar la equivalencia con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir; lo que permitió formular las siguientes Hipótesis Específicas:

1. El Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante permitirá determinar la energía del vacío cuántico.

2. En la aproximación a dos loops, el punto mínimo del potencial clásico establecería una coincidencia con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas.

A partir de la acción, dependiente de la fuente $S[\phi, J]$, se realiza la expansión hasta cuarto orden, de acuerdo al método de punto silla; en la teoría de $\lambda\phi^4$, y se ha podido obtener la funcional generadora para diagramas conectados (w) hasta orden de $\hbar^2$, y de la relación del campo clásico con w, se determinó la expresión para la acción efectiva; y sobre la consideración de $J \to 0$, situación que conduce a un campo clásico constante, es decir, $\phi_c = a$ ha obtenido el potencial efectivo, y de ahí se tiene la energía del vacío cuántico. Esto, evidentemente, demuestra la primera hipótesis específica.

Asimismo, la expresión del potencial efectivo a dos loops, es obtenida considerando que el punto mínimo del potencial clásico coincide con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas, lo que demuestra la segunda hipótesis específica.

Por otro lado, (Nogueira & Maia, 1995) habían demostrado que, en la aproximación a un loop, la energía del vacío cuántico coincide con la energía de punto cero de un campo escalar en las placas de Casimir.

El resultado, ha mostrado que se tiene una relación entre la energía del vacío cuántico a dos loops y la energía de punto cero. Esto es, se puede determinar la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir, lo que demuestra la hipótesis general.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

En la referencia (Plunien, Muller & Greiner, 1986), muestran para el caso de un campo escalar no interactuante de masa m en una cavidad de volumen $L^2 a$, la energía de Casimir por unidad de área, cuando $am \ll 1$, es

$$\frac{\varepsilon_{casimir}(a,m)}{L^2} = -\frac{\pi^2}{1440a^3} + \frac{m^2}{96a} + \cdots$$

Asimismo, en la referencia (Aguiar, Britto, Bunchaft, Pascoal & da Rosa, 2003) muestran en el caso del efecto de Casimir para un campo escalar masivo sobre condiciones de fronteras mixta, cuando $am \ll 1$, es

$$\frac{\varepsilon_{casimir}(a,m)}{L^2} \approx -\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{1440a^3} - \frac{m^2}{192a}$$

El análisis del resultado de la expresión obtenida, muestra (a primera orden en $\hbar$) buena correspondencia con la referencia (Plunien, Muller & Greiner, 1986), pero aproximada con la expresión de la referencia (Aguiar, Britto, Bunchaft, Pascoal & da Rosa, 2003).

6.3. Responsabilidad ética

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación, el reglamento de propiedad intelectual y el reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobados por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado resultados total o parcialmente, ni se han plagiado resultados de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.

CONCLUSIONES

A partir del análisis del resultado obtenido de la energía del vacío cuántico a dos loops, se han podido establecer las siguientes conclusiones:

1. En este trabajo, se determinó la densidad de energía del vacío cuántico, a partir del potencial efectivo a dos loops y como suma de las energías de punto cero; para el caso de un campo escalar real con un término de autointeracción $\lambda\phi^4$, en las placas de Casimir.

2. La expresión del potencial efectivo a dos loops ($\hbar^2$), depende de la constante de autoacoplamiento (λ), es decir, si $\lambda = 0$, la contribución para esa orden no está presente. Además, en el desarrolló se consideró $\lambda \ll 1$.

3. Se demostró, para orden $\hbar^2$, que existe diferencia para la densidad de energía del vacío; que se obtiene del potencial efectivo a dos loops y la suma de las energías de punto cero. Un resultado de este tipo es conocido en la literatura como Ambigüedad de punto cero. Que para el caso de un loop se muestra que es nula (Nogueira & Maia, 1995).

4. Los resultados obtenidos, son para condiciones de fronteras tipo Dirichlet; que el punto mínimo del potencial clásico ϕ_0 coincide con el campo clásico ϕ_c, y $ma \ll 1$.

RECOMENDACIONES

1. En este trabajo, se determinó la densidad de energía del vacío, como mínimo del potencial efectivo a dos loops y como suma de las energías de punto cero; para un campo escalar real con un término de autointeracción, en el caso de las placas planas de Casimir, se recomienda realizar el cálculo para otras geometrías de las placas.

2. Puesto que el potencial efectivo a dos loops ($\hbar^2$), depende de la constante de autoacoplamiento (λ), entonces cuando $\lambda \rightarrow 0$ no existirá contribución para esa orden, más aún, se consideró el caso que $\lambda \ll 1$, se recomienda considerar para grandes valores de λ.

3. La diferencia encontrada entre la densidad de energía del vacío a dos loops y la suma de las energías de punto cero, implica una Ambigüedad de punto cero, se recomienda estudiar si estos resultados dependen del formalismo de renormalización usado para obtener la suma de las energías de punto cero finita (Nogueira & Maia, 1995).

4. Las condiciones de fronteras consideradas son del tipo Dirichlet; se recomienda considerar otras condiciones de fronteras (Barone & Cavalcanti & Farina, 2004). Asimismo, que el punto mínimo del potencial clásico ϕ_0 coincide con el campo clásico ϕ_c, se recomienda considerar que dicha relación se encuentre a primer orden en $\hbar$. Además, en el desarrollo de la investigación, se consideró $ma \ll 1$, se recomienda considerar el régimen de $ma \gg 1$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguiar, A. C. & Britto, T. M. & Bunchaft, R. & Pascoal, F. & da Rosa, F. S. S. (2003). Casimir Effect for a Massive Scalar Field Under Mixed Boundary Conditions. Brazilian Journal of Physics, vol. 33, 860-866.

Blau, S. & Visser, M. (1988). *Zeta Functions and the Casimir Energy.* Nuclear Physics B 310, 163-180.

Barone, F. A., Cavalcanti, R. M. & Farina, C. (2004). Radiative Corrections to the Casimir Effect for the Massive Scalar Field. Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 127, 118-122.

Caminha, M. (2015). *Teoria Quântica dos Campos*. 2da edição. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo.

Coleman, S. & Weinberg, E. (1973). *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking.* Physical Review D Volume 7, Number 6, 1888-1909.

Denimar, F. & Pereira, F. & Nogueira, J. (2005). *O Potencial Efetivo para uma teoría com Quebra Espontânea de Simetría.* Revista Brasileira de Ensino de Física Volumen 27, Número 3, 407-413.

Espichán, J. (2014). *Texto: Mecánica Cuántica I.* Informe Final de Investigación. Universidad Nacional del Callao.

Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1994). Table of Integrals, Series, and Products. Fifth Edition. London. Academic Press.

Itzykson C. & Zuber, J. B. (1985). *Quantum Field Theory.* Singapur. Editorial Internacional.

Iliopoulos, J. & Itzykson, C. & Martin, A. (1975). *Functional methods and perturbation theory.* Rev. Mod. Phys. **47**, 165-192.

Jackiw, R. (1974). *Functional Evaluation of the Effective Potential.* Physical Review D Volume 9, Number 6, 1686-1701.

Myers, E. (1987). *Interpretation of the Energy of the Vacuum as the Sum over Zero-Point Energies.* Physical Review Letters Volume 59, Number 2 165-168

Nogueira, J. & Maia, A. (1995). Absence of a zero-point ambiguity. Physics Letters B 358 56-62.

Nogueira, J. & Maia, A. (1997). *On the Equivalence between the Effective Potential and Zero-Point Energy.* Physics Letters B 394 371-376.

Peskin, M. & Schroeder, D. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory.* Massachusetts. Perseus Books.

Plunien, G. & Müller, B. & Greiner, W. (1986). *The Casimir Effect.* Physics Reports 134, Numbers 2 & 3, 87-193.

Ryder, L. (1985). *Quantum Field Theory.* Cambridge. Cambridge University Press.

VIII. ANEXO

Anexo: Matriz de Consistencia

Anexo: Matriz de Consistencia

Título del Proyecto de Investigación: **"ENERGÍA DEL VACÍO CUÁNTICO A DOS LOOPS: DETERMINACIÓN DE SU EQUIVALENCIA CON LA ENERGÍA DE PUNTO CERO PARA UN CAMPO ESCALAR REAL AUTOINTERACTUANTE EN LAS PLACAS DE CASIMI**R"

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
Problema General En un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir, ¿Cómo se puede determinar la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero? **Problemas Específicos** ¿De qué manera, el Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante permitirá determinar la energía del vacío cuántico? En la aproximación a dos loops, ¿Cuál es la coincidencia del punto mínimo del potencial clásico con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas?	**Objetivo General** Determinar la equivalencia entre la energía del vacío cuántico a dos loops con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir. **Objetivos Específicos** Determinar la energía del vacío cuántico a partir del Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante. Definir la coincidencia del punto mínimo del potencial clásico con el campo clásico del funcional generador de la función de Green conexas en la aproximación a dos loops.	**Hipótesis General** La energía del vacío cuántico a dos loops permitirá determinar la equivalencia con la energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir. **Hipótesis Específicas** El Potencial Efectivo a dos loops en un campo escalar real autointeractuante permitirá determinar la energía del vacío cuántico. En la aproximación a dos loops, el punto mínimo del potencial clásico establecería una coincidencia con el campo clásico definido a partir del funcional generador de la función de Green conexas.	**Variable Independiente** Energía de punto cero en un campo escalar real autointeractuante en las placas de Casimir. **Variable Dependiente** Energía del vacío cuántico a dos loops.	**Nivel de Investigación** Investigación descriptiva y explicativa. **Tipo de Investigación** Investigación aplicada, cualitativa y transversal. **Diseño de la Investigación** Teórico. Consiste en determinar la expresión del potencial efectivo a dos loops y, a partir de ella, obtener la energía del vacío cuántico con la finalidad de deducir la relación de equivalencia con la energía de punto cero.