

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y
ELECTRONICA**

UNIDAD DE INVESTIGACION



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACION

**“CONTROL Y OPTIMIZACION DE UN
SERVOSISTEMA TRASLACIONAL-ROTACIONAL
POR UBICACIÓN DE POLOS”**

AUTOR: JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA

APOYO ADMINISTRATIVO: LIZ GIOVANNA LLACTACONDOR DE LA CRUZ.

PERIODO DE EJECUCION: Del 01 de enero del 2022 al 31 de diciembre del 2022

Resolución de aprobación N° 111-2022-R

Callao, 2022

PERU

A handwritten signature in blue ink, which appears to read "Julio Cesar Borjas Castañeda".

INFORMACION BASICA

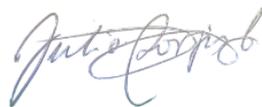
FACULTAD : Ingeniería Eléctrica y Electrónica
UNIDAD DE INVESTIGACION : FIEE-UNAC
TITULO : "Control y optimización de un servosistema
traslacional-rotacional por ubicación de polos
AUTOR : M. Sc. Ing. Julio Cesar Borjas Castañeda
Código Orcid: 0000-0002-0574-3087
DNI: 08127875
LUGAR DE EJECUCION : Lima
TIPO DE INVESTIGACION : De tipo cuantitativa, aplicada al área de
Control y Automatización.



INDICE	4
RESUMEN	6
INTRODUCCION	7
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
1.1 Descripción de la realidad problemática	8
1.2 Formulación del problema	9
• Problema general	9
• Problemas específicos	9
1.3 Objetivos	9
• Objetivo general	9
• Objetivos específicos	9
1.4 Justificación	10
1.5 Limitantes de la investigación	10
• Teórica	10
• Temporal	10
• Espacial	10
II. MARCO TEORICO	11
2.1 Antecedentes	11
• Internacional	11
• Nacional	11
2.2 Bases teóricas	12
2.3 Marco Conceptual	18
2.4 Definición de términos básicos	19
III. HIPOTESIS Y VARIABLES	20
3.1 Hipótesis	20
• Hipótesis general	20
• Hipótesis específica	20
3.2 Definición conceptual de variables	20
3.3 Operacionalización de variables	21



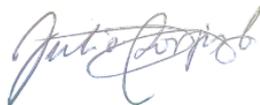
IV.	METODOLOGIA DEL PROYECTO	22
4.1	Diseño metodológico	22
4.2	Método de investigación	22
4.3	Población y muestra	40
4.4	Lugar de estudio	40
4.5	Análisis y procesamiento de datos.	40
V.	RESULTADOS	41
VI.	DISCUSION DE RESULTADOS	42
VII.	CONCLUSIONES	43
VIII.	RECOMENDACIONES	44
IX.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	45
X.	ANEXOS	46
	• Matriz de consistencia	46



RESUMEN

El presente trabajo trata del Control y Optimización de un Servosistema Traslacional-Rotacional por Ubicación de Polos.

En la primera parte del trabajo se encuentra el modelo matemático de un sistema físico de dos grados de libertad. Se trata de una planta que consiste en un carro que tiene un movimiento traslacional y una varilla que transporta una bola efectuando un movimiento rotacional. Usando las ecuaciones de Lagrange se encuentra la dinámica del movimiento. El modelo matemático está representado por dos ecuaciones diferenciales no lineales. Con el fin de aplicar métodos de control lineal, es que se linealiza el sistema. Con el fin de aplicar las técnicas de control por ubicación de polos, es que se hace necesario que la planta sea controlable. Para cumplir con este requisito es que se encuentra la matriz de controlabilidad y luego se determina que el sistema es controlable. Cumplido este requisito, es que se diseña un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador. De acuerdo con los resultados obtenidos se observa que la velocidad y el amortiguamiento no son suficientemente aceptables, es que se modifica la ecuación característica deseada y de determinar una nueva matriz de realimentación con el fin de optimizar la respuesta en el tiempo del sistema. El resultado final es la mejora de la performance del sistema.



INTRODUCCION

El presente trabajo de investigación es de aplicación de la teoría de control moderno, es decir con aplicación de matrices para las ecuaciones de estado y de salida. La teoría de control clásico hace uso de la función de transferencia en el tratamiento de la parte matemática. En cambio, la teoría de control moderno hace uso de n ecuaciones diferenciales de primer orden por reducción de una ecuación diferencial de orden n , facilitando la solución por intermedio de matrices. El presente trabajo usa como planta un sistema traslacional y a la vez rotacional, de dos grados de libertad, cuyos modelos matemáticos son dos ecuaciones diferenciales de tipo no lineal. Esta planta presenta en su varilla-bola dos estados de equilibrio: un estado estable cuando la varilla-bola está en posición vertical hacia abajo y el otro estado inestable cuando la varilla-bola está en posición vertical hacia arriba. En el presente trabajo de investigación se tratará de la posición vertical hacia arriba es decir de estado inestable, donde la fuerza de control u tratara de equilibrar a la varilla-bola mediante una ley de control. Para que se haga posible su control y aplicar la teoría de control lineal, el modelo matemático no lineal tiene que linealizarse, utilizando la serie de Taylor. Para así de esta manera obtener un modelo lineal, para luego verificar su controlabilidad y observabilidad. Estas condiciones se exigen para el diseño de realimentación de estados con asignación de polos. Luego se encuentra la señal de control adecuada al servosistema necesaria para encontrar la matriz de ganancias de realimentación y determinar así la respuesta en el tiempo del servosistema.

Finalmente se aplicará la teoría de control óptimo para determinar una performance optima del sistema. Nuevamente se observa la respuesta en el tiempo para verificar los resultados obtenidos.

El tratamiento de las matemáticas a usar es de nivel avanzado tanto para modelar la planta y obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento usando las ecuaciones de Lagrange para obtener dinámicas no lineales. Luego efectuar la linealización por la serie de Taylor. Se usará Matlab para observar la respuesta en el tiempo y su estabilidad. Luego se aplicará la teoría de control óptimo para encontrar una respuesta adecuada de tipo optimo.



I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El problema de diseño de un servosistema por el método de asignación de polos para que sea aplicable requiere que la planta sea controlable y observable de tal manera que los polos en lazo cerrado del sistema se puedan ubicar en cualquier posición deseada mediante una realimentación de estado mediante una adecuada matriz de ganancias de la realimentación. Se supone que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su realimentación.

El problema que se presenta es el diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador o sea de tipo 0, tal como se muestra en la figura N°1 siguiente.

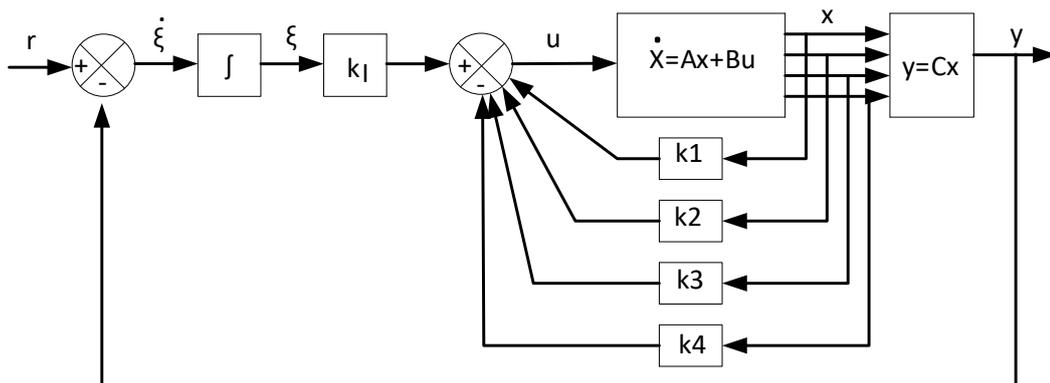


Fig. 1 Servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene un integrador
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

El problema por determinar es la matriz de ganancia \mathbf{K} de realimentación de estados por intermedio una ley de control \mathbf{u} determinada por la configuración del diagrama del servosistema, de tal manera que el sistema diseñado tenga una buena performance como respuesta ante una entrada escalón \mathbf{r} de referencia.

A manera de aplicación del diseño del servosistema se considera un sistema traslacional-rotacional que tiene estos dos tipos de movimientos. El carro

ejecuta un movimiento traslacional y la varilla que porta la bola ejecuta un movimiento rotacional; es decir es un sistema con dos grados de libertad.

Esta planta consiste en un carro propulsor de masa M , al cual se le aplica una fuerza de control u y una varilla rígida de longitud l cuyo peso no es considerable en comparación con la bola de masa m que sostiene y que tiene que equilibrar en forma vertical.

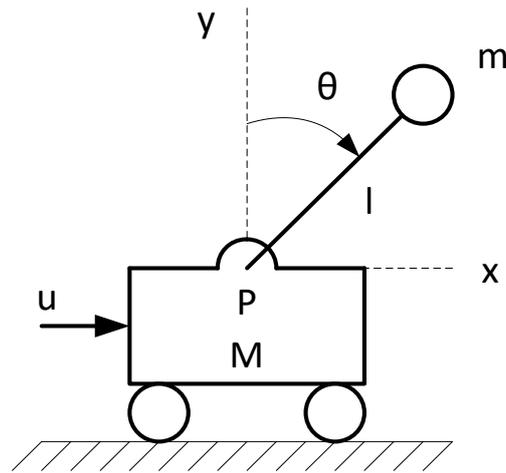


Fig. 2 Planta traslacional-rotacional
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

1.2. Formulación del problema

Problema general

¿Cómo la ubicación de polos permite el control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional?

Problemas específicos

¿Cómo la matriz de ganancias de realimentación por ubicación de polos permite el control del servosistema traslacional-rotacional?

¿Cómo la optimización del control del servosistema traslacional-rotacional permite una buena performance?

1.3. Objetivos

Objetivo general

Control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional por ubicación de polos.

Objetivos específicos

Control de un servosistema traslacional-rotacional por realimentación con ubicación de polos.

Optimización del control de un servosistema traslacional-rotacional.

1.2. Justificación

La justificación delo trabajo de investigación es de tipo teórico-científico, que se sustenta en que los resultados de la investigación podrán generalizarse e incorporarse al conocimiento científico y además sirve para llenar espacios vacíos de conocimientos existentes.

1.3. Limitantes de la investigación

Teórica

La investigación está limitada a un sistema traslacional-rotacional de dos grados de libertad para una posición de equilibrio inestable.

Temporal

El tiempo establecido para realizar la investigación, es de 12 meses.

Espacial

El espacio de trabajo es el ambiente donde se encuentra mi biblioteca de consulta, el computador y la respectiva impresora



II. MARCO TEORICO

2.1. Antecedentes:

Internacional

En la Universidad Complutense de Madrid (UCM), los alumnos, Alberto Hernández Largacha, Marco Legaspi Martínez y Jaime Peláez Martín, matriculados en la Facultad de Informática, autorizan a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria como

el código, la documentación y/o prototipo del presente trabajo de Sistemas Informáticos: "Control inteligente del péndulo invertido"

Presentan el diseño e implementación de un robot basado en la plataforma LEGO Mindstorm NXT. Donde se concluye que el sistema es capaz de mantener el equilibrio y avanzar sobre sus dos ruedas gracias a la información que recibe de sus sensores. Se elabora un modelo matemático del prototipo construido utilizando el método de Lagrange, se simula, y se diseña y sintoniza una ley de control para el modelo propuesto combinando diferentes estrategias de control como el control PID, LQR y la lógica borrosa. Para la implementación se utiliza la herramienta de desarrollo de aplicaciones RobotC.

Nacional

En la Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, el Maestro en Ciencias de la Electrónica con mención en Automática e Instrumentación, Ing. Ricardo Raúl Rodríguez Bustinza presentó su trabajo de tesis titulada "Diseño e Implementación de un Sistema de Control No lineal Multivariable por Modo Deslizante Aplicado a un Manipulador Robótico Traslacional de 2DOF". En sus conclusiones dice que para el diseño del sistema de control se requiere tener el modelo del proceso porque se quiso experimentar la técnica de control por modo deslizante por ser esta técnica de control robusta. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios según constan las simulaciones realizadas. Las simulaciones experimentales realizadas han demostrado que el sistema de control diseñado es apto para el seguimiento de trayectorias arbitrarias del manipulador robótico traslacional.

2.2. Bases teóricas

Modelo matemático. Un modelo matemático se define de manera general, como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos. En general, el modelo se representa mediante una relación funcional de la forma:

$$\begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{dependiente} \end{array} = f \left(\begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{independiente} \end{array}, \text{ parámetros, } \begin{array}{l} \text{funciones} \\ \text{de fuerza} \end{array} \right)$$

donde la variable dependiente es una característica que generalmente refleja el comportamiento o estado de un sistema; las variables independientes son, por lo común, dimensiones tales como tiempo y espacio, a través de los cuales se determinan en comportamiento del sistema; y las funciones de fuerza son influencias externas que actúan sobre el sistema.

La parte más importante y fundamental de cualquier problema de control es la representación de la *planta* a través de *modelos matemáticos* apropiados.

Por planta se entiende el equipo físico relacionado con la cantidad a ser controlada. Usualmente la planta se considera inalterable. Antes que se pueda iniciar cualquier tipo de análisis o diseño de ingeniería es necesario abstraer del objeto físico en cuestión una descripción en términos de fórmulas matemáticas. Por ejemplo, el modelo matemático para un circuito eléctrico consiste en el conjunto de ecuaciones de nodos y mallas que lo describen.

Un modelo matemático únicamente proporciona una aproximación al comportamiento de un sistema real y físico. Después de desarrollar técnicas para controlar el comportamiento de modelos matemáticos, se desarrollan técnicas adicionales para saber cuánto debe aproximarse el modelo matemático al verdadero comportamiento del sistema físico y asegurar que dicho comportamiento este debidamente controlado.

En teoría de control, existen dos métodos diferentes de representación tales como el *método de la relación entrada-salida*, proporciona menos detalles, razón por la cual es menos completo que el segundo, al cual se le conoce como *método de variables de estado*.

Se utilizan modelos matemáticos cuantitativos de sistemas físicos para diseñar y analizar sistemas de control. La conducta dinámica se describe generalmente mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como la mayoría de los sistemas físicos no son lineales, se linealizan, de tal manera que permite utilizar los métodos de transformadas de Laplace.

A continuación, se prosigue para obtener la relación entrada-salida de componentes y subsistemas en la forma de funciones de transferencia. Los bloques de la función de transferencia se pueden organizar en diagramas de bloques para representar gráficamente las interconexiones. Los diagramas de bloques son herramientas muy convenientes y naturales para diseñar y analizar complicados sistemas de control.

Estado. El estado de un sistema es un conjunto de variables tales que el conocimiento de estas variables y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones que describen la dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema. Para un sistema dinámico, el estado de un sistema se describe en función de un conjunto de variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Estas variables son las que determinan el comportamiento futuro de un sistema cuando se conocen el estado presente de este y las señales de excitación.

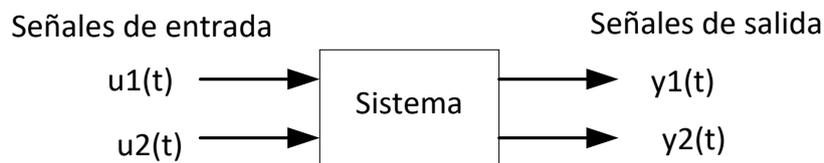


Fig. 3 Diagrama de bloques del sistema
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

Considérese el sistema mostrado en la figura 2, donde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las señales de salida, con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ como señales de entrada.

Un conjunto de variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ para el sistema mostrado de la figura, es un conjunto tal que el conocimiento de los valores iniciales de las variables de estado $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ en el tiempo inicial t_0 y las señales de entrada $u_1(t)$ y $u_2(t)$ para $t = t_0$ son suficientes para determinar los valores futuros de las salidas y de las variables de estado.

Juan Carlos

Las variables de estado describen la respuesta futura de un sistema, conocido el estado presente, las señales de excitación y las ecuaciones que describen la dinámica. La figura 4, muestra la forma más general de un sistema dinámico.

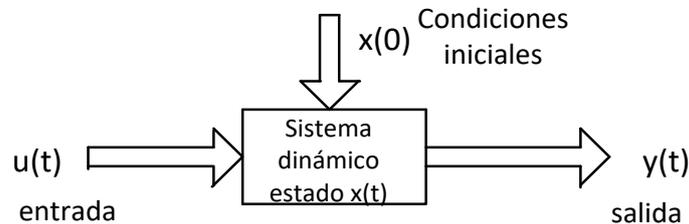


Fig. 4. Sistema dinámico

Fuente: Autoría propia (UNAC-2019)

Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t \geq t_0$ esta dada y el estado inicial en $t = t_0$ esta especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente), entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces estas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector \mathbf{x} . Este vector se denomina vector de estado. Un vector de estado es, por lo tanto, un vector que determina unívocamente el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$ especificado.

Espacio de estados. El espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2, \dots , eje x_n , donde $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados.

Juan Carlos

Ecuaciones en el espacio de estados. Sea un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$.

Se define las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

$$y(t) = g(x, u, t)$$

Si se linealizan estas ecuaciones alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

donde

$A(t)$ = matriz de estado

$B(t)$ = matriz de entrada

$C(t)$ = matriz de salida

$D(t)$ = matriz de transmisión directa

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema lineal se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso las ecuaciones se simplifican a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

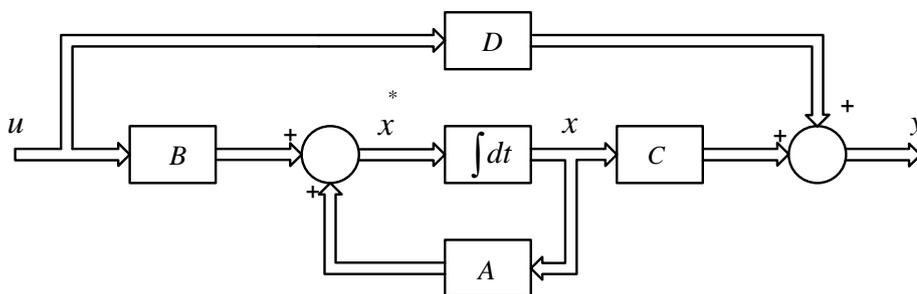


Fig. 5. Diagrama de bloques de la planta
Fuente: (UNAC-2021) Autoría propia.

Juan Carlos

Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados

Tomando transformadas de Laplace a las ecuaciones de estado y de salida

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Se obtiene

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + Bu(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Que implica

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Si la condición inicial $x(0) = 0$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

La función de transferencia será

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

la ecuación característica es: $|sI - A|$

Aproximaciones por polinomios de Taylor

Consideremos una función $f \in C^{N+1}[a, b]$ y un punto $x_0 \in [a, b]$. Si $x \in [a, b]$, entonces

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x)$$

donde $x_0 \in [a, b]$ es un polinomio que podemos usar para aproximar $f(x)$

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Llamado polinomio de Taylor de grado N de f alrededor de x_0 y el término del error $E_N(x)$ se puede escribir como

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}$$

Para algún valor $c = c(x)$ que esta entre x y x_0 .



$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Linealización

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ ecuacion de estado}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ ecuacion de salida}$$

El desarrollo en series de Taylor alrededor de un punto de operación x_0, u_0 y su aproximación lineal es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{x_0, u_0} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{x_0, u_0} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0}$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0}$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0 = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}|_{x_0, u_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u} \text{ ecuacion de estado}$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{u} \text{ ecuacion de salida}$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$$

Controlabilidad

Un sistema es completamente controlable si existe un control sin restricción $u(t)$ que pueda llevar cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado deseado $x(t)$ en un tiempo finito, $t_0 \leq t \leq T$.



Para el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ se puede determinar si el sistema es controlable examinando la condición algebraica

$$\text{rango} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

La matriz A tiene dimensión $n \times n$ y B es de $n \times 1$. Para sistemas con múltiples entradas, B es de $n \times m$, donde m es el número de entradas.

Para un sistema de única entrada, única salida (SISO), la matriz de controlabilidad M_c se describe en términos de A y B como

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Donde M_c es una matriz $n \times n$. Por lo tanto, si el determinante de M_c es distinto de cero, el sistema es controlable.

Observabilidad

Un sistema es completamente observable si y solo si existe un tiempo finito T de forma que el estado inicial $x(0)$ se pueda determinar a partir de la observación de la historia $y(t)$ dado el control $u(t)$. Considerando el sistema de una entrada y una salida $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ donde C es un vector fila de $1 \times n$ y x es un vector columna de $n \times 1$. Este sistema es completamente observable cuando el determinante de la matriz de observabilidad M_o de $n \times n$ es distinto de cero.

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.3. Marco Conceptual

Considerando la planta como un sistema que tiene estos dos tipos de movimientos traslacional y rotacional. Tomando como referencia la planta de la figura dos, es que se presenta las siguientes definiciones

$\theta =$ *ángulo que hace la varilla con la vertical*

$\dot{\theta} =$ *velocidad angular de la varilla*

$x =$ *desplazamiento del carro*

$\dot{x} =$ *velocidad del carro*

$l =$ *longitud de la varilla*

$M =$ *masa del carro, m = masa de la bola*

$(x_G, y_G) =$ *coordenadas del centro de gravedad de la bola*

2.4. Definición de términos básicos

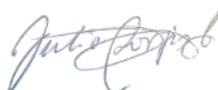
Servosistema. También llamado servomecanismo, es un sistema de control realimentado en la que la salida es una posición, velocidad o aceleración. Los servosistemas se utilizan ampliamente en la industria moderna. Por ejemplo, para la programación automática de máquinas herramienta.

Control óptimo. Trata de encontrar una ley de control para un sistema con objeto de que adquiera un comportamiento determinado por las especificaciones de diseño bajo la forma de la optimización de un índice de coste o factor de bondad. En el caso más general el índice será una función de todas las variables presentes en el sistema global. Es decir, entradas, salidas y variables de estado además de referencias externas.

Servomotor. Un servomotor (también llamado **servo**) es un dispositivo similar a un motor de corriente continua que tiene la capacidad de ubicarse en cualquier posición dentro de su rango de operación, y mantenerse estable en dicha posición. Un servomotor es un motor eléctrico que consta con la capacidad de ser controlado, tanto en velocidad como en posición. Los servos se utilizan frecuentemente en sistemas de radio control y en robótica, pero su uso no está limitado a estos. Es posible modificar un servomotor para obtener un motor de corriente continua que, si bien ya no tiene la capacidad de control del servo, conserva la fuerza, velocidad y baja inercia que caracteriza a estos dispositivos.

Planta. Es parte de un equipo o también un conjunto de partes de una máquina que funcionan juntos y su objetivo es efectuar una operación particular. Desde el punto de vista de control automático es el objeto físico que se va a controlar.

Grados de libertad. El número de grados de libertad que posee un manipulador es el número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo.



III. HIPOTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis general

La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá el control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional.

Hipótesis específica

La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá el control de un servosistema traslacional-rotacional.

La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá la optimización de un servosistema traslacional-rotacional.

3.2. Definición conceptual de variables

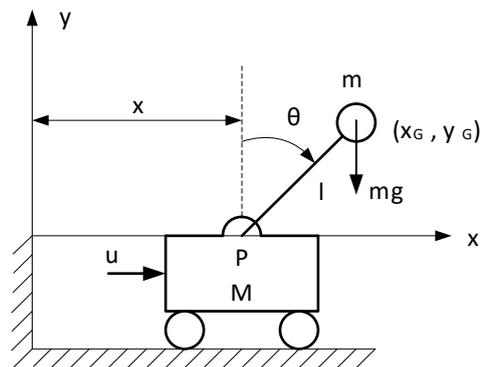


Fig. 6 Planta traslacional-rotacional

Fuente: Autoría propia (UNAC-2021)

Ubicando la planta en un sistema de referencia planar para el caso de los movimientos traslacional y rotacional. De acuerdo con la figura 6, se tiene que:

θ = ángulo que hace la varilla con la vertical

$\dot{\theta}$ = velocidad angular de la varilla

x = desplazamiento del carro, \dot{x} = velocidad del carro

l = longitud de la varilla

M = masa del carro, m = masa de la bola

(x_G, y_G) = coordenadas del centro de gravedad de la bola

3.3. Operacionalización de variables

La dinámica del proceso viene expresada de acuerdo con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x, u) \text{ ecuacion de estado}$$

$$y = g(x, u) \text{ ecuacion de salida}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \text{vector de estado}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \text{ecuacion de estado}$$

Cuadro 1. Operacionalización de variables

Variables		Definición
Independiente	u	Fuerza de control aplicada al carro
Dependiente	x	Desplazamiento traslacional del carro
	θ	Desplazamiento rotacional de la varilla-bola

Autoría propia (UNAC 2022)



IV. METODOLOGIA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico

La investigación es de tipo cuantitativa porque tiene un tratamiento de matemáticas avanzadas, aplicadas al campo de los Sistemas de Control Automático.

Se realiza el diseño de la investigación para alcanzar los objetivos de estudio, contestar las interrogantes planteadas y analizar la certeza de la hipótesis formulada en un contexto particular. En este sentido es que se plantea el siguiente procedimiento:

Modelamiento matemático de la planta a controlar.

Linealización de la dinámica no lineal.

Representación en modelo de estado del sistema linealizado.

Prueba de estabilidad del modelo linealizado

Determinación de las matrices de controlabilidad y observabilidad.

Determinación si el sistema es controlable y observable.

Determinación de la ganancia de realimentación del servosistema

Prueba del servosistema ante una entrada escalón.

Cálculo de la optimización del funcionamiento del sistema

4.2. Método de investigación

El método de investigación es de tratamiento matemático avanzado, es decir analítico, aplicando las propiedades de los sistemas de control lineal. Se usará Matlab para las operaciones complejas y el análisis de la respuesta en el tiempo.

Modelamiento matemático del servosistema traslacional-rotacional

El sistema traslacional-rotacional mostrado en la figura tiene dos grados de libertad definidos por la posición angular θ de la varilla rotacional y el desplazamiento x del carro portador.



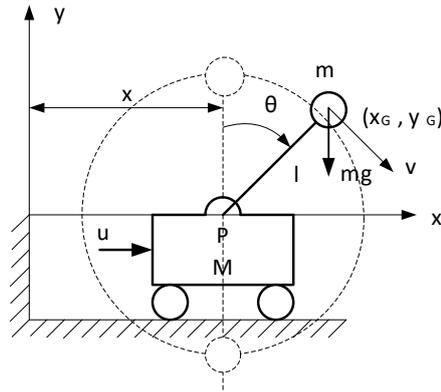


Fig. 7 Movimiento traslacional rotacional

La posición del centro de gravedad de la bola es:

$$\begin{cases} x_G = x + l \operatorname{sen} \theta \\ y_G = l \operatorname{cos} \theta \end{cases}$$

Las componentes de la velocidad de la bola son:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta \\ \dot{y}_G = -l \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Es decir, las componentes son

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}_G \\ v_y = \dot{y}_G \end{cases}$$

La velocidad tangencial v de la bola se relaciona como:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (\dot{x} + l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta)^2 + (-l \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta)^2 \\ v^2 &= \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

La energía cinética total T del sistema es

energía cinética total = energía cinética del carro + energía cinética de la bola

Es decir

$$T = T_c + T_b$$

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$T_b = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Julio Cesar

La energía potencial total V del sistema es

$$V = mgl\cos\theta$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a esta parte del modelamiento matemático; se tiene que para un sistema con N grados de libertad que se describe por medio de un conjunto N de coordenadas generalizadas q_i para $i = 1, 2, \dots, N$. Estas coordenadas son irrestrictas e independientes; es decir, no están relacionadas entre sí por medio de condiciones geométricas o cinemáticas. Entonces, en términos de las coordenadas generalizadas elegidas, las ecuaciones de Lagrange tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, j = 1, 2, \dots, N$$

donde \dot{q}_j son las velocidades generalizadas, T es la energía cinética del sistema, V es la energía potencial, D es la función de disipación de Rayleigh y Q_j es la fuerza generalizada que aparece en la j -ésima ecuación.

Para este caso $N = 2, j = 1, 2$ entonces las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= Q_2 \end{aligned}$$

Aquí

$$\begin{aligned} q_1 &= x, & q_2 &= \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} &= u \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando la primera ecuación de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\ddot{x} + ml \frac{d}{dt} (\dot{\theta}\cos\theta) \\ \frac{d}{dt} (\dot{\theta}\cos\theta) &= \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{aligned}$$



reemplazando los resultados se obtiene

$$(M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta + ml\ddot{\theta} \cos\theta = u$$

Considerando la segunda ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl \sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta} \sin\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x} \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} + ml \frac{d}{dt} (\dot{x} \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} \cos\theta) = \ddot{x} \cos\theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin\theta$$

reemplazando los resultados se obtiene

$$m\ddot{x} \cos\theta + ml\ddot{\theta} = mgs \sin\theta$$

Es decir, las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema traslacional-rotacional son:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta + ml\ddot{\theta} \cos\theta = u$$

$$m\ddot{x} \cos\theta + ml\ddot{\theta} = mgs \sin\theta$$

Linealización del sistema no lineal

Como se observa, estas dos ecuaciones no son lineales. Entonces para poder usar las propiedades de los sistemas lineales es que se linealiza el sistema alrededor de un punto de equilibrio. El sistema rotacional tiene dos puntos de equilibrio. Cuando $\theta = 0^\circ$ corresponde a un estado de equilibrio inestable y cuando $\theta = 180^\circ$ corresponde a un estado de equilibrio estable. El control se va a realizar alrededor del punto de equilibrio inestable y por lo tanto también la linealización será alrededor de este punto.



Del desarrollo de las series de Maclaurin se tiene que:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\text{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

tomando la aproximación lineal, suponiendo que θ y $\dot{\theta}$ son pequeñas en magnitud.

$$\cos\theta \approx 1, \text{sen}\theta \approx \theta, \dot{\theta}^2 \text{sen}\theta \approx \dot{\theta}^2 \theta \approx 0$$

linealizando el modelo no lineal, se obtiene

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mg\theta$$

Modelo de estado

Resolviendo el sistema lineal anterior, se obtiene

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta - \frac{1}{Ml}u \\ \ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \end{cases}$$

El vector de estado es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \text{vector de estado}$$

La ecuación de estado es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \left(\frac{M+m}{Ml}\right)gx_1 - \frac{1}{Ml}u \\ x_4 \\ -\frac{mg}{M}x_1 + \frac{1}{M}u \end{bmatrix}$$

la ecuación de salida es

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

finalmente se obtiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$$



es decir, la ecuación de estado y la ecuación de salida linealizadas son:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Matriz de Controlabilidad

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

haciendo

$$a = \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g, \quad b = -\frac{mg}{M}, \quad c = -\frac{1}{Ml}, \quad d = \frac{1}{M}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \\ bc \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \\ bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ 0 \\ bc \\ 0 \end{bmatrix}$$

de tal forma que

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & ac \\ c & 0 & ac & 0 \\ 0 & d & 0 & bc \\ d & 0 & bc & 0 \end{bmatrix}$$

calculando del determinante de M_c

$$\det(M_c) = \begin{vmatrix} 0 & c & 0 & ac \\ c & 0 & ac & 0 \\ 0 & d & 0 & bc \\ d & 0 & bc & 0 \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} c & ac & 0 \\ 0 & 0 & bc \\ d & bc & 0 \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & d & 0 \\ d & 0 & bc \end{vmatrix}$$

Julio Cesar

$$\det(M_c) = -c \left\{ c \begin{vmatrix} 0 & bc \\ bc & 0 \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} 0 & bc \\ d & 0 \end{vmatrix} \right\} - ac \left\{ c \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & bc \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\det(M_c) = -c\{-b^2c^3 + abc^2d\} - ac\{bc^2d + acd^2\}$$

$$\det(M_c) = b^2c^4 - 2abc^3d - a^2c^2d^2$$

reemplazando valores literales

$$\det(M_c) = \frac{m^2g^2}{M^2} \left(\frac{1}{M^4l^4} \right) - 2 \left(\frac{(M+m)g}{Ml} \right) \left(-\frac{mg}{M} \right) \left(-\frac{1}{M^3l^3} \right) \left(\frac{1}{M} \right)$$

$$- \left(\frac{(M+m)^2g^2}{M^2l^2} \right) \left(\frac{1}{M^2l^2} \right) \left(\frac{1}{M^2} \right)$$

$$\det(M_c) = \frac{m^2g^2}{M^6l^4} - \frac{Mmg^2 + m^2g^2}{M^6l^4} - \frac{(M+m)^2g^2}{M^6l^4}$$

$$\det(M_c) = \frac{m^2g^2 - Mmg^2 - m^2g^2 - (M+m)^2g^2}{M^6l^4}$$

$$\det(M_c) = \frac{-(M^2 + m^2)g^2 - 3Mmg^2}{M^6l^4} \neq 0$$

de este resultado final, como $\det(M_c) \neq 0$ y también es de rango completo (rango = 5), entonces se concluye que el sistema es de estado completamente controlable.

De otra manera suponiendo valores numéricos para

$$M = 2 \text{ kg}, \quad m = 0.1 \text{ kg}, \quad l = 0.5 \text{ m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Calculando con Matlab

```
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
detMc=det(Mc)
```

Mc =

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.0000 & 0 & -20.5800 \\ -1.0000 & 0 & -20.5800 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0.4900 \\ 0.5000 & 0 & 0.4900 & 0 \end{bmatrix}$$



detMc =
96.0400

como resultado del determinante es diferente de cero, entonces el sistema es completamente controlable

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador

Si la planta no tiene integrador (planta de tipo 0), el principio básico del diseño de un servosistema de tipo 1 es insertar un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta, como se muestra en la figura 8. El diagrama de bloques de esta figura 8 es una forma básica del servosistema de tipo 1 donde la planta no tiene integrador.

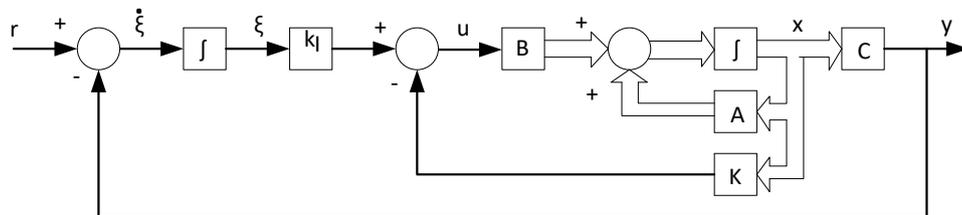


Fig. 8 Servosistema de tipo 1.

Del diagrama se obtiene

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$u = -Kx + k_I \xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx$$

donde

x = vector de estado de la planta de $n \times 1$

u = señal de control (escalar)

y = señal de salida (escalar)

ξ = salida del integrador (variable de estado del sistema, escalar)

r = señal de entrada de referencia (funcion escalon, escalar)

A = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$

B = matriz de coeficientes constantes de $n \times 1$

C = matriz de coeficientes constantes de $1 \times n$

Se supone que la planta $\dot{x} = Ax + Bu$ es de estado completamente controlable considerando la planta rotacional traslacional.

La función de transferencia de la planta se obtiene de $G_p(s) = C(si - A)^{-1}B$.

Para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele por un cero de la planta en el origen, se supone que $G_p(s)$ no tiene cero en el origen.

Suponiendo que la entrada de referencia (función escalón) se aplica en $t = 0$. En este caso para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Se diseñará un sistema asintóticamente estable, tal que $x(\infty), \xi(\infty), u(\infty)$ tiendan a valores constantes. En estado estacionario $\dot{\xi}(t) = 0, y(\infty) = r$.

En estado estacionario, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, se tiene que

$$r(\infty) = r(t) = r \text{ (constante), para } t > 0$$

Restando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} (u(t) - u(\infty))$$

definiendo

$$x(t) - x(\infty) = x_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

Entonces reescribiendo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

donde

$$u_e(t) = -Kx_e(t) + k_I\xi_e(t)$$

Definiendo un nuevo vector de error $e(t)$ de dimensión $(n + 1)$ mediante

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = \text{vector } (n + 1)$$

Así la ecuación se transforma en

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e(t) + \hat{B}u_e(t)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e(t) = -\hat{K}e(t)$$

donde

$$\hat{K} = [K \quad : \quad -k_I]$$

La ecuación de estado del error

$$\dot{e} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})e$$

Si los valores propios deseados de la matriz $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$ (es decir, los polos en lazo cerrado deseados) se especifican como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado K y la constante de ganancia integral k_I pueden determinarse mediante el método de asignación de polos, con la condición de que el sistema definido $\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e$ sea de estado completamente controlable. Observando que si la matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Tiene rango $n + 1$, entonces el sistema definido por $\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e$ es de estado completamente controlable.

Ahora en aplicación del diseño del servosistema de tipo 1, cuando la planta no tiene integrador, considerando el problema de investigación de la planta traslacional rotacional, $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$. De la figura 9, tenemos que

$$u = -Kx + k_I \xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

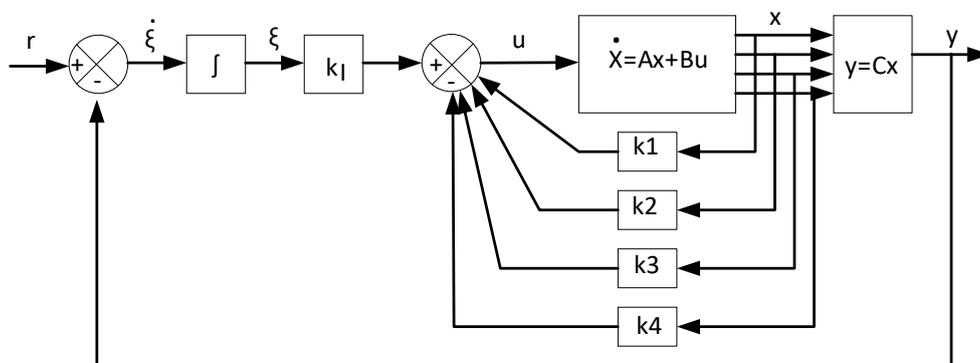


Fig. 9 Servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene un integrador
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

La ecuación de error para el sistema se obtiene mediante

$$\dot{e} = \widehat{A}e + \widehat{B}u_e$$

Tenemos que

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la señal de control está dada por $u_e = -\widehat{K}e$, con \widehat{K} dado por

$$\widehat{K} = [K \quad \vdots \quad -k_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad \vdots \quad k_I]$$

Para obtener una velocidad y un amortiguamiento razonables en la respuesta del sistema diseñado se seleccionan los polos en lazo cerrado en $s = \mu_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, donde

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -5, \quad \mu_4 = -5, \quad \mu_5 = -5$$

Usando Matlab se determina la matriz de ganancia de realimentación del estado. Examinando el rango de la matriz P, donde

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

```
% Respuesta del sistema a un escalon unitario
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
P=[A B; -C 0]
rank(P)
```

P =

```

      0      1.0000      0      0      0
    20.5800      0      0      0     -1.0000
      0      0      0      1.0000      0
    -0.4900      0      0      0      0.5000
      0      0     -1.0000      0      0
```

ans =

5



De la corrida del programa en Matlab se encuentra que

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se encuentra que el rango de la matriz P es 5. Por lo tanto, el sistema definido por

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e$$

Es de estado completamente controlable y es posible una asignación arbitraria de los polos.

El programa siguiente en Matlab obtiene la matriz de ganancia de realimentación del estado \hat{K} .

```
% Respuesta del sistema a un escalon unitario
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
Ahat=[A zeros(4,1);-C 0];
Bhat=[B;0];
J=[-1+j*sqrt(3) -1-j*sqrt(3) -5 -5 -5];
Khat=acker(Ahat,Bhat,J)

Khat =
-157.6412 -35.3934 -56.1224 -36.7868 51.0204
```

Por lo tanto, se obtiene

$$K = [-157.6412 \quad -35.3934 \quad -56.1224 \quad -36.7868], \quad k_I = -51.0204$$

Características de la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado

Una vez que se ha determinado la matriz de ganancia de realimentación K y la constante de ganancia integral k_I , la respuesta a un escalón unitario en la posición del carro se obtiene resolviendo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Julio Cesar

La salida del sistema es $x_3(t)$, es decir

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + [0]r$$

Definiendo la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida y la matriz de transmisión directa como AA, B, CC y DD respectivamente. Se usa Matlab para obtener las curvas de respuesta escalón del sistema diseñado. Para obtener la respuesta a un escalón unitario, se ejecuta la instrucción

$$[y, x, t] = \text{step}(AA, BB, CC, DD, 1, t)$$

```
% Respuesta del sistema a un escalón unitario del
% sistema traslacional rotacional
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
K=[-157.6412 -35.3934 -56.1224 -36.7868];
KI=-51.0204;
AA=[A-B*K B*KI;-C 0];
BB=[0;0;0;0;1];
CC=[C 0];
DD=[0];
t=0:0.02:6;
[y, x, t]=step(AA, BB, CC, DD, 1, t);
x1=[1 0 0 0 0]*x';
x2=[0 1 0 0 0]*x';
x3=[0 0 1 0 0]*x';
x4=[0 0 0 1 0]*x';
x5=[0 0 0 0 1]*x';
subplot(3,2,1); plot(t,x1);grid
title('x1-t')
xlabel('t seg'); ylabel('x1')
subplot(3,2,2); plot(t,x2);grid
title('x2-t')
xlabel('t seg'); ylabel('x2')
subplot(3,2,3); plot(t,x3);grid
title('x3-t')
xlabel('t seg'); ylabel('x3')
subplot(3,2,4); plot(t,x4);grid
title('x4-t')
xlabel('t seg'); ylabel('x4')
subplot(3,2,5); plot(t,x5);grid
title('x5-t')
xlabel('t seg'); ylabel('x5')
```

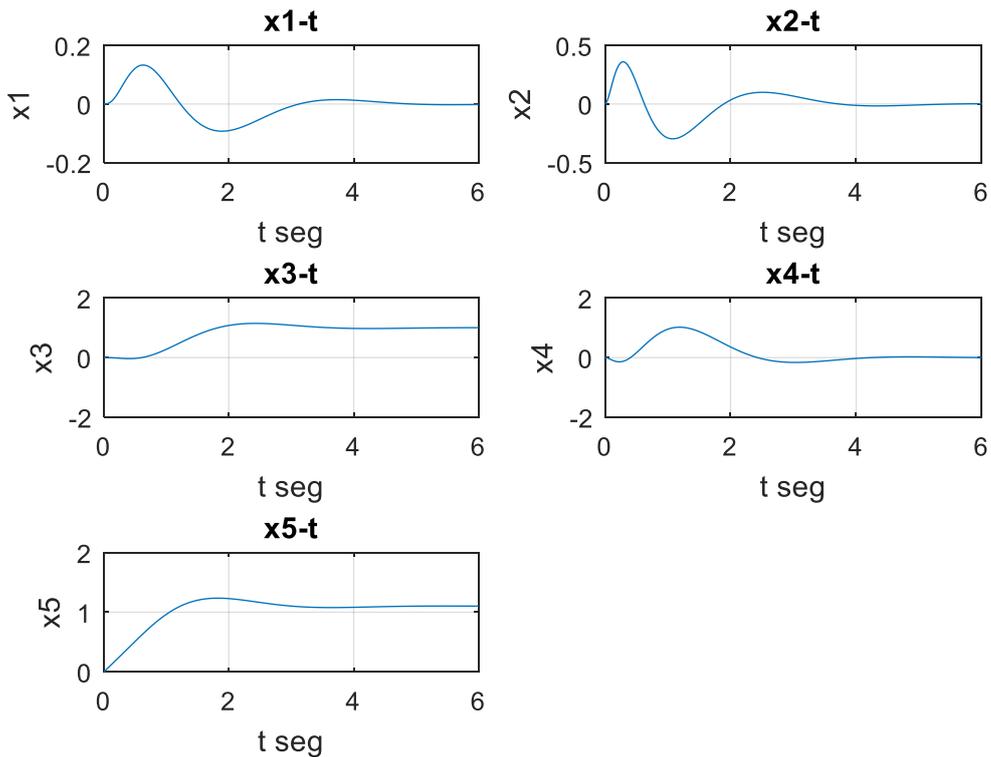


Fig. 10 Curvas del vector de estado x

De la figura 10, se observa que $y(t) = x_3(t)$ tiene aproximadamente el 15% de sobreimpulso y el tiempo de asentamiento es aproximadamente 4,5 seg. Se observa también que $\xi(t) = x_5(t)$ tiende a 1.1. Este resultado se puede deducir como sigue:

$$\dot{x}(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{A}x(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(\infty)$$

Se obtiene $u(\infty) = 0$

$$u(\infty) = 0 = -Kx(\infty) + k_I \xi(\infty)$$

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I} [Kx(\infty)] = \frac{1}{k_I} k_3 x_3(\infty) = \frac{-56.1224}{-51.0204} r = 1.0999r = 1.1r$$

Julio Cesar

Para $r = 1$ entonces $\xi(\infty) = 1.1$. Se observa que si la velocidad y el amortiguamiento no son suficientemente aceptables se debe modificar la ecuación característica deseada y determinar una nueva matriz \hat{K} . Las simulaciones en el computador se deben repetir hasta que se alcance un resultado satisfactorio.

Diseño del sistema de control óptimo cuadrático

De la figura 9, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Kx + k_I \xi \\ \dot{\xi} &= r - y = r - Cx \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

La ecuación del error

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e$$

donde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.58 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

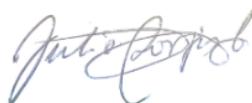
y la señal de control está dada por $u_e = -\hat{K}e$

donde

$$\hat{K} = [K \quad \vdots \quad -k_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad \vdots \quad -k_I]$$

$$e = \begin{bmatrix} x_e \\ \xi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$



Utilizando Matlab se determina la matriz de ganancia de realimentación del estado \hat{K} tal que se minimice el índice de comportamiento J como sigue

$$J = \int_0^{\infty} (e^* Q e + u^* R u) dt$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.01$$

Programando con Matlab para determinar \hat{K} .

```
% Diseño optimo cuadratico del sistema de control
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
Ahat=[A zeros(4,1); -C 0];
Bhat=[B; 0];
Q=[100 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
R=[0.01];
Khat=lqr(Ahat, Bhat, Q, R)
```

Khat =

```
-188.0283  -37.0783  -26.6820  -30.5963  10.0000
```

Del resultado, tenemos que

$$\hat{K} = [-188.0283 \quad -37.0783 \quad -26.6820 \quad -30.5963 \quad 10.000]$$

$$K = [-188.0283 \quad -37.0783 \quad -26.6820 \quad -30.5963]$$

Respuesta al escalón unitario

Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación K y la constante de ganancia integral k_I , se puede calcular la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado.

La ecuación del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r$$



como

$$u = -Kx + k_I \xi$$

tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

El programa en Matlab siguiente muestra la respuesta a un escalón unitario del sistema dado por la ecuación anterior

```
% Respuesta del sistema a un escalon unitario
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
K=[-188.0283 -37.0783 -26.6820 -30.5963];
kI=-10.0000;

AA=[A-B*K B*kI;-C 0];
BB=[0;0;0;0;1];
CC=[C 0];
DD=D;

t=0:0.01:10;
[y, x, t]=step(AA, BB, CC, DD, 1, t);

x1=[1 0 0 0 0]*x';
x2=[0 1 0 0 0]*x';
x3=[0 0 1 0 0]*x';
x4=[0 0 0 1 0]*x';
x5=[0 0 0 0 1]*x';

subplot(3,2,1);plot(t,x1);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x1')

subplot(3,2,2);plot(t,x2);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x2')

subplot(3,2,3);plot(t,x3);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x3')

subplot(3,2,4);plot(t,x4);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x4')

subplot(3,2,5);plot(t,x5);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x5')
```



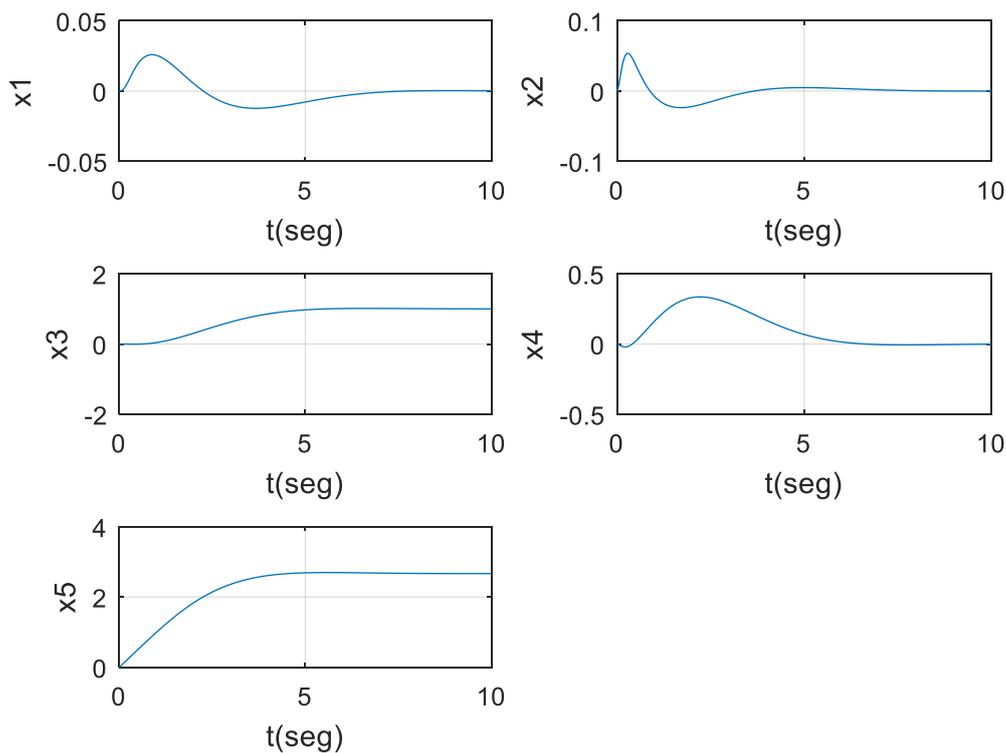


Fig. 10 Curvas de los componentes del vector de estado ante una entrada escalón unitario
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

En la figura 10 se muestran las respuestas en el tiempo resultantes de las componentes del vector de estado ante una entrada escalón unitario. Todas las condiciones iniciales se establecen en cero.

```

% Respuesta del sistema a un escalon unitario
clear all; close all; clc;
A=[0 1 0 0; 20.58 0 0 0; 0 0 0 1; -0.49 0 0 0];
B=[0; -1; 0; 0.5];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
K=[-188.0283 -37.0783 -26.6820 -30.5963];
kI=-10.0000;
AA=[A-B*K B*kI;-C 0];
BB=[0;0;0;0;1];
CC=[C 0];
DD=D;
t=0:0.01:10;
[y,x,t]=step(AA,BB,CC,DD,1,t);
x3=[0 0 1 0 0]*x';
plot(t,x3);grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('x3')

```

Juan Carlos

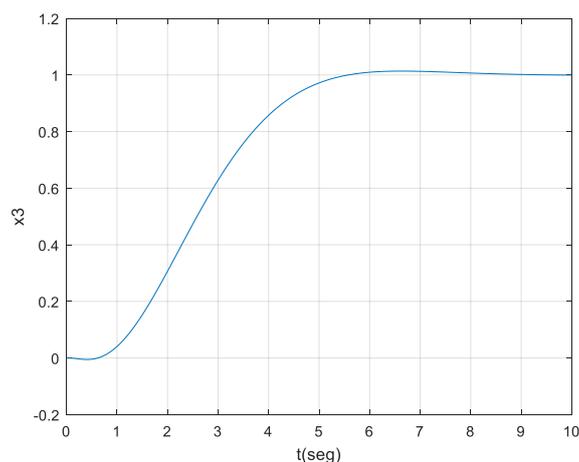


Fig. 11 Curva de la posición del carro (Autoría propia)

La figura 11 es una ampliación de la posición del carro $x_3(t) = x(t)$. El carro se mueve ligeramente hacia atrás en una cantidad muy pequeña durante los primeros 0.6 segundos aproximadamente. Se observa que la velocidad es negativa durante los primeros 0.4 segundos. Esto se debe a que el sistema del péndulo invertido del carro es un sistema de fase no mínima.

El sistema diseñado por el método del regulador óptimo cuadrático generalmente posee características menos oscilatorias y bien amortiguado.

4.3. Población y muestra. El presente trabajo no es de tipo estadístico

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

Como el trabajo de investigación es de tratamiento matemático, no ocupa un lugar geográfico. En todo caso se desarrollará en el ambiente de mi domicilio, que cuenta con biblioteca personal, y se encuentra instalada mi computadora personal con una impresora y además el servicio de Internet. El periodo de desarrollo establecido es de 12 meses.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

El presente trabajo no es de tipo estadístico

4.6. Análisis y procesamiento de datos.

El presente trabajo no es de tipo estadístico, ni de adquisición de datos.

V. RESULTADOS

- Aplicando las ecuaciones de Lagrange es que resulta el modelo matemático que son dos ecuaciones diferenciales no lineales que representan la dinámica de la planta.
- Se obtiene por linealización dos ecuaciones diferenciales lineales, a los cuales se les puede aplicar todas las propiedades de los sistemas lineales.
- Se obtiene el modelo de estado lineal: ecuación de estado y la ecuación de salida.
- Se encuentra la matriz de Controlabilidad y luego se determina que la planta es controlable. Este resultado permite diseñar un controlador por realimentación de estados y ubicación de polos.
- Se diseña el servosistema de tipo 1 sin integrador. Las respuestas en el tiempo del vector de estados son aceptables.
- Se diseña el regulador óptimo cuadrático con el fin de mejorar la performance del sistema. De los resultados observados se observa que son óptimos en comparación con el diseño del servosistema

D

VI. DISCUSION DE RESULTADOS

Comparando los resultados de diseño; se observa que el método del regulador óptimo cuadrático hace que la respuesta en el tiempo de la salida oscile menos, el sobreimpulso es menor, mejora el tiempo de subida, esto hace que el tiempo de estabilización disminuya.

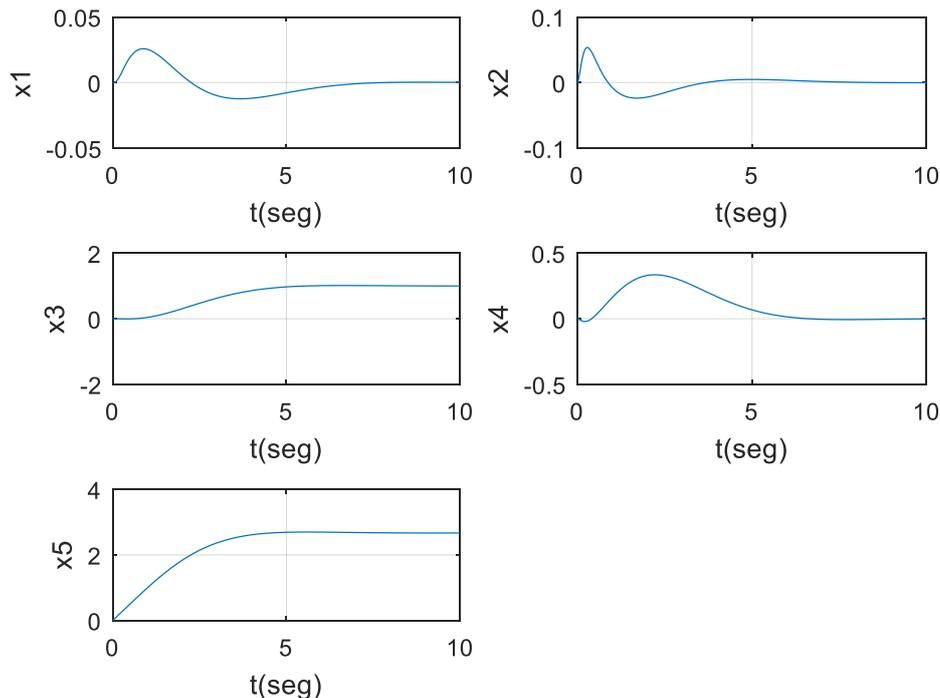


Fig. 12 Curvas de los componentes del vector de estado ante una entrada escalón unitario
Fuente: Autoría propia (UNAC 2022)

Del resultado de las gráficas mostradas, $x_1 = \theta$ la rotación del brazo que sustenta la bola se observa que tiene una pequeña oscilación y luego se estabiliza en un valor final. También $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular y del gráfico se observa que oscila y luego se estabiliza. En cuanto a $x_3 = x$ el desplazamiento del móvil tiene un pequeño movimiento hacia atrás pero rápidamente se recupera en otra dirección logrando estabilizarse en un valor final. Finalmente $x_4 = \dot{x}$ la velocidad del móvil, alcanza un valor constante y equilibrado.

VII. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye los dos métodos aplicados estabilizan a la planta de dos grados de libertad. El método del regulador óptimo cuadrático, mejora la performance del sistema. El tiempo de subida ha mejorado. El tiempo de estabilización es de 6 segundos. La respuesta no presenta oscilaciones transitorias. La variable de estado tiene como componente el desplazamiento x_3 y de la grafica se observa que al inicio tiene una tendencia hacia un valor negativo; pero luego se corrige hasta lograr estabilizarse en su proceso dinámico.

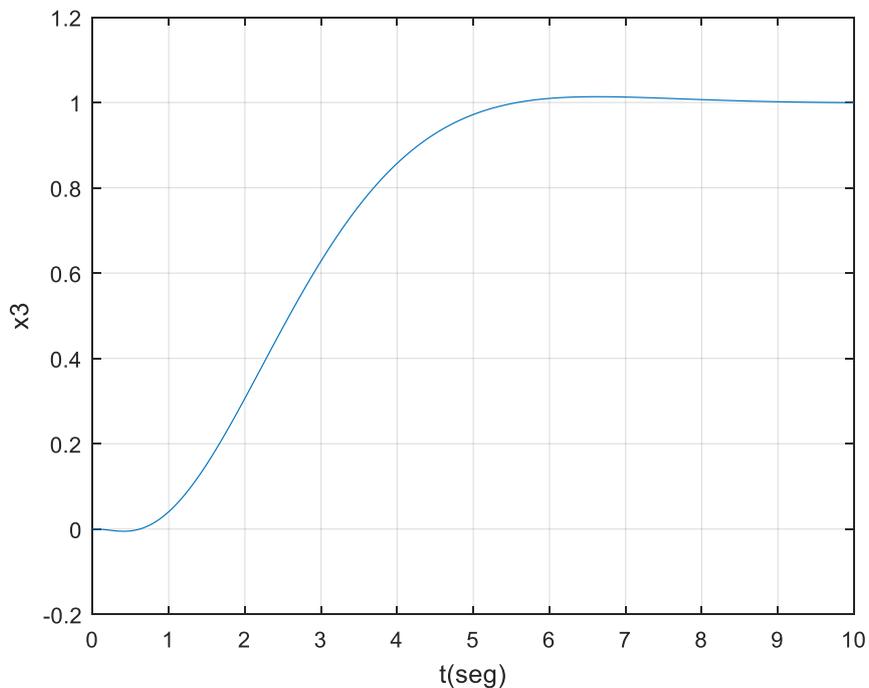


Fig. 13 Curva de la posición del carro

Autoría propia

VIII. RECOMENDACIONES

Se recomienda para el control de la misma planta utilizar otros métodos de control para esta planta no lineal. Estos métodos de control pueden ser clásicos o modernos. Estos también pueden ser diseñados con técnicas no lineales.

Estos pueden ser:

- Control PID
- Control con Compensadores
- Control en Frecuencia
- Control Sintonizado
- Control con observador de estados
- Control adaptivo
- Control difuso

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Julio Cesar'.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. 5ta edición. Madrid: Pearson Educación, 2010.
- [2] R. C. Dorf y R. H. Bishop. *Sistemas de control moderno*. 10ma edición. Madrid: Pearson Educación, 2005.
- [3] G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeini. *Control de sistemas dinámicos con retroalimentación*. Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1991.
- [4] N. S. Nise. *Sistemas de control para ingeniería*. 3ra edición. México, D.F.: Grupo editorial patria, 2010.
- [5] P. H. Lewis y Chang Yang. *Sistemas de control en ingeniería*. Madrid: Prentice Hall Iberia, 1999.
- [6] J. Tornero y L. Armesto. *Control optimo*. Valencia: Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2007.
- [7] E. Cerda. *Optimización dinámica*. México D.F.: Alfaomega Grupo Editor, 2012.
- [8] H. Kwakernaak, R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. New York: Jhon Wiley & Sonns, 1972.
- [9] S. Carrasco. *Metodología de la investigación científica*. Lima: Editorial San Marcos, 2018.
- [10] H. Ñaupas, E. Mejía, E. Novoa y A. Villagómez. *Metodología de la investigación Cuantitativa-Cualitativa y Redacción de la Tesis*. 4ta edición. Bogotá: Ediciones de la U, 2014.
- [11] R. Pino. *Metodología de la investigación*. Lima: Editorial San Marcos, 2018.
- [12] R. Hernández, C. Fernández y P. Baptista. *Metodología de la investigación*. México D.F.: McGraw Hill, 2010.
- [13] D.G. Zill y W.S. Wright. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 4ta edición. México D.F.: McGraw Hill, 2012.
- [14] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 11va. Edición. Ciudad de Mexico: Cengage Learning, 2018.



ANEXOS

Matriz de consistencia del proyecto de investigación				
Tema: "CONTROL Y OPTIMIZACIÓN DE UN SERVOSISTEMA TRASLACIONAL-ROTACIONAL POR UBICACIÓN DE POLOS"				
PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p><u>Problema general</u> ¿Cómo la ubicación de polos permite el control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional?</p>	<p><u>Objetivo general</u> Control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional por ubicación de polos.</p>	<p><u>Hipótesis general</u> La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá el control y optimización de un servosistema traslacional-rotacional.</p>	<p><u>Variable independiente</u> Fuerza de control</p> <p><u>Variable dependiente</u> Angulo rotacional Desplazamiento lineal</p>	<p><u>Tipo de investigación</u> Cuantitativa aplicada al campo de los Sistemas de Control Automático.</p> <p><u>Diseño de la investigación</u> Modelamiento Linealización Prueba de estabilidad Cálculo de ganancia K Respuesta del tiempo Optimización del control Respuesta del tiempo</p> <p><u>Método de la investigación</u> Analítico, aplicando las propiedades de los sistemas de control lineal. Se usará Matlab para las operaciones complejas y el análisis de la respuesta en el tiempo.</p>
<p><u>Problema Especifico</u> ¿Cómo la matriz de ganancias de realimentación por ubicación de polos permite el control del servosistema traslacional-rotacional?</p>	<p><u>Objetivo específico</u> Control de un servosistema traslacional-rotacional por realimentación con ubicación de polos.</p>	<p><u>Hipótesis específico</u> La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá el control de un servosistema traslacional-rotacional.</p>		
<p>¿Cómo la optimización del control del servosistema traslacional-rotacional permite una buena performance?</p>	<p>Optimización del control de un servosistema traslacional-rotacional.</p>	<p>La realimentación de estados por ubicación de polos permitirá la optimización de un servosistema traslacional-rotacional.</p>		

Julio Cesar