UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

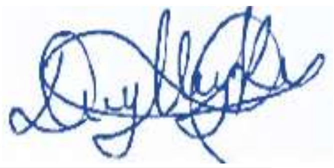
"SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN DOS NIVELES, VÍA ALGORITMOS GENÉTICOS"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

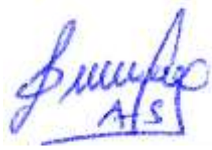
Noya Rodriguez Diego Carlos Daniel
Sutizal Roque Yenner Ayulo

Línea de investigación:
Análisis numérico y matemática computacional

Callao, 2023
PERÚ



Noya Rodriguez
Diego Carlos Daniel
Bachiller



Sutizal Roque
Yenner Ayulo
Bachiller

Moreno Vega
Dionicio Orlando
Magíster

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad**: De Ciencias Naturales y Matemática - UNAC

2. **UNIDAD DE INVESTIGACIÓN:** Departamento de Matemática - UNAC

3. **TÍTULO**: Soluciones para una clase de programación lineal en dos niveles, vía algoritmos genéticos.

4. **AUTORES**: Noya Rodriguez, Diego Carlos Daniel

ORCID: 0000-0001-9305-0725

Sutizal Roque, Yenner Ayulo.

ORCID: 0000-0002-3131-9378

5. **ASESOR**: Mg. Moreno Vega, Dionicio Orlando.

ORCID: 0000-0002-1522-0511

6. **LUGAR DE EJECUCIÓN**: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC.

7. **UNIDADES DE ANÁLISIS**: Algoritmos genéticos.

8. **TIPO DE INVESTIGACIÓN**: Básica

9. **TEMA OCDE**: 1.01.01 (Matemática Pura)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 15-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

ANGÉLICA MARÍA SEGOVIA ACHULLI

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: "**CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL**"

Se expide la presente a solicitud de la interesada para los fines pertinentes.

Bellavista, 10 de julio 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/*pgh*
Exp: 119.07.23
c.c.: Archivo

Ouriginal
by Turnitin

Document Information

Analyzed document	TESIS SEGOVIA ACHULLI EPM.pdf (D171973787)
Submitted	7/10/2023 10:09:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "TITULO DEL INFORME FINAL Y/O TESIS" "CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL" TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA Autores: Angélica Maria Segovia Achulli Karen Susana Saravia Marroquín Abel Elías Albino Sánchez Asesor: Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre Línea de investigación: Análisis Numérico y Matemática Computacional. Callao, 2022 PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: **http://meet.google.com/vhj-nibi-wdp** mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 17:00 horas del Martes diecisiete de enero del año dos mil veintitrés, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por los Señores Bachilleres **NOYA RODRÍGUEZ DIEGO CARLOS DANIEL** y **SUTIZAL ROQUE YENNER AYULO**, titulado: **"SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN DOS NIVELES, VÍA ALGORITMOS GENÉTICOS"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Mg. CRUZADO QUISPE, Ever Franklin : Presidente
Lic. AVILA CELIS, César Augusto : Secretario
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón : Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 170-2022-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 17:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente procedieron a formular las preguntas a los indicados Bachilleres, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por los Señores Bachilleres **NOYA RODRÍGUEZ DIEGO CARLOS DANIEL** y **SUTIZAL ROQUE YENNER AYULO**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
18	**Excelente**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **17:55** horas del día diecisiete de enero del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe
Presidente

Lic. César Augusto Ávila Celis
Secretario

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Vocal

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN DOS NIVELES, VÍA ALGORITMOS GENÉTICOS

NOYA RODRIGUEZ, Diego Carlos Daniel

SUTIZAL ROQUE, Yenner Ayulo

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática con resolución decanal **N° 170-2022-D- FCNM**, fecha de aprobación de la tesis **17 de Enero del 2023**

Aprobado por:

MG. Ever Franklin Cruzado Quispe
Presidente

LIC. Cesar Augusto Ávila Celis
Secretario

LIC. Absalón Castillo Valdivieso
Vocal

LIC. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

MG. Moreno Vega Dionicio Orlando
Asesor

DEDICATORIA

A mi esposa e hijo quienes con su constante amor y apoyo me motivaron a concretar este objetivo, a mis padres y hermanos por haberme brindado una maravillosa formación.

Noya Rodriguez, Diego Carlos Daniel

A toda mi familia especialmente a mi hijo Víctor Jesús, quien es el principal motivo para culminar este proyecto, a mis padres por haberme apoyado en mi formación desde pequeño.

Sutizal Roque, Yenner Ayulo

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, a mi padres y hermanos, a mi esposa e hijo, a mis asesores, a mis profesores, a mis compañeros, gracias ellos he concretado este logro.

Noya Rodriguez, Diego Carlos Daniel

Agradezco a Dios que a pesar de un año complicado nos ayudó a seguir con el objetivo, a mi hijo, esposa, mis padres, al profesor Paulo Seminario, a mi asesor y a mis compañeros que gracias a ellos hemos podido culminar esta tesis.

Sutizal Roque, Yenner Ayulo

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

RESUMEN

En esta tesis se estudia y diseña un algoritmo genético (por sus siglas en inglés GA), debido a que permiten obtener una solución optimal, de forma más sencilla, para una clase de problema de programación lineal en dos niveles (por sus siglas en inglés BLPP), esto es puesto que los métodos tradicionales no son muy amigables o son poco sencillos para la resolución de esta clase problemas, es por ello que se estudió algoritmos genéticos ya que se aprovechan las restricciones evitando el uso de la función penalidad, por lo que se resuelve una clase de problema de programación lineal en dos niveles mediante la construcción de la función de aptitud del problema de programación de nivel superior con base en la definición del grado factible, a razón facilitar la solución de una clase de problema de programación lineal. Este GA al evitar el uso de la función de penalización hace frente a las restricciones, cambiando la población inicial generada aleatoriamente en una población inicial que satisface las restricciones con el fin de mejorar la capacidad del GA para hacer frente a las restricciones. Finalmente, los resultados numéricos de algunos ejemplos indican la viabilidad del método propuesto.

ABSTRACT

This thesis studies and designs a genetic algorithm(GA) because they allow to obtain an optimal solution, more simply, for a class of the two-level linear programming problem (BLPP) , this is since traditional methods are not very friendly or are not easy for solving these problems, This is since traditional methods are not very friendly or are not very simple for solving this class of problems, that is why genetic algorithms were studied since they take advantage of the restrictions avoiding the use of the penalty function, so a class of the two-level linear programming problem is solved by constructing the fitness function of the higher-level programming problem based on the definition of the feasible degree. This GA avoids the use of the penalty function to deal with the constraints, changing the randomly generated initial population into an initial population that satisfies the constraints in order to improve the ability of the GA to deal with the constraints. Finally, the numerical results of some examples indicate the viability of the proposed method.

INTRODUCCIÓN

La planificación compartida o descentralizada ha sido resaltada como un tema sustancial para la toma de decisiones. Diversas perspectivas fundadas en las nociones de descomposición de sistemas en gran proporción comúnmente han sufrido la ausencia de la capacidad de esquematizar una estructura que modele el tipo de subsistemas realmente independientes que con frecuencia existen en la práctica. El modelo de programación en dos niveles divide el control sobre las variables de decisión entre niveles ordenados dentro de una estructura de planificación jerárquica, donde existe un nivel superior o de mayor jerarquía y un nivel inferior o seguidor.

Este trabajo propone una técnica de búsqueda de solución basada en conceptos que no son tradicionales para resolver un problema de programación lineal de dos niveles, donde la función objetivo del nivel superior, nivel inferior y restricciones del problema de programación lineal en dos niveles son lineales.
Así, por lo mencionado anteriormente, se pretende estudiar y diseñar un algoritmo genético para el problema de programación lineal en dos niveles construyendo la función de aptitud del problema de programación de nivel superior con base en la definición del grado factible.

Además, se mostrará algunos resultados numéricos para ejemplos que permitan indicar la viabilidad del método propuesto.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El Problema de programación lineal en dos niveles consiste en encontrar soluciones factibles que satisfagan las condiciones del problema, el cual tiene forma básica que se muestra a continuación:

Para $x \epsilon X \subset R^n, y \in Y \subset R^m \; F: X \times Y \longrightarrow R,$ el problema de programación lineal de dos niveles puede ser escrito de la siguiente forma:

$Min\, F(x; y) = c_1^t x + d_1^t y$ ……………………………………………………...(1a)

$x \epsilon X$

S.A

$A_1 x + B_1 y \leq b_1$ …………………………………………………………………(1b)

$Min\, f(x; y) = c_2^t x + d_2^t y$ …………………………………………... (1c)

$y \epsilon Y$

S.A

$A_2 x + B_2 y \leq b_2$ ………….……………………………………………..… (1d)

Donde $c_1, c_2 \epsilon R^n;\; d_1, d_2 \epsilon R^m;\; b_1 \epsilon R^p,\; b_2 \epsilon R^q\; ;\; A_1 \epsilon R^{p \times n}, B_1 \epsilon R^{p \times m},$

$A_2 \epsilon R^{q \times n},\; B_2 \epsilon R^{q \times m}$

El presente trabajo tendrá por objetivo encontrar una solución. Dicha solución, usando el método del algoritmo genético, el cual consiste en la codificación de la información del problema, generando aleatoriamente una población inicial de la región factible, una evaluación, selección, reproducción, cruzamiento y mutación de individuos, obteniendo así una nueva población y si ser necesario repitiendo este proceso el número de veces que consideremos necesario para alcanzar una solución aproximada a la solución óptima.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

- ¿Será posible encontrar una solución optimal para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos?

1.2.2. Problemas Específicos

- ¿Será posible definir una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles?

- ¿Será posible definir una función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Encontrar una solución optimal para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Definir una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

- Definir una función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

1.4. Justificación

La importancia de trabajar con algoritmos genéticos se ve resaltada en la facilidad de su aplicación, esto debido a que es un algoritmos de búsqueda estocástica basados en el mecanismo de selección natural y genética natural, a razón de ello que se estudió y diseñó un algoritmo genético para resolver una clase de problema de programación lineal en dos niveles, donde se aprovecha las restricciones evitando el uso de la función penalidad, resultando ser una herramienta con la cual se resuelve problemas de naturaleza compleja y poco sencillos de resolver por medio de las técnicas de optimización tradicionales.

El problema de programación lineal no se encuentra limitado únicamente al procedimiento matemático, sino también como herramienta en diversos campos, donde se debe resaltar que brinda un soporte para la toma de decisiones por lo que es menester estudiar el modelo de programación en dos niveles ya que es un instrumento que posibilita el análisis de decisiones en las cuales se divide el control sobre las variables de decisión entre niveles ordenados dentro de una estructura de planificación jerárquica, es por ello que se aplicará los algoritmos genéticos con la finalidad de encontrar una solución optimal para una clase de programación lineal en dos niveles.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Delimitantes teóricas

Debido a que este trabajo se orienta en el estudio de resultados teóricos, es preciso indicar que se encuentra enmarcado dentro de las teorías actuales referentes a los algoritmos genéticos y la programación lineal en dos niveles, en el análisis y procesamiento de información, a razón de ello se precisa que sus resultados se han obtenido sobre un conjunto de teorías o premisas válidas al momento de realizar el trabajo que pueden variar más adelante o mejorarse.

1.5.2. Delimitantes temporales

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.3. Delimitantes Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.4. Delimitantes temporales

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.5. Delimitantes Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto.

II. MARCO TEÓRICO

II.1. Antecedentes:

2.1.1. Internacionales:

Belete-Fuentes, Orlando, Zamora-Matamoros, Rafael, Caballero-Echevarría, Daimel, (2017) en su artículo titulado “Técnicas genéticas en la solución de un problema minero”. Mostraron que se tiene la propuesta del algoritmo, donde del modelo lineal binario desarrollado sugieren de forma natural la siguiente codificación para la creación de un algoritmo genético.

Jimenez-Builes, R. Arango - Sanchez, L. Jimenez - Pinzón, (2016) en su artículo titulado “Métodos de búsqueda usando los algoritmos de enjambre de partículas y genético”, compararon diferentes algoritmos, en esta investigación se definió los criterios de inicialización, parada, selección y reemplazo, los cuales serán usados en el desarrollo del trabajo.

de Freitas Alves, R. M., da Silva, F. N. R., Mota, D. P., Mysmar, D., & de Freitas Alves, S. M., (2017) en su artículo titulado “SELEÇÃO DE PESSOAS POR MEIO DE ALGORITMOS GENÉTICOS” de la Revista de Administración de la Universidad Federal de Santa María, 10(2),307-317, estudiaron como objetivo central seleccionar un profesional compatible con la vacante, la cultura y los deseos organizativos, donde se expone el término “convergencia genética” el cual se definirá como un criterio de parada en el desarrollo de este estudio.

2.1.2. Nacionales

Hañari Mamani, S., (2016) en su tesis titulada “Algoritmos evolutivos aplicados a la generación de horarios para el colegio” - Aplicación de la UNA-PUNO, estudiaron como objetivo central” Encontrar una solución basado en algoritmos evolutivos, capaz de resolver de manera automatizada la generación de horarios del Colegio Aplicación de la UNA - Puno”, del cual se obtiene el diseño de un algoritmo evolutivo, lo cual en grandes rasgos es una variante del algoritmo genético.

Zegarra, R. H., Luján, Y. V., Castañeda, H. A., Flores, J. V., (2019) en su artículo titulado “Optimización de ruta corta usando algoritmo genético generacional”, estudiaron como objetivo central “utilizar algoritmo genético generacional, propio de la inteligencia artificial, donde se aprovecha el proceso evolutivo para optimizar el recorrido de los n puntos o nodos” del cual se obtiene las funciones del algoritmo genético.

Revilla Lozano, J. C. P., (2016) en su tesis titulada “Modelo De Algoritmo Genético Para La Programación De Proyectos Viales”, estudiaron como objetivo general determinar si el uso del algoritmo genético propuesto reducirá el tiempo necesario para la programación de un proyecto vial optimizando los costos totales.

2.2. Bases teóricas

La presente sección está dedicada a exponer el marco teórico necesario para la concretización de los objetivos referentes al trabajo. Para esto seguiremos los resultados mostrados por Bialas, W. F., & Karwan, M. H. (1984), Bard, J. F. (2013), Sakawa, M. (2012).

2.2.1. Algoritmo genético

2.2.1.1. Algoritmo genético simple

En definitiva, la simplicidad con la que Sakawa, M. (2012) expresa los fundamentos del algoritmo genético permite una comprensión intuitiva:

Los algoritmos genéticos pueden iniciar con la codificación de todos los datos o con una población inicial de individuos generados al azar a codificarse y codificar los datos que se consideren necesarios para la resolución del problema.

Cada individuo de la población representa una posible solución al problema en cuestión.

Los individuos evolucionan a través de iteraciones sucesivas, llamadas generaciones. Durante cada generación, cada individuo de la población se evalúa usando alguna medida de la aptitud ("fitness").

A continuación, la población de la próxima generación se crea a través de operadores genéticos.

El procedimiento continúa hasta que la condición de terminación es satisfecha.

Para explicar los procedimientos fundamentales de los algoritmos genéticos, consideremos una población que consta de N individuos que representan posibles soluciones a un problema. En los algoritmos genéticos, un individuo en una población es representada por una cadena S de longitud n de la siguiente manera:

Fenotipo Genotipo

$$\boxed{S} = \boxed{S_1 S_2 S_3 \ldots \ldots . S_n}$$ Cromosoma

Genes

La cadena S se denomina cromosoma la cual consiste de n genes. El carácter S_k es el k-ésimo gen o el gen en la posición k y los diferentes valores de un gen es llamado alelo. El cromosoma S se denomina genotipo de un individuo; una posible solución a un problema que corresponde a una cadena S se denomina el fenotipo. Por lo general, se supone para establecer una correspondencia de uno a uno entre los genotipos y fenotipos. El mapeo de los genotipos a fenotipos se llama decodificación. La aptitud ("fitness") es el vínculo entre los algoritmos genéticos y el problema que hay que resolver. En problemas de maximización, la aptitud ("fitness") de una cadena S generalmente se mantiene igual al valor de la función objetivo $f(x)$ de su fenotipo x. En problemas de minimización, la aptitud ("fitness") de una cadena S debe aumentar a medida que el valor de la función objetivo $f(x)$ de su fenotipo x disminuye. Así, en problemas de minimización, la cadena con un valor de la función objetivo más pequeño tiene una mayor aptitud ("fitness"). A través de tres principales operadores genéticos junto con la aptitud ("fitness"), la población $P(t)$ en la generación t evoluciona para formar la próxima población $P(t+1)$. Después de algún número de generaciones, los algoritmos convergen a la mejor cadena de S^*, que esperamos represente el óptimo o la solución óptima aproximada x^* para el problema de optimización.

En los algoritmos genéticos, los tres principales operadores genéticos **- reproducción, cruce y mutación -** se utilizan generalmente para crear la próxima generación. por (Sakawa, M. (2012). Genetic algorithms and fuzzy multiobjective optimization (Vol. 14). p. 12-13, Springer Science & Business Media.)

2.2.2. El Modelo matemático del problema de programación lineal en dos niveles

En el estudio de programación en dos niveles esto se puede expresar como un problema de optimización (función objetivo líder o entiéndase como quien contrata) que está restringido a otro problema de optimización (función objetivo seguidor o entiéndase como quien es contratado) donde una variable es solución del problema seguidor, ya que quien contrata será el líder y tendrá sus condiciones para negociar, pero necesita del servicio de quien será contratado o del seguidor, que a su vez también tendrá sus condiciones, entonces para cada propuesta que tenga el líder, el seguidor responderá con una contraoferta, y así empezara la negociación hasta encontrar un punto donde ambos no pierdan, o ambos ganen.

Los rasgos distintivos de este proceso de dos niveles es que la toma de decisiones en un nivel puede afectar la toma de decisión en el otro nivel (Esto no quiere decir que una controle completamente las acciones de la otra). Es claro que la función objetivo del líder en parte está determinada por variables controladas en el otro nivel, y de acuerdo a la definición del problema de Bialas,

W. F., & Karwan, M. H. (1984) entre las características más básicas se encuentran:

1. Existe una toma de decisiones interactiva entre unidades dentro de una estructura, predominantemente jerárquica.
2. El nivel inferior ejecuta sus políticas o decisiones después de las decisiones tomadas por el líder.
3. Cada unidad maximiza sus beneficios de forma independiente, pero es afectada por las acciones de otras unidades externas.

En la parte anterior hemos dado una breve explicación del porqué un problema “se parte en dos niveles”, entonces lo que se puede decir de los problemas de programación en dos niveles, es que son problemas de optimización matemática donde el conjunto de todas las variables esta particionado entre dos vectores “x” y otro “ y”, donde se debe elegir una solución óptima en un segundo problema de programación matemática parametrizado en “y”.

Esto es que el problema de dos niveles de jerarquía en el sentido de que sus restricciones están definidas en parte por un segundo problema de optimización. (Bialas, W. F., & Karwan, M. H. (1984). Two-level linear programming. Management science, 30(8))

La notación y el modelo diseñado por Bard, J. F. (2013) brinda información suficiente para una breve discusión sobre el carácter teórico del problema.

Para $x \epsilon X \subset R^n, y \in Y \subset R^m \; F: X \times Y \longrightarrow R,$ el problema de programación lineal de dos niveles puede ser escrito de la siguiente forma:

$Min\, F(x; y) = c_1^t x + d_1^t y$ ....(1a)

$x \epsilon X$

S.A

$A_1 x + B_1 y \leq b_1$ ....(1b)

$Min\, f(x;y) = \; c_2^t x + \; d_2^t y$ ………………………………………(1c)

$y \in Y$

S.A

$A_2 x + B_2 y \leq \; b_2$ …………..…..………………………………. (1d)

Donde $c_1, c_2 \in R^n; \; d_1, d_2 \in R^m; \; b_1 \in R^p, \; b_2 \in R^q \; ; \; A_1 \in R^{p\times n}, B_1 \in R^{p\times m}$,
$A_2 \in R^{q\times n}, \; B_2 \in R^{q\times m}$

Los conjuntos X e Y colocan restricciones adicionales en las variables, tales como en los límites superiores e inferiores o en la integralidad de los requerimientos. Por supuesto que una vez que el líder selecciona un "x", el primer término en la función objetivo del seguidor se convierte en una constante y puede ser eliminada del problema. En este caso reemplazamos $f(x,y)$ por $f(y)$.

La decisión natural de las decisiones implica que "y" puede ser visto como función de "x", esto es "$y = y(x)$". Por conveniencia nos abstendremos de escribir esta dependencia explícitamente a menos que haya una razón para llamar la atención a esto.

Ahora es necesario dar definiciones respecto a nuestros problemas.

a) Región de restricciones del problema de programación de dos niveles

$$S = \{(x,y): x \in X; y \in Y; \; A_1 x + B_1 y \leq b_1; \; A_2 x + B_2 y \leq b_2 \}$$

b) Conjunto factible del seguidor para cada $x \in X$ fijo

$$S(x) = \{ \, y \in Y; \; B_2 x \leq b_2 - \; A_2 x \, \}$$

c) Proyección de S en el espacio de decisiones del líder.

$$S(x) = \{x \in X; \exists \; y \in Y; \; A_1 x + B_1 y \leq b_1; \; A_2 x + B_2 y \leq b_2 \}$$

d) Conjunto de reacciones racionales para $x \in s(x)$

$$P(x) = \{y \in Y: y = argmin[f(x, \hat{y}), \hat{y} \epsilon S(x)\}$$

e) Región inducible.

$$IR = \{(x, y): (x, y) \epsilon S, y \epsilon P(x)\}$$

Para asegurar que (1a) está bien planteado es común asumir que S es compacto y no vacío, y esto es para toda decisión tomada por el líder, el seguidor tiene algo de tiempo para responder, esto es $P(x) \neq \emptyset$. El conjunto de las reacciones racionales $P(x)$ define la respuesta mientras la región inducible IR representa el conjunto sobre el cual el líder puede optimizar. Esto en términos de la notación anterior, significa que el problema de programación de dos niveles puede ser escrito como

$$Min\,\{ F(x; y) = (x, y)\, \epsilon\, IR\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1.2)}$$

Inclusive con las hipótesis expuestas, el problema (1.2) puede no tener una solución. En particular, si $P(x)$ no es un solo valor para todo x permisible (Si x es permitido, $P(x)$ no es un solo valor), el líder puede no lograr su rentabilidad mínima sobre IR. Para evitar esta situación en la presentación de este algoritmo, se supondrá que $P(x)$ es un mapa punto a punto.

Esta hipótesis no parece ser excesivamente restrictiva porque una comprobación sencilla está disponible para ver la solución de (1.1) tomando (x^*, y^*) es única. A tal punto, todo lo que es necesario, es resolver el siguiente problema de programación lineal.

$$Min\,\{ d_2 y :\ (x, y)\, \epsilon\, S, c_1 x + d_1 y\ =\ c_1 x^*\ +\ d_1 y^* \}$$

Si la solución correspondiente, dice $(x^\wedge, y^\wedge)$, produce un valor de la función objetivo $d_2 y < d_2 y^*$ que no mantiene la condición de unicidad.

Se debe mencionar que en la practica el líder incurrirá en algún costo en la determinación del espacio de decisión $S(x)$ sobre el cual él puede operar. (Bard, J. F. (2013). Practical bilevel optimization: algorithms and applications (Vol. 30). Springer Science & Business Media).

2.3. Marco conceptual

Población: Conjunto de individuos que pueden o no representar una solución. (Elaboración propia)

Cromosoma: Es un individuo de la población, es la representación de un genotipo como una cadena de genes. (Elaboración Propia)

Alelo: Es el valor de un gen perteneciente a un cromosoma. (Elaboración propia)

Genotipo: Son las características o cualidades de un individuo las cuales serán heredadas a la descendencia, que al ser codificada se representa usualmente mediante una cadena y es llamada cromosoma. (Elaboración propia)

Fenotipo: Es la parte decodificada que representa una posible solución. (Elaboración propia)

Convergencia genética: La población generada presenta individuos sin una variación genética que permita encontrar cromosomas con una mejor aptitud. (Elaboración Propia)

Mutación: Operador matemático que altera al menos un gen proporcionando oportunidad de diversificación. (Elaboración propia)

Función Objetivo: Es función la cual se desea optimizar, esto es, maximizar o minimizar la función. (Elaboración propia)

2.4. Definiciones de términos básicos

Población: Conjunto de posibles soluciones (Belete, Zamora & Caballero, 2017)

Cromosoma: Cada individuo de la población que representa una solución al problema en cuestión representado como una cadena. (Sakawa, M. (2002).)

Alelo: Son los diferentes valores de un gen (Sakawa, M. (2002).)

Genotipo: Cada individuo de la población que representa una solución (Sakawa, M. (2002).)

Convergencia genética: Todos los cromosomas se parecen entre sí y no hay diversidad demasiado alta para descubrir los mejores cromosomas. (de Freitas Rocha, Pereira, Mysmar & Martins, 2017).

Mutación: Cambio arbitrario del valor de un carácter a otro en una cadena Mathieu, R., Pittard, L., & Anandalingam, G. (1994)

Algoritmos genéticos: Los algoritmos genéticos constituyen una técnica de búsqueda cuyo fundamento es la teoría de la evolución de las especies de Charles Darwin, donde los individuos de una población se cruzan, se reproducen y sobreviven los más aptos en cada generación. (Jiménez-Builes, J. A., Arango-Sanchez, R. E., & Jiménez-Pinzón, L. D. (2016))

.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis general

H.G. Existe solución optimal para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos.

Hipótesis específicas

H.E.1. Existe una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

H.G.2. Es posible definir una función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

3.1.1. Operacionalización de variable

Definición Conceptual de variables

Se considerará las variables siguientes:

Variable Dependiente (D): Algoritmos genéticos.

- **Algoritmos Genéticos:** Son métodos adaptativos, generalmente usados en problemas de búsqueda y optimización de parámetros, basados en la reproducción sexual y en el principio de supervivencia del más apto.

Los indicadores más rescatables con respecto a esta variable dependiente son los siguientes:

- **Restricción del problema:** Son las limitaciones de los definidos por el problema.

- **Reproducción y mutación:** Principales operadores genéticos que se utilizan generalmente para crear la próxima generación.

- **Tipo de optimización:** Lineal.

Variable Independiente (I): Problema de programación lineal en dos niveles.

- **Problema de Programación lineal en dos Niveles**: Es un problema de optimización que está restringido a otro problema de optimización que consiste en encontrar y mostrar soluciones factibles que satisfagan las condiciones.

- **Función Líder**: Es la función que está relacionada con el contratante, llamado Líder, y tendrá sus condiciones para negociar, pero necesita del servicio de quien será contratado, el Seguidor.

- **Función Seguidor:** Es la función que está relacionada con el que será contratado, además ejecuta sus políticas o decisiones después de las decisiones tomadas por el líder.

- **Solución Optimal.** Llamaremos solución optimal a aquella solución o conjunto de soluciones que permitan alcanzar el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo.

- **Restricciones:** Son las limitaciones de los recursos definidos por el problema, para el caso de la programación lineal en dos niveles se las restricciones son otro problema de optimización.

Tabla 1: Operacionalización de Variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
Variable Dependiente Algoritmos genéticos	Diseño del Algoritmo genético Operadores genéticos Función de Aptitud	Restricción del problema Reproducción y mutación. Tipo de optimización	Método inductivo – deductivo Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca	Documentos cuantitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipo de investigación
Variable Independiente Problema de programación lineal en dos niveles.	Función Objetivo Problema de Programación Lineal Región Factible.	Función Líder y Función Seguidor Solución Optimal. Restricciones.	Método inductivo – deductivo Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca	Documentos cuantitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipo de investigación

Fuente: Elaboración propia.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico

Tipo de investigación

La investigación se enmarca en el tipo de investigación básica ya que se busca incrementar los conocimientos científicos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico.

Diseño de investigación

El diseño de investigación que se tomará por pertinente ha sido el diseño no experimental ya que no se manipularán deliberadamente las variables de estudio. En función al propósito investigativo, que surge de la intención del investigador en profundizar el conocimiento sobre la realidad analizada, por ende, el nivel investigativo que asumirá esta investigación será el descriptivo. El enfoque de la investigación es cualitativo ya que se busca interpretar y comprender el problema de investigación. La investigación es tipo documental ya que se procura obtener, seleccionar, compilar, organizar, interpretar y analizar información sobre las variables de estudio a partir de fuentes documentales, tales como libros, documentos de archivo, hemerografía, registros audiovisuales, entre otros.

La investigación se desarrollará teniendo en cuenta un diseño del tipo inductivo – deductivo, tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.2. Método de investigación

En la investigación se emplea el método inductivo – deductivo, el método de análisis y síntesis y el método de escritorio o biblioteca.

Con respecto al método inductivo – deductivo, se emplea en el procesamiento de la información obtenida con el objetivo de establecer regularidades o de inferir a partir de conocimientos, o regularidades de carácter general y su manifestación en un fenómeno o situación particular.

El método de análisis y síntesis se utilizará durante todo el proceso de la investigación a partir de la bibliografía consultada.

Finalmente, en el método de escritorio o de biblioteca se revisarán y analizarán los datos obtenidos previamente obtenidos a través de la Internet y revisión bibliográfica.

4.3. Población y muestra

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.4. Lugar de estudio

El lugar de estudio de la investigación será en la biblioteca de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. También en los domicilios de los investigadores, el cual cuenta con un ambiente de buena iluminación, ventilación, ventilación y asilamiento, además, de contar con artículos de escritorio, pc y conexión a internet.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

La investigación se realizó teniendo en cuenta la técnica de análisis de documentos cualitativos por cuanto se basa en el análisis de documentos existentes en archivos y artículos de internet, repositorios nacionales como Alicia - Concytec, repositorios internacionales como Redalyc, Scielo, Google Académico, Springer Link, entre otros y, también usaremos las técnicas de la revisión bibliográfica (libros, artículos impresos), el cual nos brindará información proporcionada por expertos en los temas de estudio. Se usarán como instrumentos para la recolección de la información una matriz de categorías y una ficha de registro, pero hay que tener en cuenta que los trabajos o la bibliografía o la literatura que se ha explorarán es de alta relevancia para un sector significativo de la comunidad matemática.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Para el análisis y procesamiento de la información se organizarán, analizarán e interpretarán las teorías y conceptos, teniendo en cuenta los criterios de validez que tienen que ver con:

A. Coherencia argumentativa
B. Nivel interpretativo
C. La consistencia de las conclusiones

Para ello es importante el contraste de la información, validar el material y recibir retroalimentación del asesor y el trabajo con equipos de investigación, el cual nos brindará información proporcionada por expertos en los temas.

4.7. Aspectos éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

V. RESULTADOS

a. El modelo matemático del Problema de Programación Lineal en dos Niveles

Se considera el siguiente problema de programación lineal en dos niveles (para facilitar al lector se denotará a este problema como BLPP a partir de las siglas de su nombre en inglés “two-level linear programming problem”) con el formulario:

(P1) $F(x,y) = a^T x + b^T y$

dónde y es solución de

(P2) $f(x,y) = c^T x + d^T y$

S.A

$Ax + By \leq r$

$x, y \geq 0$

$$Donde\ A \in R^{m\times n_1}, B \in R^{m\times n_2}, a, c, x \in R^{n_1}, b, d, y \in R^{n_2}, r \in R^m$$

Una vez x es fijo, el término $c^T x$ en la función objetivo del problema de nivel inferior es una constante.

Entonces, la función objetivo del problema de nivel inferior simplemente se denota como:

$$\bar{f} = d^T y$$

Donde $S = \{(x,y)/\ Ax + By \leq r\}$ denota la región de restricción de BLPP. Aquí, asumimos S no está vacío y acotado.

Sea $Q = \{y/\ By \leq r - Ax, y \geq 0\}$ no vacío y acotado. Donde $Y(x)$ denota el conjunto de solución óptima del problema $\underbrace{max}_{y\in Q(x)}\ \bar{f} = d^T y$

Asumimos el elemento del conjunto $Y(x)$ existe y es única, entonces la región inducible es:

$$\psi_f(S) = \{(x, y)/\ (x, y) \in S,\ \ y = Y(x)\}$$

Por lo tanto, el problema *(P1)* se puede cambiar a:

$$F(x, y) = \ c^T x + d^T y$$

S.A

$$\text{(P3)} \quad Ax + By \leq \ r$$
$$y = Y(x)$$

Entonces, si el punto (x, y) es la solución del siguiente problema:

$$F(x, y) = \ c^T x + d^T y$$

S.A.

$$Ax + By \leq \ r$$

Y $y = Y(x)$, luego (x, y) es la solución del problema (P1).

Definición 1: El punto (x, y) es factible si $(x, y) \in \psi_f(S)$.

Definición 2: El punto factible $(x^*, y^*) \in \psi_f(S)$ es la solución óptima del BLPP (solución para abreviar) si $(x^*, y^*) \geq F(x, y)$ para cada punto $(x, y) \in \psi_f(S)$.

En este trabajo se discutirá el método numérico del BLPP bajo la definición.

b. Diseño de un Algoritmo Genético para un problema de programación lineal en dos niveles

No es fácil saber que la función objetivo de nivel superior de BLPP no tiene una formulación explícita, ya que está compuesta por la función de solución de nivel inferior que no tiene una formulación explícita. Por tanto, es difícil expresar la definición de la derivación de la función en sentido común. Y es difícil discutir las condiciones y los algoritmos de la solución óptima con la definición. Nos preocupamos de que GA sea un algoritmo numérico compatible con el problema de optimización, ya que no tiene requisitos especiales para la diferenciabilidad de la función. Por lo tanto, el artículo resuelve BLPP por GA.

La idea básica para resolver BLPP por GA es: primero, elija la población inicial que satisfaga las restricciones, luego el tomador de decisiones de nivel inferior realiza la reacción óptima correspondiente y evalúa a los individuos de acuerdo con la función de aptitud construida por el grado factible, hasta la solución óptima es buscado por la operación genética una y otra vez.

c. Codificación y restricciones

En la actualidad, la codificación que se utiliza con frecuencia es la codificación de vector binario y la codificación de vectorial. Pero este último está más cerca del espacio del problema. Este trabajo adopta la codificación vectorial. Por tanto, el individuo se expresa por: $v_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots \dots \dots, v_{kn})$.

Los individuos de la población inicial generalmente se generan aleatoriamente en GA, que tiende a generar las siguientes generaciones que no están en la región de restricción. Por tanto, debemos ocuparnos de ellos.

Aquí, tratamos las restricciones de la siguiente manera: generamos un grupo de individuos al azar, luego retenemos a los individuos que satisfacen las restricciones $Ax + By \leq r$ como población inicial y abandonan los que no satisfacen las limitaciones. Todos los individuos generados de esta manera satisfacen las limitaciones y la generación siguiente satisfacen las restricciones de los correspondientes operadores de cruce y mutación.

d. Diseño de la función Fitness

Para resolver el problema (P3) por GA, primero se introduce la definición del grado factible y la función de aptitud se construye para resolver el problema por GA. Donde d denota el intervalo de penalización suficientemente grande de la región factible para cada $(x, y) \in S$:

Definición 3: Sea $\Theta \in [0,1]$ denota el grado factible de satisfacer la región factible y lo describe mediante la siguiente función:

$$\Theta = \begin{cases} 1, & \text{si } \|y - Y(x)\| = 0 \\ 1 - \|\frac{y-Y(x)}{d}\|, & \text{si } 0 < \|y - Y(x)\| \leq d \\ 0, & \text{si } \|y - Y(x)\| > d \end{cases}$$

Donde $\|.\|$ denota la norma (Norma euclidiana).

Además, la función de aptitud del GA se puede establecer como:

$eval(v_k) = (F(x, y) - F_{min}) * \Theta$

Donde F_{min} es el valor mínimo de $F(x, y)$ en S.

e. Operadores genéticos

El operador de cruce es uno de los operadores genéticos importantes. En el problema de optimización con variable continua, aparecieron muchos operadores de cruzamiento. Este trabajo utiliza el cruce aritmético que puede garantizar que las siguientes generaciones estén todavía en la región de restricción y, además, el sistema es más estable y la varianza de la mejor solución es menor. El cruce aritmético puede generar dos hijos que son totalmente lineal combinado por los individuos paternos. Si v_1 y v_2 cruces, entonces los resortes finales son:

$$v'_1 = \alpha * v_1 + (1 - \alpha) * v_2$$
$$v'_2 = \alpha * v_2 + (1 - \alpha) * v_1$$

Donde $\alpha \in [0,1]$ es un número aleatorio. El cruce aritmético puede asegurar el cierre (que es, v_1, $v_2 \in S$)

El operador de mutación es otro operador genético importante en GA. Aparecieron muchos operadores de mutación como la mutación uniforme, mutación no uniforme y mutación de límite. Adoptamos la mutación límite, que se construye para el problema cuya solución óptima está en o cerca del límite del espacio de búsqueda de restricción. Y para el problema de las restricciones resulta muy útil. Si el individuo v_k muta, entonces

$$v'_k = (v'_{k1}, v'_{k2}, \dots \dots \dots, v'_{km}).$$

Donde v'_k está a la izquierda(v'_{ki}) o hacia la derecha(v'_{ki}) con la misma probabilidad (Donde izquierda(v'_{ki}), derecha(v'_{ki}) denota el límite izquierdo, derecho de v'_{ki}, respectivamente)

La selección se rige por el principio: los eficientes prosperarán y los ineficientes serán eliminados, buscando lo mejor en la población. En consecuencia, el número de individuos superiores aumenta gradualmente y el curso evolutivo avanza hacia una mayor optimización. Hay muchos operadores de selección. Adoptamos la selección de torneo ya que es la selección más simple.

f. Criterios de terminación

El juicio de la rescisión se utiliza para decidir cuándo dejar de calcular y devolver el resultado. Adoptamos el número de iteración máximo como el juicio de la terminación. El proceso del algoritmo que utiliza GA es el siguiente:

Paso 1 Inicialización. dar la escala de población M, probabilidad de cruce P_c, probabilidad de mutación P_m, la generación de iteración máxima $MAXGEN$, y sea la generación $t = 0$;

Paso 2 Inicialización de la población inicial. M individuos se generan aleatoriamente en S, que componen la población inicial.

Paso 3 Cálculo de la función de aptitud. Evalúe el valor de aptitud física de la población de acuerdo con la definición 3.

Paso 4 Genere la próxima generación por operadores genéticos. Seleccione el individuo mediante la selección torneo, cruce de acuerdo con el cruce aritmético y mute de acuerdo con la mutación límite para generar la próxima generación.

Paso 5 Juzgue la condición de la terminación. Cuando t es mayor que el número máximo de iteraciones detenga el GA y genere la solución óptima. De lo contrario, sea $t = t + 1$, vaya al paso 3

Vamos a proponer el siguiente ejemplo para mostrar la viabilidad del método GA resolviendo el BLPP:

Ejemplo 1

$$max\ F\ (x, y) = x + 3\ y$$
$$x \geq 0$$

Donde y resuelve

$$max\ f(x, y) = x - 3y$$
$$y \geq 0$$

Sujeto a

$$-x - 2y \leq -10$$
$$x - 2y \leq 6$$
$$2x - y \leq 21$$
$$x + 2y \leq 38$$
$$-x + 2y \leq 18$$

Ejemplo 2

$$max\ F\ (x, y) = -8x_1 - 4x_2 + 4y_1 - 40y_2 - 4y_3$$
$$x \geq 0$$

Donde y resuelve

$$max\ f(x, y) = x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 2y_3$$
$$y \geq 0$$

Sujeto a

$$-y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$
$$-2x_1 - y_1 + 2y_2 + 0.5y_3 \leq 1$$
$$2x_2 + 2y_1 - y_2 - 0.5y_3 \leq 1$$

Ejemplo 3

$$max\ F\ (x,y) = 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 40y_2 + 4y_3$$

$$x \geq 0$$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - y_3 \leq 1.3$$

$$max\ f(x,y) = -2y_1 - y_2 - 2y_3$$

$$y \geq 0$$

Sujeto a

$$-y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$

$$4x_1 - 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2$$

$$4x_2 + 4y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 2$$

La comparación de los resultados a lo largo de 500 generaciones por los algoritmos en comparación con los resultados en las referencias es la siguiente:

Tabla 2. Resultados Comparativos

	Parámetros			**Resultados usando algoritmos genéticos**			**Resultados en las Referencias con otros métodos**		
	M	P_c	P_m	(x,y)	F	f	(x,y)	F	f
1	**50**	**0.7**	**0.15**	**(15.959, 10.972)**	**48.875**	**-16.957**	**(16,11)**	**49**	**-17**
2	**100**	**0.6**	**0.2**	**(0, 0.899, 0, 0.6, 0.394)**	**29.172**	**-3.186**	**(0, 0.9, 0,0.6,0.4)**	**29.2**	**-3.2**
3	**100**	**0.6**	**0.3**	**(0.533, 0.8, 0, 0.197, 0.8)**	**18.544**	**-1.797**	**(0.2, 0.8, 0, 0.2, 0.8)**	**18,4**	**-1.8**

Fuente: Tabla adaptada de los resultados encontrados en:

Anandalingam, G., & White, D. J. (1990). A solution method for the linear static Stackelberg problem using penalty functions. IEEE Transactions on automatic control, 35(10), 1170-1173.

Candler, W., & Townsley, R. (1982). A linear two-level programming problem. Computers & Operations Research, 9(1), 59-76.

Hansen, P., Jaumard, B., & Savard, G. (1992). New branch-and-bound rules for linear bilevel programming. SIAM Journal on scientific and Statistical Computing, 13(5), 1194-1217.

Nota: M denota la escala de población, P_c denota probabilidad de cruce, P_m denota probabilidad de mutación. F y f son el valor de la función objetivo del problema de programación de nivel superior e inferior, respectivamente.

A partir del resultado numérico, los resultados por el método en este trabajo concuerdan con los resultados en las referencias. Por tanto, el método es viable. Además, los experimentos muestran que la escala de la población y la tasa de mutación tienen cierta influencia sobre la tasa de convergencia del método, pero el operador de cruce tiene poca influencia sobre ellos. Por ejemplo, la tasa de convergencia se demora más si el tamaño de la población es mayor, y es beneficioso para la tasa de convergencia elegir la mayor tasa de mutación.

5.1. Resultados descriptivos.

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales.

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados inferenciales.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis de resultados

Esta sección está dedicada a demostrar que las hipótesis planteadas en el Capítulo lll fueron conseguidas.

En la sección 3.1 se colocó la siguiente hipótesis general:

- Existe solución optimal para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos.

Esto está demostrado claramente en el capítulo V literal f (Criterios de terminación) ya que se brinda una serie de pasos que solucionan un problema de programación lineal en dos niveles como está planteado en el capítulo V literal a (El modelo matemático del Problema de Programación Lineal en dos Niveles) usando algoritmos genéticos

Por otro lado, en la sección 3.1 se planteó las siguientes hipótesis específicas:

- H.E.1. Existe una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

- H.E.2. Es posible definir una función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.

Con respecto a la H.E.1, como se explicó en el paso 2 del algoritmo genético (véase capítulo V literal a) siempre se puede determinar una población inicial cuando se considere una región factible no vacía.

En el caso de la clase de problemas de programación lineal que se está considerando en este trabajo, esto siempre se tiene a partir del conjunto:

$$S = \{(x, y): x \in X; y \in Y;\ A_1x + B_1y \leq b_1;\ A_2x + B_2y \leq b_2\ \}$$

Con respecto a la H.E.2, la función de aptitud (también llamada función fitness) para una clase de problema de programación lineal en dos niveles está dada en el literal **d** del capítulo **V**, la cual es:

$$\Theta = \begin{cases} 1, & \text{si } \|y - Y(x)\| = 0 \\ 1 - \|\frac{y-Y(x)}{d}\|, & \text{si } 0 < \|y - Y(x)\| \leq d \\ 0, & \text{si } \|y - Y(x)\| > d \end{cases}$$

Con esto quedan verificadas todas las hipótesis planteadas en el presente trabajo.

6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

A partir de los resultados en la presente investigación tenemos que, estos resultados guardan relación con las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco Teórico:

a) Jiménez-Builes, J. A., Arango-Sanchez, R. E., & Jiménez-Pinzón, L. D. (2016) en su artículo titulado "Métodos de búsqueda usando los algoritmos de enjambre de partículas y genético. Lámpsakos, 1(16), 52-60", se propone diversos tipos de selección, siendo que se opta por la selección tipo torneo con la finalidad de obtener a los mejores individuos, uno de los motivos por los cuales en este trabajo también ha sido considerado el método de torneo.

b) de Freitas Alves, R. M., da Silva, F. N. R., Mota, D. P., Mysmar, D., & de Freitas Alves, S. M. (2017) en su artículo "SELEÇÃO DE PESSOAS POR MEIO DE ALGORITMOS GENÉTICOS", describen el comportamiento que tendrá la población al entrar en convergencia genética, es decir, todos los cromosomas son similares entre sí, y no hay una alta diversidad que permita obtener individuos con una mejor aptitud de forma análoga es que en el presente se visualizó la necesidad de aplicar el operador de mutación para generar diversidad en las nuevas generaciones.

6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

VI. CONCLUSIONES

Conclusión 1. Se ha probado que existe un conjunto de soluciones vía algoritmos genéticos para el problema de programación lineal en dos niveles, sin embargo, estas no siempre son las óptimas.

Conclusión 2. El problema de programación lineal puede ser resuelto mediante algoritmos genéticos, y se puede hallar el óptimo siempre que se pueda encontrar la población de convergencia genética.

Conclusión 3. En el desarrollo del presente trabajo se ha probado que siempre que se cumplan las condiciones o suposiciones de 5.1 (Espacio S sea acotado y no vacío) es posible obtener una población inicial y poder proceder mediante Algoritmo Genético.

Conclusión 4. Como se ha probado para una clase de programación lineal en dos niveles en el método de los Algoritmos Genéticos, es posible obtener una función de aptitud que no requiera condiciones demasiado complejas. Esto supera la dificultad de discutir las condiciones y los algoritmos de la solución óptima con la definición de la diferenciabilidad de la función.

VII. RECOMENDACIONES

1. En el presente estudio se consideró poblaciones uniformes generadas a partir del conjunto S, se recomienda explorar los casos en que las poblaciones sean diversificadas, con estas características el método de algoritmos genéticos debe ser generalizado.

2. Un problema de interés reciente en el estudio de la optimización es el problema "*nurse rostering problems*" *(NRP),* el cual ayuda a optimizar la repartición de turnos / pesos, sobre un cierto grupo de individuos / elementos. En este caso se recomienda explorar las estrategias planteadas en este trabajo con respecto al Algoritmo Genético puesto que se puede generar una optimización robusta.

3. En la actualidad, el estudio de la identificación de exploplanetas, planetas menores y/o asteroides es un problema de optimización en abierto que llama la atención de un sector representativo de la comunidad matemática. Se recomienda abordar el problema de optimización vía Algoritmos Genéticos puesto que la Función de Aptitud no requiere tantas condiciones de suavidad. Esto es una ventaja con relación a otros métodos.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bialas, W. F., & Karwan, M. H. (1984). Two-level linear programming. Management science, 30(8), 1004-1020.

2. Mathieu, R., Pittard, L., & Anandalingam, G. (1994). Genetic algorithm-based approach to bi-level linear programming. RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle, 28(1), 1-21.

3. Wang, G., Wan, Z., & Wang, X. (2005). Solving method for a class of bi-level linear programming based on genetic algorithms. In Proceedings of PDCAT conference (Vol. 35).

4. Bard, J. F. (2013). Practical bilevel optimization: algorithms and applications (Vol. 30). Springer Science & Business Media.

5. Belete-Fuentes, O., Zamora-Matamoros, R., & Caballero-Echevarría, D. (2017). Técnicas genéticas en la solución de un problema minero. Dyna, 84(203), 257-262.

6. Jiménez-Builes, J. A., Arango-Sanchez, R. E., & Jiménez-Pinzón, L. D. (2016). Métodos de búsqueda usando los algoritmos de enjambre de partículas y genético. Lámpsakos, 1(16), 52-60.

7. de Freitas Alves, R. M., da Silva, F. N. R., Mota, D. P., Mysmar, D., & de Freitas Alves, S. M. (2017). SELEÇÃO DE PESSOAS POR MEIO DE ALGORITMOS GENÉTICOS. Revista de Administração da Universidade Federal de Santa Maria, 10(2), 307-317.

8. Hañari Mamani, S. (2016). Algoritmos evolutivos aplicados a la generación de horarios para el colegio Aplicación de la UNA-PUNO.

9. Zegarra, R. H., Luján, Y. V., Castañeda, H. A., & Flores, J. V. (2018). OPTIMIZACIÓN DE RUTA CORTA USANDO ALGORITMO GENÉTICO GENERACIONAL. Ciencia & Desarrollo, (22), 50-57.

10. Revilla Lozano, J. C. P. (2016). Modelo de algoritmo genético para la programación de proyectos viales.

11. Shimizu, K., Ishizuka, Y. y Bard, JF (2012). Programación matemática no diferenciable y de dos niveles. Springer Science & Business Media.

12. Sakawa, M. (2012). Algoritmos genéticos y optimización multiobjetivo difusa (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

13. Michalewicz, Z. (2013). Genetic algorithms+ data structures= evolution programs. Springer Science & Business Media.

ANEXOS

Matriz de Consistencia

Tabla 3: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Problema General ¿Será posible encontrar una solución para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos? Problemas Específicos ¿Será posible definir una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles? ¿Será posible definir	Objetivo General Encontrar una solución para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos. Objetivos Específicos Definir una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles. Definir una función de aptitud en una	Hipótesis General Existe solución para una clase de problema de programación lineal en dos niveles vía algoritmos genéticos. Hipótesis Especificas Existe una población en una clase de problema de programación lineal en dos niveles. Es posible definir una	Tipo de investigación La investigación se enmarca en el tipo de investigación básica ya que se busca incrementar los conocimientos científicos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico. Diseño de investigación El diseño de investigación que se tomará por pertinente ha sido el diseño no experimental ya	La población y muestra no se aplica para este tipo de proyecto.

una función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles?	clase de problema de programación lineal en dos niveles.	función de aptitud en una clase de problema de programación lineal en dos niveles.	que no se manipularán deliberadamente las variables de estudio. En función al propósito investigativo, que surge de la intención del investigador en profundizar el conocimiento sobre la realidad analizada, por ende, el nivel investigativo que asumirá esta investigación será el descriptivo. El enfoque de la investigación es cualitativo ya que se busca interpretar y comprender el problema de investigación.	

			La investigación es tipo documental ya que se procura obtener, seleccionar, compilar, organizar, interpretar y analizar información sobre las variables de estudio a partir de fuentes documentales, tales como libros, documentos de archivo, hemerografía, registros audiovisuales, entre otros. La investigación se desarrollará teniendo en cuenta un diseño del tipo	

			inductivo – deductivo, tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.	

Fuente: Elaboración de los autores