UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y SISTEMAS

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD INGENIERÍA INDUSTRIAL Y SISTEMAS

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“ELEVACIÓN DE CAMINOS Y TEORÍA SIMPLICIAL EN LOS GRUPOS DE HOMOTOPÍA DE LA ESFERA Y SUS APLICACIONES EN LA INGENIERÍA DE SISTEMAS”

INVESTIGADOR RESPONSABLE:
Dr. Ruben Dario Mendoza Arenas

DOCENTE COLABORADOR:
Ing. Omar Túpac Amaru Castillo Paredes

Período de Ejecución: Del 01 de agosto 2022 al 31 de julio 2023

Resolución de Aprobación N° 578-2022-R

Callao, 2022

Dedicatoria

A Dios por darme la vida, a mi madre María Teresa porque desde el cielo me guía por un buen sendero y a mi familia que es el soporte material y emocional para el logro de mis objetivos personales y profesionales.

Agradecimiento

A todas las personas que han contribuido en la elaboración de esta Investigación; y en especial al colega y amigo Ing. Omar Túpac Amaru Castillo Paredes, por su valioso aporte en las aplicaciones a la Ingeniería en el desarrollo del presente proyecto de investigación.

ÍNDICE

Resumen

La investigación desarrollada tiene como objetivo: Demostrar cómo influye la teoría Simplicial y la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas. El objeto de estudio es la descripción breve de los Complejos Simpliciales y de la teoría de Homotopía, necesarias para llegar a la demostración de que $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, llamado el Teorema de Hurewicz. La Investigación es de tipo básica, pura o fundamental, Diseño No Experimental, Método Hipotético inductivo-deductivo; no existe población y muestra y la hipótesis general es: La teoría Simplicial y la elevación de caminos influye en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas. El principal aporte novedoso de la presente investigación son las aplicaciones de la teoría de homotopía y complejos simpliciales en la Ingeniería de Sistemas, para lo cual en la técnica de recolección de datos se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.

Palabras clave: Homotopía, Complejos Simpliciales, Grupo fundamental.

Abstract

The research carried out aims to: Demonstrate how the Simplicial theory and the elevation of paths influence the Calculation of the homotopy group of the sphere and its applications in Systems Engineering. The object of study is the brief description of the Simplicial Complexes and the Homotopy theory, necessary to arrive at the demonstration that $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, called the Hurewicz Theorem. The research is of a basic, pure or fundamental type, Non-Experimental Design, Hypothetical inductive-deductive Method; There is no population and sample and the general hypothesis is: The Simplicial theory and the elevation of paths influence the Calculation of the homotopy group of the sphere and its applications in Systems engineering. The main novel contribution of this research is the applications of the theory of homotopy and simplicial complexes in Systems Engineering, for which specialized bibliography and collection of information obtained related to the topic of interest were reviewed in the data collection technique.

Keywords: Homotopy, Simplicial Complexes, Fundamental Group.

INTRODUCCIÓN

El grupo fundamental fue introducido por el gran matemático francés Henri Poincaré en 1895, como podemos ver en Poincaré (1895, pp. 1-121). La noción de dos espacios que son del mismo tipo de homotopía fue introducida por Witold Hurewicz en una serie de cuatro artículos en 1935-36, aparecidos en los Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen. En estos artículos Hurewicz introdujo también los grupos de homotopía, análogos en dimensión superior al grupo fundamental. Estas ideas de Hurewicz han jugado un papel esencial en la topología algebraica desde 1935, en particular el cálculo del grupo de homotopía $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ usando elevación de caminos.

En general no siempre es fácil estudiar completamente cualquier espacio topológico, para lo cual se ha venido restringiendo dichos estudios a espacios con estructuras adicionales. Un caso particular es el de los espacios llamados poliedros, los cuales tienen la característica de ser triangulables, y por lo tanto reducen su estudio como espacio topológico.

Henri Poincaré (1854-1912) introduce la subdivisión baricéntrica sobre poliedros obteniendo resultados innovadores en la topología algebraica.

Por otro lado la noción de aplicación Simplicial entre poliedros fue introducida por L.E.J. Brouwer (1881-1967) obteniéndose inclusive la subdivisión baricéntrica relativa a un subcomplejo Simplicial, vistas en May (1967).

En este trabajo estableceremos dos maneras de demostrar que $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, una forma es usando Teoría de Elevación de Caminos en base a la teoría de Homotopía y la otra es describir a un poliedro a partir de un complejo Simplicial, aproximar complejos Simpliciales y calcular $\pi_r(S^n)$ para $r \leq n$, con estos tópicos y buscaremos aplicaciones a la Ingeniería de Sistemas usando la subdivisión baricéntrica que nos da una idea de una triangulación con aplicaciones a la Robótica.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de homotopía es la descripción y el cálculo de los grupos fundamentales.

Conociendo la teoría de complejos Simpliciales y la elevación de caminos se presenta la siguiente problemática:

¿Si se tienen dos complejos Simpliciales existirá alguna aproximación entre ellos?

¿Teniendo una aproximación entre complejos Simpliciales se podrá determinar algunos de los grupos de homotopía $\pi_r(S^n)$?

¿Cuál será el mejor método para demostrar que el primer Grupo de Homotopía de la Esfera es $\mathbb{Z}$?

¿Habrá aplicaciones de estos tópicos tan abstractos en la Ingeniería, particularmente en la Ingeniería de Sistemas?

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿De qué manera la teoría Simplicial y la elevación de caminos influyen en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas?

1.2.2. Problemas específicos

¿De qué manera la teoría Simplicial influye en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas?

¿De qué manera la elevación de caminos influye en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Demostrar cómo influye la teoría Simplicial y la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera.

1.3.2. Objetivos específicos

Demostrar cómo influye la teoría Simplicial en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones.

Demostrar cómo influye la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones.

1.4. Justificación

Uno de los grandes alcances de la Teoría de homotopía gira en la identificación de espacios homeomorfos.

Si los grupos de homotopía de ciertos espacios no son isomorfos, entonces no existirá homeomorfismo entre ellos.

Por otro lado la teoría de homotopía me permite resolver el Teorema Fundamental del Algebra y el Teorema del Punto Fijo en Análisis y Geometría Diferencial.

Además en teoría de homotopía este trabajo me permite identificar los grupos fundamentales de las esferas, en el cual usamos los complejos Simpliciales geométricos y el teorema de aproximación Simplicial.

En el desarrollo de la Teoría de Complejos Simpliciales vemos que en la subdivisión baricéntrica hay aplicaciones en Triangulación que puede ser usado en la Ingeniería de Sistemas (es lo que se pretende en este trabajo de investigación).

1.5. Limitantes de la investigación

1.5.1. Limitante teórico

Debido a la naturaleza teórica del presente trabajo, se requirió una profunda revisión de material bibliográfico principalmente de artículos científicos, los cuales conllevan un costo para ser conseguidos. Esto presentó una principal limitación en la búsqueda de nuevas teorías para el desarrollo de esta investigación.

1.5.2. Limitante temporal

Debido al COVID, en los tiempos, los desplazamientos y en las reuniones generan también una cierta limitación. Hay una sobrecarga laboral desde casa, lo que impide muchas veces tener tiempo en la dedicación exclusiva para la investigación.

1.5.3. Limitante espacial

Debido a la pandemia generada por el COVID, se tiene restricciones en la movilidad espacial en el sentido que no se pueden visitar libremente bibliotecas y centros de investigación a las horas pertinentes, lo que imposibilita un trabajo de campo óptimo.

Esto presenta una cierta limitación para el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Nivel internacional

Valdora (2005), en su tesis titulada: Teoría de homotopía para poliedros, en el primer capítulo hace un repaso las definiciones y resultados clásicos de los complejos Simpliciales. Estudia las nociones de triangulación, subdivisión, contigüidad y aproximación Simplicial. También analiza algunos ejemplos y construcciones originales (como la del complejo Simplicial $C(K)$ cuya 3 realización coincide con $|K| \times I$ y hace un análisis de los límites y colímites de complejos Simpliciales. Veremos, entre otras cosas, que la realización de un complejo Simplicial no preserva, en general, límites ni colímites. Para remediar este hecho, se realizan construcciones alternativas, como la del complejo $C(K)$ que nombramos arriba. En el segundo capítulo desarrollamos la teoría de homotopía en este contexto, utilizando la familia de modelos combinatorios del intervalo topológico y en el último capítulo, ejemplifica como pueden ser utilizadas estas herramientas para calcular algunos grupos fundamentales.

Rodríguez (2010), en su tesis titulada: Versiones combinatorias de la dualidad de Alexander, En el primer capítulo repasamos los elementos básicos de los complejos Simpliciales, los grupos de homología, la construcción del nervio de un complejo y las herramientas más elementales de la teoría de homotopía simple. También analizamos la dualidad de Alexander combinatoria y topológica y damos una demostración original de la relación entre ambas. Motivados por la relación entre un complejo Simplicial y su dual a nivel 2homología, estudiamos si hay alguna relación a nivel del grupo fundamental. En el segundo capítulo repasamos las nociones básicas sobre espacios topológicos finitos 0 y su correspondencia con los posets. Además estudiamos las funciones de McCord que relacionan los complejos Simpliciales con los espacios finitos. En el tercer capítulo repasamos los métodos de reducción de un punto, introducidos recientemente por Barmak y Minian. Básicamente estos métodos analizan el comportamiento homotópico de un espacio finito al eliminar un punto del mismo que cumpla ciertas propiedades. En el capítulo final estudiamos con más detalle a los lattices reducidos, que forman una clase particular de posets. Estudiamos con detalle las construcciones y que son aplicables a lattices reducidos y que fueron introducidas por Barmak (2014). Introducimos aquí las dos versiones de dual en este contexto y probamos dos versiones de la dualidad de Alexander, extendiendo la versión Simplicial. En las últimas secciones de la tesis mostramos algunas aplicaciones para el estudio de esferas homológicas y homotópicas.

Mora de la Cruz (2017), en la tesis: Aspectos algorítmicos y computacionales en Teoría de Morse Discreta, explica que una de las herramientas más utilizadas en el ATD es la teoría de Morse discreta, desarrollada por Robin Forman en 1998, esta es una adaptación discreta de la teoría de Morse y pretende encontrar un método más económico para calcular la homología Simplicial de un complejo Simplicial abstracto. Dicho método consiste en calcular una función real $f : K \to \mathbb{R}$ definida sobre un complejo Simplicial abstracto K asociado a un conjunto de datos, llamada función de Morse discreta.

2.1.2. Investigaciones nacionales

Mosquera (2021), en la tesis: Fundamentos de topología algebraica: el teorema de Seifert Van Kampen, En este trabajo de tesis se prueba el teorema de Seifert Van Kampen, que es un teorema fundamental de la topología algebraica. Este teorema presenta un método general para calcular grupos fundamentales de espacios topológicos. Se considera un espacio topológico X, que es la unión de los conjuntos abiertos conexos por caminos $A, B \subset X$; cuya intersección $A'capB = \emptyset$ también es conexa por caminos y además consideraremos un punto base $x_0 \in A \cap B$. Entonces se puede calcular el grupo fundamental de X a partir de los grupos fundamentales de A y B. Además se caracteriza al grupo fundamental de X y se da unas aplicaciones muy útiles como el grupo fundamental del toro y el grupo fundamental del plano proyectivo real.

Domínguez (2012), en la tesis: Grupos de homotopía de grupos Simpliciales, realiza un Estudio de los grupos de homotopía y algunos problemas relacionados usando teoría de homotopía simplicial. Los grupos de homotopía son dados como centros de grupos que admiten descripción combinatoria natural.

Núñez (2012), en la tesis: Isomorfismo entre los grupos de homotopía de los delta grupos de clases de difeomorfismos y de trenzas sobre superficies, describe la estructura de conjuntos, homología de conjuntos y la estructura de grupos cruzados para dar cabida a la construcción de estructuras en el grupos de trenzas y el grupo de clases de difeomorfismos con la finalidad de discutir la relación que éstas tienen y así establecer un isomorfismo entre ellas.

2.2 MARCO:

2.2.1. BASES TEÓRICAS

Homotopía y Cálculo del Grupo Fundamental de la CIrcunferencia

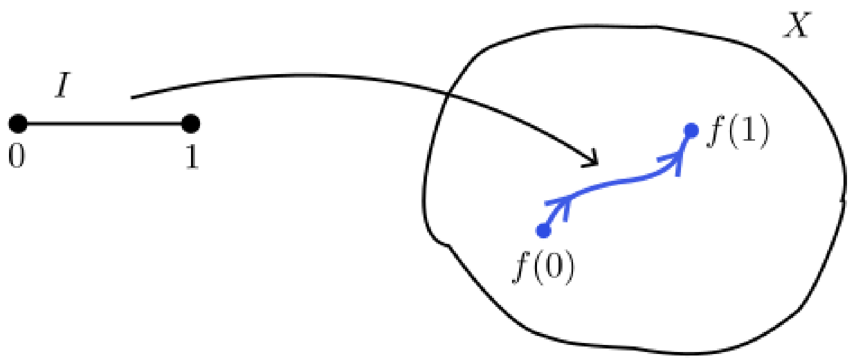
Definición 2.8. Un espacio topológico es un conjunto X con una familia de subconjuntos abiertos llamados **abiertos**. Por ejemplo, en la recta real $\mathbb{R}$ tenemos los intervalos abiertos, más generalmente, en $\mathbb{R}^n$ -o más aún en un espacio métrico- tenemos las bolas abiertas. Estos conjuntos abiertos son importantes porque nos permiten, entre otras cosas, establecer los conceptos de limite y continuidad de funciones.

Definición 2.9. Una biyección continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos tal que su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es continua es llamada un **homeomorfismo**. En este caso diremos que los espacios X e Y son homeomorfos. Un problema central de la Topología es determinar cuando dos espacios dados son homeomorfos, este problema está aún sin resolver y al parecer su solución todavía está muy lejana.

En el camino a la solución del problema planteado se han desarrollado diferentes técnicas, entre ellas recurrir al apoyo del Álgebra. Para esto a cada espacio topológico se le asocia un Grupo, que en nuestro caso será llamado **Grupo Fundamental** o **Primer Grupo de Homotopía**. La idea es que “a espacios homeomorfos les corresponden grupos isomorfos”. Lamentablemente el recírproco no es cierto, así existen espacios NO homeomorfos cuyos grupos asociados SÍ son isomorfos. Por lo tanto, esta técnica de asociar un grupo a cada espacio topológico sirve, más que nada, para determinar cuando dos espacio NO son homeomorfos, lo que ya es un gran avance.

En lo que sigue I siempre denotará el intervalo $[0, 1]$.

Definición 2 .10. Por un camino en un espacio topológico X entenderemos cualquier función continua $f : I \to X$



donde las flechas indican que el camino es recorrido desde $f(0)$ a $f(a)$.

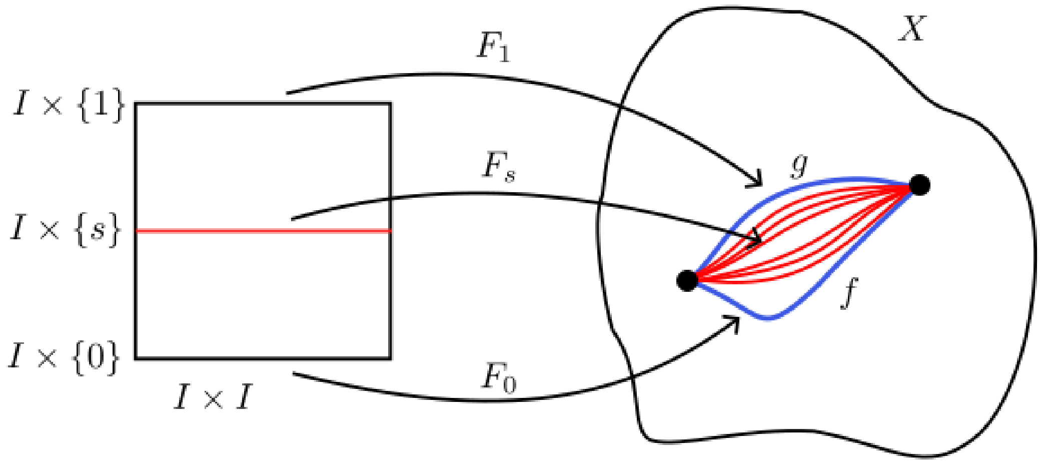
Sean $f, g : I \to X$ caminos en X tales que $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$. Entonces, f es *homotópica* a g si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que:

a. $F(t, 0) = f(t), \forall\, t \in I$,

b. $F(t, 1) = g(t), \forall\, t \in I$,

c. $F(0, s) = f(0)$ y $F(1, s) = f(1), \forall\, s \in I$.

Denotando $F_s : I \to X$ tal que $F_s(t) = F(t, s)$, intuitivamente, la noción de homotopía entre los caminos f y g la podemos interpretar como si el camino f se fuese deformando continuamente, a través de los caminos F_s, hasta convertirse en g, como en la siguiente figura:



En la figura $F_0 = f$, $F_1 = g$ y F_s es un camino que comienza en $F_s(0) = f(0) = g(0)$ y termina en $F_s(1) = f(1) = g(1)$ para cada $s \in I$. Denotamos esto por

$$f \sim g$$

Lema 2.7. *Sean $f, g : I \to X$ caminos en X tales que $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$. Sea $\alpha : X \to Y$ conntinua. Si $f \sim g$, entonces*

$$\alpha \circ g \sim \alpha \circ g$$

Note que $\alpha \circ f$ y $\alpha \circ g$ son caminos en Y.

Proposición 2.8. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los caminos de X que tiene el mismo punto inicial y el mismo punto final.*

Denotemos con $[f]$ la clase de equivalencia, según la relación de homotopía del camino f.

Una vez que a cada espacio topológico X le hemos asociado su Grupo Fundamental $(\pi_1(X), x_0)$ la tarea ahora es quien es exactamente $(\pi_1(X), x_0)$, matemáticamente hablando el problem a es determinar, salvo isomorfismos, el Grupo Fundamental de X. Para esto necesitaremos más herramientas teóricas, como el concepto de Espacio de Cubrimiento.

Definición 2.12. Un **espacio de cubrimiento** de un espacio topológico X es un par $(\tilde{X}, p)$, donde $\tilde{X}$ es un espacio topológico y $p : \tilde{X} \to X$ es una aplicación continua verificando la siguiente propiedad: Existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $p^{-1}(U_i)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en $\tilde{X}$, cada uno de los cuales es homeomorfo, bajo p, a U_i, y esto es para cada $i \in I$.

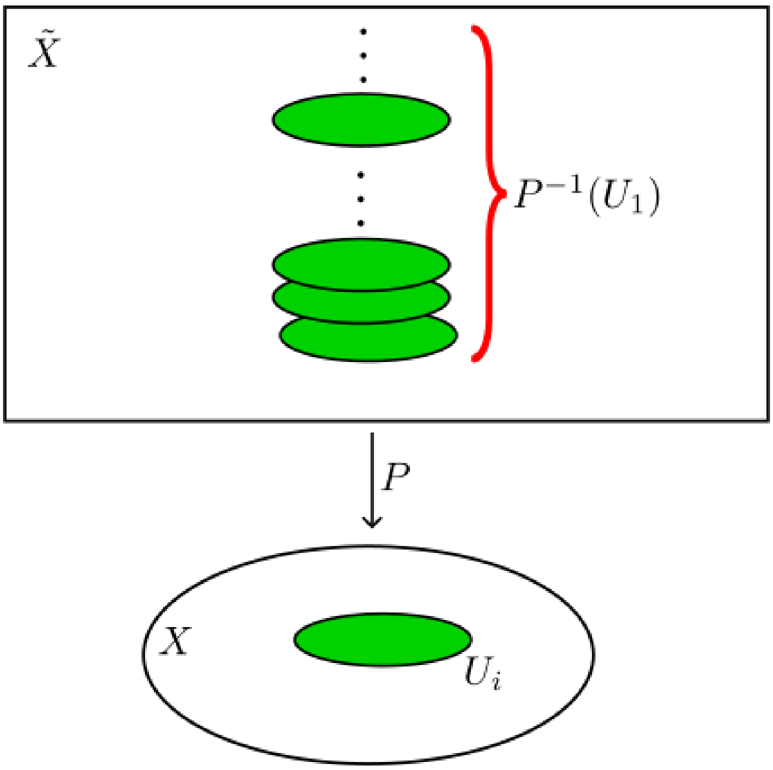


Figura 2.4: Idea gráfica del espacio de cubrimiento

$\mathbb{R}$ es un cubrimiento de S^1

Denotaremos con

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

la circunferencia unitaria en el Plano.

S^1 es un espacio topológico con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ (Esto es: los abiertos de S^1 son de la forma $A \cap S^1$, donde A es un abierto de $\mathbb{R}^2$).

Considere la aplicación continua $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por

$$p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Demostraremos que el par $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio de cubrimiento para la circunferencia S^1. Para mostrar esto, por cuestiones didácticas trabajaremos todo en $\mathbb{R}^3$, para esto haremos las siguientes identificaciones:

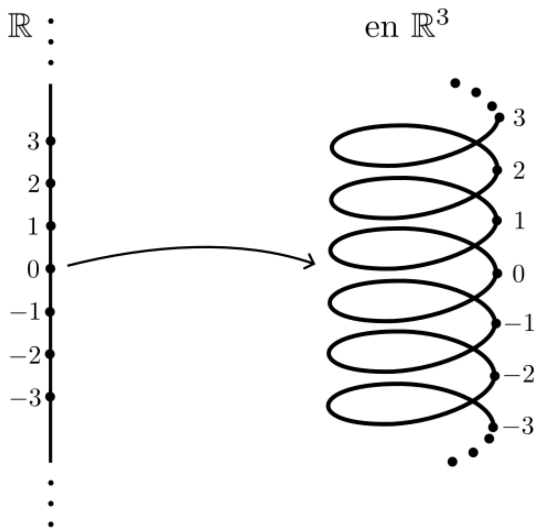


Figura 2.5: Identificamos la recta $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ con un serpetín o resorte

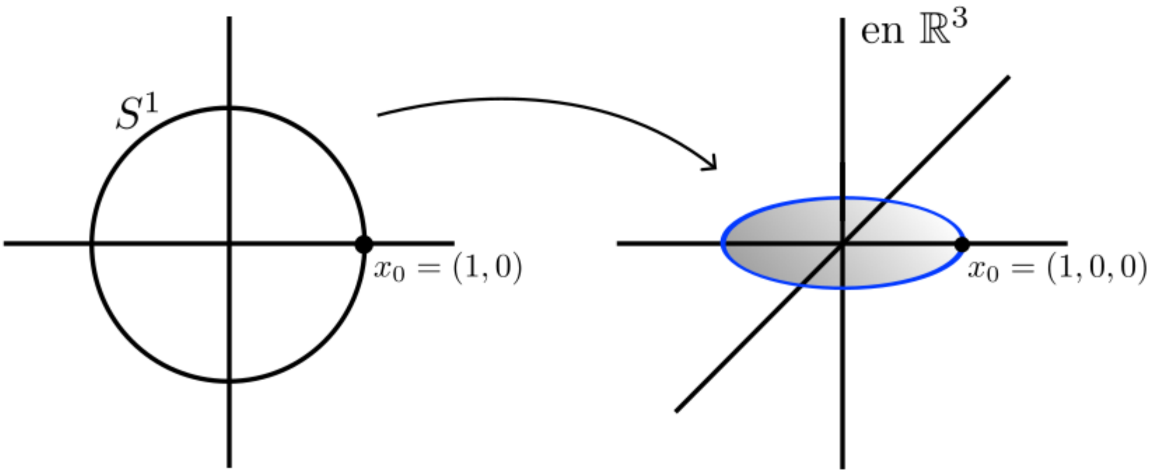


Figura 2.6: En esta identificación la apliciación p anteriormente definida se convierte en la proyección sobre el plano XY

Esto último significa que

$$p(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Simultáneamente

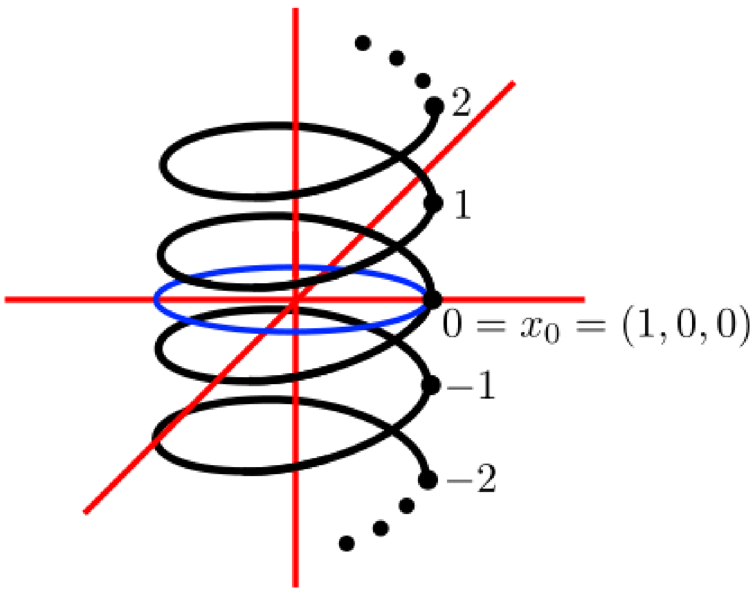


Figura 2.7: Interpretación conjunta de las identificaciones

Note que al identificar tenemos

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
2 &= (1,0,2) \\
1 &= (1,0,1) \\
0 &= (1,0,0) = x_0 \\
-1 &= (1,0,-1) \\
-2 &= (1,0,-2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En S^1 considere los abiertos U y V como en la figura

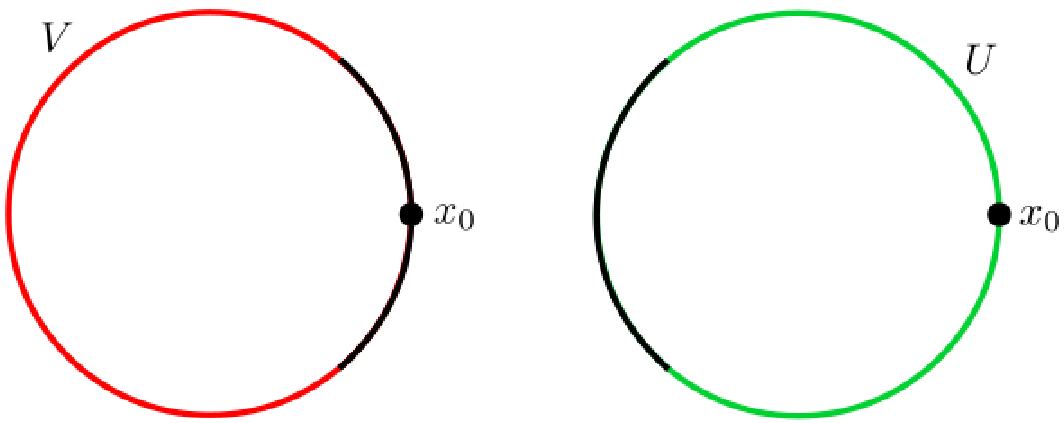


Figura 2.8: U y V son tales que $S^1 = U \cup V$

Así $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de S^1.

Con nuestra identificación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ como un resorte se puede mostrar claramente lo siguiente

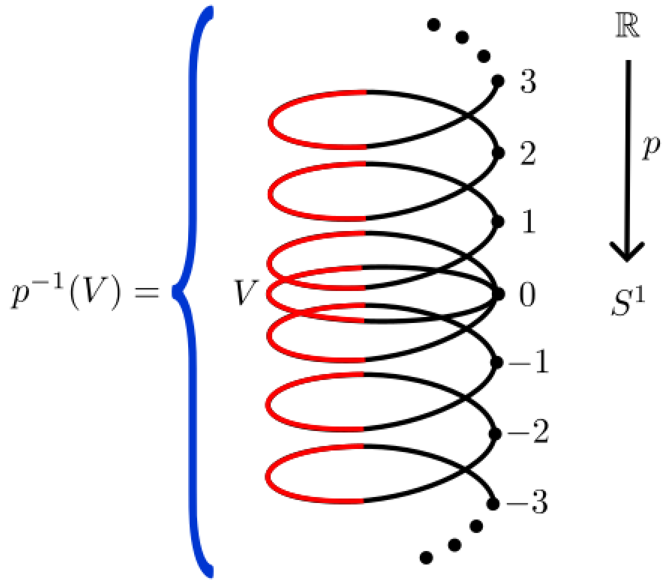


Figura 2.9: $p^{-1}(V)$ es una unión disjunta de abiertos en $\mathbb{R}$ (los pintados de rojo) cada uno de los cuales es homeomorfo a V.

Esto mismo también ocurre con $p^{-1}(U)$ como se muestra

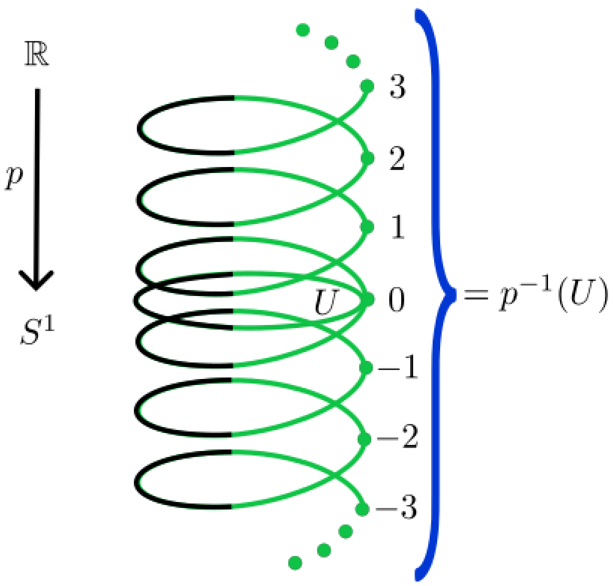


Figura 2.10: $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos en $\mathbb{R}$(los pintados de verde)

cada uno de los cuales es homeomorfo a IR.

Por tanto, se ha mostrado que el par $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio de cubrimiento de S^1.

Definición 2.13. Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de cubrimiento de X, sea $f : Y \to X$ una aplicación continua. Un **levantamiento** de f es una aplicación continua $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$

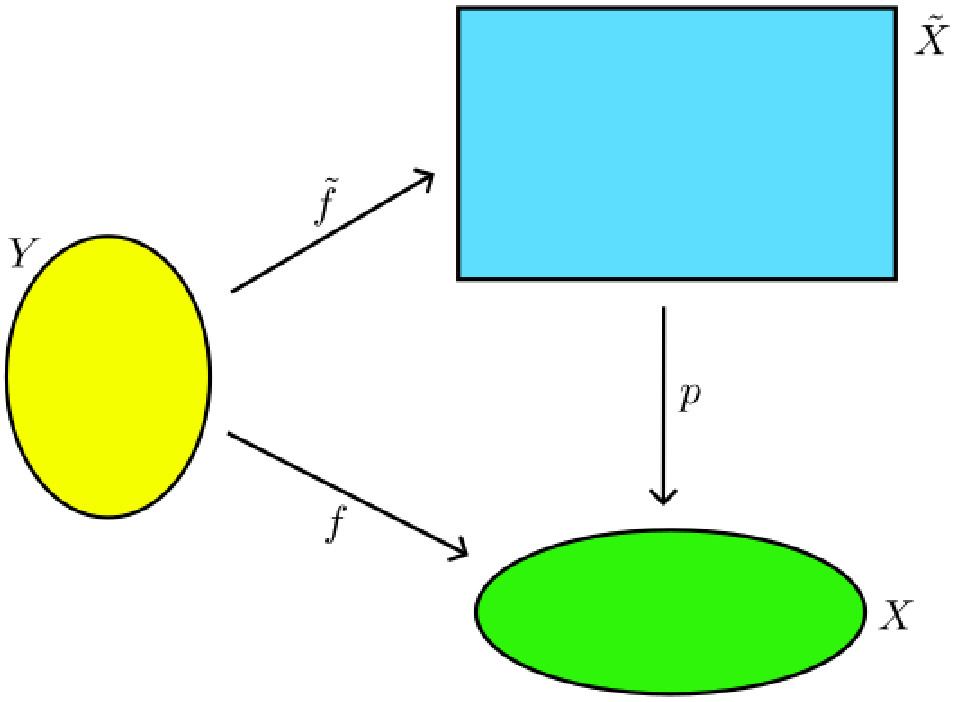


Figura 2.11: Idea gráfica de levantamiento

***Ejemplo* 2.2.** Sea $\omega_n : I \to S^1$ tal que $\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Note que ω_n es un lazo que comienza en $x_0 = (1, 0)$, da $|n|$ vueltas al círculo S^1, si $n \neq 0$, y termina en $x_0 = (1, 0)$. Si $n = 0$, ω_0 es la función constante $(1, 0)$.

Recordemos que hemos identificado $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ como una especie de resorte.

En esta identificación el intervalo $[0, 1]$ se identifica con la vuelta del resorte en 0 y termina en 1. El intervalo $[0, 2]$ se identifica con las dos primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0.

En general el intervalo $[0, n]$ se identifica con las n primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0. Si $n < 0$, el intervalo $[n, 0]$ se identifica con las $-n$ primeras vueltas del resorte hacia abajo comenzando del 0.

Sea $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ el camino $\tilde{\omega}_n(s) = ns$, note que este camino comienza en o y termina en n, por tanto su imagen en el intervalo $[0, n]$ o $[n, 0]$ según sea n positivo o negativo respectivamente, y por nuestra definición $\tilde{\omega}_n$ es el camino que comienza en 0 y recorre las $|n|$ primeras vueltas hacia arriba o hacia abajo del resorte.

Así por ejemplo

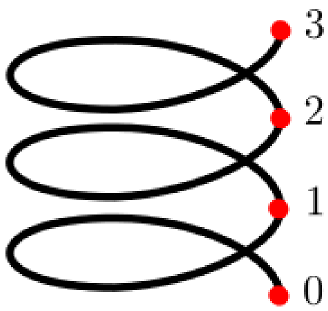


Figura 2.12: $\tilde{\omega}_3$ comienza en 0 y da tres vueltas hacia arriba del resorte.

Claramente si proyectamos $\tilde{\omega}_3$ sobre el plano XY obtendremos la circunferencia S^1 pero recorrida 3 veces, uno por cada vuelta del resorte, esto es, $p \circ \tilde{\omega}_3 = \omega_3$.

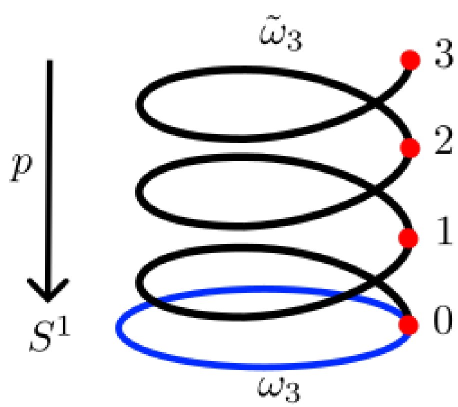


Figura 2.13: Proyección sobre el plano XY.

En general $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. Por tanto, hemos mostrado que $\tilde{\omega}_n$ es un levantamiento de ω_n para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Levantamiento de caminos

Todo espacio de cubrimiento posee la siguiente propiedad de levantamiento.

Proposición 2.11 (Propiedad de Levantamiento de caminos). *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de cubrimiento de X, sea $f : I \to X$ un camino que comienza en $x_0 \in X$. Entonces, para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un único camino $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ que comienza en $\tilde{x}_0$ y es un levantamiento de f.*

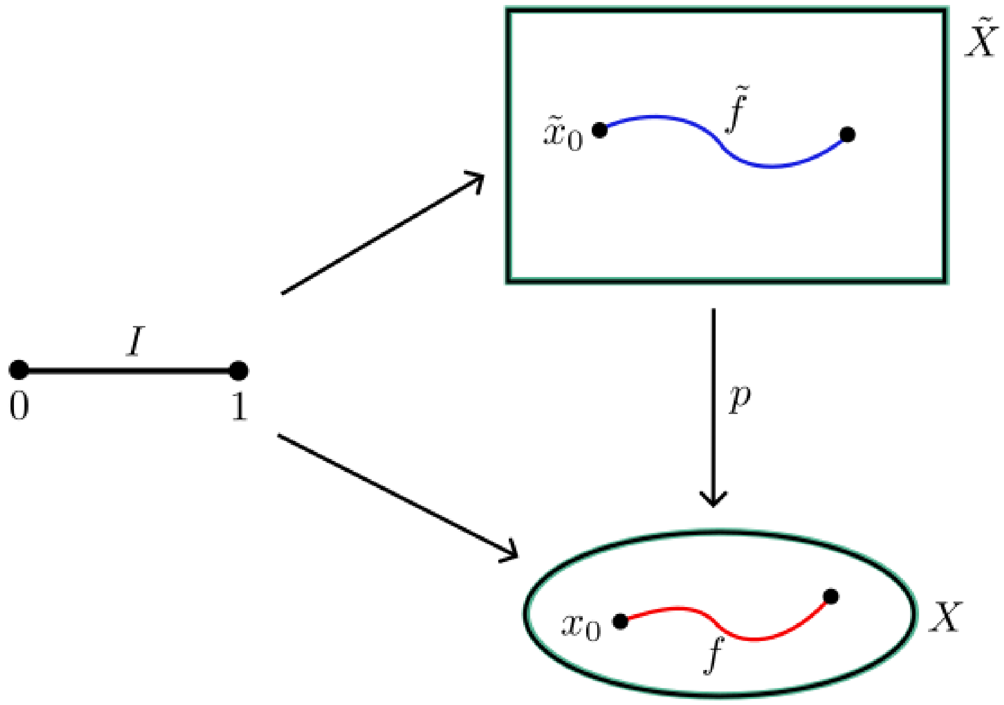


Figura 2.14: Idea gráfica de levantamiento de caminos

Se cumple que $p \circ \tilde{f} = f$, donde $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Como una observación, note que en nuestra identificación, los puntos que se proyectan sobre $x_0 = 0$ son precisamente los números enteros.

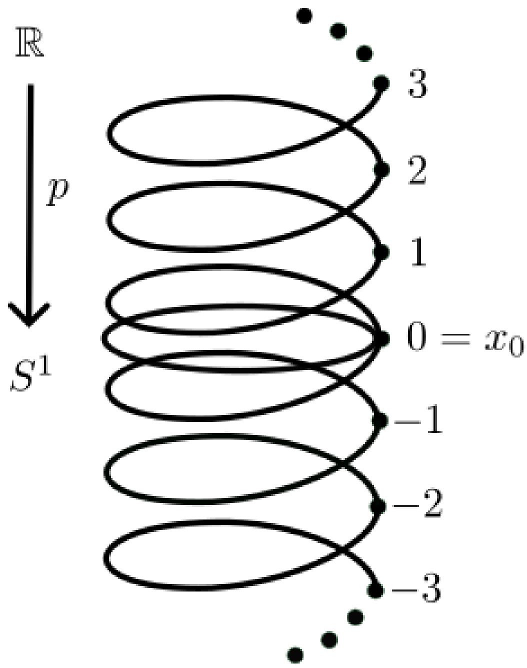


Figura 2.15: Proyección de los números enteros

$$\ldots = p(-3) = p(-2) = p(-1) = \underbrace{x_0}_{=0} = p(1) = p(2) = p(3) = \ldots$$

por tanto

$$p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$$

Definición 2.14. Sea f un lazo en S^1 que comienza y termina en x_0, esto es

$$f(0) = x_0 = f(1)$$

Por la propiedad de levantamiento de caminos, existe un único levantamiento $\tilde{f}$

que comienza en 0. Ahora

$$\tilde{f}(1) \in p^{-1}(p(\tilde{f}(1))) = p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$$

de donde $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$.

Al entero $\tilde{f}(1)$ lo llamaremos **el grado** de f, y lo denotaremos $\deg f$.

Usaremos los conceptos de espacio de cubrimiento, levantamiento de caminos y grado de un lazo para calcular el Grupo Fundamental de S^1. Antes enunciamos el siguiente lema:

Lema 2.12. *Si X es un espacio topológico, entonces $\pi_1(X) = 0$.*

La prueba del anterior lema se puede interpretar como sigue

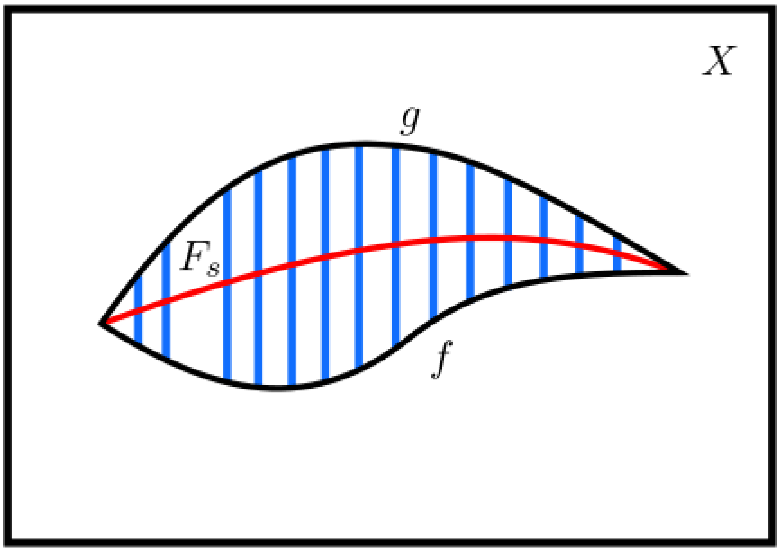


Figura 2.16: Idea gráfica d e l a p rueba d el lema

Demostración. Bastará mostrar que todo par de caminos con los mismos puntos extremos en X son homotópicos (en particular los lazos).

Sean f, g dos caminos cualesquiera en X que tienen los mismos puntos extremos. Basta considerar la homotopía dada por

$$F_s(t) = (1 - s)f(t) + sg(t)$$

para todo $t \in I$ y todo $s \in I$. ■

3. TEORÍA DE COMPLEJOS SIMPLICIALES

3.1. Simplex

Un conjunto $\{a^0, \ldots, a^n\}$ de $(n+1)$ puntos de $\mathbb{R}^n$ es llamado *geométricamente independiente* si los vectores $a^1 - a^0$, $a^2 - a^0$, ..., $a^n - a^0$ son linealmente independientes.

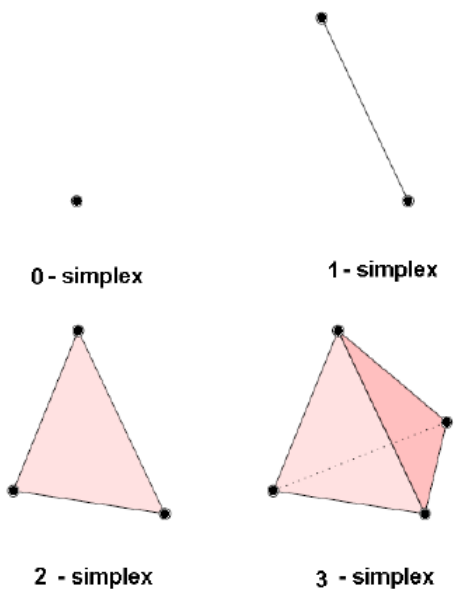
Dado un conjunto $\{a^0, \ldots, a^n\}$ geométricamente independiente, llamaremos *n-simplejo geométrico* al conjunto

$$\sigma^n = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i a^i : t_i \geq 0 \ \wedge \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

considerando con la topología relativa usual de $\mathbb{R}^n$. Los a^i son llamados los *vértices* de σ^n, los números t_i son llamados *coordenadas baricéntricas* de x con respecto a los vértices a^i. El entero no negativo n es llamado la *dimensión de* σ. Escribiremos abreviadamente

$$\sigma = a^0 a^1 \ldots a^n$$

Ejemplos:



(en cada caso incluye el interior)

3.2. Complejo Simplicial

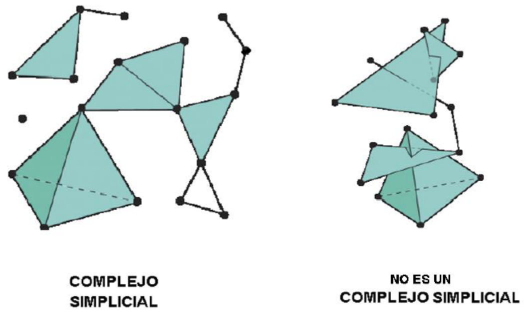
Dado un subconjunto $\{a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\}$ de $\{a^0, \ldots, a^n\}$ con $0 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_r \leq n$, el conjunto

$$\tau^r := \left\{ x = \sum_{j=0}^{r} t_j a^{i_j} : t_j \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{r} t_i = 1 \right\}$$

es llamada una *cara* de σ^n. Una *cara propia* es una cara de σ distinta de σ.

Un *complejo simplicial* es una colección de símplices que comparten a lo más una cara pero no su interior.

Ejemplo:



3.3. El poliedro de un complejo simplicial

Sea K un complejo simplicial, considere

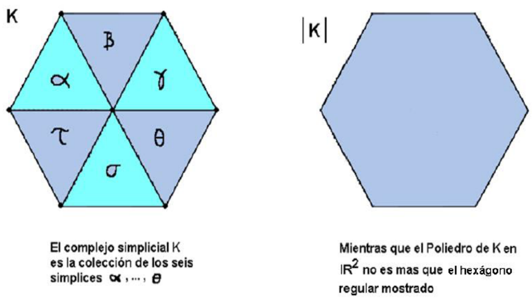
$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

la unión de todos los simplejos de K.

Definamos $|K|$ una topología como sigue: Un subconjunto A de $|K|$ será cerrado en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ, para cada simplejo $\sigma \in K$.

El conjunto $|K|$ provisto de esta topología será llamado el *poliedro* de K.

Ejemplo:



3.4. Aplicación Simplicial

Definición 3.1. Dados dos complejos simpliciales K y L, una aplicación $f : |K| \to |L|$ será llamada una *aplicación simplicial* si:

(1) Si a es un vértice de K, entonces, $f(a)$ es un vértice de L.

(2) Si $a^0a^1 \dots a^n$ es un simplex de K, entonces, $f(a^0), f(a^1), \dots, f(a^n)$ generan un simplex de L (note que los $f(a^i)$ pueden no ser todos distintos).

(3) Si $x = \sum_{i=0}^{n} t_i a^i$ es un punto en un simplex $a^0 a^1 \ldots a^n$ de K, entonces,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(a^i)$$

Esto es, f es *lineal* sobre cada simplex.

Observación: Toda aplicación simplicial es continua.

3.5. Aproximación simplicial

Definición 3.4.2. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua. Una aplicación simplicial $g : |K| \to |L|$ es llamada una *aproximación simplicial* de f, si para cada vértice v de K

$$f(St(v, K)) \subseteq St(g(v), L)$$

Observación: La composición de aproximaciones simpliciales es una aproximación simplicial.

Un resultado clave de nuestro trabajo es el siguiente:

Proposición 3.1. *Sean K, L dos complejos simpliciales y $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua. Cualquier aproximación simplicial g de f es homotópica a f relativo al subespacio de $|K|$ de aquellos puntos x para los cuales $f(x) = g(x)$.*

Este resultado nos permitirá al trabajar con clases de Homotopía elegir un representante simplicial de cada clase, lo que nos será de gran utilidad en las aplicaciones.

2.6. Subdivisión baricéntrica

Definición 3.3. Sea $\sigma = v^0 v^1 \ldots v^n$ un n-simplex. El *baricentro* de σ se define como el punto

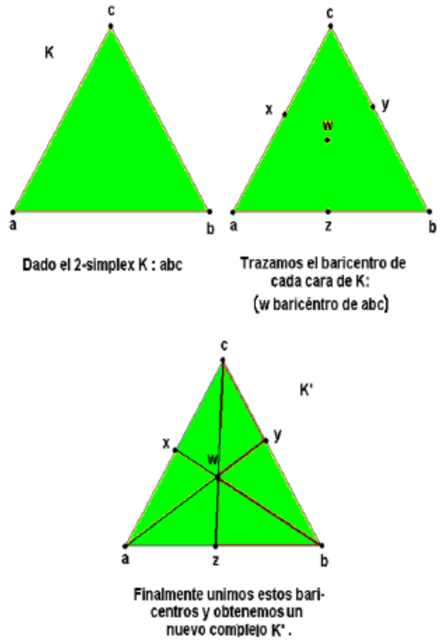
$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v^i$$

que es el único punto en Inσ cuyas coordenadas son todas iguales.

Si σ es un 1-simplex, entonces $\widehat{\sigma}$ es el punto medio. Si σ es un 0-simplex, entonces $\widehat{\sigma} = \sigma$. En general, $\widehat{\sigma}$ es el centroide de σ.

Definición 3.4. Una *subdivisión baricéntrica* es un proceso de refinamiento por el cual a partir de un complejo simplicial K obtenemos un nuevo complejo simplicial K' con más simplices, pero de tal manera que $|K'|$ sea igual a K.

Ejemplo:



Note que una subdivisión baricéntrica preserva la dimensión, esto es, dim$K$ = dimK'. Denotamos la subdivisión baricéntrica de K como $sd(K)$.

El proceso de subdivisión baricéntrica puede ser iterada

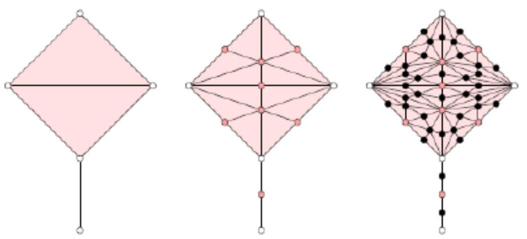
$$sd^{n+1}(K) = sd(sd^n(K))$$

Obteniendo una familia de complejos simpliciales, todos con el mismo poliedro y la misma dimensión. Claramente, al menos en el caso finito, en cada iteración los símplices son cada vez más pequeños. Enunciamos esto como un Teorema:

Teorema 3.2. *Dado un complejo simplicial finito K y un $\epsilon > 0$ cualquiera, entonces, existe un entero positivo N tal que cada simplejo en $sd^N K$ tiene diámetro menor que ϵ.*

Teorema 3.3 (Aproximación Simplicial Relativa). *Sean K, L complejos simpliciales y A un subcomplejo de K. Sea $|K|$ compacto y supongamos que solo existe un número finito de simplejos en $K \setminus A$. Sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua tal que $f|_{|A|}$ es simplicial. Entonces existe N tal que la composición f tiene una aproximación simplicial $g : sd^N(K, A) \to L$ tal que $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ y g es homotópica a f relativa a $|A|$.*

Ejemplo de iteración $sd^2(K)$:



K sd(K) $sd^2(K) = sd(sd(K))$

IMPORTANCIA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En este sección, daremos una teoría resumida de resultados preliminares a las aplicaciones de los Complejos Simpliciales en la Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Informática, entre otras.

Aplicaciones de los Complejos Simpliciales en la Ingeniería de sistemas

En el capítulo anterior, se vieron las definiciones de símplices, complejos simpliciales y poliedros. En base a estas definiciones c o n s u s r espectivos e j emplos, hacemos la siguiente:

OBS **.** A cada elemento $\sigma \in K$ se le denomina *q-símplice de K*, siendo $q+1$ el cardinal de σ. A la unión de los 0-símplices de K la vamos a llamar el *conjunto de los vértices de K*. A la unión de 1-símplices la vamos a denominar conjunto de aristas; a la de 2-símplices, conjunto de triángulos, etc.

La *dimensión de K* viene dada por $\dim K = \text{máx}\{\dim \sigma : \sigma \in K\}$. Vamos a denotar por $\sigma^{(q)}$ al símplice σ de dimensión q .

Medidas de adyacencia

Al igual que en los grafos tenemos la noción de grado, que nos da el número de aristas que inciden en un vértice, necesitamos una noción equivalente para símplices. Antes de dar dicha idea tenemos que ahondar la noción de adyacencia, que vamos a utilizar para comparar las relaciones entre símplices.

Hay que tener en cuenta que para definir una medida de adyacencia tenemos que expresar qué dos símplices vamos a comparar, en primer lugar, estudiaremos el caso en que los dos símplices sean de la misma dimensión. Siqueremos expresar que ambos están contenidos en otro símplice de una dimensión mayor, utilizaremos la noción de adyacencia superior. Este es el caso de dos triángulos (2-símplices) que estén contenidos en un tetraedro (3-símplice). por otro lado, si ambos contienen una misma cara de una dimensión menor, utilizaremos la adyacencia inferior. Por ejemplo, dos aristas que comparten un mismo vértice.

En segundo lugar, estudiaremos distintas formas de adyacencias superiores e inferiores en el caso de que los símplices que queremos comparar tengan distinta dimensión. Un ejemplo de estos coas es si consideramos un triángulo y un tetraedro y estudiamos qué tipo de relaciones inferiormente y superiormente tienen entre sí.

Una vez hecho esto, vamos a definir distintas nociones de grado en asociadas a dichas nociones de adyacencia.

Para símplices de una misma dimensión

dados dos q-símplices $\sigma_i^{(q)}$, $\sigma_j^{(q)}$ de un complejo simplicial K.

Definición . Decimos que son *adyacentes inferiormente* si $\sigma^{(q)}\quad_i \cap \sigma_j^{(q)} = \tau^{(q-1)}$ con $\tau^{(q-1)}(q-1)-$cara de ambos. A $\tau^{(q-1)}$ lo denominaremos *símplices inferior común*. Vamos a denotar a la *adyacencia inferior* como $\sigma_i^{(q)} \sim_L \sigma_j^{(q)}$.

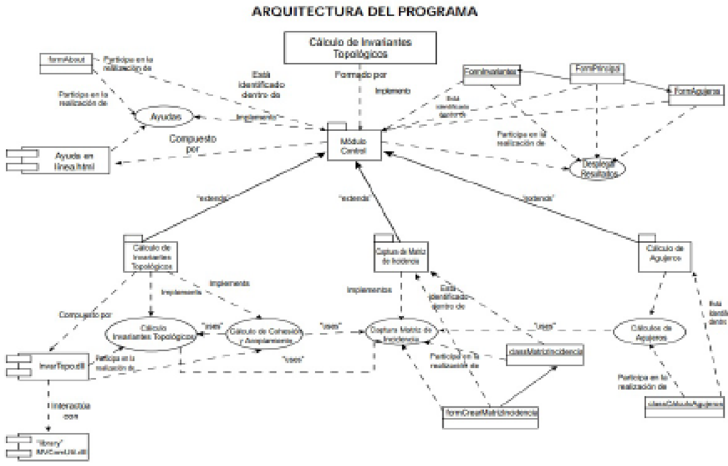
Definición . Decimos que son *adyacentes superiormente* si ambos son caras del mismo $(q+1)$-símplice, al que denominaremos *símplice superior común*. Vamos a denotar a la *adyacencia superior superior* como $\sigma_i^{(q)} \sim_U \sigma_j^{(q)}$.

***Ejemplo* .** En la imagen 2.2, podemos observar que los $1-$símplices $\{v_1, v_5\}$ y $\{v_1, v_7\}$ son **adyacentes inferiormente** ya que una 0-cara o vértice en común v_1.

Por otro lado, es fácil ver que los $2-$símplices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_4\}$ son **adyacentes periormente** Aorque ambos son caras del etraedro $\sigma^{(3)}$.

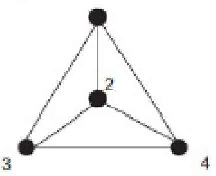
Los complejos simpliciales con otros entes matemáticos, contirbuyen en el proceso de desarrollo de una herramienta de software diseñada con el propósito de realizar los cálculos necesarios para obtener cuatro invariantes topológicos, que son los números de Betti, la dimensión del complejo simplicial, el vector estructura, y la característica Euler-Poincaré.

Los resultados de estos cálculos se interpretan como el planteamiento de una definición f ormal de cohesión y acoplamiento en ingeniería de software, criterios importantes para evaluar la modularidad de un diseño.

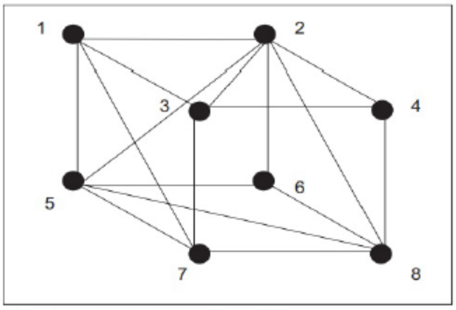


Los complejos simpliciales se suelen representar por medio de una matriz de incidencia (MI), muy conveniente para cálculos computacionales, cuyas columnas son etiquetadas por sus vértices, y las filas son etiquetadas por los símplices. A continuación se muestran los complejos simpliciales con sus respectivas MI. La siguiente figura muestra un tetraedro sólido como un símplex de dimensión tres. Para la mayoría de los casos, se puede tomar al tetraedro como el elemento distinguido de los volúmenes.

MI	1	2	3	4
Tetraedro	1	1	1	1



A continuación la figura con su respectiva tabla muestran la malla de la superficie de un cubo representado a partir de triángulos representados como símplices de dimensión 2. Esta sería la representación mediante su matriz de incidencia.



MI	1	2	3	4	5	6	7	8
T1	1	1	1					
T2		1	1	1				
T3		1		1				1
T4		1				1		1
T5					1	1		1
T6					1		1	1
T7	1				1		1	
T8	1		1				1	
T9	1	1			1			
T10		1			1	1		
T11			1	1			1	
T12				1			1	1

2.2.2 Marco Conceptual

Por ser nuestro trabajo de investigación, netamente abstracto, el marco conceptual, está dentro del Marco Teórico, en las definiciones, teoremas , corolarios y lemas dados en las Bases Teóricas.

2.3. Definición de términos básicos

Cara de un n-simplex: Dado un subconjunto $\{a^{i_0}, a^{i_1}, \dots, a^{i_r}\}\ de\ \{a^0, \dots, a^n\}\ con\ 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leq n$, el conjunto

$$\tau^r = \left\{ x = \sum_{k=0}^{r} t_k a^{i_k} : t_k \geq 0\ \ y\ \ \sum_{k=0}^{n} t_k = 1 \right\}$$

es llamada una cara de σ^n.

Complejo Simplicial: Es una colección de n-simplex que comparten a lo más una cara, pero no su interior.

Elevación de caminos: Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de cubrimiento de X, sea

$f: Y \to X$ una aplicación continua. Una elevación de f es una aplicación continua $\tilde{f}: Y \to \tilde{X}$ tal que $po\tilde{f} = f$.

Espacio de Cubrimiento: Es un par $(\tilde{X}, p)$, donde $\tilde{X}, X$ son espacios topológicos y $p: \tilde{X} \to X$ es una aplicación continua que verifica la siguiente propiedad: Existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X, tal que $p^{-1}(U_i)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en $\tilde{X}$, cada uno de los cuales es homeomorfo bajo $p, a\ U_i$, y esto es para cada $i \in I$.

Espacio topológico: Es un conjunto X con una familia de subconjuntos abiertos**.**

Grupo: Una estructura algebraica (G, o), es llamada Grupo si se ver9ifican los siguientes axiomas:

$G1)\ xo(yoz) = (xoy)oz, \forall x, y, z\ en\ G$

$G2)\ Existe\ e \in G\ tal\ que\ xoe = eox = x, \forall x \in G$

$G3)\ Para\ cada\ x \in G\ existe\ y \in G, tal\ que\ xoy = yox = e.$

Grupo Fundamental: El conjunto $(\pi_1(X), x_0)$ con el conjunto de clases es un grupo, llamado el Grupo Fundamental de X en el punto x_0 o el Primer Grupo de Homotopía de X en x_0 .

Homeomorfismo: Es una biyección continua $f: X \rightarrow Y$, entre dos espacios topológicos X e Y, tal que su inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$, también es continua.

Homotopía de Caminos: Sean $f, g: I \rightarrow X$, tales que $f(0) = g(0)$ y

$f(1) = g(1)$. Se dice que $f \; es \; homotópica \; a \; g$, si existe una aplicación continua $F: IxI \rightarrow X$ tal que:

$a) F(t, 0) = f(t), \forall t \in I$

$b) F(t, 1) = g(t), \forall t \in I$

$c) F(0, s) = f(0) \;\; y \;\; F(1, s) = f(1), \forall s \in I$

Isomorfismo de Grupos: Es un homomorfismo de grupos que es simultáneamente inyectivo y sobreyectivo, o lo que es lo mismo, biyectivo.

Lazo: Sea $x_0 \; un \; punto \; fijo \; de \; X$. Consideremos el conjunto:

$$(\pi_1(X), x_0) = \{[f]: \; f \; es \; un \; camino \; en \; X \; tal \; que \; f(0) = f(1) = x_0$$

Un camino f verificando $f(0) = f(1) = x_0$ es llamado un lazo en X con punto base x_0 .

Poliedro: Sea K un complejo Simplicial y considérese:

$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ la unión de todos los n-simplex de K, visto como espacio topológico de algún $\mathbb{R}^m$ es llamado el Poliedro de K.

Simplejo o Simplex: Dado un conjunto $\{a^0, \dots, a^n\}$ geométricamente independiente, llamaremos n-simplex geométrico al conjunto:

$$\sigma^n = \left\{ x = \sum_{k=0}^{n} t_k a^k : t_k \geq 0 \;\; y \;\; \sum_{k=0}^{n} t_k = 1 \right\}$$

considerado con la topología usual de $\mathbb{R}^m$.

Topología: Es la rama de la matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Es una disciplina que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad o metrizabilidad, entre otros.

Topología Algebraica: Es una rama de las matemáticas en la que se usan las herramientas del álgebra abstracta para estudiar los espacios topológicos.

.

CAPITULO III: Hipótesis y Variables

Teniendo como herramientas la topología, la teoría de homotopía y la construcción de los complejos Simpliciales geométricos se pretenden establecer una aproximación relativa entre complejos Simpliciales, así como el cálculo de ciertos grupos fundamentales de la esfera y dar aplicaciones de estos tópicos en la Ingeniería de Sistemas.

Formulamos las hipótesis en base a nuestro Problema General

3.1. HIPÓTESIS GENERAL:

La teoría Simplicial y la elevación de caminos influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas.

3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

- La teoría Simplicial influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas.
- La elevación de caminos influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas.

.

3.2. Definición conceptual de las Variables

V1: Teoría Simplicial

En este trabajo de investigación, la teoría simplicial se centra en la definición de un complejo simplicial que es un tipo particular de espacio topológico construido mediante el pegado de puntos, segmentos de línea, triángulos, tetraedros y demás análogos de dimensiones superiores. Este concepto no debe ser confundido con la noción abstracta de conjunto simplicial que surge en la moderna teoría simplicial homotópica.

V2: Elevación de Caminos

Proceso por el cual se estudia el grado de los lazos de la circunferencia mediante la propiedad de elevación de caminos que tiene la aplicación canónica $p: R \rightarrow S^1, p(r) = e^{2\pi ir}$. Para ello se analiza previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.

V3: Cálculo del grupo de homotopía de la esfera

El grupo denotado por $\pi_1(X, x_0)$ se denomina grupo fundamental del espacio basado (X, x_0) . En aquellos contextos en los que el punto base quede bien determinado y en otros casos en los que su papel no sea relevante utilizaremos la notación $\pi_1(X)$. Cuando $X = S^n$, el Grupo de Homotopía se denomina Grupo fundamental de la esfera $''n + 1''$ dimensional.

Operacionalización de Variables

VARIABLES	DEFINICIÓN	DIMENSIONES	INDICADORES
V1: TEORÍA SIMPLICIAL	la teoría Simplicial se centra en la definición de un complejo Simplicial que es un tipo particular de espacio topológico construido mediante el pegado de puntos, segmentos de línea, triángulos, tetraedros y demás análogos de dimensiones superiores. Este concepto no debe ser confundido con la noción abstracta de conjunto Simplicial que surge en la moderna teoría Simplicial homotópica.	**DIMENSIÓN 1:** Complejos Simpliciales	1. Simplejos 2. Topología de Complejos Simpliciales
		DIMENSIÓN 2: Poliedros	1. Caras de un poliedro 2. Estrella
V2: ELEVACIÓN DE CAMINOS	Proceso por el cual se estudia el grado de los lazos de la circunferencia mediante la propiedad de elevación de caminos que tiene la aplicación canónica $p: R \to S^1$, $p(r) = e^{2\pi ir}$. Para ello se analiza previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.	**DIMENSIÓN 1:** Espacios de cubrimiento	1. Lazos 2. Homeomorfismo
		DIMENSIÓN 2: Homotopía de caminos	1. Caminos 2. Aplicación continua
V3: CÁLCULO DEL GRUPO DE	El grupo denotado por $\pi_1(X, x_0)$ se denomina grupo fundamental del espacio basado	**DIMENSIÓN** **Grupo de Homotopía de la Circunferencia S^1**	1. Espacio topológico 2. Punto base x_0

HOMOTOPÍA DE LA ESFERA	(X, x_0). En aquellos contextos en los que el punto base quede bien determinado y en otros casos en los que su papel no sea relevante utilizaremos la notación $\pi_1(X)$. Cuando $X = S^n$, el Grupo de Homotopía se denomina Grupo fundamental de la esfera ''n+1'' dimensional.		

CAPITULO IV: Diseño Metodológico

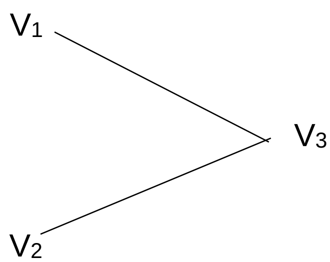
4.1.1. Tipo de Investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2. Diseño de investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Gráficamente el diseño de la investigación obedece al siguiente esquema:



Dónde:

V_1 : Teoría Simplicial

V_2 : Elevación de Caminos

V_3 : Cálculo del Grupo de Homotopía de la Esfera

4.2. Método de Investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser esta del tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3. Población y Muestra

4.3.1. Población

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

4.3.2. Muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe muestra que estudiar.

4.4. Lugar de Estudio

Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, Facultad de Ingeniería Industrial y Sistemas, Universidad Nacional del Callao – Perú., la Biblioteca Central de la UNAC, algunas universidades como la UNI y la UNMSM, por la búsqueda de bibliografía de manera física

4.5. Técnicas de Recolección de datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.

.

4.6. Tratamiento Estadístico

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, papers, etc.).

CAPÍTULO V: RESULTADOS TEÓRICOS

En este capítulo, mostraremos los resultados teóricos más importantes de este trabajo de investigación, los cuales se resumen en dos teoremas importantes: Uno es usando Teoría de Homotopía, se demuestra que el primer grupo de homotopía de la esfera en el plano, es isomorfo a los enteros.
El otro resultado importante es probar mediante complejos simpliciales, siendo otra vía de demostración, que los enteros son isomorfos al Grupo fundamental de la esfera. ■

Considerando los conceptos y notaciones previas enunciamos a continuación el teorema que nos permitirá calcular el grupo fundamental de S^1.

Teorema 5.1. *Se cumple que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, donde esta igualdad se entiende es a nivel de isomorfismos, es decir, el grupo fundamental de S^1 es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Recordemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$ hemos definido

$$\omega_n : I \to S^1 \text{ tal que } \omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$$

que es el lazo que comienza en x_0 da $|n|$ vueltas al círculo S^1 y termina en x_0. Esto nos permite definir la aplicación

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\pi_1(S^1), \bullet) \text{ como } \varphi(n) = [\omega_n].$$

Recordemos también que dado un lazo f en S^1, el grado de f es un número entero. Esto nos permite definir la aplicación

$$\psi : (\pi_1(S^1), \bullet) \to (\mathbb{Z}, +) \text{ como } \psi([f]) = \deg f$$

Los pasos a seguir para la prueba serán dos:

- Mostrar que φ es un homomorfismo de grupos.

- Mostrar que las aplicaciones φ y ψ son una la inversa de la otra y por tanto son ambas biyecciones.

Note que de la combinación de ambos pasos se concluye que φ es un isomorfismo entre grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\pi_1(S^1), \bullet)$ que es lo que queríamos probar.

La prueba de que φ es un homomorfismo de grupos se puede hacer incluso gráficamente.

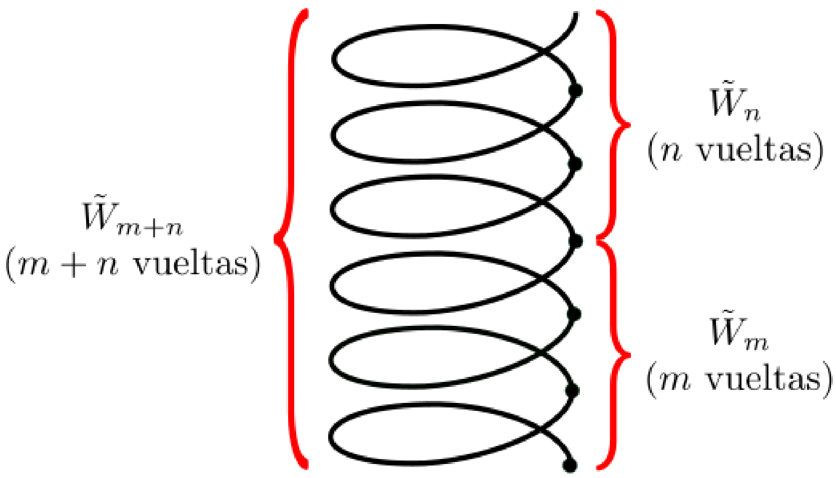


Figura 2.17: Idea gráfica

Así

$$\tilde{\omega}_{m+n} \sim \tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n$$

y por propiedad

$$p \circ \tilde{\omega}_{m+n} \sim p \circ (\tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n)$$

luego

$$\omega_{m+n} \sim \omega_m * \omega_n$$

de donde

$$[\omega_{m+n}] = [\omega_m * \omega_n][\omega_m] \bullet [\omega_n]$$

así

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) \bullet \varphi(n)$$

lo que muestra que φ es un homomorfismo de grupos.

Resta mostrar que $\varphi \circ \psi = id_{\pi_1(S^1)}$. Calculemos ahora $\varphi \circ \psi$

$$(\varphi \circ \psi)([f]) = \varphi(\psi([f])) = \varphi(\deg f) = [\omega_{\deg f}]$$

Queremos que $(\varphi \circ \psi) = [f]$, luego bastará mostrar que $[f] = [\omega_{\deg f}]$, lo que equivale a mostrar que

$$f \sim \omega_{\deg f}$$

Sea m el grado de f, entonces

$$m = \deg f = \tilde{f}(1)$$

donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f que comienza en 0 y termina en $\tilde{f}(1)$. Note que $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ existe por la propiedad de levantamiento de caminos. Ahora, $\tilde{\omega}_m : I \to \mathbb{R}$ es también un camino que comienza en 0 y termina en $m = \tilde{f}(1)$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio conexo, por el Lema 2.12

$$\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_m$$

de donde

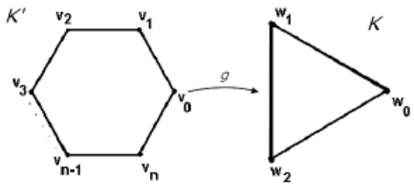
$$p \circ \tilde{f} \sim p \circ \tilde{\omega}_m$$

así $f \sim \omega_m$ como queríamos. ■

Teorema 5.2. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Demostración. Sea $f : S^1 \to S^1$ una aplicación continua y puntuada cualquiera. Sea K un complejo simplicial tal que $|K| \simeq S^1$. Esto se justifica escogiendo K como el borde de un 2-simplejo. Así, K es un complejo finito con $|K|$ compacto. Desde que $|K|$ y f verifican las hipótesis del teorema de aproximación simplicial relativa, con $A = \{\text{punto base de } S^1\}$, se sigue que existe una subdivisión K' de K y una aplicación simplicial $g : |K'| = |K| \simeq S^1 \to |K| \simeq S^1$ tal que g es homotópica a f relativa al punto base.

Suponga que K' tiene vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$ y K tiene vértices w_0, w_1, w_2 y los colocamos en sentido antihorario, como en la siguiente figura



Sea

$$g_i = g|_{[v_i, v_{i+1}]}, \quad i = 0, \ldots, n$$

donde $w_{n+1} = v_0$. Entonces, claramente

$$[g] = [g_0] \bullet \ldots \bullet [g_i] \bullet [g_{i+1}] \bullet \ldots \bullet [g_n]. \tag{1}$$

Ya que g es simplicial lleva los vértice de K' en los vértices de K, así cada $g(v_i)$ es algún w_j. Además $g(v_0) = w_0$, por ser relativa al punto base.

Cada terna

$$g_i * g_{i+1} * g_{i+2}$$

resulta homotópica al camino

$$w_{\pm 1}(s) = (\cos 2\pi(\pm 1)s, \operatorname{sen} 2\pi(\pm 1)s)$$

que es el lazo que da una vuelta a S^1 en sentido antihorario u horario, según sea el signo positivo o negativo.

Se muestra que (1) contiene exactamente un número entero de ternas

$$g_i * g_{i+1} * g_{i+2}$$

esto es, se tienen q ternas como sigue

$$\begin{aligned}[g] =& [g_0 * g_1 * g_2] \bullet \ldots \bullet [g_i * g_{i+1} * g_{i+2}] \bullet \ldots \\ & \ldots \bullet [g_{n-2} * g_{n-1} * g_n]\end{aligned}$$

Así g es homotópica al camino

$$w_q(s) = (\cos 2\pi q s, \operatorname{sen} 2\pi q s)$$

que es lazo que da q vueltas a S^1 en sentido antihorario u horario según sea q un entero positivo o negativo.

$$g \sim w_q$$

Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \rightarrow & (\pi_1(S^1), \bullet) \\ q & \mapsto & [w_q] \end{array}$$

que resulta ser un isomorfismo de grupos.

Por lo tanto concluimos que

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

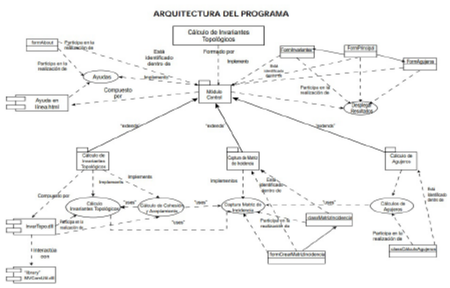
■

OTROS RESULTADOS:

APLICACIONES DE LOS COMPLEJOS SIMPLICIALES EN LA INGENIERÍA DE SISTEMAS

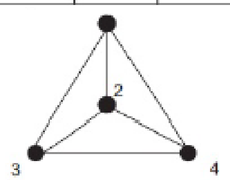
Los complejos simpliciales con otros entes matemáticos, contirbuyen en el proceso de desarrollo de una herramienta de software diseñada con el propósito de realizar los cálculos necesarios para obtener cuatro invariantes topológicos, que son los números de Betti, la dimensión del complejo simplicial, el vector estructura, y la característica Euler-Poincaré.

Los resultados de estos cálculos se interpretan como el planteamiento de una definición f ormal de cohesión y acoplamiento en ingeniería de software, criterios importantes para evaluar la modularidad de un diseño.

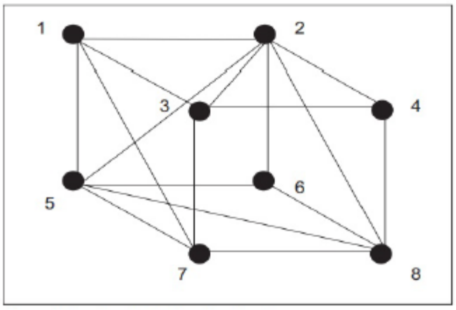


Los complejos simpliciales se suelen representar por medio de una matriz de incidencia (MI), muy conveniente para cálculos computacionales, cuyas columnas son etiquetadas por sus vértices, y las filas son etiquetadas por los símplices. A continuación se muestran los complejos simpliciales con sus respectivas MI. La siguiente figura muestra un tetraedro sólido como un símplex de dimensión tres. Para la mayoría de los casos, se puede tomar al tetraedro como el elemento distinguido de los volúmenes.

MI	1	2	3	4
Tetraedro	1	1	1	1



A continuación la figura con su respectiva tabla muestran la malla de la superficie de un cubo representado a partir de triángulos representados como símplices de dimensión 2. Esta sería la representación mediante su matriz de incidencia.



MI	1	2	3	4	5	6	7	8
T1	1	1	1					
T2		1	1	1				
T3		1		1				1
T4		1				1		1
T5					1	1		1
T6					1		1	1
T7	1				1		1	
T8	1		1				1	
T9	1	1			1			
T10		1			1	1		
T11			1	1			1	
T12				1			1	1

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con las herramientas matemáticas de Teoría de Homotopía en el área de Topología Algebraica dentro de la Matemática se logra demostrar cómo se da la influencia de la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera.

La Elevación de Caminos es el proceso por el cual se estudia el grado de los lazos de la circunferencia mediante la propiedad de elevación de caminos que tiene la aplicación canónica $p: R \to S^1$, $p(r) = e^{2\pi i r}$. Para ello se analiza previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.

El grupo denotado por $\pi_1(X, x_0)$, es denominado grupo fundamental del espacio basado (X, x_0). En aquellos contextos en los que el punto base quede bien determinado y en otros casos en los que su papel no sea relevante utilizaremos la notación $\pi_1(X)$. Cuando $X = S^n$, el Grupo de Homotopía se denomina Grupo fundamental de la esfera "n+1" dimensional, y es acá donde probamos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Los complejos simpliciales a través de los simplejos, poliedros y la subdivisión baricéntrica usando el Teorema de Aproximación simplicial Relativa, logra probar el resultado importante que es el corazon del Tema de este proyecto, para luego dar aplicaciones usando la Teoría de Grafos como aplicación de la Topología Combinatoria en la Ingeniería de Sistemas e Informática.

Conclusiones

La Teoría Simplicial es apoyada por la Matemática Discreta en lo que corresponde a la Teoría de Grafos, con la cual se modelan las aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas.

Los complejos simpliciales son una herramienta matemática muy usada en la Ingeniería de sistemas, de Software y algunos cálculos computacionales de mallas en particular, donde se usa la matriz de incidencia de un complejo simplicial.

Con las herramientas matemáticas de Topología Combinatoria en complejos simpliciales llegamos a demostrar el isomorfismo de grupos entre el primer grupo de homotopía de la esfera.

Con las herramientas matemáticas de Topología Algebraica en Teoría de Homotopía, llegamos a demostrar el isomorfismo de grupos entre el primer grupo de homotopía de la esfera.

RECOMENDACIONES

Se recomienda en primer lugar a investigadores que quieran realizar estos tipos de investigación básica por ser la teoría de una rama de la Matemática que es la Topología Algebraica, usar bibliografía avanzada y actualizada en lo que corresponde a las aplicaciones. Para las bases teóricas y el marco conceptual, si se debe referenciar con libros básicos que datan del siglo XX, ya que la rama mencionada no es tan antigua.

Con respecto a la manera de demostrar que el Primer Grupo de Homotopía de la esfera es isomorfo a los enteros, hay dos formas de hacerlo en esta investigación, pero no se deben conformar con estos métodos o caminos, se debe revisar bibliografía que puede apuntar a un camino de demostración en la misma rama de Topología Algebraica pero con otro método.

Referencias Bibliográficas Básicas

Barmak, J. (2014). Cursos y Seminarios de Matemática: POLIEDROS: Una introducción a la geometría y álgebra de los complejos Simpliciales. http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Serie%20B/serieB9.pdf

Birkhäuser, E. y Spanier, E. (1966). Algebraic topology. Springer – Verlag.

Dugundji, J. (2010). Topology. Allyn and Bacon, Inc. Boston. Fourth Printing.

Eilenberg, S. y Steenrod, N. (2012). Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton N.J.

Goerss, P. y Jardine, J. (1999). Simplicial homotopía theory. Progress in Math 174.

Gray, B. (2000). Homotopy theory. Academic Press, New York – San Francisco – London.

Kosniowski, C. (2008). Topología algebraica. Editorial Reverté, S.A.

Massey W. (2014). Introducción a la topología Algebraica. Editorial Reverte, S.A.

Maunder, C. (1980). Introduction to algebraic topology. Cambridge University Press.

May, J.P. (1967). Simplicial objects in algebraic topology. Van Nostrand Company Inc.

May J.P. (1972). The geometry of iterated loop spaces. Lectures Notes in Mathematics pp. 271. Springer. Poincaré H. Analysis Situs, J. Ecole Polytechnique 1, 1895 (pp. 1-121).

Munkres, J. (2015). Topology. Prentice Hall.

Núñez de Arco, L. Sobre las diferentes nociones topológicas de complejo y algunas de sus aplicaciones https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/51406/N%C3%BA%C3%B1ez%20de%20Arco%20Valenzuela%20Laura%20TFG.pdf?sequence=1&isAllowed=y

UNED (2020). Guía de Estudio pública 19-20: Topología https://www.sanzytorres.es/static/pdf/GuiaPublica_21152415_2020.pdf

Referencias bibliográficas de especialidad

[1] A. Watt, F. Policarpio, *3D Games: Real Time Rendering and Sofware Technology*, vol. 1, Addison Wesley, 2001.

[2] Golberg, Timothy E., *Combinatorial Laplacians of simplicial complexes*, Senior Thesis, Bard College, 2002.

[3] Henri Poincaré, *Analysis Situs*, J. Ecole Polytechnique, 1-121.

[4] Hernández Serrano, Daniel and Sánchez Gómez, Darío, *Centrality measures in simplicial complexes: Aplications of topological data analysis to network science*, Applied Mathematics and Computation, 382:125331, 2020.

[5] J. Peter May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Company Inc., 1967.

[6] M. Henle, *A Combinatorial Introduction To Topology, Dover Publications*, 1994.

[7] Múnera Salazar, Luis Eduardo, *Una aproximación topológica al diseño modular en Ingeniería de software*, S& T. Revista de la Facultad de Ingeniería. Universidad Icesi, No. 2, p. 57-73, 2003.

[8] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley, 1984.

ANEXO 01

MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMAS	OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES Y DIMENSIONES	METODOLOGÍA
GENERAL ¿De qué manera la teoría Simplicial y la elevación de caminos influyen en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas? **ESPECÍFICOS** ¿De qué manera la teoría Simplicial influye en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas? ¿De qué manera la elevación de caminos influye en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas?	**GENERAL** Demostrar cómo influye la teoría Simplicial y la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas. **ESPECÍFICOS** Demostrar cómo influye la teoría Simplicial en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas. Demostrar cómo influye la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas.	**GENERAL** La teoría Simplicial y la elevación de caminos influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas. **ESPECÍFICOS** La teoría Simplicial influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas. La elevación de caminos influye de manera significativa en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en sus aplicaciones en la ingeniería de Sistemas.	**V1: TEORÍA SIMPLICIAL** D1: Complejos Simpliciales D2: Poliedros **V2: ELEVACIÓN DE CAMINOS** D1: Espacios de cubrimiento D2: Homotopía de Caminos **V3: CÁLCULO DEL GRUPO DE HOMOTOPÍA DE LA ESFERA** D1: Grupo de Homotopía de la Circunferencia S^1	**Tipo:** Descriptiva **Diseño** No experimental **Método** hipótetico inductivo-deductivo. **Población:** No aplica **Muestra:** No aplica **Lugar de estudio:** Facultad de Ingeniería Industrial y Sistemas, UNAC y mi hogar.