UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:

Stefany Andrea García Rojas

Asesor:

Dr. Pedro Canales García

Linea de investigación:

Análisis Numérico y Matemática Computacional

Callao, 2023

PERÚ

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS STEFANY ANDREA GARCÍA ROJAS

15% Textos sospechosos

14% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas

2% Idioma no reconocido

Nombre del documento: EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS STEFANY ANDREA GARCÍA ROJAS.pdf
ID del documento: ef9f8da5b0f3d703a60908eeec140ec367a29d5f
Tamaño del documento original: 898,33 kB

Depositante: FCNM PREGRADO UNIDAD DE INVESTIGACION
Fecha de depósito: 18/1/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 19/1/2024

Número de palabras: 9963
Número de caracteres: 56.591

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes de similitudes

Fuentes principales detectadas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**repositorio.unac.edu.pe** https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/8330/TESIS - LUZ SARA MORI TRUJIL... 30 fuentes similares	6%		Palabras idénticas: 6% (549 palabras)
2	**repositorio.unac.edu.pe** https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/8447/TESIS - LIANRES.pdf?sequence... 30 fuentes similares	5%		Palabras idénticas: 5% (423 palabras)
3	**hdl.handle.net** | Algoritmo de optimización multiobjetivo para el problema center-... http://hdl.handle.net/20.500.12918/4427 30 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (782 palabras)
4	**repositorio.unac.edu.pe** https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/8284/TESIS - COAQUIRA.pdf?sequen... 30 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (368 palabras)
5	**riull.ull.es** | Programación por metas http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/14636 30 fuentes similares	3%		Palabras idénticas: 3% (726 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	**repositorio.pucp.edu.pe** | Algoritmo genético multiobjetivo para la optimización d... https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/169092	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (20 palabras)
2	**repositorio.usp.br** | ReP USP - Detalhe do registro: Teoria, métodos e aplicações d... https://repositorio.usp.br/item/002185763	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (11 palabras)
3	**dukespace.lib.duke.edu** | Topics and Applications of Weighting Methods in Case-C... https://dukespace.lib.duke.edu/dspace/bitstream/handle/10161/18670/Li_duke_0066D_14964.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (10 palabras)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 05-2024-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que la señorita:

STEFANY ANDREA GARCÍA ROJAS

Ha obtenido un resultado del **14%** de similitud como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS"**.

Se expide la presente a solicitud de la interesada para los fines pertinentes.

Bellavista, 19 de enero 2024.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

Dr. Whualkuer Enrique Lozano Bartra
Director

WELB/pgh
Exp: 09.01.24
c.c.: Archivo

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** Existencia de soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.
4. **Autor:** Stefany Andrea García Rojas
   ORCID: 0000-0002-5180-2279
5. **Asesor:** Dr. Pedro Canales García
   ORCID: 0000-0001-9767-0251
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidad de Investigación:** Programación Lineal
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS

STEFANY ANDREA GARCIA ROJAS

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal **N° 043-2023-D-FCNM**, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universi-dad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por

Presidente

Dr. JULIO CÉSAR NÚÑEZ VILLA

Vocal

Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE

Secretario

Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA

Asesor

Dr. PEDRO CANALES GARCIA

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: **https://meet.google.com/fmk-huqq-qhc** mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 17:00 horas del Sábado uno de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por la Señorita Bachiller **GARCÍA ROJAS STEFANY ANDREA**, titulado: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César : Presidente
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio : Secretario
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 043-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 17:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por la Señorita Bachiller **GARCÍA ROJAS STEFANY ANDREA**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	**Muy bueno**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **18:00** horas del día uno de abril del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario

Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

Bellavista, 02 de abril de 2023

INFORME

El presidente del Jurado de Sustentación de Tesis designado mediante Resolución Decanal N°173-2022-D-FCNM, informa que la Tesis titulada "EXISTENCIA DE SOLUCIONES PROPIAMENTE EFICIENTES PARA EL PROBLEMA MULTIOBJETIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE PESOS", expuesta por la Bachiller en Matemática Sra. Stefany Andrea García Rojas, no presentó observaciones durante el acto de sustentación de tesis realizado el sábado 01 de abril de 2023 a las 17:00 horas via Google Meet.

Sin otro particular quedo, de usted.

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

DEDICATORIA

Esta tesis está dedicada a mi padre Jesús García, quien me enseñó que el mejor conocimiento que se puede tener es el que se aprende por la guia de Dios.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por ser mi guía y acompañarme en el transcurso de mi vida, brindándome paciencia y sabiduría para culminar con éxito mis metas propuestas.

A mis padres por ser mi pilar fundamental y haberme apoyado incondicionalmente y a mi esposo Javier por su paciencia.

Agradezco a mi asesor de tesis el Dr. Pedro Canales quien con su experiencia, conocimiento y motivación me orientó en la investigación.

Índice general

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

En el presente trabajo se verá algunos conceptos relacionados al conjunto de soluciones eficientes y propiamente eficientes para optimizar un problema multiobjetivo. Además se estudiará también el método de pesos el cual permite hallar este tipo de soluciones a partir de una solución óptima.
Palabras claves: Optimización Multiobjetivo, Método de Pesos, Optimización no lineal.

ABSTRACT

The aim of this work is to study concepts related to the set of solutions efficient and properly efficient solutions to optimize a multi-objective problem. We will also study the method of weights that will allow us to find this type of solution from an optimal solution.

Keywords: Multiobjective Optimization, Method of Weights, Nonlinear Optimization.

INTRODUCCIÓN

En el problema de optimización se busca encontrar la opción que represente el valor óptimo para una función objetivo, pero cuando hablamos de la vida real existen numerosas situaciones en las diversas áreas como la economía, finanzas, ingenería y ciencias que trabajan muchos objetivos a la vez y estos generalmente son conflictuantes entre sí, eso quiere decir, que no se puede encontrar una solución óptima que satisfaga a todos estos problemas simultáneamente.

Cuando trabajamos con varios objetivos estos con llevan varias decisiones, que suelen conflictuarse entre ellas. Por ejemplo tales tipos de problemas son comúnmente encontrados en la esfera política. En estas situciones se genera un proceso de toma de decisiones donde extiste dos papeles importantes del analista que genera soluciones eficientes del problema en base a la información brindada y el responsable de la toma de decisiones, que recibe las soluciones del analista y escoge cual es la de mejor compromiso.

Hay métodos para resolver problemas con varios objetivos y cada uno de ellos posee características y aplicaciones diferentes, ya que el método puede ser bueno para un tipo de problema e ineficiente para otro, por tal motivo el analista se debe analizar desde las dos perspectivas tanto del analista como del tomador de decisiones.

En el presente trabajo definiremos el problema multiobjetivo,se estudiará los conos convexos y las órdenes parciales inducidas por ellos enfocándonos en el caso que dichos conos se localicen en el ortante $\Re^p$ donde p es el número de funciones objetivo para ser optimizadas.

Por otro lado se mostrará, algunos conceptos relacionados al conjunto de soluciones eficientes y propiamente eficientes que se entenderán como la mejor solución para este tipo de problemas. En particular se describirá, el método de pesos, que se define como un método de generación, pues el analista halla las soluciones eficientes y se las entrega al responsable de la toma de decisiones para que elija la que más le conviene. Con respecto a este método cabe resaltar que tiene como principal caraterística su simplicidad así que se desarrollará un teorema que nos permitirá encontrar soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Este tipo (clase) de problemas se refiere a la obtención de soluciones de un modelo matemático, que abarca dos o más objetivos, que son contenidos en las denominadas funciones multiobjetivos, lo que comúnmente es confundido con los modelos multiniveles. La solución de estos problemas, debido a su recargada dosis numérica hace que existan pocos algoritmos, sin embargo son necesarios ya que existen muchos problemas, que se pueden formular en este modelo para obtener soluciones eficientes y propiamente eficientes. El siguiente trabajo tiene como finalidad mostrar soluciones eficientes y propiamente eficientes para el problema multiobjetivo que esta dada por la siguiente forma :

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & f(x) = (f_1(x), f_2(x), ...f_p(x)) \\
 & g_1(x) \leq 0 \\
s.a & g_2(x) \leq 0 \\
 & \vdots \\
 & g_m(x) \leq 0
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Donde

$X = \{x \in \Re^n \mid g_i(x) \leq 0\,, i = 1, \dots m\}$

f_k : Función obejtivo $\qquad f_k : \Re^n \to \Re$

f : Función multiobejtivo $\qquad f_k : \Re^n \to \Re^p$

g_i : Función restrición $\qquad g_i : \Re^n \to \Re$

- Si $p = 1$, es el problema común con un solo objetivo.
- Cuando $p > 1$ será nuestro objetivo de estudio.

Este problema 1.1 se resolverá mediante el método de pesos usando el vector de pesos $w = (w_1, w_2, ...w_p) \in \Re^p$ donde $w_k \geq 0$ siendo $k = 1, \ldots p$ y $\|w\|_1 = 1$; transformando el problema 1.1 en el siguiente :

$$P(w) : min \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x)$$

$$s.a \qquad g_i\,(x) \leq 0\,, i = 1, \ldots m$$

De esta forma el problema original se transforma en un problema con un único objetivo y con ello obtendremos soluciones óptimas que se convertiran en soluciones eficientes para el problema multiobjetivo.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Existirán soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos?

1.2.2. Problema Específico

(i) ¿A partir de una solución óptima única para el problema de los pesos existirá una solución eficiente para el problema multiobjetivo?

(ii) ¿A partir de una solución óptima para el problema de los pesos existirá una solución eficiente para el problema multiobjetivo?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Mostrar que existen soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.

1.3.2. Objetivo Específico

(i) Mostrar que para una solución óptima única del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

(ii) Mostrar que para una solución óptima del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

1.4. Justificación

Los problemas con mútliples objetivos ha optimizar son muy comunes en la vida diaria y muchas veces estos objetivos no pueden ser resultos a la vez pues son conflictuantes unos con otros.

Este proceso de optimización es llamado **toma de decisiones multicriterio** que puede definirse como una teoría para evaluar alternativas según criterios individuales y combinarlos en una evaluación general, pudiendo dividirse en dos parte:

La primera es llamada **análisis de decisión multicriterio** que está relacionado con problemas que tienen un conjunto discreto, predeterminado y finito de soluciones viables. La segunda es llamada **optimización multiobjetivo** donde las soluciones viables no son explícitamente conocidas pero generalmente están representadas por funciones de restricción.

Esta distinción entre los dos procesos se debe principalmente a las diferentes herramientas requeridas en las áreas de trabajo, como por ejemplo: en la investigación operativa y la economía.

Muchos autores estudiaron esta teoría y han planteado condiciones para poder resolverla, por ejemplo las encontradas en la tesis de doctorado de **“Optimality and Langragian Regularity in Vector Optimization”** realizada en la Universidad de Pisa, Italia (Bigi, 1999) y quien más adelante publicó junto con Pappalardo el artículo **“Regulity Conditions in vector optimization”.** (Bigi y Pappalardo,1999)

Otro autor que abordó estos temas fue (Luc, 1989) en su libro **“Theory of Vector Optimization”** que describe las condiciones de regularidad y totalmente regularidad.

Actualmente también se estan realizando investigaciones en diversas áreas por ejemplo: la tesis doctoral **“Optimización multi-objetivo para la evaluación de la sostenibilidad de tecnologías de generación de electricidad a partir del carbón”** presentada por la Universidad de Cantabria (García, 2013). Al igual que lo mostrado por Lara Velasco Carrera en su tesis doctoral **“Optimización Multiobjetivo del Transporte de Personas Discapacitadas”** presentada por la Universidad de Burgos (Velasco, 2017)

Es por eso que el presente trabajo tiene por objetivo principal mostrar soluciones propiamente eficientes por el método de pesos ya que este sería un resultado novedoso y serviría como una estrategia nueva en este ámbito de estudio, el cual cuenta con diversas aplicaciones en la realidad.

1.5. Delimitantes de la Investigación

1.5.1. Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2. Temporal

Debido a que nuestra investigación es netamente teórica no se presentan delimitaciones temporales.

1.5.3. Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacional y nacional

Los últimos 50 años se han estudiado cuestiones teóricas y metodológicas con respecto al área de programación multiobjetivo, no obstante, la investigación más fuerte que se ha dado al respecto sucedió durante los años 80's, 90's y estos útlimos años.

- **Nacionales**

  Rubiños (2015), en su tesis de doctorado titulada "Planeamiento de la generación distribuida en redes de distribución de energía eléctrica en el Perú" de la Universidad Nacional del Callao, planteó un modelo de planificación el cual cubre los requirimientos de la demanada del proyecto con cambios mínimos en la red de distribución existente . Este modelo propuesto es del tipo probabilista y transforma de un problema monobjetivo a uno multiobjetivo.

  Aduviri (2018), tres años después en la Pontificia Univerdad Cátolica del Perú se presentó también una tesis titulada "Algoritmo Genético Multiobjetivo de la Distribución de ayuda humanitaria en caso de desastres naturales en el Perú". El autor plantea un plan que satisface la demanda en los nodos que son los puntos donde se recibirá la ayuda humanitaria, de la manera más eficiente posible usando la optimización multiobjetivo, de esta forma no desperdicia recursos que podrían ser utilizados para atender a más nodos.Así el valor que será minimizado es la suma total del producto de la cantidad de bienes transportados entre cada par de nodos por el costo unitario de transporte en dicha vía.

  León (2019), publicó en la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco la tesis titulada " Algoritmo de optimización multiobjetivo para el problema center-based clustering para conjuntos con outliers" que mejora las técnicas actuales en esta rama como principal objetivo; su investigación desarrolla y propone un nuevo algoritmo de clustering, denominado el algoritmo SSO-C. Su trabajo consistió en la optimización de una función multiobjetivo que relaciona dos problemas definidos con el propósito de garantizar la robustez de la solución encontrada. Como búsqueda local para valores iniciales el autor tomó soluciones con un cierto factor de aproximación para un problema de optimización combinatoria relacionado, el problema k-center.

- **Internacionales**

  Li (2019) se presentó el trabajo de disertación "Topics and Applications of Weighting Methods in Case-Control and Observational Studies " realizada en el Departamento de Bioestadística y Bioinformática de la Escuela de Graduados de la Universidad de Duke en la que se desarrolla y amplía métodos de pesos para el estudio de casos y controles.

  Momeni et al. (2021) este mismo año presentaron un artículo titulado "Estimation of normal means in the tree order model by the weighting methods" donde se aplica el método de pesos para reducir el error cuadrático medio, basado en el sesgo y el error cuadrático medio se compara el desempeño de los estimadores propuestos con los estimadores alternativos para buscar un mejor estimador.

  Matsouaka y Atem (2020) presentaron el artículo "Regression with a right-censored predictor using inverse probability weighting methods" en la que se enfoncan particularmente en el uso de probabilidad inversa del método de pesos en un modelo lineal generalizado (GLM), para aplicarlo en el estudio Framingham del corazón que muestra datos para estimar la relación entre la edad de inicio de un evento cardiovascular clínicamente diagnosticado y lipoproteínas de baja densidad entre los fumadores de cigarrillos.

2.2. Bases teóricas

Con finalidad de tener una amplia teoría para la resolución de los objetivos en el presente trabajo se seguirá los resultados en : (Abadie,1967), (Benson & Morin, (1977)), (Bigi,1999), (Bigi & Pappalardo,1999),(Canales, 2018),(Cohon, 1978),(Geoffrion, 1968),(Kuhn, & Tucker, 1951),(Luc, 1989), (Rockafellar, 1997), (Sampaio, 2011) y (Sawaragi, Nakayama y Tanino, 1985).

Definición 2.2.1. Sean $x, y \in \Re^n$. Las relaciones $\preceq$ y $\prec$ son definidas de la siguiente forma:

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \qquad \forall \quad i = 1, 2 \ldots n$$

$$x \prec y \Longleftrightarrow x_i < y_i \qquad \forall \quad i = 1, 2 \ldots n$$

Esta notación puede ser leída como “y es preferido a x ”o “y domina a x ”

***Ejemplo* 2.1.** A continuación mencionaremos algunos ejemplos de la Definición 2.2.1

- Sea $x = (-5, 0, 3) \wedge y = (1, 3, 5)$ donde $x, y \in \Re^3$

  $$\begin{aligned} x_1 &: \quad -5 < 1 \\ x_2 &: \quad 0 < 3 \\ x_3 &: \quad 3 < 5 \end{aligned}$$

  Por lo tanto podemos decir que $x \prec y$

- Sea $x = (1, 2, 3) \wedge y = (0, 1, 3)$ donde $x, y \in \Re^3$

  $$\begin{aligned} x_1 &: \quad 1 > 0 \\ x_2 &: \quad 2 > 1 \\ x_3 &: \quad 3 = 3 \end{aligned}$$

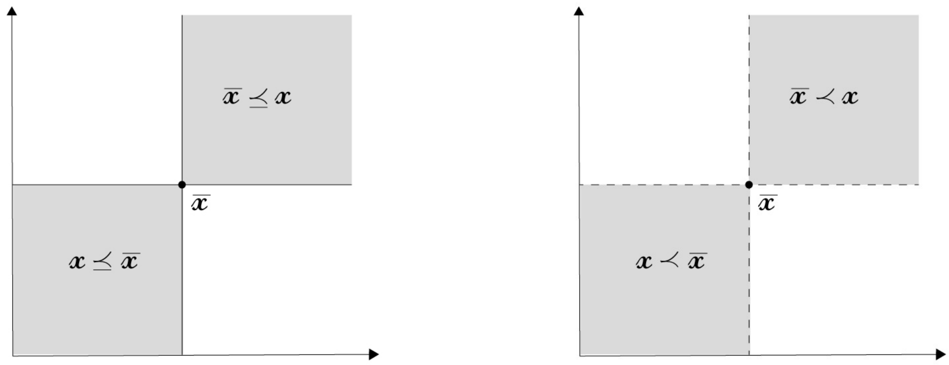
  Por lo tanto podemos decir que $x \succeq y$

- Sea $x = (1, 10, 3) \wedge y = (2, 1, 5)$ donde $x, y \in \Re^3$

  $$\begin{aligned} x_1 &: \quad 1 < 2 \\ x_2 &: \quad 10 > 1 \\ x_3 &: \quad 3 < 5 \end{aligned}$$

En este ejemplo no podemos decir que $x \succeq y \vee x \preceq y$. Se puede decir que x no esta relacionado con y.

Figura 2.1: Relación $\preceq$ y $\prec$ en $\Re^2$



Fuente: Elaboración propia

Definición 2.2.2. Sean P y Q dos conjuntos. Una relación binaria A de P en Q es un subconjunto de $P \times Q$, diremos que $a \in P$ esta relacionado con $b \in Q$ mediante A si $(a, b) \in A$.

Definición 2.2.3. Sea A una relación binaria en $\Re^p$ .Decimos que es:

(i) Reflexiva, si $(x, x) \in A \qquad \forall x \in \Re^p$

(ii) Antisimétrica, si $(x, y) \in A$ y $(y, x) \in A$ implica que $x = y \qquad \forall x \in \Re^p$

(iii) Transitiva, si $(x, y) \in A$ y $(y, z) \in A$ implica que $(x, z) \in A \qquad \forall x \in \Re^p$

(iv) Conectada, si $(x, y) \in A$ o $(y, x) \in A \qquad \forall x \in \Re^p$ con $x \neq y$

(v) Lineal, si $(x, y) \in A$ implica que $(xt + z, yt + z) \in A \qquad \forall x, y, z \in \Re^p$ y $t > 0$

Definición 2.2.4. Definiremos lo siguiente:

(i) Un orden parcial es una relación binaria que cumple las propiedades reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

(ii) Un orden parcial es lineal; si cumple además la propiedad de linealidad.

(iii) Cuando un orden parcial lineal satisface la propiedad de conectada; entonces diremos que es un orden total.

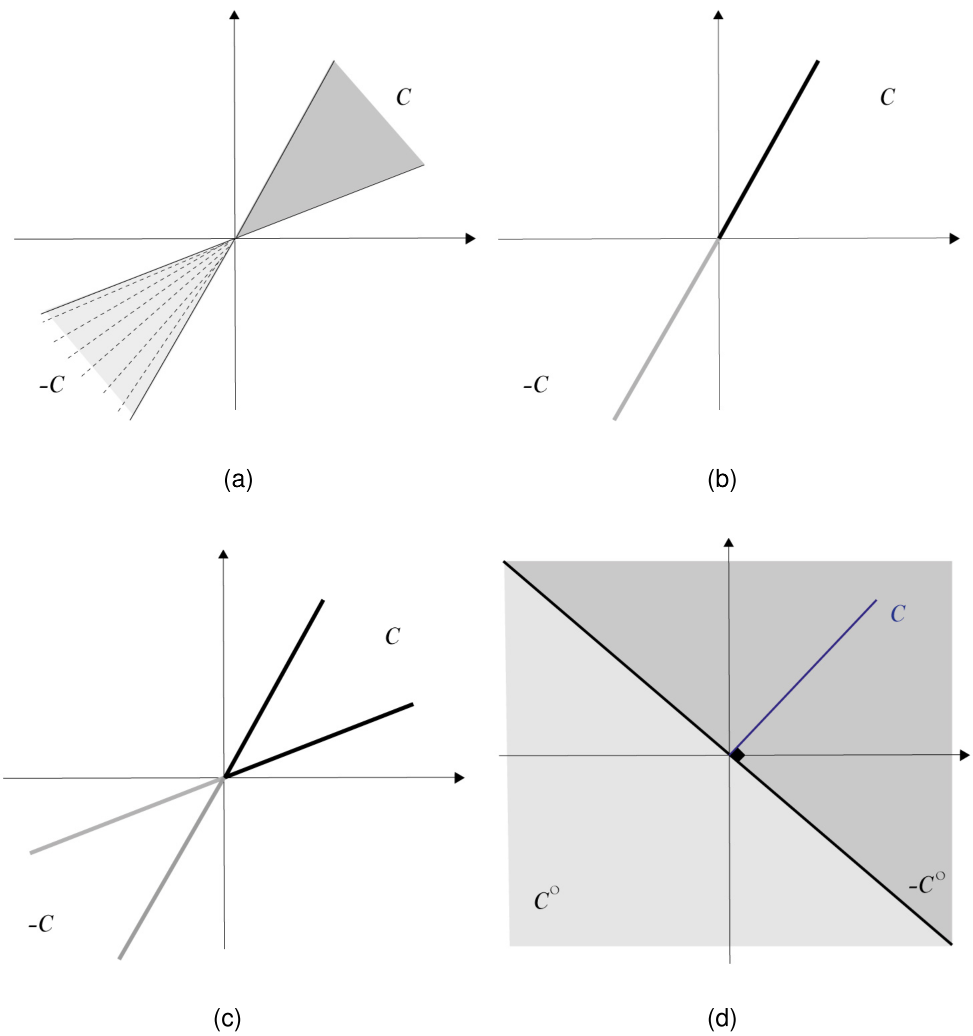
OBS 2.1. Podemos mostrar las siguientes observaciones:

- $(\Re, \leq)$ es una orden total.
- $(\Re^p, \preceq)$ no es una orden total pues no cumple la propiedad de conectada.

Definición 2.2.5. Sea $C \subseteq \Re^p$ es un cono si para todo $x \in C$ tenemos que $xt \in C$ para todo $t \geq 0$. Decimos que un cono C es puntiagudo sí $C \cap -C = \{0\}$.

***Ejemplo* 2.2.** Presentaremos ejemplos gráficos de conos con punta y uno sin punta.

Figura 2.2: Tipos de Conos



Fuente: Elaboración propia

(a),(b),(c) son conos puntiagudos pues la intersección de C con $-C$ es$\{0\}$, contrario a (d) que la intersección es una recta.

Proposición 2.2.6. *Sea C un cono. Entonces, C es convexo si solo si $C + C \subseteq C$.*

Prueba. De la hipótesis tenemos que C es un cono conexo. Sea $x, y \in C$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)y = z \in C$ tal que $\lambda \in [0,1]$
Para $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = z \in C$$
$$\frac{1}{2}(x+y) = z \in C$$
$$(x+y) = 2z \in C$$

Como C es un cono entonces para $t = 2,\ 2z \in C$

$$x \in C \wedge y \in C \quad tq \quad x + y \in C$$
$$\Rightarrow C + C \subseteq C$$

Ahora probaremos la otra implicancia.Tenemos como hipótesis $C + C \subseteq C$.

$$x \in C \wedge y \in C \Rightarrow x + y \in C$$
$$(1-\lambda)x \wedge \lambda y$$

Para $\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow (1-\lambda))x + \lambda y \in C$$

Por lo tanto C es conexo. ■

Proposición 2.2.7. *Sea A una relación binaria en $\Re^p$. A es una orden parcial lineal si y solamente si, existe un cono convexo puntiagudo $C \subseteq \Re^p$ tal que*

$$(x, y) \in A \Longleftrightarrow y - x \in C$$

Prueba. De la hipótesis tenemos que A es una orden parcial lineal.

Definiremos el conjunto $C = \{x \in \Re^p | (0,x) \in A\}$ probaremos que C es un cono :

En efecto, sea $x \in C$ entonces $(0,x) \in A$ y como es una relación binaria lineal, cumple la propiedad de linalidad, por lo tanto:

Para $t > 0 \wedge 0 \in \Re^p$ entonces,

$$(0 \cdot t + 0, x \cdot t + 0) \in A$$

$$(0, xt) \in A \rightarrow xt \in C,\ t \geq 0 \wedge \forall x \in C$$

Luego C es un cono.

Veremos que C es un cono convexo. Dados x y $y \in C$, de la definición de C y por la linealidad de A tenemos

$$t = 1, z = -y \rightarrow (0 \cdot t - y, y \cdot t - y) = (-y, 0) \in A$$

Por transitividad en A:

$$(-y, 0) \wedge (0, x) \in A \rightarrow (-y, x) \in A$$

Por linealidad en A :

$$t = 1, z = y \rightarrow (-y \cdot 1 + y, x \cdot 1 + y) = (0, x + y) \in A$$

Entonces $C + C \subseteq C$, de la proposición anterior C es un cono convexo.

Finalmente probaremos que C es un cono convexo puntiagudo, en efecto sea $x \in C \cap -C$

$$x \in C \wedge x \in C$$

$$(0, x) \in A \wedge (0, -x) \in A$$

Por linealidad en A:

$$t = 1, z = x \rightarrow (0 \cdot 1 + x, -x \cdot 1 + x) = (x, 0) \in A$$

Luego $(0, x) \in A \wedge (x, 0) \in A$ y como A es antisimétrica entonces $x = 0$.Por lo tanto C es un cono convexo puntiagudo. Para el reciproco, sea C es un cono convexo puntiagudo mostraremos que la relación A definida como $(x, y) \in A \longleftrightarrow y - x \in C$ es una orden parcial lineal.

Reflexiva:

como C es un cono con punta $C \cap -C = \{0\}$ entonces $0 \in C$ osea $x - x \in C$,luego $(x, x) \in A$ por lo tanto A es reflexiva.

Transitiva:

Sea $x, y, z \in C$ tal que $(x, y) \wedge (y, z) \in A$, entonces $y - x \in C \wedge z - y \in C$, de la convexidad se cumple que $C + C \subseteq C$, por lo tanto $(y - x) + (z - y) \in C$ luego $z - x \in C$ en consecuencia $(x, z) \in A$, A es transitiva.

Antisimétrica:

Sea $(x, y) \in A \wedge (y, x) \in A$ entonces $y - x \in C \wedge x - y \in C$, de la segunda relación tenemos que $y - x \in -C$, por lo tanto $y - x \in C \cap -C$ y por C es cono puntiagudo $y - x = 0 \rightarrow y = x$. A es antisimétrica.

Lineal :

Sea $(x, y) \in A \rightarrow y - x \in C$,como C es cono entonces $(y - x)t \in C$ donde $t \geq 0$ aplicando propiedad distributiva y para todo $z \in C$ tenemos $(ty + z) - (tx + z) \in C$ finalmente $(tx + z, ty + z) \in A$, A es lineal.

Como A es reflexiva, transitiva y antisimétrica entonces A es una relación de orden parcial y como cumple linealidad se considera que A es de orden parcial lineal.

■

Denotaremos $(x, y) \in A$ por $x \preceq_C y$ y podemos reescribir la Proposición 2.2.7 por:

$$x \preceq_C y \Longleftrightarrow y - x \in C$$

Las próximas dos definiciones son fundamentales para entender la naturaleza del problema generalizado de Optimización Multiobjetivo.

Definición 2.2.8. Sea $Y \subseteq \Re^p$, $C \subseteq \Re^p$ un cono convexo puntiagudo y $\preceq_C$ la orden parcial inducida por el cono. Un punto $x \in Y$ es un punto MINIMAL IDEAL de Y si $x \preceq_c y, \quad \forall y \in Y$.

Definición 2.2.9. Sea $Y \subseteq \Re^p$, $C \subseteq \Re^p$ un cono convexo puntiagudo y $\preceq_C$ la orden parcial inducida por el cono. Un punto $x \in Y$ es un punto MINIMAL de Y si no existe $y \in Y \setminus \{x\}$ tal que $y \preceq_C x$.

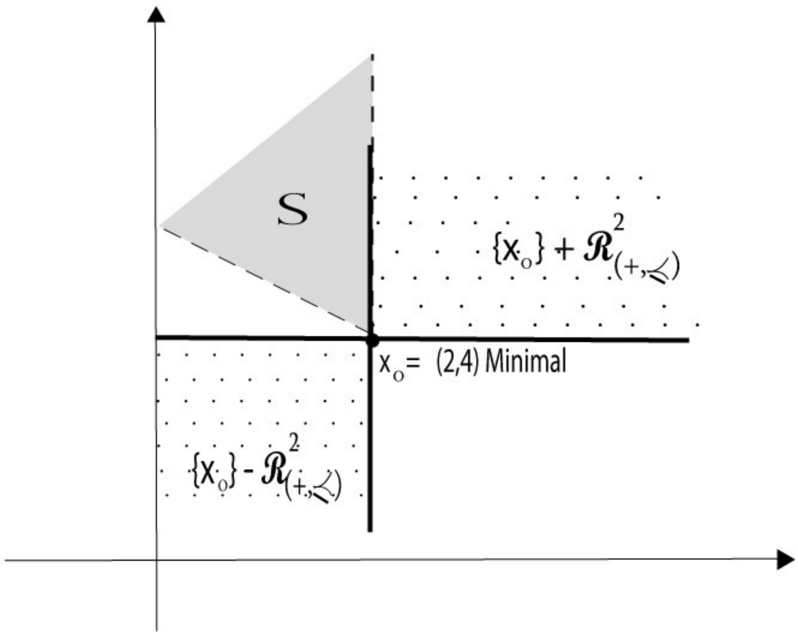
Otra definición de MINIMAL en un conjunto S.

Definición 2.2.10. El punto x_0 es un elemento minimal del conjunto S, si para C un cono convexo inductor de orden parcial se tiene:

$$(\{x_0\} - C) \cap S \subset \{x_0\} + C$$

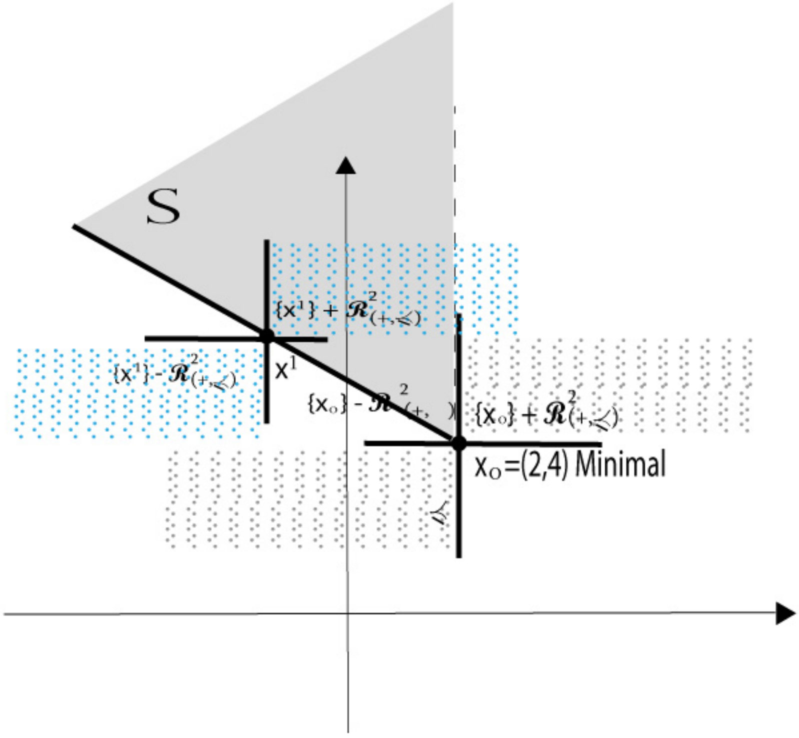
***Ejemplo* 2.3.** En este ejemplo gráfico trabajaremos con $\left(\Re^2_+, \preceq\right)$

Figura 2.3: Minimal de un conjunto sin frontera que incluye al punto $\{x_0\}$



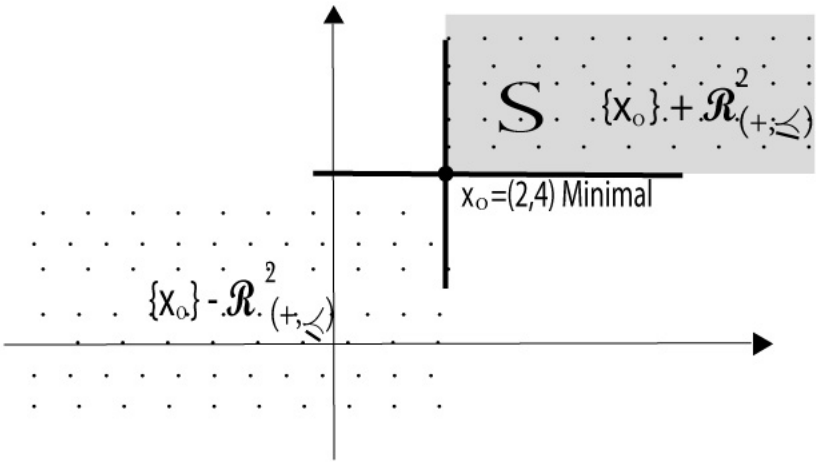
Fuente: Elaboración propia

Figura 2.4: La recta como puntos minimlales



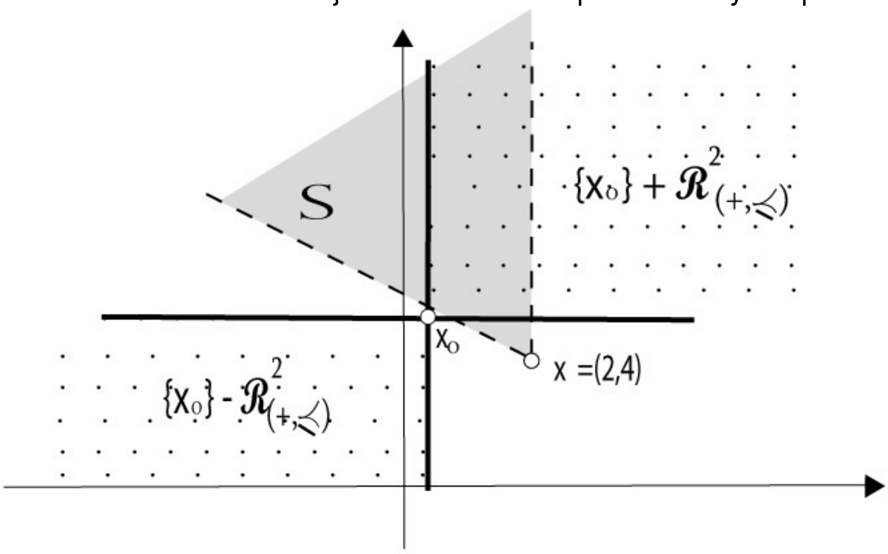
Fuente: Elaboración propia

Figura 2.5: Minimal de un conjunto que coincide con $\{x_0\} + \Re^2_+$



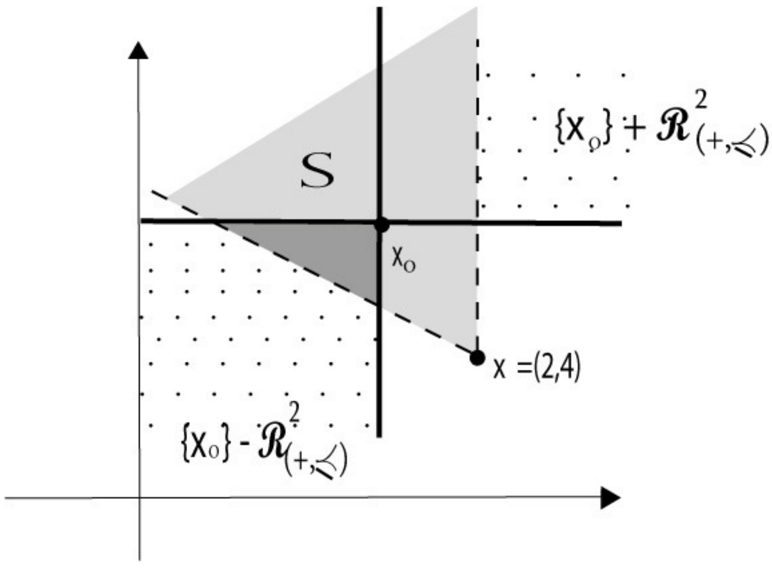
Fuente: Elaboración propia

Figura 2.6: Minimal de un conjunto sin frontera que no incluye al punto $\{x_0\}$



Fuente: Elaboración propia

Figura 2.7: $\{x_0\}$ no es minimal del conjunto S



Fuente: Elaboración propia

OBS 2.2. Tenemos las siguientes observaciones:

- De la definición 2.2.9 se puede ver como $x \in Y \wedge y \in Y \mid y \preceq_c x \Longrightarrow x = y$

- Cuando un orden es total el punto minimal y minimal ideal coinciden.
- Cuando tenemos órdenes parciales un punto minimal ideal puede no existir.

Ahora veremos conceptos básicos de Optimización Multiobjetivo. En particular en el siguiente trabajo consideraremos $C = \Re^p_+$ y el orden parcial inducida de la Definición 2.2.1. En estos problemas el objetivo será hallar los $x \in X$ tal que los $f(x)$ son puntos minimales del conjunto $f(X)$ bajo la relación de orden parcial inducida por el cono $C = \Re^p_+$ ya mencionada.
Cuando trabajamos con problemas de optimización con un solo objetivo nuestro propósito es hallar soluciones llamadas óptimas que son la respuesta favorable para el problema propuesto, sin embargo cuando trabajamos con muchas funciones para optimizar a la vez (problemas multiobjetivo) ya no se puede hablar de un óptimo, pues no habrá un valor que a la vez favorezca a todas las funciones, es por ello que ahora se hablará de las soluciones eficientes, que serán las soluciones generales del problema multiobjetivo. Algunos autores llaman a estas soluciones como óptimo de pareto. Definiremos ahora de manera formal las soluciones eficientes .

Definición 2.2.11. Una solución $x^* \in X$ es eficiente si no existe otro punto tal que $f(x) \preceq f(x^*)$ y $f(x) \neq f(x^*)$

Usando la Definición 2.2.9, tenemos que una solución x^* es eficiente si $f(x^*)$ es mininal de $f(X)$; si el punto no cumple la Definición 2.2.11 se le llama ineficiente. Ahora se va a mostrará otras definiciones de eficiente.

Definición 2.2.12. Una solución $x^* \in X$ es eficiente local si existe $\delta > 0$ tal que x^* es eficiente en $X \cap N(x^*, \delta)$ donde $N(x^*, \delta) = \{y \mid y \in \Re^n, \|x - y\| < \delta\}$

OBS 2.3. Si todas las funciones objetivo son convexas, entonces cualquier solución eficiente local es también una solución eficiente global.

Definición 2.2.13. Una solución $x^* \in X$ es débilmente eficiente si no existe un punto x tal que $f(x) \prec f(x^*)$ Esta definición también la podemos ver como:

$$\forall x \in X \quad ; f(x) \succeq f(x^*)$$

Definición 2.2.14. Una solución $x^* \in X$ es débilmente eficiente local si existe $\delta > 0$ tal que x^* es débil eficiente en $X \cap N(x^*, \delta)$ donde $N(x^*, \delta) = \{y \mid y \in \Re^n, \|x - y\| < \delta\}$

Definición 2.2.15. El cono linealizado de X en x es el conjunto dado por :

$$L_{\preceq}(X, x) := \{y \mid \bigtriangledown g_i' y \leq 0, i \in A(x)\}$$

Donde $A(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$ es el conjunto de índices de restricciones activas en X.

OBS 2.4. El cono linealizado de X es una aproximación de conjunto X en torno de x, obtenida por la linealizacion de funciones activas.

Definición 2.2.16 (Geoffrion)**.** Una solución eficiente $x^* \in X$ es propiamente eficiente si existe $M > 0$ tal que para cada $i = 1, 2 \ldots p$ y para cada $x \in X$ que satisface $f_i(x^*) > f_i(x)$ existe por lo menos un $j \neq i$ tal que $f_j(x^*) < f_j(x)$ y $f_i(x^*) - f_i(x) \leq M(f_j(x) - f_j(x^*))$.Una solución eficiente que no es propiamente eficiente es llamada impropiamente eficiente.

Definición 2.2.17. Una solución eficiente $x^* \in X$ es propiamente eficiente local si existe $\delta > 0$ tal que x^* es propiamente eficiente en $X \cap N(x^*, \delta)$.

El conjuntos de soluciones eficientes de un problema multiobjetivo es llamado frontera eficiente o frontera de pareto. Dependiendo del problema podemos aproximar tal conjunto graficamente al espacio objetivo.

Definición 2.2.18 (Espacio Objetivo)**.** Es un conjunto cuyos ejes son las funciones objetivo del problema, cada punto de coordenadas definidas por los valores de las funciones objetivo evaluadas en un punto del espacio de decisión.

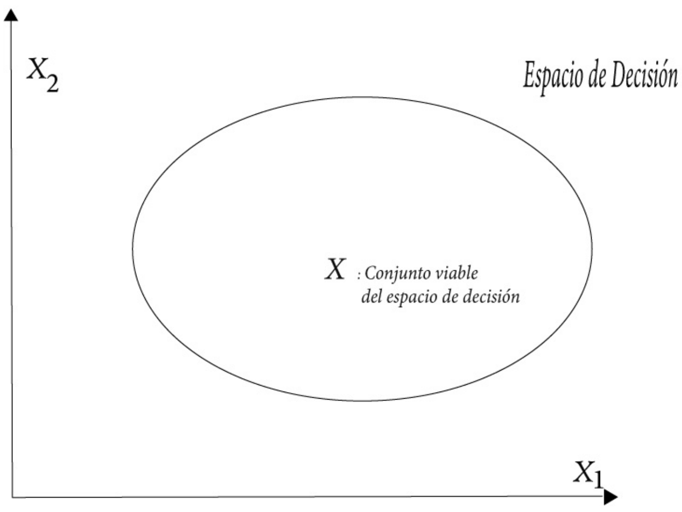
Definición 2.2.19 (Conjunto viable en el Espacio Objetivo)**.**

$$\bar{X} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

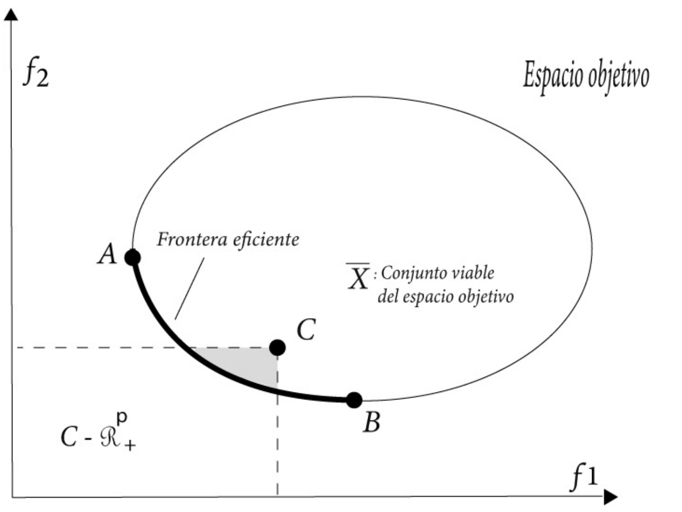
Definición 2.2.20 (Conjunto viable en el Espacio de Decisión)**.**

$$X = \{x \in \Re^n \mid g_i(x) \leq 0 \, , i = 1, \ldots m\}$$

Figura 2.8: Espacio de Decisión y Objetivo



(a)



(b)

Fuente: Elaboración propia

OBS 2.5. En la figura 2.8 , podemos observar:

- Los punto A, B son ejemplos de soluciones eficientes y C es solución inferior.
- A y B son puntos en el espacio de decisión, y deberían ser representados como $f(A)$ y $f(B)$ en el espacio objetivo. Pero para facilitar la notación representare-

mos los puntos del espacio de decisión en el espacio objetivo sin ternerlos que evalualos en la función multiobjetivo.

- La parte del gráfico más gruesa representa a la frontera eficiente.
- El conjunto viable de un problema con dos objetivos en el espacio objetivo
- El punto C es una solución ineficiente pues podemos mejorar sus valores moviendo en direción de la izquierda y abajo.

De la figura se puede concluir que x es eficiente si y solo si $(C - \Re^p_+) \cap \bar{X} = \{f(\bar{X})\}$. En la frontera eficiente sólo se escogerá un valor al cual llamaremos SOLUCIÓN DE MEJOR COMPROMISO. La relación entre la cantidad que se debe ser aumentada a un objetivo con el fin que haya disminución en el otro objetivo se llama COMPENSACIÓN. Las compensaciones de las soluciones eficientes son información importante para el tomador de decisiones así podrá escoger la SOLUCIÓN DE MEJOR COMPROMISO.

Definición 2.2.21. Ahora describiremos el método de pesos:
El problema 1.1 se resolverá mediante el método de pesos usando el vector de pesos $w \succeq 0$ tal que $\|w\|_1 = 1$; transformando el problema 1.1 en el siguiente :

$$\begin{aligned} & P(w) : min \sum_{k=1}^{p} w_k \, f_k(x) \\ s.a \qquad & g_i\,(x) \leq 0 \,, i = 1, \ldots m \end{aligned} \tag{2.1}$$

De esta forma el problema original se transforma en un problema con un único objetivo y con ello obtendremos soluciones óptimas que se convertiran en soluciones eficientes para el problema multiobjetivo.

2.3. Marco Conceptual

Debido a la naturaleza formal del estudio,el marco conceptual no aplica.

2.4. Definición de términos básicos

Con finalidad de tener una amplia teoría para la resolución de los objetivos en el presente trabajo se seguirá los resultados en : (Abadie,1967), (Benson & Morin, (1977)), (Bigi,1999), (Bigi & Pappalardo,1999),(Canales, 2018),(Cohon, 1978),(Geoffrion, 1968),(Kuhn, & Tucker, 1951),(Luc, 1989), (Rockafellar, 1997), (Sampaio, 2011) y (Sawaragi, Nakayama y Tanino, 1985).
Presentaremos algunas notaciones:

- $\Re$: El conjunto de los números reales
- $\Re^n$: El conjunto de los vectores n-dimensionales
- v' : Transpuesta de $v \in \Re$
- $\Re_+$: Conjunto de los reales positivos

$$\Re_+ := \{a \in \Re \mid a \geq 0\}$$

- $\Re_{++}$: Conjunto de los reales estrictamente positivos

$$\Re_{++} := \{a \in \Re \mid a > 0\}$$

- $-\Re_+$: Conjunto de los reales negativos

$$-\Re_+ := \{-a \in \Re \mid a \in \Re_+\}$$

- $-\Re_{++}$: Conjunto de los reales estrictamente negativos

$$-\Re_{++} := \{-a \in \Re \mid a \in \Re_{++}\}$$

- $\min_c Y$: Conjunto de los puntos minimales de un conjunto $Y \subseteq \Re^p$
- X : El conjunto de soluciones viables en el espacio de decisión.
- $\bar{X}$: El conjunto de soluciones viables en el espacio objetivo.
- E : La frontera eficiente conformada por los puntos eficientes.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General

Existen soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.

Hipótesis Espécifica

(i) Para una solución óptima única del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

(ii) Para una solución óptima del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

3.1.1. Operacionalización de variable

Variable dependiente (D):

Existencia de soluciones propiamente eficientes para un problema multiobjetivo:

Son aquellas soluciones eficientes que serán consideradas como la mejor solución para el problema multiobjetivo.

Variable independiente (I):

Problema Multiobjetivo:

El un problema de optimización con muchos objetivos para ser alcanzados, bajo ciertas restricciones.

Tabla 1: Operacionalización de las variables

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	MÉTODO	TÉCNICA
D	Definición de soluciones propiamente eficientes locales. Definición de solución propiamente eficiente. Definición de solución eficiente.	Bolas abiertas. Definición de una solución eficiente para el problema multiobjetivo. Definición de un punto mínimal y minimal ideal.	Método teórico - práctico	Revisión bibliográfica.
I	Conos Órdenes parciales Método de pesos	Conos convexos Estudio de las relaciones binarias Solución óptima.		

Fuente:Elaboración propia.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño Metodológico

Tipo de investigación

El enfoque del trabajo que se realizará es cuantitativo y el tipo de investigación es básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en forma inductiva-deductiva siendo lo más exhaustivo posible en cada demostración. Nuestro nivel de investigación es descriptivo.

Diseño de la investigación

La naturaleza de nuestra investigación, es un estudio no experimental por que no hemos requerido de datos experimentales ni estadísticos. Según su enfoque es cualitativa, ya que tiene como propósito la descripción de las cualidades del fenómeno a estudiar.

4.2. Método de Investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo básico teórico.

Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del problema multiobjetivo que conlleva un estudio sobre conos convexos, órdenes parciales.

Se explicará en detalle la metodología que desarrolla el método de pesos con el fin de mostrar la existencia de soluciones propiamente eficientes.

Finalmente se desarrollará un teorema que permita encontrar una solución óptima para el problema de pesos que en consecuencia nos muestre una solución propiamente eficiente para el problema multiobjetivo. Esto permitirá demostrar nuestra hipótesis general.

4.3. Población y Muestra

Debido a la naturaleza del estudio, la población y muestra no aplica.

4.4. Lugar de Estudio y Periodo Desarrollado

Las actividades de investigación se realizaron remotamente en la Facultad de Ciencias naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao. Periodo desarrollado desde 3/05/2021 hasta 3/11/2022.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.6. Análisis y procesamiento de datos.

Por ser nuestro trabajo de la rama de la programación matemática centrada en la teoría optimización de modelos reales, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

La presente investigación cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No aplica para este tipo de tesis.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No aplica para este tipo de tesis.

V. RESULTADOS

En este capítulo presentaremos los resultados obtenido en el desarrollo de la tesis.

5.1. Resultados descriptivos.

Por motivo de la naturaleza del trabajo no presentaremos resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales.

Por motivo de la naturaleza del trabajo los resultados que presentaremos son del tipo deductivos-inductivos y podrían ser considerados inferenciales.

En el Capítulo 2 se definió una solución eficiente para el problema multiobjetivo la cual era:

Definición 5.2.1. Una solución $x^* \in X$ es eficiente si no existe otro punto tal que $f(x) \preceq f(x^*)$ y $f(x) \neq f(x^*)$

Más adelante Geoffrion muestra un ejemplo de minimización con dos objetivos en el cual una solución eficiente admite un decrecimiento de primer orden de la función objetivo f_1 y un aumento de segundo orden e f_2. Tal ejemplo que se menciona es el siguiente:

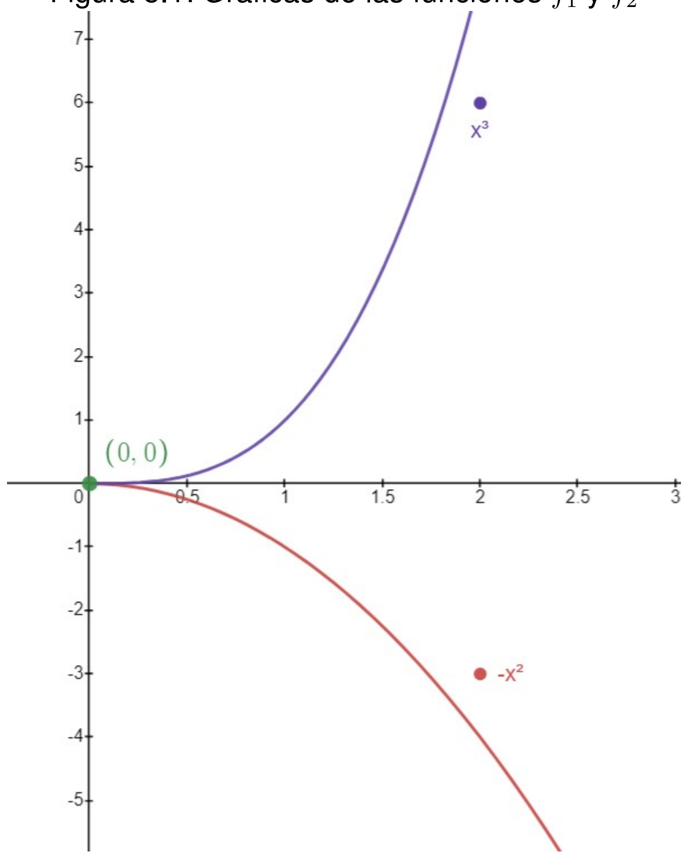
***Ejemplo* 5.1.**

$$\begin{aligned} min\ f(x) = & \quad (f_1(x), f_2(x)) \\ s.a & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde : $f_1(x) = -x^2$ y $f_2(x) = x^3$

Según la definición de eficiente 2.2 para cualquier punto x^* tal que $x^* \geq 0$ es una solución eficiente para el problema, pues para $f_1(x^*) > f_1(x)$ mientras que $f_2(x^*) < f_2(x)$ donde $x \geq 0$. Esto quiere decir que no existe un $x \geq 0$ que puede relacionarse con f de la siguiente forma $f(x) \preceq f(x^*) \wedge f(x) \neq f(x^*)$.

Figura 5.1: Gráficas de las funciones f_1 y f_2



Fuente: Elaboración propia

Como podemos ver en el ejemplo 5.1 estos cálculos de las funciones objetivos pueden ser no acotados,es decir una pequeña disminución de f_i traer como consecuencia un gran aumento de f_j y esto no permite en la vida real trabajar con ese tipo de eficientes pues no se pueden compara entre si. Para evitar tales tipos de soluciones eficientes Geoffrion define el concepto de soluciones propiamente eficientes.

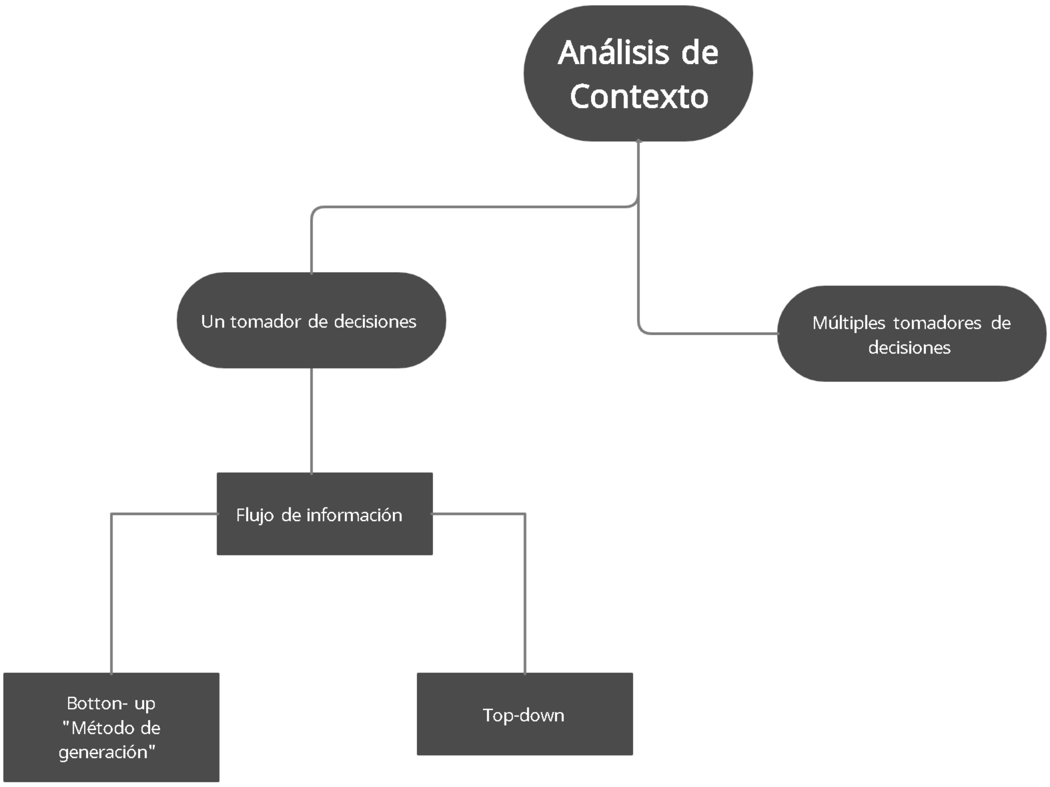
Definición 5.2.2 (Geoffrion)**.** Una solución eficiente $x^* \in X$ es propiamente eficiente si existe $M > 0$ tal que para cada $i = 1, 2 \ldots p$ y para cada $x \in X$ que satisface $f_i(x^*) > f_i(x)$ existe por lo menos un $j \neq i$ tal que $f_j(x^*) < f_j(x)$ y $f_i(x^*) - f_i(x) \leq$

$M(f_j(x) - f_j(x^*))$.Una solución eficiente que no es propiamente eficiente es llamada impropiamente eficiente.

Por otro lado para poder resolver el problema multiobjetivo existen varios métodos y para poder clasificarlos se debe analizar el contexto y las caracteríasticas del problema. Una de estas característifcas más importantes es la dirección de flujo de información en el proceso de desarrollo. Hay dos tipos de flujo de información:

- **El analista hacia el tomador de decisiones (bottom -up)**
  El analista genera soluciones eficientes (que pueden llegar a ser propiamente eficientes) y las entrega al tomador de decisiones para que escoja la que más le agrade. Este flujo de información también es llamado de generación.
- **El tomador de decisiones hacia el analista (top -down)**
  El tomador de decisiones informa al analista sus preferencias que las incoporará al método para resolver el problema.

Figura 5.2: Clasificación de los Métodos



Fuente: Elaboración propia

En la figura 5.2 podemos ver los tipos de flujo de información y análisis del contexto. Esta clasificación fue dada por Cohon en su libro "Multiobjetive Programing and Planning"(Cohon, 1978).

Definición 5.2.3 (Método de Pesos)**.** Es un método escalarizado para resolver el problema multiobjetivo que consiste en combinar todas las funciones objetivo usando un vector de pesos $w \succeq 0$, con $\|w\|_1 = 1$ de esa forma el problema original se transforma en un problema con un sólo objetivo con sus restricciones originales y a este nuevo problema nos referiremos como el Problema de Pesos y lo denotaremos como $P(w)$.

OBS 5.1. El método de pesos sirve para tener una aproximación de la frontera eficiente y fue experimentado, primeramente, en Zadeh (Zadeh, 1963).

En el problema multiobjetivo descrito en el Capítulo I :

$$
\begin{aligned}
\text{mín } f(x) = (f_1(x), f_2(x), ...f_p(x))& \\
g_1(x) \leq 0& \\
s.a \qquad g_2(x) \leq 0& \\
\vdots& \\
g_m(x) \leq 0&
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Se usará un vector $w \succeq 0$ tal que $\|w\|_1 = 1$ y se transformará en el problema siguiente con un sólo objetivo:

$$
\begin{aligned}
P(w) : min \sum_{k=1}^{p} w_k \, f_k(x)& \\
s.a \quad g_i\,(x) \leq 0\,, i = 1, \ldots m&
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Satisfaciendo algunas condiciones que se discutirán en esta sección cada solución óptima del problema (5.2) será una solución eficiente y propiamente eficiente para el problema.

Para ver mejor el hecho de que la solución óptima de(5.2) es una solución eficiente, podemos tomar un ejemplo simple de un problema con sólo dos funciones objetivo. En este caso, el problema (5.2) tomará un vector $w \succeq 0$, con $\|w\|_1 = 1$

$$\begin{aligned} P(w) : min \quad & w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) \\ s.a \quad & g_i\,(x) \leq 0\,, i = 1, \ldots m \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sabemos que las curvas de nivel de la función objetivo de (5.3) están dadas por

$$w_1 f_1 + w_2 f_2 = c, \tag{5.4}$$

donde c es cualquier constante. Si $w_2 \neq 0$, todavía podemos reescribir 5.4 de la siguiente manera teniendo en cuenta que $w \succeq 0$, esto es, $w_1 \geq 0$ y $w_2 > 0$

$$f_2 = \frac{1}{w_2}\,(c - w_1 f_1)$$

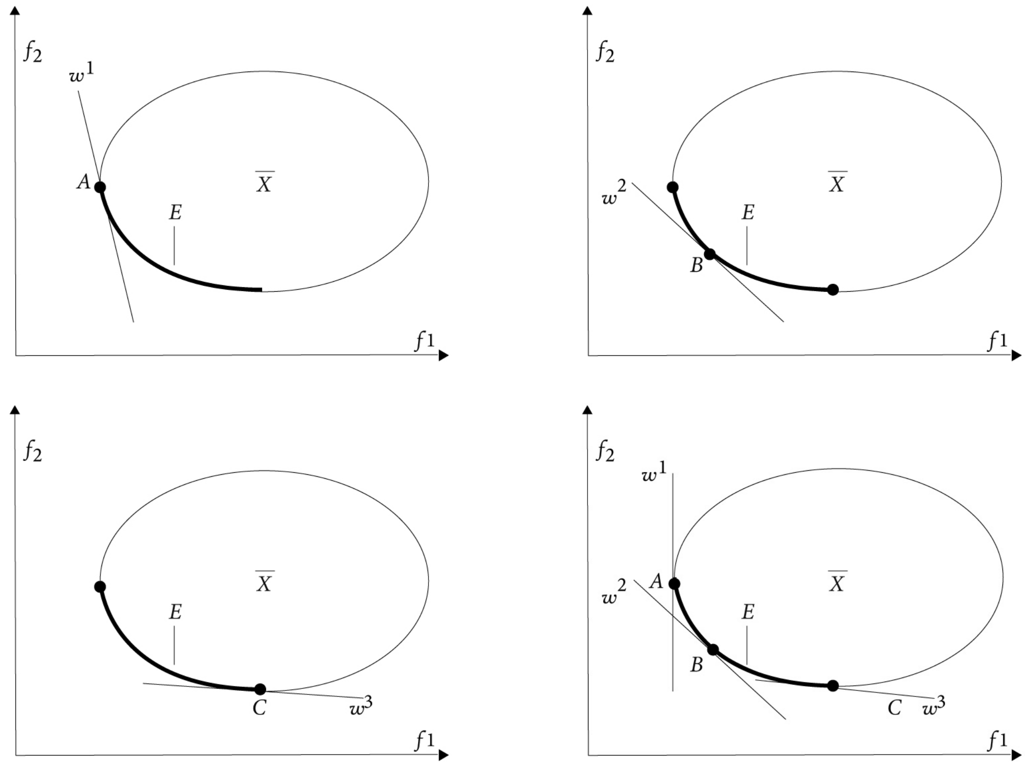
y desarrolando tenemos:

$$f_2 = -\frac{w_1}{w_2} f_1 + \frac{c}{w_2}$$

Se puede observar que la función objetivo de (5.3) siempre tendrá coeficiente angular no positivo. Combinando este hecho con el problema es de minimización, concluimos que la solución óptima siempre caerá en la parte más a la izquierda del conjunto viable en el espacio objetivo, donde se encuentra la frontera eficiente. Para diferentes valores de w, podemos encontrar diferentes soluciones eficientes.

Suponga que el conjunto de soluciones viables $\bar{X}$ de (5.3) del espacio objetivo está representado en la Figura 5.3. Claramente, podemos ver en la figura que diferentes elecciones de w pueden conducir a de diferentes soluciones eficientes.

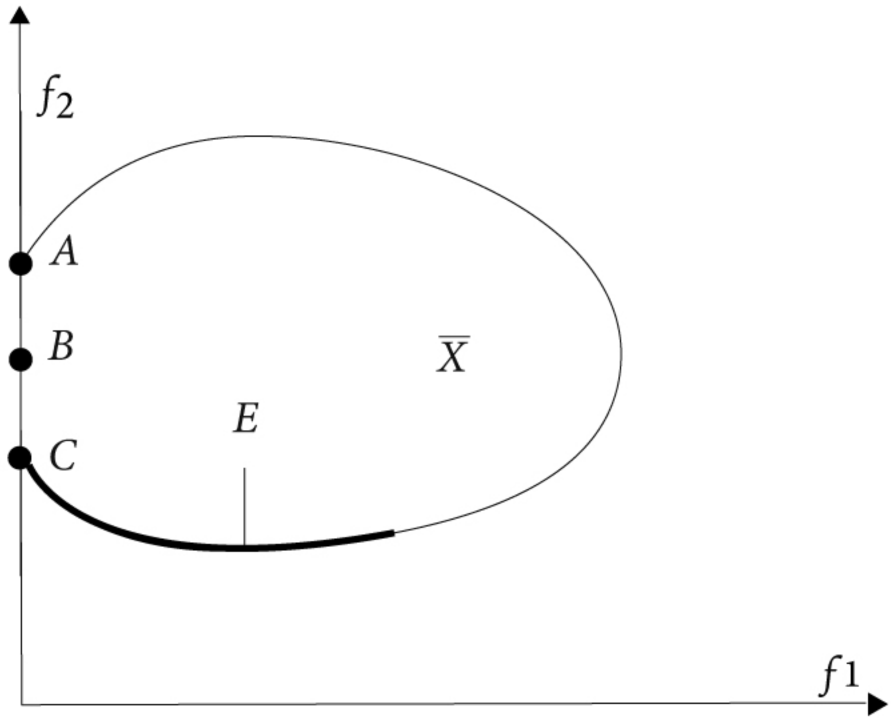
Figura 5.3: Representación geométrica del Método de Pesos



Fuente: Elaboración propia

El método de pesos consiste, por tanto, en resolver (5.2) para diferentes vectores w con el fin de obtener una aproximación de la frontera eficiente a partir de las soluciones óptimas encontradas hasta que no haya un espacio muy grande entre las soluciones descubiertas. Generalmente, los valores iniciales de w están dados por los vectores canónicos $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, .., 0)'$, que tienen 1 en la i-ésima entrada y 0 en las otras.

Figura 5.4: Soluciones óptimas A y B



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 5.4 , podemos ver el caso donde una solución óptima para un problema de pesos con dos objetivos no es una solución eficiente. En este caso, se escogió un $w = (w_1, w_2)'$ tal que $w_1 = 0$ y $w_2 > 0$; es decir:

$$f_2 = \frac{c}{w_2}$$

Entonces sólo estamos minimizando la función f_2. Para este ejemplo, las soluciones A, B y C son óptimas, pero sólo C es una solución eficiente. Veremos ahora que, para que una solución óptima x de un $P(w)$ sea una solución eficiente, se debe tener uno de dos casos: $w > 0$ o x es una única solución óptima de $P(w)$. Y para finalizar este capítulo desarrollaremos el teorema principal donde se darán las condiciones necesarias para obtener una solución propiamente eficiente.

Teorema 5.2.4. *Si x^* es la única solución óptima de $P(w)$ para un vector dado $w \succeq 0$,* *con $\|w\|_1 = 1$, entonces x^* es una solución eficiente al problema multiobjetivo.*

Prueba. Sea x^* solución óptima única del problema $P(w)$:

$$P(w) : min \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x^*) \quad < \quad \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x) \qquad \forall x \in X \tag{5.5}$$

Considerando a $w \succeq 0$ un vector con $\|w\|_1 = 1$.

Por contradición supondremos que x^* no es una solución eficiente para el problema multiobjetivo, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \preceq f(x^*)$ y $f(x) \neq f(x^*)$, como $w \succeq 0$ y $f(x) \preceq f(x^*)$, entonces :

$$w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_p f_p(x) \leq w_1 f_1(x^*) + w_2 f_2(x^*)...w_p + f_p(x^*)$$

$$\sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x^*)$$

Sin embargo esto contradice (5.5).

■

Teorema 5.2.5. *Sea x^* una solución óptima de $P(w)$ para un vector dado $w \succ 0$, con $\|w\|_1 = 1$, entonces x^* es una solución eficiente al problema multiobjetivo.*

Prueba. Sea x^* solución óptima de $P(w)$:

$$P(w) : min \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x^*) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x) \qquad \forall x \in X \tag{5.6}$$

Considerando un vector $w \succ 0$ con $\|w\|_1 = 1$.

Por contradición supondremos que x^* no es una solución eficiente para el problema multiobjetivo, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \preceq f(x^*)$ y $f(x) \neq f(x^*)$, como $w \succ 0$ y $f(x) \preceq f(x^*)$, entonces :

$$\begin{aligned} w_1 f_1(x) &\leq f_1(x^*) w_1 \\ w_2 f_2(x) &\leq f_2(x^*) w_2 \\ &\vdots \\ w_p f_p(x) &\leq f_p(x^*) w_p \end{aligned} \tag{5.7}$$

Para algún i se cumple que $w_i f_i(x) < f_i(x^*) w_i$, por lo tanto al realizar la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x) \quad < \quad \sum_{k=1}^{p} w_k\, f_k(x^*)$$

Sin embargo esto contradice (5.6)

■

Teorema 5.2.6. *Si x^* es una solución óptima de $P(w)$ para un vector dado $w \succ 0$, entonces x^* es una solución propiamente eficiente al problema multiobjetivo.*

Prueba*.* Si x^* es una solución óptima del P(w) entonces:

$$\sum_{k=1}^{p} w_k f_k(x^*) \leq \sum_{k=1}^{p} w_k f_k(x) \qquad \forall x \in X$$

$$w_1 f_1(x^*) + w_2 f_2(x^*) + \cdots + w_p f_p(x^*) \leq w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_p f_p(x)$$

Para w_i máx de $1 \leq i \leq p$ tal que $f_i(x^*) > f_i(x)$ osea $f_i(x^*) - f_i(x) > 0$ Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} w_i f_i(x^*) + \sum_{k\neq i}^{p} w_k f_k(x^*) \leq w_i f_i(x) + \sum_{k\neq i}^{p} w_k f_k(x) \\ w_i(f_i(x^*) - f_i(x)) \leq \sum_{k\neq i}^{p} w_k f_k(x) - \sum_{k\neq i}^{p} w_k f_k(x^*) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Existe w_j máximo y $w_j \neq w_i$ tal que $f_j(x) - f_j(x^*) > 0$ osea $f_j(x) > f_j(x^*)$

$$\begin{aligned} w_i(f_i(x^*) - f_i(x)) \leq \sum_{k\neq i}^{p} w_k(f_k(x) - f_k(x^*)) \qquad & \leq (p-1) w_j (f_j(x) - f_j(x^*)) \\ (f_i(x^*) - f_i(x)) \leq (p-1)\frac{w_j}{w_i}(f_j(x) - f_j(x^*)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Entonces existe

$$M = (p-1) \max_{1\leq i\leq p} \max_{i\neq j} \frac{w_j}{w_i} > 0$$

Tal que

$$f_i(x^*) - f_i(x) \leq M(f_j(x) - f_j(x^*))$$

Por lo tanto x^* es una solución propiamente eficiente para el problema multiobjetivo.

■

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirío de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Esta sección esta dedicada a mostrar que las hipótesis planteadas en el capitulo 3 se verifican. En este sentido, en la Sección 3.1.1 se planteó la siguiente hipótesis general:

- Existen soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.

Como se pudo ver en el capítulo anterior, en el Teorema 5.0.6 se demostró que a partir de una solución óptima para un problema de pesos se obtiene una solución propiamente eficiente. Esto muestra claramente la veracidad de la hipótesis general planteada. Por otro lado en la Sección 3.1.2 se planteó las siguientes hipótesis específicas.

(i) Para una solución óptima única del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

(ii) Para una solución óptima del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.

En relación a la hipótesis específica (i) el Teorema 5.0.4 muestra que a partir de una solución óptima única para un problema de pesos se obtiene una solución eficiente, con esto se verífica dicha hipótesis. Además, con respecto a la hipótesis específica (ii) el Teorema 5.0.5 muestra que a partir de una solución óptima para un problema de pesos se obtiene una solución eficiente, con esto se verífica dicha hipótesis. Así que las hipótesis planteadas en el presente trabajo estan verificadas.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

En Yu(2013), Miettinen (2012),Deb (2011) a la solución eficiente le llaman solución de pareto.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedío con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento

CONCLUSIONES

- En el Capítulo 5 se tiene los Teoremas 5.0.4 y 5.0.5 los cuales permiten encontrar soluciones eficientes para un problema multiobjetivo.En el caso del Teorema 5.0.4 las soluciones eficientes se encuentran a partir de una solución óptima única y un vector de pesos $w \succeq 0$, por otro lado en el caso del Teorema 5.0.5 las soluciones eficientes se calculan a partir de una solución óptima y un el vector de pesos $w \succ 0$. Estos resultados es muy importantes ya que, al ser el problema de pesos un problema con un objetivo, se puede utilizar los métodos aprendidos en pregrado para solucionarlo.

- Es importante rescatar del siguiente trabajo que si x^* es una solución eficiente, es decir, si no exite otro punto tal que $f(x) \preceq f(x^*)$ y $f(x) \neq f(x^*)$, pero puede suceder que una pequeña disminución en el objetivo f_i traiga consigo un incremento en f_j. Para evitar tales casos se busca encontrar soluciones propiamente eficientes que serán una mejor solución para el problema multiobjetivo.

- El trabajar con el método de pesos es sencillo a comparación de otros métodos pero tiene una desventaja y es tener que resolver un problema de programación no lineal cada vez que se desee encontrar una nueva solución eficiente y esto puede generar un costo para la empresa.

RECOMENDACIONES

- El siguiente trabajo aporta resultados relevantes en el estudio de los probelmas multiobjetivos a partir del métdodo de pesos.Se recomienda explorar en futuros trabajos otros tipos de soluciones para estos probelmas considerando otros métodos como el Método NISE, Gradiente o ε- Restricción.

- Nótese que en este trabajo no se profundizó las condiciones de Fritz Jhon para la optimización multiobjetivo .En [Bertsekas et al., 2003], las condiciones de Fritz John se generalizan al caso donde se considera un conjunto abstracto adicional y se presenta una nueva condición de calificación, llamada pseudonormalidad, que se aplica a tal caso. Por tanto se recomienda, seguir la misma línea de desarrollo dentro del área de Optimización Multiobjetivo, ya que no encontramos tal enfoque en la literatura.

- También en la parte práctica recomendamos analizar y aplicar la teoría y el método de Optimización Multiobjetivo discutido en este trabajo, en el área de sensado comprimido (compressed sensing).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abadie, J. M. (1967). On the Kuhn-Tucker theorem,*Nonlinear Programming* , J. Abadie ed.

Choque, A., & Alonso, R. (2018). *Algoritmo genético multiobjetivo para la optimización de la distribución de ayuda humanitaria en caso de desastres naturales en el Perú.*

Benson, H. P., & Morin, T. L. (1977). The vector maximization problem: proper efficiency and stability.*SIAM Journal on Applied Mathematics* , 32(1), 64-72.

Bigi, G. (1999) *Optimality and Lagrangian Regularity in Vector Optimization* . Tese de Dou- torado, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy.

Bigi, G., & Pappalardo, M. (1999). Regularity conditions in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(1), 83-96.

Canales, G. (2018). P. *Teoría y aplicaciones de optimización e investigación de operaciones.* Lima, Perú: Fondo Editorial EDUNI.

Cristóbal García, J. (2013). Optimización multi-objetivo para la evaluación de la sostenibilidad de tecnologías de generación de electricidad a partir de carbón.

Cohon, J. L.(1978) .*Multiobejctive Programing and Planning* . Academic Press, New York.

Deb, K. (2011). *Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction.* In Multi-objective evolutionary optimisation for product design and manufacturing (pp. 3-34). Springer, London.

Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization.*Journal of mathematical analysis and applications* , 22(3), 618-630.

Jimenez, R., & Linder, S. *Planeamiento de la generación distribuida en redes de distribución de energía eléctrica en el Perú*.

Kuhn, H. W., & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear Programming en J. Neyman (Ed.),*Proceedings* *of the second berkeley symposium on mathematical statistic and probability* , Berkeley: UC Berkeley.

Leon Malpartida, J. (2019). *Algoritmo de optimización multiobjetivo para el problema center-based clustering para conjuntos con outliers*.

Li, F. F. (2019). *Topics and Applications of Weighting Methods in Case-Control and Observational Studies* (Doctoral dissertation, Duke University).

Luc, D. T.(1989). *Theory of Vector Optimization.* Springer, Berlin. Maeda, T. (1994). *Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: differentiable case*. Journal of Optimization Theory and Applications, 80(3), 483-500.

Miettinen, K. (2012). N*onlinear multiobjective optimization* (Vol. 12). Springer Science & Business Media.

Matsouaka, R. A., & Atem, F. D. (2020). *Regression with a right-censored predictor using inverse probability weighting methods*. Statistics in Medicine, 39(27), 4001-4015.

Momeni, R., Etminan, J., & Sadegh, M. K. (2021). *Estimation of normal means in the tree order model by the weighting methods*. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 50(1), 282-294.

Rockafellar, R. T. (1997). *Convex Analysis*,Princenton University Press, Princenton, NJ.

Sawaragi, Y., NAKAYAMA, H., & TANINO, T. (Eds.). (1985).*Theory of multiobjective optimization* . Elsevier.

Sampaio, P. R. (2011). Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).

Velasco Carrera, L. (2017). *Optimización multiobjetivo del transporte de personas discapacitadas: diseño de nuevas metodologías metaheurísticas*

Yu, P. L. (2013). *Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions* (Vol. 30). Springer Science & Business Media.

ANEXOS

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
Problema general: ¿Existirán soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos?	**Objetivo general:** Mostrar que existen soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.	**Hipótesis general:** Existen soluciones propiamente eficientes para el problema multiobjetivo mediante el método de pesos.	El método de investigación es básico teórico	Población: No aplica Muestra:No aplica
Problema específico: ¿A partir de una solución óptima única para el problema de los pesos existirá una solución eficiente para el problema multiobjetivo? ¿A partir de una solución óptima para el problema de los pesos existirá una solución eficiente para el problema multiobjetivo?	**Objetivo específico:** Mostrar que para una solución óptima única del problema de los pesos existe una solucón eficiente para el problema multiobjetivo. Mostrar que para una solución óptima del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.	**Hipótesis especifica:** Para una solución óptima única del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo. Para una solución óptima del problema de los pesos existe una solución eficiente para el problema multiobjetivo.		