UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÓDULOS POBRES A PARTIR DE LOS DOMINIOS DE INYECTIVIDAD

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTORA:
BACH. NAYSHA MIRELLA MENA CCANTO

ASESOR:
DR. LITO EDINSON BOCANEGRA RODRIGUEZ

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:
ÁLGEBRA

Callao - 2024

PERÚ

Autora: Naysha Mirella Mena Ccanto

Código: 1629225446

DNI: 71284774

Asesor: Lito Edinson Bocanegra Rodríguez

Código: 6534

DNI: 44374253

CERTIFICADO DE ANÁLISIS
magister

MENA CCANTO NAYSHA MIRELLA DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÓDULOS POBRES A PARTIR DELOS DOMINIOS DE INYECTIVIDAD

5% Textos sospechosos

5% Similitudes
0% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas
< 1% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: MENA CCANTO NAYSHA MIRELLA DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÓDULOS POBRES A PARTIR DELOS DOMINIOS DE INYECTIVIDAD.pdf
ID del documento: 1572352cf58899c34ea3779fa072a5b8dd395e58
Tamaño del documento original: 954,69 kB

Depositante: FCNM PREGRADO UNIDAD DE INVESTIGACION
Fecha de depósito: 22/2/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 22/2/2024

Número de palabras: 33.735
Número de caracteres: 176.940

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes principales detectadas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	ruidera.uclm.es https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/10578/19128/1/TFG_MartaRodriguezBlanco.pdf 96 fuentes similares	2%		Palabras idénticas: 2% (1180 palabras)
2	ru.dgb.unam.mx https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000661409/3/0661409_A1.pdf 96 fuentes similares	1%		Palabras idénticas: 1% (981 palabras)
3	www.dspace.uce.edu.ec http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/21097/1/T-UCE-0020-CIE-017.pdf 96 fuentes similares	1%		Palabras idénticas: 1% (951 palabras)
4	repositorio.unal.edu.co https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/unal/84626/2/12. Cuadernos algebra_VOL. 2_DIGITAL.pdf 96 fuentes similares	1%		Palabras idénticas: 1% (960 palabras)
5	ru.dgb.unam.mx https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000688442/3/0688442.pdf 96 fuentes similares	1%		Palabras idénticas: 1% (878 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	www.doi.org https://www.doi.org/10.4153/CJM-1984-003-5	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (20 palabras)
2	repositorio.ucv.edu.pe https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/20.500.12692/20793/4/Quincho_FE.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (14 palabras)
3	idus.us.es https://idus.us.es/bitstream/11441/134389/1/López Díaz-Jorge Fernando TFG.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (14 palabras)
4	ru.dgb.unam.mx https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000187429/3/0187429.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (10 palabras)
5	msp.org http://msp.org/pjm/1979/80-2/pjm-v80-n2-p12-s.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (12 palabras)

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** Descripción y Análisis de los Módulos Pobres apartir de los Dominios de Inyectividad
4. **Datos de la autora:**

   Autora: Naysha Mirella Mena Ccanto

   ORCID: 0009-0009-9673-4861

   DNI: 71284774
5. **Datos del asesor:**

   Asesor: Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez

   ORCID: 0000-0001-6726-8667

   DNI: 44374253
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Tipo de Investigación:** Básica o pura
8. **Enfoque de Investigación:** Cualitativo
9. **Diseño de Investigación:** Documental / Explicativa
10. **Tema OCDE:** Matemáticas puras (Código 1.01.01)

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el Callao, en el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, sito en la Av. Juan Pablo II N° 306, Bellavista, siendo las 11:10 horas del día miércoles diecisiete de enero del año dos mil veinticuatro, se reunieron a fin de proceder en primer término al acto de instalación del Jurado Evaluador de Tesis, titulado: **"DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÓDULOS POBRES A PARTIR DE LOS DOMINIOS DE INYECTIVIDAD"**, presentado por la Bachiller NAYSHA MIRELLA MENA CCANTO; Jurado Evaluador que está integrado por los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. SOTELO PEJERREY, Alfredo : Presidente
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Vocal
Mg. VIDAL GUZMÁN, Roel Mario : Secretario

Luego de la instalación, el Secretario del Jurado Evaluador dio lectura de la Resolución Decanal N° 092-2023-D-FCNM que designa a los miembros del Jurado Evaluador de Tesis, por la modalidad sin ciclo de tesis.

Se dio inicio a la sustentación de la tesis de acuerdo a lo normado por el Art.78° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 150-2023-CU de fecha 15 de junio del año 2023.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador proceden a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron absueltas.

Luego de la deliberación en privado del Jurado Evaluador y después de calificar la Tesis referida líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la sustentación realizada por la Bachiller NAYSHA MIRELLA MENA CCANTO, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	**MUY BUENO**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el Secretario del Jurado Evaluador.

Siendo las 11:53 horas. del día miércoles diecisiete de enero del año dos mil veinticuatro, el señor Presidente del Jurado Evaluador de Tesis dio por concluido el acto de sustentación.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
Vocal

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Secretario

Escaneado con CamScanner

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÓDULOS POBRES A PARTIR DE LOS DOMINIOS DE INYECTIVIDAD

Naysha Mirella Mena Ccanto

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
PRESIDENTE

Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
VOCAL

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
SECRETARIO

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodriguez
ASESOR

Callao – Perú

2024

DEDICATORIA

A mis padres y mi hermano por su apoyo y cariño, en especial a mi madre quien me brinda su amor incondicional.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo y respaldo de mi asesor el Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodriguez y mi profesor el Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas. También agradezco a mi familia por su comprensión y motivación constante.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

RESUMEN

En el presente trabajo abordamos el estudio de los módulos pobres y la relación de estos con los anillos artinianos y noetherianos. Los resultados obtenidos en este trabajo son divididos en tres partes. En la primera parte se da condiciones suficientes para garantizar que un módulo sea pobre. En la segunda parte, estudiamos los anillos sin clase media y bajo que condiciones se asegura que una clase de R-módulos son sin clase media. Por último, estudiamos las utopías y bajo qué condiciones una clase de R-módulos forman una utopía.

ABSTRACT

In the present work we address the study of the poor modules and their relationship with the Artinian and Noetherian rings. The results obtained in this work are divided into three parts. In the first part, sufficient conditions are given to guarantee that a module is poor. In the second part, we study rings without middle class and under what conditions it is ensured that a class of R-modules are without middle class. Finally, we study utopias and under what conditions a class of R-modules form a utopia.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es estudiar los módulos pobres a partir de los dominios de inyectividad y sus diversos conceptos relacionados. Para esto nos basaremos en [23] como principal referencia para entender mejor esta problemática. Así denotaremos por Mod_R a la categoría de todos los módulos *derechos* sobre un anillo R y $SSMod - R$ a la clase de todos los módulos R-derechos semisimples. En la literatura se sabe que, para cualquier $M \in Mod - R$, se puede construir $In^{-1}(M)$= $\{N \in Mod - R : M \text{ es } N - inyectiva\}$.
Además es posible mostrar que, M es inyectivo si su dominio de inyectividad $In^{-1}(M)$ es tan grande como puede ser.
En este trabajo, nos interesa la situación opuesta. Nos centraremos en módulos que tengan un dominio de inyectividad lo más pequeño posible. Nos referiremos a dichos módulos como *pobres* (a diferencia de los módulos inyectivos que son *ricos* en términos de sus dominios de inyectividad).
Otro factor importante es el de mostrar la existencia de estos módulos pobres, por ejemplo, es fácil ver que si $M \in Mod{-}R$ y $N \in SSMod{-}R$, entonces $N \in In^{-1}(M)$.
De hecho, se espera mostrar que:

$$\bigcap_{M \in Mod-R} In^{-1}(M) = SSMod - R \tag{0.1}$$

Esto permite definir un módulo M como *pobre* si para todo $N \in Mod - R$, M es N- inyectivo solo si N es semisimple.
Inmediatamente varias preguntas vienen a la mente. Por ejemplo:

¿Cada anillo R tiene (al menos) un módulo pobre? o ¿Qué condiciones son necesarias en un anillo R para que haya un R-módulo M pobre?

Es así con este trabajo no solo pretendemos responder las preguntas anteriores, si no que brindaremos una descripción y análisis de los módulos pobres teniendo en cuenta las diferentes caracterizaciones sobre su dominio de inyectividad $In^{-1}(M)$.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El objetivo de este trabajo es describir y analizar los módulos pobres a partir de su dominio de inyectividad, por lo que revisaremos el trabajo [23] como referencia principal. Se introducirá el concepto de módulo pobre y se mostrará algunas propiedades importantes de estos módulos. Además, se estudiará qué hipótesis sobre un anillo R hacen que alguna familia de la clase de los R-módulos sea una familia indigente (familias en las que todos los R-módulos son pobres), una familia sin clase media (familias en las que todos los R-módulos son o bien pobres o inyectivos) o una familia que es una utopía (familias en las que todo R-módulo no es pobre).
En este escenario se debe entender a un módulo pobre en el siguiente sentido:

Definición 1.1.1 (Módulos Pobres)**.** Se dice que un R-módulo M es pobre cuando $SSMod - R = In^{-1}(M)$.

Note que los módulos pobres son el concepto central de este trabajo. Probaremos muchos resultados relacionados con este concepto y los usaremos para clasificar algunas clases de anillos.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Es posible realizar una descripción y análisis de los Módulos Pobres a partir de los dominios de inyectividad?

1.2.2. Problema Específico

PE1. ¿Existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres?

PE2. ¿Existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Realizar una descripción y análisis de los Módulos Pobres a partir de los dominios de inyectividad

1.3.2. Objetivo Específico

OE1. Mostrar que existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres.

OE2. Mostrar que existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres.

1.4. Justificación

La justificativa de este trabajo radica en estudiar detalladamente los módulos pobres y su relación con los anillos semisimples por medio del dominio de integridad, esto con la finalidad de poder caracterizarlos de una manera más entendible y práctica. Adicionalmente se puede mencionar que el mayor aporte que se pretende brindar con este trabajo es la de relacionar los anillos noetherianos y artinianos con los módulos pobres y como interactúan sobre ciertos ideales, creando diferentes clases de módulos, como los de clase media, o utopías. Es importante notar que este trabajo es netamente teórico y su principal interés es poder seguir contribuyendo en el estudio y la evolución del álgebra de anillos.

Comenzaremos indicando un mínimo de contexto teórico. Para esto, todos los anillos que se considerará (como se mencionó anteriormente, este trabajo pretende realizar un estudio concienzudo de los módulos pobres) tienen un elemento identidad y todos los módulos son a derecha y unitarios. La terminología y notación a usarse sigue a la de las principales referencias en la teoría de anillos y módulos como en [3].
El zócalo, el radical de Jacobson y los submódulos singulares de un módulo M se denotarán como es habitual por $Soc(M)$, $J(M)$ y $Z(M)$ respectivamente; cuando no haya peligro de confusión, denotaremos $J(R)$ por J, además, diremos que un anillo R es **J - semisimple** si $J(R) = 0$.
Si bien, debido a un resultado clásico de Osofsky, un anillo para el cual todos los módulos cíclicos son inyectivos debe ser artiniano semisimple, una ligera modificación de esta definición que pide solo que los módulos cíclicos adecuados sean inyectivos produce una familia más grande.
Se dice que un anillo es un anillo PCI derecho si cada módulo cíclico, que no es isomorfo a este, es inyectivo. Los dominios PCI derechos juegan un papel central en el estudio de los anillos QI derechos (aquellos anillos en los que todos los módulos

cuasi-inyectivos son inyectivos). Por ejemplo, se ha demostrado que cada anillo QI derecho hereditario es equivalente de Morita a un dominio PCI derecho. Los dominios PCI derechos y los anillos QI derechos son ejemplos de V-anillos derechos, es decir, anillos para los que todos los módulos simples son inyectivos.
La noción de V-anillos derechos puede generalizarse a la de VG-anillos derechos (anillos en V generalizados), en los que cada módulo simple es inyectivo o proyectivo. Los VG-anillos derechos se introdujeron en [9] y se analizan en [10]. Las referencias sobre estos diversos temas relacionados incluyen [5, 6, 10, 11, 19].

Otro concepto más de interés es el de un anillo SI derecho. Un anillo R es SI derecho si todo módulo singular es inyectivo. En la Proposición 3.1 de [13] se muestra que un anillo R es SI derecho si y sólo si todo módulo singular es semisimple. Además, si R es un dominio, entonces la noción de PCI derecho y SI derecho son equivalentes. Los dominios PCI derechos son Öre-derechos y, por lo tanto, en particular, cada módulo R cíclico adecuado es singular.
Recordemos que un módulo U se llama uniserial si tiene una única serie de composición de longitud finita. Además, un módulo es uniserial generalizado (o serial) si es una suma directa de un número finito de módulos uniseriales. Se dice que un anillo R es uniserial generalizado por la derecha si el módulo R_R es uniserial generalizado. El siguiente lema resume varios resultados de [26] y [24] que son fundamentales en nuestra búsqueda de módulos pobres sobre anillos primos hereditarios de Noether. Una referencia relacionada y útil es [25].

Lema 1.4.1. *(a) ([26], Lema 1) Cualquier módulo de torsión generado finitamente sobre un anillo primo noetheriano hereditario R es una suma directa de un número finito de módulos uniseriales.*

(b) ([26], Lema 2, parte (i)) Si en un R-módulo M, un elemento x es un elemento de torsión, entonces xR es un submódulo de torsión con aniquilador distinto de cero.

(c) ([26], Teorema 1) Sea R un anillo uniserial generalizado. Entonces cada R-módulo es una suma directa de módulos uniseriales.

(d) ([24], Teorema 1) Todo anillo factorial propio de un anillo primo noetheriano hereditario es uniserial generalizado.

Los módulos uniseriales de longitud dos son sobresalientes en este trabajo. Por tanto, se destaca el siguiente hecho.

Observación 1: Para un anillo R arbitrario, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. R es artiniano semisimple.

2. $Mod - R$ es indigente.
3. Existe un módulo pobre inyectivo E.
4. $\{0\}$ es un módulo pobre.

La segunda observación sirve, en particular, para rechazar la noción de que los sumandos directos de módulos pobres necesariamente deben ser pobres.

Observación 2: Si M es un módulo pobre, entonces para todo $N \in Mod-R$, $M \oplus N$ es pobre.

Es así que nace la pregunta que motivó este trabajo y que también fue comentada en la introducción.

¿Todos los anillos tienen módulos pobres?

Se espera con este estudio no solo responder a esta interrogante, si no dejar un marco teórico completo sobre los módulos pobres con la finalidad de aportar significativamente en los trabajos a posteriori en esta rama del álgebra.

1.5. Delimitantes de la Investigación

1.5.1. Teórica

Al realizar una investigación con respecto al tema a desarrollar, se ha visto que no se cuenta con trabajos relevantes a nivel nacional, por este motivo, los trabajos teóricos de referencia son de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas. Es así que la principal limitación es el acceso a dicho material, ya que la mayoría de revistas consideran un monto a pagar por sus artículos.

1.5.2. Temporal

Hubo contratiempos personales y laborales que dificultaron la investigación.

1.5.3. Espacial

Dado que el lugar de realización del presente trabajo de investigación se da en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional del Callao, como limitante espacial tengo la poca facilidad de movilidad para poder llegar a las instalaciones debido a que mi domicilio se encuentra a más de dos horas de ahí. Además, al no encontrar los materiales en bibliotecas especializadas, no se cuenta literatura más precisa para realizar la investigación.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. Antecedentes

2.1.1. Antecedentes Nacionales

1. **Masumura Tanaka, Víctor Fernando. 2002. Radical de Jacobson de un anillo**: En este trabajo, el autor busca exponer de manera clara el Concepto de Radical de Jacobson de un Anillo, (concepto propuesto por el Matemático Polaco nacionalizado norteamericano, Nathan Jacobson), el cual consiste en una estructura fuerte que se encuentra enmarcada dentro de la Teoría de Anillos. Adicionalmente el autor busca una relación de este tipo de estructuras con el concepto de Módulos. Nathan Jacobson es considerado uno de los principales matemáticos que revolucionaron el Álgebra, campo en el cual los temas son sumamente complicados debido a que es opinión del autor, que el álgebra consiste verdaderamente en la Matemática Pura, siendo a veces difícil visualizar algunas situaciones, sin embargo, una vez conceptualizados los temas resultan sumamente sorprendentes y los resultados que se pueden obtener se vuelven totalmente lógicos. El Radical de Jacobson es uno de estos temas, sumamente complicados pero una vez entendido, los resultados a los que se llega se tornan sorprendentes. Es importante mencionar que el subradical de Jacobson tiene una estrecha relación con los módulos pobres.

2. **Córdova Gonzales, Diana Janeth, Merino Velásquez, Ruddy Katherine. 2015. Los Anillos Noetherianos y la descomposición primaria de un ideal propio**: En su tesis de grado los autores brindan una vista del estudio de los conjuntos algebraicos que apuntan a encontrar descomposiciones de los mismos términos de sus componentes irreducibles. Desde el punto de vista algebraico los autores tratan de dar una descomposición del ideal como una intersección de ciertos ideales llamados ideales primarios. Para alcanzar los objetivos propuestos en esta tesis, los autores empezaron dando las nociones básicas de teoría de anillos, ideales y módulos, para posteriormente definir un ideal primario y la descomposición primaria de un ideal. Finalmente, en este mencionado trabajo se establece las condiciones necesarias para que un anillo sea noetheriano y a su vez cumpla que todo ideal propio de ese anillo tiene descomposición primaria.

3. **Vilca Tomaylla, Efraín. 2022. Introducción a la teoría de anillos conmutativos**: El autor en su trabajo de Tesis nos muestra que en la teoría de anillos conmutativos podemos establecer como consecuencia de las definiciones de anillos, un objeto fundamental, que son los ideales, estos son, los subgrupos aditivos que son invariantes bajo la multiplicación por cualquier elemento arbitrario del anillo. Además de poder distinguir también ciertas clases de ideales: ideales primos, ideales primarios, ideales maximales, etc. Los ideales pueden

ser sumados, multiplicados e interceptados, lo que nos da una nueva clase de estructura combinatoria del conjunto de ideales en un anillo; En particular los ideales primos juegan un rol importante en este conjunto de ideales. El término *ideal* viene de la palabra *número ideal*, esto debido a Kummer; Los ideales fueron reconocidos como una generalización del concepto de número. En el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, cada ideal puede ser generado por un solo número, por el cual los conceptos de *ideal* y *número* son casi idénticos en $\mathbb{Z}$ (y en cualquier dominio de ideales principales). En un anillo en general, el concepto *ideal* permite generalizar muchas propiedades de los enteros, como ideales primos en lugar de números primos. En ciertas clases de anillos importantes de la teoría de números, como son los dominios Dedekind, el autor nos brinda una nueva versión del teorema fundamental de la aritmética: Cada ideal distinto de cero tiene una descomposición única como un producto de ideales primos. Muchos resultados importantes de la teoría de anillos conmutativos dependen de la condición de finitud, como en el caso de los anillos Noetherianos donde toda sucesión ascendente de ideales se estaciona o termina. El Teorema Básico de Hilbert ($A[x]$ es Noetheriano si A lo es) establece la importancia de incluir en su demostración la condición de finitud.

2.1.2. Antecedentes Internacionales

1. **Yılmaz Mehmet Demirci, Burcu Nisanci Türkmen y Ergül Türkmen. 2020. Rings with modules having a restricted injectivity domain**: En este trabajo, los autores introducen módulos cuyos dominios de inyectividad están contenidos en la clase de módulos con radical cero los cuales son llamados de *clase trabajadora*. Esta noción da una generalización de módulos pobres que tienen un dominio de inyectividad mínimo. Siempre existen módulos de *clase trabajadora* semisimples para anillos arbitrarios, mientras que sus predecesores no. Los autores muestran los anillos sobre los que cada módulo es inyectivo u obrero. Los anillos en V débiles a la derecha son ejemplos de estos anillos. Además, nos muestran el estudio de la existencia de módulos simples de clase trabajadora y, si hay un módulo derecho simple de clase trabajadora proyectivo, entonces el anillo es un anillo GV derecho.

2. **Rafail Alizade, Engin Büyükaşik, Sergio R. López-Permouth y Liu Yang. 2018. Poor modules with no proper poor direct summands.**: Los autores en este trabajo brindan la noción de un *módulo indigente* como un medio para proporcionar caracterizaciones intrínsecas de los módulos pobres. Un módulo es *indigente* si es pobre y no tiene un sumando directo pobre adecuado. Nos muestran que no todos los anillos tienen *módulos indigentes*, y las condiciones para su existencia. Además, se prueba el papel de los *indigentes* en la caracterización de los módulos pobres sobre aquellos anillos que sí los tienen considerando dos posibles tipos de casos: una según la cual cada módulo pobre contiene un sumando directo de indigentes y otra según la cual cada módulo pobre contiene un pobre como un submódulo puro. La segunda condición se cumple para el anillo de enteros y es tan significativa como la primera para los

anillos noetherianos ya que, en ese contexto, los módulos que tienen submódulos puros pobres deben ser pobres. Adicionalmente los autores muestran que la existencia de *indigentes* es equivalente a la condición noetheriana de anillos sin clase media.

3. **Adel N. Alahmadi, Mustafa Alkan y Sergio López-Permouth. 2010. Poor Modules: The oppositive of Inyectivity**: En este artículo, los autores nos brindan un estudio sobre los módulos pobres, exponiendo que a un módulo M se le dice pobre cuando es N-inyectivo, entonces el módulo N es semisimple. En este artículo los autores nos muestran las propiedades de los módulos pobres y se utilizan para caracterizar varias familias de anillos.

2.2. Marco conceptual

Este marco conceptual está basado principalmente en [15], [3], [23] y [1]

2.2.1. Teoremas clásicos de Isomorfismos

En esta sección veremos los teoremas fundamentales del isomorfismo de Noether.

Proposición 2.2.1. *[Proposición 1.2.1 de [15]] Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A-módulos.*

1. Suponga que L es un submódulo de M contenido en $Kerf$. Entonces existe un único homomorfismo $\psi : M/L \longrightarrow N$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & M/L \arrow[dl, "\psi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Diagrama de homomorfismos f, φ y ψ.

es conmutativo, es decir, $\psi\varphi = f$, donde φ es la proyección natural.

2. Supongamos que $g : N_1 \longrightarrow N$ es un monomorfismo con $Imf \subset Img$, entonces existe un único homomorfismo $h : M \longrightarrow N_1$ tal que $f = gh$.

Demostración:. 1. Sea $m + L$ un elemento arbitrario de M/L. Desde $L \subseteq Kerf$, podemos definir el mapa: $\psi : M/L \longrightarrow N$ siendo $\psi(m + L) = f(m)$. Es fácil ver que ψ es un homomorfismo de A-módulo. En efecto, $\psi(m + L + m_1 + L) = \psi(m+m_1+L) = f(m+m_1) = f(m)+f(m_1) = \psi(m+L)+\psi(m_1+L)$ y $\psi(ma+L) =$

$f(ma) = f(m)a = \psi(m + L)a$. Además, si φ es una proyección natural, entonces $\psi\varphi(m) = \psi(m + L) = f(m)$ para cualquier $m \in M$. Entonces $\psi\varphi = f$ y ψ es el único homomorfismo de este tipo.

2. Por cada $m \in M$, $f(m) \in Imf \subseteq Img$. Dado que g es un monomorfismo, existe un único $n \in N_1$ tal que $g(n) = f(m)$. Por tanto, hay una función definida por $h(m) = n$ tal que $f = gh$. □

Teorema 2.2.2 (Teorema del Homomorfismo)**.** *Si M y N son A-módulos y $f : M \to N$ es un A-homomorfismo, entonces*

$$M/Ker(f) \simeq Im(f)$$

.

Demostración: Sea $m+Ker(f)$ un elemento de $M/Ker(f)$. Por la proposición 2.2.1, existe un A-homomorfismo único $g : M/Ker(f) \to Imf$, donde $g(m + Ker(f)) = f(m)$. Solo necesitamos demostrar que g es un isomorfismo. Como todo elemento de $Im(f)$ tiene la forma $f(m) = g(m + Ker(f))$, g es un epimorfismo. Suponga que $g(m + Ker(f)) = 0$, entonces $f(m) = 0$, es decir, $m \in Ker(f)$. Por lo tanto $m + Ker(f) = 0 + Ker(f)$ es la clase cero de $M/Ker(f)$. Por lo tanto, g es un monomorfismo. Entonces, g es un isomorfismo. □

Denotemos $r.ann(m) = \{a \in A : ma = 0\}$. Es un ideal derecho en A y se llama **aniquilador derecho** del elemento m. Si $r.ann(m) \neq 0$, entonces el elemento m se denomina **elemento de torsión**; de lo contrario, se denomina **elemento sin torsión**. Si todo elemento de un A-módulo M son torsión, M se llama **módulo de torsión**.

Del teorema 2.2.2 se obtiene el siguiente enunciado.

Corolario 2.2.3. *Todo módulo cíclico es isomorfo a un módulo cociente del módulo regular por algún ideal derecho.*

Demostración: Sea M un A-módulo cíclico con un generador m_0, es decir, $M = m_0A$. Definimos un mapa $f : A \longrightarrow M$ donde $f(a) = m_0a$. De los axiomas de módulo se sigue qué f es un homomorfismo de módulo y, dado que m_0 es el generador de M, tenemos $Im(f) = M$. Ahora el teorema 1.3.1 produce $M \simeq A/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I} = Ker(f)$ es un ideal derecho en A. Es fácil ver qué $Ker(f) = r.ann(m_0)$ y entonces $m_0A \simeq A/r.ann(m_0)$. □

Teorema 2.2.4 (Primer teorema de isomorfismo)**.** *[Teorema 1.3.3 de [15]] Si L y N son submódulos de un A-módulo M, entonces*

$$(L + N)/N \simeq L/(L \cap N)$$

.

Lema 2.2.5. *[Lema 1.3.4 de [15]] Sea L un submódulo de M y $\pi : M \to M/L$ sea la proyección natural. Para cualquier submódulo $N \subset M$ y cualquier submódulo $N' \subset M/L$ tenemos*

1. *$\pi(N)$ es un submódulo de M/L;*

2. *$\pi^{-1}(N')$ es un submódulo de M;*

3. *$\pi(\pi^{-1}(N')) = N'$;*

4. *si $L \subset N$ entonces $\pi^{-1}(\pi(N)) = N$.*

Como corolario de este lema tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sea L un submódulo de un A-módulo M. Entonces cualquier submódulo del A-módulo M/L tiene la forma N/L, donde $L \subset N \subset M$, y*

$$(M/L)/(N/L) \simeq M/N.$$

Demostración:. Sea $\pi : M \longrightarrow M/L$ la proyección natural. Entonces $\pi(M) = M/L$. Considere un submódulo N' de $\pi(M)$ y $N = \pi^{-1}(N')$, que es un submódulo de M . Entonces por el lema anterior $N' = \pi(N) = N/L$. Sea $\tau : M/L \longrightarrow (M/L)/(N/L)$ la proyección natural, entonces podemos considerar el homomorfismo $\tau\pi : M \longrightarrow (M/L)/(N/L)$. Dado que τ y π son epimorfismos, $\tau\pi$ también es un epimorfismo. El núcleo del epimorfismo $\tau\pi$ es igual a $\pi^{-1}(\pi(N)) = N$ por el 2.2.5 Ahora el teorema del homomorfismo 2.2.2 produce $(M/L)/(N/L) \simeq M/N$. □

Teorema 2.2.7 (Ley modular)**.** *Sean A, B y C submódulos de M con $B \subseteq A$. Entonces:*

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$$

.

Demmostración: Está claro que $B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$. Ahora mostraremos la inclusión inversa. Sea $x \in A \cap (B + C)$, de modo que $x = a = b + c$ para $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ adecuados. Como $B \subseteq A$, tenemos $c = a - b \in A$, entonces $c \in A \cap C$ y $x = b + c \in B + (A \cap C)$. □

2.2.2. Sumas y Productos Directos

Sean $M_1, M_2, ..., M_n$ módulos sobre un anillo A. Considere el conjunto M de las n-tuplas $(m_1, m_2, ..., m_n)$, donde $m_i \in M_i$, y defina las operaciones por componentes:

$$(m_1, m_2, ..., m_n) + (m'_1, m'_2, ..., m'_n) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2, ..., m_n + m'_n),$$

$$(m_1, m_2, ..., m_n)a = (m_1a, m_2a, ..., m_na), a \in A.$$

Obviamente, M es un A-módulo bajo estas operaciones y se denomina **suma directa externa** de los módulos $M_1, M_2, ..., M_n$ y se denota por $M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, o $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

De manera similar, si $(M_i)_{i\in I}$ es un conjunto de A-módulos, entonces podemos introducir la suma directa externa $\bigoplus_{i\in I} M_i$ como el conjunto de tuplas infinitas $(m_i)_{i\in I}$ con $m_i \in M_i$ para todo $i \in I$ y para casi todo $i \in Im_i$ es igual a cero (es decir, sólo un número finito de m_i no son iguales a cero). Además, las operaciones sobre este conjunto se definen por componentes, de modo que $(\oplus_i m_i) + (\oplus_i m_i') = \oplus_i(m_i + m_i')$ y $(\oplus_i m_i)a = \oplus_i(m_i a)$ para todo $i \in I$ y cualquier $a \in A$. Si no hay ninguna suposición sobre el número de componentes distintos de cero, entonces obtenemos la **suma directa fuerte externa**. Éste se denota $\prod_{i\in I} M_i$ y es llamado el **producto directo** de los módulos M_i. La suma directa externa coincide con el producto directo de módulos $M_i, i \in I$, si el conjunto I es finito, pero en general no se da el caso. Para el caso finito podemos usar la notación producto o suma, es decir, $M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Las sumas directas externas pueden describirse en términos de conjuntos de homomorfismos. Sea $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ la suma directa externa de una familia de submódulos $M_i(i \in I)$. Entonces para cada $i \in I$ existe la incrustación natural $\sigma_i : M_i \to M$ dada por $\sigma_i(m_i) = (..., 0, m_i, 0, ...)$ y la proyección natural $\pi_i : M \to M_i$ dada por $\pi_i(...., m_j, ..., m_i, ...) = m_i$. Claramente, $\pi_i\sigma_i = 1_{M_i}$ y $\pi_i\sigma_j = 0$ para $i \neq j$. Aquí 1_{M_i} es el mapa de identidad de un módulo M_i. Además, si el conjunto I es finito, $I = \{1, 2, ..., n\}$ y $M = M_1 \oplus M_2 ... M_n$ entonces $\sigma_1\pi_1 + \sigma_2\pi_2 + ... + \sigma_n\pi_n = 1_M$. Si el conjunto I es infinito, entonces para cualquiera $m \in M$ tenemos $m = \sigma_{i_1}\pi_{i_1}m + \sigma_{i_2}\pi_{i_2}m + ... + \sigma_{i_n}\pi_{i_n}m$. Si $M = \prod_{i\in I} M_i$ es un producto directo de módulos, entonces el conjunto análogo de homomorfismos $\{\sigma_i\}$ y $\{\pi_i\}$ lo define. Pero en este caso tenemos lo siguiente

1. $\pi_i\sigma_i = 1_{X_i}$ y $\pi_i\sigma_i = 0$ para $i \neq j$;

2. si tenemos un conjunto de elementos $\{m_i\}$, donde solo hay un elemento $m_i \in M_i$ para cada $i \in I$, entonces existe un único elemento $m \in \prod_{i\in I} M_i$ tal que $\pi_i m = m_i$ para cada $i \in I$.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ los anillos. Considere el conjunto A de elementos $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, donde $a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n$. Sea $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in A$. Defina las operaciones de suma y multiplicación en A como sigue

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$ab = (a_1b_1, a_2b_2, ..., a_nb_n).$$

Consideraremos que $a = b$ si y sólo si $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, ..., n$. Es fácil verificar que el conjunto A forma un anillo bajo las operaciones anteriores de suma y multiplicación y con elemento identidad $(1, 1, ..., 1)$, donde la identidad del anillo A_i está en la i-ésima posición . Se dice que este anillo es el **producto directo** del número finito de anillos $A_1, A_2, ..., A_n$ y se denota por $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Ponga $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, donde la identidad del anillo A_i está en la i-ésima posición y los ceros en cualquier otro lugar. Obviamente, los elementos $e_1, e_2, ..., e_n$ son idempotentes ortogonales por pares y $e_1 + e_2 + ... + e_n$ es la identidad de A.

Pero en este caso particular los idempotentes e_i tienen una propiedad adicional: $e_i a = (0, ..., a_i, ..., 0) = ae_i$ para cualquier $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$, es decir, los idempotentes e_i están en el centro del anillo A. Se dice que tales idempotentes son **centrales**.

Si $A_i = A$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, entonces denotamos el producto directo por $A^n = A \times A \times ... \times A$.

Supongamos que un anillo A es un producto directo de anillos $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Entonces el conjunto de elementos $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0) \in A$, donde $a_i \in A_i$, forma un $\mathcal{I}_i$ ideal en A. Entonces el anillo A, considerado como el módulo regular, es un suma directa de los ideales $\mathcal{I}_i$. Por el contrario, sea $A = \mathcal{I}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_n$ una descomposición de un anillo A en una suma directa de ideales, entonces $A \simeq \prod_{i=1}^{n} (A/\mathcal{J}_i)$. Donde $\mathcal{J}_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{I}_j$. Además, cada ideal $\mathcal{I}_i$ es un anillo que es isomorfo a $A/\mathcal{J}_i$.

Definición 2.2.8. Un módulo, que es isomorfo a una suma directa $M_1 \oplus M_2$, donde M_1 y M_2 son módulos distintos de cero, se dice que es **descomponible**, de lo contrario se llama **indescomponible**.

Aquí hay una caracterización interna de un módulo descomponible.

Proposición 2.2.9. *Sean M_1 y M_2 submódulos de un módulo M y sea $f : M_1 \oplus M_2 \to M$ el homomorfismo definido por $f(m_1, m_2) = m_1 + m_2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es un isomorfismo;*
2. *$M = M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2 = 0$*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). Sea el homomorfismo $f : M_1 \oplus M_2 \to M$ definido por $f(m_1, m_2) = m_1 + m_2$ sea un isomorfismo. Como $M \simeq Imf$, cualquier elemento $m \in M$ puede ser escrito como $m = m_1 + m_2$. Sea $x \in M_1 \cap M_2$, entonces $f(x, -x) = x - x = 0$, es decir, $(x, -x) \in Ker(f)$. Como $Ker(f) = 0$, tenemos $x = 0$. Por tanto, $M_1 \cap M_2 = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Por el contrario, sea $M = M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2 = 0$, entonces obviamente f es un epimorfismo. Si $(x, y) \in Ker(f)$, entonces $x + y = 0$, es decir, $x = -y$. Por lo tanto $x \in M_1 \cap M_2 = 0$, es decir, $Ker(f) = 0$. Por lo tanto, f es tanto un epimorfismo como un monomorfismo, es decir, f es un isomorfismo. $\square$

Inspirándonos en esta proposición podemos introducir la siguiente definición. Se dice que el módulo M es la suma directa interna de los submódulos M_1 y M_2 si se satisfacen las condiciones equivalentes de la proposición 1.4.1. Los submódulos M_1 y M_2 se denominan sumandos directos del módulo M. La suma directa interna de varios módulos se puede definir de manera similar. Para tal efecto probaremos la siguiente proposición.

Teorema 2.2.10. *Sea $M_i (i \in I)$ una familia de submódulos de un módulo M, y sea $f : \oplus_{i\in I} M_i \to M$ el homomorfismo definido por $f(\oplus_i m_i) = \sum_i m_i$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es un isomorfismo;*
2. *$\sum_{i\in I} M_i = M$ y $M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j) = 0$ para cualquier i.*
3. *$\sum_{i\in I} M_i = M$ y $M_i \cap (\sum_{j<i} M_j) = 0$ para cualquier $i > 1$.*

Demostración:

1)⇒2). Como f es un epimorfismo, inmediatamente tenemos $M = M_1 + M_2 + ... + M_n$. Sea $x \in M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j)$, entonces $x = -m_i = \sum_{j\neq i} m_j$, donde $m_i \in M_i$.

Por lo tanto $f(\oplus_i m_i) = \sum_i m_{i=0}$. Dado que f es un monomorfismo, $m_i = 0$ para todo i, es decir, $M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j) = 0$ para cualquier i.

2)⇒ 3). Trivial.

3)= 1). De la condición $M = \sum_{i\in I} M_i$ obtenemos que f es un epimorfismo.

Sea $f(\oplus_i m_i) = 0$ y sea i la última posición para la cual $m_i \neq 0$, entonces $m_i = -\sum_{j<i} m_j \in M_i \cap (\sum_{j<i} M_j)$, y por lo tanto $m_i = 0$. Esta contradicción muestra que $m_i = 0$ para todo i. Por lo tanto f es un monomorfismo, entonces es un isomorfismo. □

Decimos que un módulo M es la **suma directa interna** de una familia de submódulos $M_i (i \in I)$ si se satisfacen las condiciones equivalentes del teorema 2.2.10.

Hemos introducido dos definiciones de una suma directa. De hecho, hay una conexión cerrada entre estas nociones. Las definiciones externa e interna de una suma directa son equivalentes. Sea $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ una suma directa externa. Entonces el conjunto de los elementos $(..., 0, ..., 0, m_i, 0, ..., 0, ...)$ (todas las componentes menos la i-ésima son 0) forma un submódulo M_i' en M y $M_i' \simeq M_i$. Por lo tanto, la descomposición $M = \bigoplus_{i\in I} M_i'$ da una suma directa interna. En lo que sigue diremos simplemente la **suma directa**, es decir, la noción de suma directa externa si tratamos con módulos, y la noción de interna si tratamos con submódulos.

La siguiente proposición da la descripción de módulos sobre un producto directo de anillos.

Proposición 2.2.11 (Proposición 1.4.3 de [15]). *Sea $A = A_1 \times ... \times A_t$, un producto directo de un número finito de anillos. Entonces cualquier A-módulo derecho se puede descomponer en una suma directa de A-módulos tal que cada uno de ellos es un módulo A derecho para algún $i = 1, ..., .t$.*

2.2.3. Módulos Finitamente Generados y Libres

Recordemos que un A-módulo M es **finitamente generado** si existe un número finito de elementos $m_1, m_2, ..., m_n$ de M tal que cada elemento $m \in M$ puede escribirse como $m = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$, donde $a_i \in A$

El siguiente lema da algunas propiedades simples pero útiles de módulos finitamente generados.

Proposición 2.2.12. *Si M es un A-módulo, entonces:*

(i) Si M es una suma del número finito de módulos finitamente generados, entonces M es un módulo finitamente generado.

(ii) Si M puede ser generado por n elementos y N es un submódulo de M, entonces M/N puede ser generado por n elementos.

(iii) Si $M = M_1 \oplus M_2$ y M pueden generarse mediante n elementos, entonces M_1 puede generarse mediante n elementos.

Demostración:

(i) Es obvio.

(ii) Por suposición, existen n elementos $m_1, ..., m_n \in M$ tales que cualquier elemento $m \in M$ tiene la forma $m = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ con $a_i \in A$. Entonces $m + N = \sum_{i=1}^{n} (m_i + N) a_i$ que muestra que los n elementos $m_1 + N.....m_n + N$ generan M/N.

(iii) Por el teorema 2.2.4, tenemos $M/M_2 = (M_1 \oplus M_2)/M_2 \simeq M_1/(M_1 \cup M_2 = M_1/0 \simeq M$. Ahora, por (ii) M/M_2 puede ser generado por n elementos. Por lo tanto, M_1 puede ser generado por n elementos. $\square$

Ahora presentamos una clase especial de módulos que pueden considerarse como la generalización más natural de los espacios vectoriales y que juegan un papel muy importante en la teoría de módulos.

Definición 2.2.13. Un A-módulo M se llama **libre** si es isomorfo a una suma directa de módulos regulares, es decir, $M \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i$. donde $M_i \simeq A_A$ para todos $i \in I$.

Así, si $A = k$ es un campo, todo módulo sobre A es libre, es decir, un espacio vectorial.

Los módulos libres juegan un papel importante en la teoría de los módulos.

Proposición 2.2.14 (Proposición 1.5.2 de [15]). *Si un A-módulo M es finitamente generado con n generadores, entonces es isomorfo a un módulo cociente del módulo libre A^n.*

Proposición 2.2.15 (Proposición 1.5.4 de [15]). *Un módulo F es libre si y sólo si tiene una base libre. En particular, F tiene una base libre finita de n elementos si y solo si F es isomorfo a A^n.*

El siguiente enunciado es una generalización de la proposición 2.2.14 y muestra la importancia de los módulos libres.

Proposición 2.2.16. *Cualquier módulo es isomorfo a un módulo cociente de un módulo libre.*

Demostración: Sea M un A-módulo derecho y $\{m_i \in M : i \in I\}$ un conjunto de generadores del módulo M, es decir, podemos escribir $M = \sum_{i\in I} m_i A$. Sea $\psi(a) = m_i a$ un epimorfismo del módulo A sobre el módulo $m_i A$. Entonces hay un homomorfismo $\psi : \bigoplus_{i\in I} A \longrightarrow M$ que coincide con ψ_i, en el sumando directo con índice i. Evidentemente, es un epimorfismo. La proposición se sigue ahora del teorema del homomorfismo. □

Como se puede notar, la noción de una base libre para un módulo libre es una generalización de una base de espacio vectorial. Pero, aunque para un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos, esto no siempre es cierto para módulos libres finitamente generados sobre un anillo arbitrario. Hay anillos A para los cuales $A^n \simeq A^m$ y $n \neq m$. Pero si A es un anillo conmutativo, entonces dos bases libres cualesquiera de un A-módulo libre finitamente generado tienen el mismo número de elementos. Este número de elementos se denomina rango de un módulo libre.

Proposición 2.2.17 (Proposición 1.5.5 de [15]). *Si A es un anillo conmutativo y F es un A-módulo libre, entonces dos bases libres cualesquiera de F tienen el mismo número cardinal.*

2.2.4. Módulos Inyectivos y Proyectivos

Comenzamos esta sección definiendo una cadena descendente y ascendente, siguiendo con algunas definiciones importantes para llegar a los módulos proyectivos e inyectivos.

Decimos que un módulo M satisface la **condición de cadena descendente** (o **d.c.c.**) si no existe una cadena estrictamente descendente infinita

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$$

de submódulos de M.

A veces es útil la siguiente formulación equivalente de esta condición: Un módulo M satisface la condición de cadena descendente (o d.c.c.) si cada cadena descendente de submódulos de M

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq ...$$

contiene solo un número finito de elementos, es decir, existe un número entero n tal que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = ...$

Definición 2.2.18. Un submódulo N de un módulo M es **minimal** si $N \neq 0$ y no existe ningún submódulo $L \neq 0$ y N, tal que $L \subset N \subset M$.

Decimos que un módulo M satisface la **condición mínima** si toda familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento mínimo con respecto a la inclusión.

Definición 2.2.19. Un ideal derecho distinto de cero $\mathcal{I}$ de un anillo A se llama **minimal** si $\mathcal{I}$ no contiene ningún otro ideal derecho distinto de cero. En particular, $\mathcal{I}$ es mínimo si y solo si $\mathcal{I}_A$ es un A-módulo derecho simple.

Proposición 2.2.20. *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) la familia de todos los submódulos de M satisface d.c.c.;

2) cualquier familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento minimal (con respecto a la inclusión).

Demostración:
2) $\Rightarrow$ 1). Sea $M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de un módulo M. Como el conjunto de submódulos de esta secuencia tiene un elemento mínimo M_n, entonces $M_n = M_{n+1} = ... =$

1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que S es un conjunto no vacío de submódulos de un módulo M sin elemento mínimo. Sea M_1 un elemento arbitrario de este conjunto S. Dado que M_1 no es minimal, existe $M_2 \in S$ tal que $M_1 \supset M_2$. Dado que M_2 no es mínimo, contiene un submódulo M_3 y así sucesivamente. Continuando este proceso obtenemos una cadena infinita estrictamente descendente $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$ de submódulos de M, contradiciendo a d.c.c.

La proposición está probada. □

Definición 2.2.21. Un módulo M se llama **artiniano** si se cumplen las condiciones equivalentes de la proposición 2.2.20.

Análogamente, de manera dual, decimos que un módulo M satisface la **condición de cadena ascendente** (o **a.c.c.**) si no existe una cadena infinita estrictamente ascendente

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$$

de submódulos de M.

La formulación equivalente de esta condición es la siguiente:

Un módulo M satisface la **condición de cadena ascendente** (o **a.c.c.**) si cada cadena ascendente de submódulos de M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$$

contiene solo un número finito de elementos, es decir, existe un número entero n tal que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = ...$.

Definición 2.2.22. Un submódulo N de un módulo M se dice **maximal** si $N \neq M$ y no existe ningún submódulo L, distinto de M y N, tal que $N \subset L \subset M$. Decimos que un módulo M satisface la **condición máxima** si toda familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento maximal.

Proposición 2.2.23 (Proposición 3.1.2 de [15]). *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) la familia de todos los submódulos de M satisface a.c.c.;

2) cualquier familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento maximal (con respecto a la inclusión).

Definición 2.2.24. Un módulo M se llama **noetheriano** si se cumplen las condiciones equivalentes de la proposición 2.2.23.

Definición 2.2.25 (Definición de [15] página 63). Un anillo A se denomina **artiniano derecho** (**izquierdo**) (resp. **noetheriano**) si el módulo regular derecho A_A (módulo regular izquierdo A_A) es artiniano (resp. noetheriano). Un anillo A se llama **artiniano** (resp. **noetheriano**), si es artiniano derecho e izquierdo (resp. noetheriano).

Proposición 2.2.26. *Sea N un submódulo de un módulo M. Entonces M es artiniano (noetheriano) si y sólo si M/N y N son ambos artinianos (noetherianos).*

Demostración: Primero probaremos la proposición en el caso artiniano.

Sea M un módulo artiniano. Dado que cualquier cadena descendente de submódulos de N es también una cadena de submódulos de M, es inmediato que N es artiniano.

Sea $\pi : N \longrightarrow M/N$ la proyección natural y $L_1 \supseteq L_2 \supseteq ....$ una cadena descendente de submódulos de M/N. Entonces usando el lema 2.2.5 podemos formar la cadena descendente de submódulos de $M, L'_1 \supseteq L'_2 \supseteq ...$ donde $L'_i = \pi^{-1}(L_i)$. Como M es artiniano existe algún n tal que $L'_i = L'_n$ para todo $i \geq n$. Teniendo en cuenta que $L_i = \pi(L'_i)$ también tenemos que $L_i = L_n$ para todo $i \geq n$. Así, M/N es artiniano.

Por el contrario, suponga que los módulos M/N y N son artinianos. Sea $M_1 \supset M_2 \supset$ ... una cadena descendente de submódulos del módulo M. Considere las siguientes dos cadenas descendentes de submódulos

$$M_1 \cap N \supset M_2 \cap N \cap ...$$

$$(M_1 + N)/N \supset (M_2 + N)/N \supset ...$$

en N y M/N. Entonces existe algún n tal que $M_i \cap N = M_n \cap N$ y $(M_i + N)/N = (M_n + N)/N$. para todo $i \geq n$. Por lo tanto, $M_i + N = M_n + N$ para todo $i \geq n$. Desde $M_i \subseteq M_n$, para $i \geq n$, la ley modular implica $M_n \cap (M_i + N) = M_i + (M_n \cap N)$. Entonces $M_n = M_n \cap (M_n + N) = M_n \cap (M_i + N) = M_i + (M_n \cap N) = M_i + (M_i \cap N) = M_i$, es decir, $M_n = M_i$, para todo $i \geq n$. Por lo tanto, M es artiniano. Argumentos análogos prueban el caso de Noether. □

Corolario 2.2.27 (Corolario 3.1.4 de [15]). *Una suma directa de un número finito de módulos es un módulo artiniano (resp. noetheriano) si y solo si cualquier sumando es artiniano (resp. noetheriano).*

Proposición 2.2.28 (Teorema 3.1.5 de [15]). *Un módulo es Noetheriano si y solo si cada uno de sus submódulos es finitamente generado.*

Definición 2.2.29. Se dice que un A-módulo M es **finitamente cogenerado** si para cualquier familia M_i, $i \in I$, de submódulos de M, $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ implica $\bigcap_{i \in J} M_i = 0$ para algún subconjunto finito J de I[2].

***Ejemplo* 2.1.** Cualquier espacio de vector dimensional finito V sobre un campo K es finitamente cogenerado.

***Ejemplo* 2.2.** El módulo regular $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ no es un módulo finitamente cogenerado, ya que $\bigcap p\mathbb{Z} = 0$, donde p se ejecuta sobre todos los primos, pero para cualquier subconjunto finito de los números primos $p_1, p_2 ... p_m$ tenemos $\bigcap_{i=1}^{m} p_i\mathbb{Z} \neq 0$.

Proposición 2.2.30. *Un módulo es artiniano, sí y solo si cada uno de sus módulos de cocientes es finitamente cogenerado.*

La demostración de esta proposición es similar a la de la proposición 2.2.28

Consideraremos las propiedades de los endomorfismos de módulos Artinianos y Noetherianos.

Proposición 2.2.31. *Un endomorfismo ψ de un módulo artiniano (resp. noetheriano) es un automorfismo si y solo si ψ es un monomorfismo (resp. epimorfismo).*

Demostración: Sea ψ un endomorfismo de un módulo noetheriano M que es un epimorfismo. Mostraremos que $Ker\psi = 0$. Existe la cadena ascendente de submódulos: $0 \subset Ker\psi \subset Ker\psi^2 \subset ...$ que debe estabilizarse, es decir, $Ker\psi^n = Ker\psi^{n+1}$. Sea $m \in Ker\psi$. Del hecho de que ψ^n es un epimorfismo obtenemos que $m = \psi^n m_1$. Pero entonces $m_1 \in Ker\psi^{n+1} = Ker\psi^n$, es decir, $m = 0$.

Ahora, mostremos que un monomorfismo ψ de un módulo artiniano M es un epimorfismo. Existe la cadena descendente de submódulos $M \supset Im\psi \supset Im\psi^2 \supset ...$ que debe estabilizarse, es decir, $Im\psi^n = Im\psi^{n+1}$. Por lo tanto, para un $m \in M$ arbitrario existe una igualdad $\psi^n m = \psi^{n+1} m_1, m_1 \in M$. Dado que ψ^n es un monomorfismo, $m = \psi m_1$, es decir, es un epimorfismo. □

Proposición 2.2.32 (Lema de Fitting (Teorema 3.1.8 de [15])). *. Para cualquier endomorfismo ψ de un módulo M artiniano y noetheriano existe un entero n tal que $M = Im\psi^n \oplus Ker\psi^n$.*

Corolario 2.2.33 (Corolario 3.1.9 de [15]). *Si M es indescomponible y un módulo tanto artiniano como noetheriano, entonces cualquier endomorfismo de M es un automorfismo o nilpotente.*

Definición 2.2.34 (Módulo Simple/Semisimple). Se dice que un R-módulo M es **simple** si no contiene su propio submódulo no trivial y se dice que es **semisimple** si es suma directa de submódulos simples.

Proposición 2.2.35 (Proposición 3.1.10 de [15]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo semisimple M:*

(a) M es artiniano;

(b) M es noetheriano;

(c) M es una suma directa de un número finito de módulos simples.

Demostración: Dado que un módulo simple es tanto noetheriano como artiniano, las implicaciones $(c) \Rightarrow (a)$ y $(c) \Rightarrow (b)$ son verdaderas por el corolario 2.2.27.

Por el contrario, supongamos que un módulo M se descompone en una suma directa infinita de módulos simples: $M = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus ...$ Entonces en el módulo M hay dos cadenas de submódulos: $U_1 \subset U_1 \oplus U_2 \subset ...$ y $M \supset U_2 \oplus U_3 \oplus ... \supset U_3 \oplus U_4 \oplus ....$ De la existencia de estas cadenas se siguen los restantes enunciados de la proposición. □

Corolario 2.2.36 (Corolario 3.1.11 de [15]). *Un anillo semisimple es tanto artiniano como noetheriano.*

***Ejemplo* 2.3.** Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre un campo K. Entonces V es a la vez noetheriano y artiniano. Porque, si W es un subespacio propio de V, entonces $dimW < dimV = n$. Por lo tanto, cualquier cadena ascendente (o descendente) adecuada de subespacios no puede tener más de $n + 1$ términos.

***Ejemplo* 2.4.** Todo ideal principal de dominio A es un anillo noetheriano, porque todo ideal es principal.

Proposición 2.2.37. *[Proposición 3.1.12 de [15]] Si A es un anillo noetheriano derecho (resp. artiniano), entonces cualquier A-módulo derecho generado finitamente M es noetheriano (resp. artiniano).*

Demostración: Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces es isomorfo a un módulo cociente F/K, donde F es un A-módulo libre finitamente generado y K es un submódulo de F. Dado que F es isomorfo a una suma directa de un número finito de copias del módulo A_A noetheriano (resp. artiniano), es noetheriano (resp. artiniano), por el corolario 2.2.27. Entonces, por la proposición 2.2.26, M debe ser noetheriano (resp. artiniano). □

Corolario 2.2.38. *Si A es un anillo noetheriano derecho, entonces cualquier submódulo del A-módulo derecho M finitamente generado es finitamente generado.*

Demostración: Esto se sigue de la proposición 2.2.37 y la proposición 2.2.28. □

Proposición 2.2.39 (Lema de Schur). *Cualquier homomorfismo distinto de cero entre módulos simples es un isomorfismo. En particular, el anillo de endomorfismo de un módulo simple es un anillo de división.*

Demostración: Sea $f : U \longrightarrow V$ un homomorfismo de un módulo simple U a un módulo simple V. Dado que $Kerf$ e Imf son submódulos de U y V, respectivamente, $f \neq 0$ implica $Kerf \neq U$ y $Imf \neq 0$. Dado que U y V son módulos simples, $Kerf = 0$ e $Imf = V$, es decir, f es tanto un monomorfismo como un epimorfismo, por lo tanto, f es un isomorfismo. □

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\alpha_k, \quad \text{where} \quad \alpha_k \in D.$$

Usaremos las siguientes definiciones para anillos simples y semisimples y módulo simple y semisimple:

Definición 2.2.40 (Anillo Simple/Semisimple). Un anillo R es **simple** (**semisimple**) si el R-módulo R_R es simple (semisimple).

La categoría de los R-módulos semisimples serán denotados como $SSMod - R$.
A lo largo de este trabajo, utilizaremos libremente los siguientes teoremas:

Teorema 2.2.41 (Teorema VI.5.1 de [21]). *Sea M um R-módulo. Son equivalentes:*

(a) M es semisimple;

(b) M es la suma directa de sus submódulos simples;

(c) Si N es submódulos de M entonces existe P submódulo de M tal que $M = N \oplus P$.

Teorema 2.2.42 (Teorema VI.5.2 de [21]). *(a) Todo submódulo de un R-módulo semisimple es semisimple.*

(b) Todo cociente de un R-módulo semisimple es semisimple.

(c) Si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos semisimples, entonces $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ es semisimple.

Teorema 2.2.43 (Teorema 7.30 de [22]). *Un anillo R es semisimple si y solo si es artiniano y es J-semisimple.*

Teorema 2.2.44 (Teorema 2.2.5 de [15]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo A:*

(a) A es semisimple derecha;

(b) A es semisimple izquierda;

(c) cualquier A-módulo M derecho es semisimple;

(d) cualquier A-módulo izquierdo M es semisimple.

Definición 2.2.45 (Módulo S-inyectivo). Sea S un R-módulo. Un R-módulo M es llamado **S-inyectivo** cuando dados un R-módulo P y los homomorfismos de módulos $f : P \longrightarrow S$, $g : P \longrightarrow M$ con f inyectiva, entonces, existe un homomorfismo de módulos $h : S \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g$, es decir, talque es siguiente diagrama conmuta:

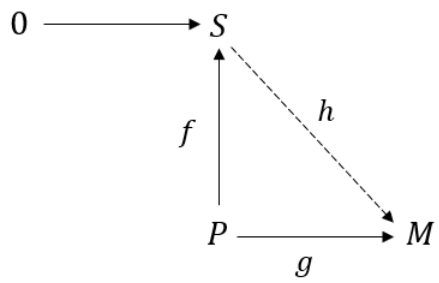

Figura 2.2: Diagrama conmutativo de los homomorfismos f, g y h.

Un R-módulo M es inyectivo si M es S-inyectivo para todo $S \in Mod - R$. También diremos que un anillo R es **auto-inyectivo** si R_R es R-inyectivo. A lo largo de este trabajo, usaremos varias veces el Criterio de Baer para demostrar que un módulo es inyectivo.

Teorema 2.2.46 (Criterio de Baer, Proposición V.3.1 de [21]). *Un R-módulo M es inyectivo si y sólo si dado un ideal I de R, y homomorfismos de módulos $f : I_R \longrightarrow R_R$, $g : I_R \longrightarrow M$ con f inyectiva, existe un homomorfismo de módulos $h : R_R \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g$.*

***Ejemplo* 2.5.** Un ejemplo de módulo inyectivo es el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$:

Sea un número natural n y homomorfismo de módulos $f : n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g : n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ con f inyectiva. Vamos a considerar el homomorfismo de módulos $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ tal que:

$$h(x) = \frac{g(n)}{f(n)} x$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & n\mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.3: Diagrama conmutativo de los homomorfismos f, g y h para I_R, R_R y M.

además:

$$h(f(nx)) = \frac{g(n)}{f(n)} f(nx) = \frac{g(n)}{f(n)} f(n)x = g(n)x = g(nx)$$

Otro resultado debido a Baer es el siguiente teorema:

Teorema 2.2.47 (Teorema 6.96 de [22]). *Todo módulo es submódulo de un módulo inyectivo.*

Proposición 2.2.48 (Teorema 6.88 de [22]). *La suma directa finita de módulos inyectivos es un módulo inyectivo.*

Se sabe que la suma directa de cualquier R-módulo inyectivo es siempre un R-módulo inyectivo si y sólo si el anillo R es noetheriano.

Proposición 2.2.49 (Teorema 6.97 parte (i) de [22]). *Si R es noetheriano, entonces la suma directa de R-módulos inyectivos es un R-módulo inyectivo.*

Existe una noción dual de módulo inyectivo.

Definición 2.2.50 (Módulo S-Proyectivo). Un R-módulo M es llamado **S-proyectivo** si dados un R-módulo P y los homomorfismos de módulos $f : S \longrightarrow P$, $g : M \longrightarrow P$ donde f es sobreyectiva, entonces, existe un homomorfismo de módulos $h : M \longrightarrow S$ tal que $f \circ h = g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0 \\
 & M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4: Diagrama conmutativo de homomorfismo de módulos f, g y h.

Diremos que un R- módulo M es **proyectivo** si M es S-proyectivo para todo $S \in Mod - R$

Proposición 2.2.51 (Proposición V.2.1 de [21]). *Sea un A-módulo P. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) P es proyectivo;

(b) Si P es imagen de un A-módulo M por un epimorfismmo $f : M \longrightarrow P$, entonces P es isomorfo a un sumando directo X de M, además, $M = X \oplus Ker(f)$.

(c) P es sumando directo de un A-módulo libre.

Nótese que, de la proposición anterior, tenemos que los módulos libres son proyectivos, además, tenemos el siguiente corolario que es inmediato de la proposición:

Corolario 2.2.52. *El sumando directo de un módulo proyectivo es proyectivo.*

Proposición 2.2.53 (de [17]). *Si M es la suma directa de una familia de R-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ entonces M es proyectivo si y solamente si cada M_i lo es.*

Teorema 2.2.54 (Teorema VI.6.1 de [21]). *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

(a) R es semisimple;

(b) Todo R-módulo es semisimple;

(c) Todo R-módulo es inyectivo;

(d) Todo R-módulo es proyectivo;

(e) R es suma directa finita de ideales minimales.

Se observa que el Teorema anterior implica que todo anillo semisimple es artiniano y noetheriano.

Definición 2.2.55 (Dominio de Inyectividad). La clase

$$\{S \in Mod - R : M \ es \ S - inyectivo\}$$

es llamado **Dominio de Inyectividad** de R-módulo M y es denotado por $In^{-1}(M)$.

Note que, con esta notación, si M es un R-módulo inyectivo entonces $In^{-1}(M) = Mod - R$.
Además se observa que dado un R-módulo M entonces $SSMod - R \subset In_{-1}(M)$.
En efecto, sea M un R-módulo y $S \in SSMod - R$. Tomemos un R-módulo P y homomorfismos de módulos $f : P \longrightarrow S$ y $g : P \longrightarrow M$ donde f es inyectivo. Como S es semisimple, existe un submódulo de $W \subseteq S$ tal que $S = Im(f) \oplus W$, donde $Im(f)$ denota a la imagen del homomorfismo f, además, como f es inyectivo, f define un isomorfismo de P y $Im(f)$. Denotando por id a la función identidad de S a $Im(f) \oplus W$, tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[d, "id"] \\
& M & Im(f) \oplus W \arrow[d, "\pi"] \\
& & Im(f) \arrow[uul, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5: Diagrama de homomorfismos de módulos f, f^{-1}, π, g y id,

Donde $\pi : Im(f) \oplus W \longrightarrow Im(f)$ es una proyección y f^{-1} denota el homomorfismo inverso de f. Consideremos el homomorfismo de módulos $h : S \longrightarrow M$ tal que $h = g \circ f^{-1} \circ \pi \circ id$. Para concluir, basta mostrar que h es tal que $h \circ f = g$: sea $x \in P$, $(h \circ f)(x) = (g \circ f^{-1} \circ \pi \circ id)(f(x)) = g(f^{-1}(\pi(id(f(x))))) = g(f^{-1}(\pi(f(x)))) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x)$. Por lo tanto, se concluye que $SSMod - R \subset In^{-1}(M)$.

Proposición 2.2.56. *Sea T un submódulo de N tal que T es N-inyectivo entonces T es sumando directo de N.*

Demostración. Si T es N-inyectivo, entonces existe un homomorfismo $h : N \longrightarrow T$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.6: Diagrama conmutativo de homomorfismo h, i y id.

donde i es el homomorfismo inclusión e id es el homomorfismo identidad.
Note que $h \circ i = id$ y que h es un homomorfismo sobreyectivo. Consideremos el homomorfismo $\pi : N \longrightarrow N$ tal que $\pi = i \circ id \circ h$. Tengamos en cuenta que $\pi^2 = \pi$ pues $\pi \circ \pi = (h \circ id \circ i) \circ (h \circ id \circ i) = h \circ id \circ (i \circ h) \circ id \circ i = h \circ (id)^3 \circ i = h \circ i = \pi$. Afirmamos que $N = T \oplus Ker(\pi)$, en efecto, si $x \in N$ entonces $x = (\pi(x)) + (x - \pi(x)) \in T \oplus Ker(\pi)$, además, si $x \in T \cap Kere(\pi)$ entonces $x = \pi(x) = 0$. □

Es claro que si T es inyectivo entonces T es M-inyectivo, para todo $M \in Mod - R$, por lo que tenemos el siguiente corolario inmediato de la proposición anterior.

Corolario 2.2.57. *Un módulo inyectivo es sumando directo de todos los módulos que lo contienen.*

También es válido la vuelta de este corolario.

Lema 2.2.58 (Teorema 6.86 de [22])**.** *El sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo.*

Teorema 2.2.59. *Son equivalentes:*

(a) M es un R-módulo inyectivo;

(b) M es sumando directo de todo módulo que lo contiene.

Demostración:(a) $\Rightarrow$ (b) Es el corolario 2.2.57.
(b) $\Rightarrow$ (a) Si un módulo M es sumando directo de todo módulo que lo contiene, en particular, por el teorema 2.2.18, M es suma directa de un R-módulo inyectivo, luego, por el lema 2.2.21, M también es inyectivo.

Teorema 2.2.60. *Sea R un anillo, entonces:*

$$SSMod-R = \bigcap_{M\in Mod-R} In^{-1}(M)$$

Demostración: Hemos visto que $SSMod-R \subset In^{-1}(M)$, para todo $M \in Mod-R$, así $SSMod-R \subset \bigcap_{M\in Mod-R} In^{-1}(M)$.

Sea $N \in \bigcap_{M\in Mod-R} In^{-1}(M)$ y consideremos T un submódulo de N. Todo R-módulo es N-inyectivo, en particular, T es N-inyectivo, y por la proposición 2.2.19 tenemos que T es sumando directo de N, luego, N es semisimple. Por lo tanto $SSMood-R = \bigcap_{M\in Mod-R} In^{-1}(M)$. □

2.2.5. Módulos Pobres

En el último teorema de la sección anterior se puede ver que $SSMod-R$ es un límite inferior para el dominio de inyectividad de los módulos pobres sobre R.
¿El dominio de inyectividad logra alcanzar ese límite? ¿Para un anillo R existe un R-módulo M tal que $SSMod-R = In^{-1}(M)$?

Definición 2.2.61 (Módulo Pobre)**.** Un R-módulo M es llamado **pobre** cuando $SSMod-R = In^{-1}(M)$.

Módulos pobres es el concepto central de este trabajo. Usando las definiciones que hicimos, la primera pregunta que se nos viene a la mente es la siguiente:

¿Todos los anillos tienen un módulo pobre? o ¿Qué condiciones son necesarias en un anillo R para que haya un R-módulo M pobre?

A continuación, presentaremos algunas definiciones y resultados convenientes para el resto de este estudio.

Lema 2.2.62. *Sea Mun R-módulo. Si $N \in In^{-1}(M)$ y T es submódulo de N, entonces $T \in In^{-1}(M)$.*

Demostración: Sean homomorfismos $f : P \longrightarrow T$, $g : P \longrightarrow M$ donde f es inyectivo, y P un submódulo de T. Consideremos $i : T \longrightarrow N$ un homomorfismo inclusión. Como f, i son inyectivos, $i \circ f$ es inyectivo. Como $N \in In^{-1}(M)$, existe un homomorfismo $j : N \longrightarrow M$ tal que $j \circ (i \circ f) = g$, así, existe un homomorfismo de módulos $h : T \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g$. Basta que tomemos $h = j \circ i$. En el siguiente diagrama:

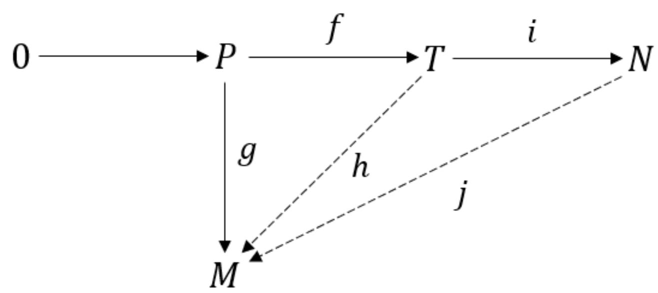

Figura 2.7: Diagrama conmutativo de los homomorfismos f, g, i, j donde $h = j \circ i$.

Proposición 2.2.63. *Un R-módulo M es pobre si y solo si todo módulo cíclico $L \in In^{-1}(M)$ es semisimple.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si M es un R-módulo pobre entonces si $L \in In^{-1}(M)$, L es semisimple.
$\Leftarrow$) $L \in In^{-1}(M)$ y es semisimple. Tomemos N un R-módulo tal que M es N- inyectivo. Ciertamente $N = \sum_{x \in N} xR$ y por el lema 2.2.62, $xR \in In^{-1}(M)$ para todo x que pertenece a N , por lo que N es una suma de submódulos semisimples, es decir, N es semisimple y por tanto M es pobre. □

Definición 2.2.64 (Utopía)**.** Una clase A de R-módulos es una **utopía** si A no contiene módulos pobres y decimos que un anillo R es una utopía si $Mod - R$ no contiene módulos pobres.

Definición 2.2.65 (Sin Clase Media)**.** Una clase A de R-módulos **no tiene clase media** si dado un R-módulo M que pertenece a A, entonces o M es inyectivo o M es pobre (decimos que un anillo R no tiene clase media si dado un R-módulo M entonces o M es inyectivo o M es pobre).

Definición 2.2.66 (Clase Indigente)**.** Una clase A es **indigente** si dado un R-módulo M que pertenece a A entonces M es pobre (análogamente decimos que un anillo R es indigente si dado un R-módulo M entonces M es pobre).

Lema 2.2.67. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) R es semisimple

(b) $Mod - R$ es indigente

(c) $\{0\}$ es un módulo pobre

(d) Existe un R- módulo M inyectivo y pobre.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b) Si R es semisimple entonces todo R-módulo es semisimple y todo R-módulo es inyectivo, luego, $In^{-1}(M) = Mod - R = SSMod - R$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Como $Mod - R$ es indigente, el R-módulo $\{0\}$ es un módulo pobre.
(c) $\Rightarrow$ (d) Como $\{0\}$ es un R-módulo inyectivo, $\{0\}$ es un R-móduo inyectivo y pobre.
(d) $\Rightarrow$ (a) Por hipótesis existe un R-módulo M tal que M es inyectivo y pobre, esto es $In^{-1}(M) = Mod - R = SSMod - R$, es decir, todo R-módulo es semisimple, luego, R es semisimple. $\square$

Lema 2.2.68. *Si M es un R-módulo pobre entonces $M \oplus N$ es pobre, para todo $N \in Mod - R$.*

Demostración: Sean $S \in In^{-1}(M \oplus N)$. Bajo estas condiciones mostraremos que $S \in In^{-1}(M)$: Sean A un R-módulo y los homomorfismos de módulos $f : A \longrightarrow S$ y $g : A \longrightarrow M$ con f inyectiva. Consideramos el homomorfismo $i \circ g : A \longrightarrow M \oplus N$, donde $i : M \longrightarrow M \oplus N$ es la inclusión canónica. Como $S \in In^{-1}(M \oplus N)$, existe $h_0 : S \longrightarrow M \oplus N$ tal que $h_0 \circ f = i \circ g$, entonces, considerando el homomorfismo $h = \pi \circ h_0 : xR \longrightarrow M$, donde $\pi : M \oplus N \longrightarrow M$ es la proyección canónica, tenemos que $h \circ f = g$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & S \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[ddl, dashed, "h_0"] \\
 & M \arrow[d, shift right, "i"'] & \\
 & M \oplus N \arrow[u, shift right, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.8: Diagrama de los homomorfismos $f, g, h_0 \circ f = i \circ g, h = \pi \circ h_0$ y $h \circ f = g$.

Como M es pobre, S es semisimple, así, como S es cualquiera, $MoplusN$ es pobre. □

2.2.6. Algunos conceptos importantes

Definición 2.2.69 (Extensiones y submódulos esenciales)**.** Sean A, C R-módulos. A es un submódulo esencial de C, o C es una extensión esencial de A, si $A \subseteq C$ y $A \cap B \neq 0$ para todo submódulo no vacío B de C.
En particular, definimos I ideal esencial de R, si $I \cap K \neq 0$ para todo K ideal no vacío de R.

***Ejemplo* 2.6.** $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ es un submódulo esencial $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$. En efecto, sea A un submódulo no vacío de $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ y sea $\frac{p}{q} \in A$ tal que $\frac{p}{q} \neq 0$, así $p = (\frac{p}{q})q \in \mathbb{Z}_\mathbb{Z} \cap A$ y $p \neq 0$.

Note que todo R- módulo A es extensión esencial de A. Además, si el submódulo nulo de un submódulo esencial de un R-módulo A dado, entonces $A = 0$.

Proposición 2.2.70 (Proposición 5.6 de [14])**.** *(a) Sean $A, B, C.$ módulos tales que A es submódulo de B y B es submódulo de C. Así, A es submódulo esencial de C si y solo si, A es submódulo esencial de B y B es submódulo esencial de C.*

(b) Sean A_1, A_2, B_1, B_2 submódulos de un módulo C. Si A_1 es submódulo esencial de B_1 y A_2 es submódulo esencial de B_2. Entonces $A_1 \cap A_2$ es submódulo esencial de $B_1 \cap B_2$.

Definición 2.2.71 (Extensión esencial Propia)**.** Sea A un R-módulo, una extensión esencial propia de A es un R-módulo B tal que A está contenido propiamente en B y A es esencial en B.

Definición 2.2.72 (Homomorfismo Esencial)**.** Un homomorfismo de módulos $f : A \longrightarrow B$ es un **homomorfismo esencial** si $f(A)$ es un submódulo esencial de B

Proposición 2.2.73. *Sean A, B submódulos de un módulo M tales que B es maximal con respecto a la propiedad $A \cap B = 0$. Así $A \oplus B$ es un submódulo esencial de M y $(A \oplus B)/B$ es submódulo esencial de M/B.*

Demostración: Sea C submódulo de M tal que $(A \oplus B) \cap C = 0$, así, $A \cap (B \oplus C) = 0$, por la maximalidad de B, $B \oplus C = B$, luego $C = 0$ y por lo tanto $(A \oplus B)$ es esencial en M.

Sea C/B submódulo propio no vacío de M/B. Como C/B es no vacío, B está contenido propiamente en C y por la maximilidad de B, $A \cap C \neq 0$, por lo tanto, concluimos que $(A \oplus B)/B$ es esencial en M/B. □

Corolario 2.2.74. *Todo submódulo de M es sumando directo de un submódulo esencial de M.*

Demostración: Sea N submódulo de M. Utilizando el Lema de Zorn, tomemos el submódulo A de M maximal con respecto a la propiedad $A \cap N = 0$, así, tenemos que $N \subseteq A \oplus N$ y, por la proposición anterior, $A \oplus N$ es esencial en M.

Corolario 2.2.75. *Un módulo M es semisimple si y solo si no posee submódulos propios esenciales.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea M un módulo semisimple, así, dado N submódulo propio de M, existe P submódulo de M tal que $M = N \oplus P$, es decir, N no es un submódulo esencial de M.
$\Leftarrow$) Sea M que no posee módulos propios esenciales y sea N submódulo de M, así, por el corolario 2.2.74, N es sumando directo de (pues M es el único submódulo esencial de M), es decir, M es semisimple. $\square$

El siguiente teorema nos muestra que se puede refinar el criterio de Baer mediante el uso del concepto de esencialidad.

Teorema 2.2.76 (Refinamiento del Criteriode Baer)**.** *Un R-módulo M es inyectivo si y solo si dados un ideal esencial I de R y los homomorfismos de módulos $f : I_R \longrightarrow R_R$, $g : I_R \longrightarrow M$ con f inyectivo, existe un homomorfismo de módulos $h : R_R \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g$.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Por la definición de módulo inyectivo, si M es un R-módulo inyectivo entonces dados I ideal esencial de R, y los homomorfismos de módulos $f : I_R \longrightarrow R_R$, $g : I_R \longrightarrow M$ donde f es inyectiva, existe un homomorfismo de módulos $h : R_R \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g$.
$\Leftarrow$) Sean I un ideal de R y $f : I_R \longrightarrow R_R$, $g : I_R \longrightarrow M$ homomorfismos de módulos con f inyectivo. Por el corolario 2.2.74 existe A_R submódulo de R_R tal que $f(I_R) \oplus A_R$ es un submódulo esencial en R_R. Consideremos el siguiente diagrama:

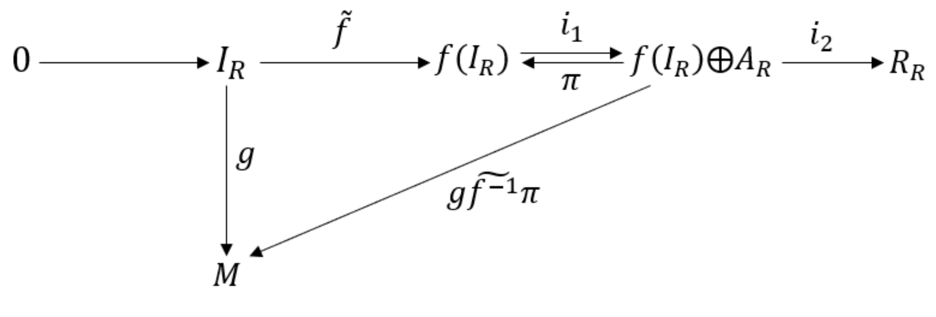

Figura 2.9: Diagrama de homomorfismos $f, g, \widetilde{f}, i_1, i_2, \pi$.

Donde $\pi : f(I_R) \oplus A_R \longrightarrow f(I_R)$ es proyección canónica $i_1 : f(I_R) \longrightarrow f(I_R) \oplus A_R$, $i_2 : f(I_R) \oplus A_R \longrightarrow R_R$ son las inclusiones canónicas $\widetilde{f} : I_R \longrightarrow f(I_R)$ es tal que, para todo $x \in I_R$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$; y $\widetilde{f^{-1}} : f(I_R) \longrightarrow I_R$ es homomorfismo inverso de $\widetilde{f}$.

Como $f(I_R) \oplus A_R$ es esencial en R_R, existe el homomorfismo $h : R_R \longrightarrow M$ tal que $h \circ i_2 = g \circ \widetilde{f^{-1}} \circ \pi$. Bajo estas condiciones $h \circ f = h \circ (i_2 \circ i_1 \circ \widetilde{f}) = (h \circ i_2) \circ i_1 \circ \widetilde{f} = (g \circ \widetilde{f^{-1}} \circ \pi) \circ i_1 \circ \widetilde{f} = g \circ (\widetilde{f^{-1}} \circ \widetilde{f}) = g$, así, por el criterio de Baer, concluuimos que M es inyectivo. □

También podemos usar el concepto de esencialidad para caracterizar los módulos inyectivos, veremos esto en el teorema 2.2.78.

Lema 2.2.77. *Sean R-módulos A, B, C tales que existe un isomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$, $C - B$ no está contenido en A y B es un submódulo propio de C, entonces existe un R-módulo D talque A es submódulo propio de D.*

Demostración: Sea D el conjunto $(C - B) \cup A$ dotado de la operación $+_D : D \times D \longrightarrow D$ definida de la siguiente manera:

$$+_D(x, y) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)) & , si \quad x \in A \quad e \quad y \in A \\ \phi^{-1}(\phi(x) + y) & , si \quad x \in A \quad e \quad y \notin A \\ \phi^{-1}(x + \phi(y)) & , si \quad x \notin A \quad e \quad y \in A \\ \phi^{-1}(x + y) & , si \quad x \notin A \quad e \quad y \notin A \end{cases}$$

Donde ϕ^{-1} denota el homomorfismo inverso de ϕ. Note que la operación $+_D$ está bien definida, además, tenemos que el conjunto D con la operación $+_D$ es un grupo abeliano.

Consideremos la operación $\cdot : D \times R$ tal que $\cdot(r, x) = \phi^{-1}(r\phi(x))$.

Con tales operaciones y con el hecho de que $C - B$ no está contenido en A, tenemos que D es un R-módulo que contiene a A propiamente. □

Teorema 2.2.78 (Eckmann-Schopf)**.** *Un módulo A es inyectivo si y solo si no tiene extensiones esenciales propias.*

Demostración:

Supongamos que A es inyectiva y M es un extensión esencial de A, entonces, por el corolario 2.2.57, existe un módulo B tal que $M = A \oplus B$.

Como $A \cap B = 0$ tenemos que $B = 0$ pues A es esencial en M, luego, $A = M$.

Por otro lado, si A no es inyectivo, por el teorema 2.2.59, existe un módulo M que contiene a A tal que A no es sumando directo de M. Usando el lema de Zorn, tenemos B submódulo de M maximal respecto a la propiedad $A \cap B = 0$. Observemos que $A \oplus B$ es submódulo propio de M pues A no es sumando directo de M, por lo que $(A \oplus B)/B$ es un submódulo propio de M/B, además por la proposición 2.2.74, $(A \oplus B)/B$ es submódulo esencial de M/B. Como A es isomorfo a $(A \oplus B)/B$ y $(M/B) - ((A \oplus B)/B)$ no está contenido en A, por el lema 2.2.77, concluimos que A tiene una extensión esencia propia. □

Definición 2.2.79 (Envolvente Inyectivo)**.** Sea A un módulo. Un **envolvente inyectivo** de A es un módulo inyectivo B tal que B es una extensión esencial de A. Denotaremos un envolvente inyectivo por $E(A)$.

***Ejemplo* 2.7.** $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$es un envolvente inyectivo de $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ pues, conforme a lo expuesto, $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ es un submódulo esencial de $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ es inyectivo.

Definición 2.2.80 (Esencialmente cerrado)**.** Un submódulo A de un R-módulo M dado es **esencialmente cerrado** en M si dado un submódulo $B \subseteq M$ tal que A es esencial en B entonces $A = B$

Cabe señalar que es equivalente decir que un submódulo A de un módulo M es un submódulo esencialmente cerrado si no existe un submódulo $B \subseteq M$ tal que B sea una extensión esencial propia de A.

Proposición 2.2.81. *Sea un submódulo A de un R-módulo inyectivo E. Un submódulo A es inyectivo si y solo si A es esencialmente cerrado en E.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si A es inyectivo entonces, por el teorema 2.2.78, el submódulo A es esencialmente cerrado en todo R-módulo que contiene A, en particular, A es esencialmente cerrado en E.

$\Leftarrow$) Si A es esencialmente cerrado en E entonces tomemos un R-módulo B tal que B es una extensión esencial de A y consideremos los homomorfismos inclusiones $i_1 : A \longrightarrow E$, $i_2 : A \longrightarrow B$. Como E es inyectivo, existe el homomorfismo $h : B \longrightarrow E$ tal que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.10: Diagrama de homomorfismos i_1, i_2 y h.

Como i_1 es la inclusión canónica y h es una extensión de i, tenemos que $A \cap Ker(h) = 0$, donde tenemos que $Ker(h) = 0$ pues A es esencial en E. Así, B es isomorfo a $h(B)$, luego, $A = i_1(A) = h \circ i_2(A) = h(A)$ es esencial en $h(B) \subseteq E$, y como A es esencialmente cerrado en E, tenemos que $A = h(B)$. Así, $h(B) = h(i_2(A)) = h(A)$ y como h es un homomorfismo inyectivo, concluimos que $A = B$. Como B es una extensión esencial cualquiera de A, el submódulo A no tiene extensión esencial propia. Por el teorema 2.2.78, A es inyectivo. □

Teorema 2.2.82. *Si un R-módulo M es inyectivo y A es un submódulo de M. Entonces $E(A) \subseteq M$*

Demostración: Consideremos la familia de submódulos de M tales que son extensiones esenciales de A, esto es:

$$\mathbb{F}=\{B \subseteq M;\ A \text{ es esencial en } B\},$$

parcialmente ordenada por la inclusión. Sabemos que $\mathbb{F} \neq 0$ pues el R-módulo A pertenece a $\mathbb{F}$. Además, toda subfamilia totalmente ordenada $\mathbb{G}$ tiene límite superior, basta tomar la unión de los elementos de la subfamilia ya que la unión de submódulos encajados es un submódulo.
Probemos que A es esencial en la unión de los elementos de $\mathbb{G}$: sea K un submódulo no vacío, la unión de los elementos de $\mathbb{G}$. Si la intersección de K con cada uno de los elementos de $\mathbb{G}$ es cero, entonces $K = 0$. Luego, existe $L \in \mathbb{G}$ tal que $L \cap K \neq 0$, entonces, $L \cap K \cap A \neq 0$ pues A es esencial en L. Así, $K \cap A \neq 0$. Como K es cualquiera, A es esencial para la unión de los elementos de $\mathbb{G}$.
Por el lema de Zorn, existe un R-módulo $E \subseteq M$ tal que A es esencial en E. Afirmamos que E es inyectivo. En efecto, supongamos que existe $F \subseteq M$ tal que E es esencial en F. Así, por el teorema, A es esencial en F, y como E es maximal, tenemos que $E = F$, es decir, E es esencialmente cerrado en M. Como M es inyectivo, podemos aplicar la proposición 2.2.81, donde concluimos que E es inyectivo. Por lo tanto, $E = E(A)$. □

Nótese que, por la proposición 2.2.81 y el teorema 2.2.82, todo R-módulo tiene un envolvente inyectivo.

Ahora podemos preguntarnos si la envolvente inyectiva es única. La siguiente afirmación nos dice que la envolvente inyectiva es única salvo isomorfismo.

Proposición 2.2.83 (Proposición 5.13 de [14]). *Sean los envolventes inyectivos M, N, de los módulos M_0 y N_0 respectivamente. Si M_0 y N_0 son isomorfos entonces cualquier isomorfismo de M_0 en N_0 se extiende para un isomorfismo de M en N. En particular, si M y N son dos envolventes inyectivos de un módulo dado M_0 entonces la identidad de M_0 en M_0 se extiende para un isomorfismo de M en N.*

Recordemos que un dominio es un anillo tal que si a y b son elementos del anillo tal que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Definición 2.2.84 (Dominio de Ore). Un **dominio de Ore** R es un dominio con la siguiente propiedad: si a, b son elementos no nulos de R entonces $aR \cap bR \neq 0$

Definición 2.2.85 (Módulo Uniforme). Un **módulo uniforme** M es un módulo no vacío tal que: dados dos submódulos no vacíos A, B de M se tiene que $A \cap B \neq 0$

Si R_R es uniforme, decimos que R es un anillo uniforme. Cabe señalar que podríamos haber definido el módulo uniforme como un módulo M no vacío tal que todo submódulo de M es esencial en M; además, tengamos en cuenta que R es un dominio uniforme si y solo si R es dominio de Ore.

Definición 2.2.86 (Famila Independiente)**.** Sea M un R-módulo. Una familia $\mathcal{F}$ de submódulos de M es llamada **independiente** si dados $X_0, X_1, ...X_n$ elementos de $\mathcal{F}$ entonces $X_0 \cap (X_1 + ... + X_n) = 0$

Definición 2.2.87 (Módulo de dimensión finita)**.** Un R-módulo A es de **dimensión finita** si $E(A)$ es una suma directa finita de submódulos indescomponibles.

Los siguientes resultados, hasta el Teorema de Goldie se encuentran en [14].

Lema 2.2.88. *Un R-módulo A es uniforme si y solo si $E(A)$ es indescomponible.*

Demostración: Sea A un R-módulo uniforme y sean B, C submódulos de $E(A)$ tales que $E(A) = B \oplus C$. Como $(B \cap A) \cap (C \cap A) = 0$ y A es un módulo uniforme, tenemos que o $B \cap A = 0$ o $C \cap A = 0$.
Si $B \cap A = 0$, como A es esencial en $E(A)$, concluimos que $B = 0$. Análogamente, si $C \cap A = 0$, concluimos que $C = 0$. En todo caso, tenemos que o $B = 0$ o $C = 0$, luego, $E(A)$ es indescomponible.
Ahora, sea A un R-módulo tal que $E(A)$ es indescomponible. Supongamos, que A no es uniforme. Así, existen submódulos no vacíos B, C de A tales que $B \cap C = 0$.
Como $B \subseteq A \subseteq E(A)$, por el teorema 2.2.82, tenemos que $E(B) \subseteq E(A)$. Además, como B es esencial en $E(B)$, tenemos $E(B) \cap C = 0$.
Luego, $E(B) \subseteq E(A)$ es un sumando directo de $E(A)$. Por lo tanto, $E(A)$ es descomponible, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.2.89. *Un R-módulo A tiene dimensión finita si y solo si existe un submódulo esencial que es suma directa de submódulos uniformes.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea A un R-módulo de dimensión finita n. Existen R-módulos indescomponibles y no vacíos, $E_1, ..., E_n$ tales que $E(A) = E_1 \oplus ... \oplus E_n$.
Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, definimos $A_i = A \cap E_i$.
Como A es esencial en $E(A)$, tenemos que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, A_i es no vacío, luego A_i es uniforme. Además como $\{E_i\}_{i \in \{1,...,n\}}$ es una familia independiente, $\{A_i\}_{i \in \{1,...,n\}}$ también lo es. Así, podemos considerar la suma directa $A_1 \oplus ... \oplus A_n \subseteq E_1 \oplus ... \oplus E(n) = E(A)$. Veamos que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ es esencial en A: Fijamos $i \in \{1, ..., n\}$, $E(E_i) = E_i$, así, por el lema 2.2.88, tenemos que E_i es uniforme. Luego A_i es esencial en E_i. Donde se sigue que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ es esencial en $E(A) \supseteq A$. Por lo tanto $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ es esencial en A.
$\Leftarrow$) Sea M un R-módulo y $A_1, ..., A_n$ submódulos independientes y uniformes contenidos en A, tales que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ es esencial en A.
Como, por definición, A es esencial en $E(A)$, tenemos que $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ es esencial en $E(A)$. Así, $E(A) = E(A_1 \oplus ... \oplus A_n) \backsimeq E(A_1) \oplus ... \oplus E(A_n)$.
Por hipótesis, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que A_i es uniforme, luego, por el lema 2.2.88, E_i es indescomponible. Por lo tanto, A tiene dimensión uniforme finita.
$\square$

Lema 2.2.90 (Lema 5.19 de [14])**.** *Si un R-módulo E es la suma directa finita de n submódulos uniformes, entonces E no contiene una suma directa de $n+1$ submódulos no vacíos.*

Teorema 2.2.91 (Teorema de Goldie)**.** *Un R-módulo A tiene dimensión finita si y solamente si toda familia independiente de submódulos de A tiene cardinalidad finita.*

Demostración: Sea A un R-módulo.
Si A tiene dimensión finita, entonces existe un número natural n tal que $E(A)$ es suma directa de n submódulos uniformes. Por el lema 2.2.90, $E(A)$ no contiene la suma directa de $n+1$ submódulos no vacíos, en particular, no existe una familia independiente de submódulos de A cuya cardinalidad sea mayor que n.
Por otro lado, si A no tiene dimensión finita entonces $A \neq 0$ y no existe un número natural n tal que $E(A)$ es la suma directa de n submódulos indescomponibles.
Llamemos $C_0 = E(A)$. Como C_0 no es indescomponoble, existen submódulos no vacíos B_1, C_1 tales que $C_0 = B_1 \oplus C_1$. Además o B_1 o C_1 no es la suma directa de submódulos indescomponibles. Sin perder generalidad, podemos suponer que C_1 no es una suma directa finita de submódulos indescomponibles.
Repitiendo este argumento, podemos descomponer C_1 como la suma directa de dos submódulos no vacíos B_2 y C_2 tal que C_2 no es una suma directa finita de submódulos indescomponibles.
Inductivamente, obtenemos $B_1, C_1, B_2, C_2...$ submódulos no vacíos de C_0 tales que, para todo $n \in \mathbb{N}, C_n = B_{n+1} \oplus C_{n+1}$, y , C_n no es una suma directa finita de submódulos indescomponibles.
Sean k, n números naturales tales que $k > n$. Así, $B_k \subseteq C_n$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$B_n \cap \big(\sum_{k=n+1}^{\infty} B_k) \subseteq (B_n \cap C_n) = 0$$

Donde se sigue que $B_1, B_2, ...$ son submódulos independientes de $E(A)$.
Así, $A \cap B_1, A \cap B_2, ...$es una sucesión finita de submódulos independientes de A y como A es esencial en $E(A)$, tenemos que $B_n \cap A \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, A contiene una suma directa finita de submódulos no vacíos. $\square$

Proposición 2.2.92. *Todo módulo noetheriano tiene dimensión finita.*

Demostración: Sea un R-módulo noetheriano M. Si M no tiene dimensión finita entonces, por el teorema 2.2.6 , existe una familia independiente y finita $\mathbb{F} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de submódulos no vacíos de M. Así, la sucesión $B_1 \subseteq (B_1 \oplus B_2) \subseteq (B_1 \oplus B_2 \oplus B_3) \subseteq$ ... es estrictamente ascendente y no estacionaria, es una contradicción pues M es noetheriano.

Si M es un R-módulo de dimensión finita entonces, por el Lema 2.2.90 sabemos que existe un número natural n tal que $E(A)$ se escribe como una suma directa finita de n submódulos uniformes. Además, para cualquier $j \neq n$, no podemos escribir $E(A)$ como una suma directa finita de j submódulos uniformes. $\square$

Definición 2.2.93 (Dimensión uniforme)**.** Al número natural n, que se mencionó en el párrafo anterior, se le llama **dimensión uniforme** de M.

Definición 2.2.94 (Anillo PCI)**.** Un anillo R es un **anillo PCI** si todo R-módulo cíclico, que no es isomorfo a R, es inyectivo.

Definición 2.2.95 (Módulo Co-semisimple)**.** Un R-módulo M es un **módulo co-semisimple** si todo R-módulo simple es M-inyectivo.

Si M es un R-módulo semisimple entonces M es co-semisimple.

Definición 2.2.96 (V-Anillo)**.** Un anillo R es un **anillo co-semisimple** o **V-anillo** si R_R es un R-módulo co-semisimple, es decir, si todo R-módulo simple es inyectivo.

Definición 2.2.97 (VG-anillo)**.** Un anillo R se dice **VG-anillo** o **V-anillo generalizado** si todo R-módulo simple es inyectivo o proyectivo.

Definición 2.2.98 (Anillo Hereditario)**.** Un anillo R es **Hereditario** si para todo I ideal de R, I_R es proyectivo.

Por el Teorema 2.2.16 todo anillo semisimple es hereditario. Además el próximo resultado es el Teorema Central de [7]. Este resultado se utilizará a lo largo del trabajo.

Teorema 2.2.99. *Si R es un anillo PCI entonces o R es semisimple o R es noetheriano, hereditario, V-dominio de Ore y no tiene ideales bilaterales no triviales.*

Dado un R-módulo M, definamos el conjunto $Z(M)$=$\{x \in M; xI = 0$ para algun ideal escencial I de $R\}$. El conjunto $Z(M)$ como una suma heredada de M es un R-módulo pues si $x, y \in Z(M)$ entonces existen I_x y I_y ideales esenciales de R tal que $xI_x = 0$ y $yI_y = 0$, así $(x + y)(I_x \cap I_y) = 0$ y, por la proposición 2.2.70 $I_x \cap I_y$ es un ideal esencial de R. □

Definición 2.2.100 (Módulo Singular)**.** Sea M un R-módulo. M es un R-**módulo singular** si $M = \{x \in M; xI = 0, \text{para algun ideal esencial I de R }\}$

Ante esto, es natural definir.

Definición 2.2.101 (Módulo/Anillo Singular/No singular)**.** Diremos que un módulo M es un **módulo singular** de $Z(M) = M$ y , es un **módulo no singular** si $Z(M) = 0$.
Diremos que un anillo R es un **anillo singular** si $Z(R_R) = R_R$ y, es un **anillo no singular** si $Z(R_R) = 0$.

Lema 2.2.102. *Si R es un anillo singular y x es un elemento de R entonces $ann_R(x)$ es un ideal esencial de R.*

Demostración: Sean un anillo singular R y un elemento $x \in R$. Como R es singular, existe un ideal I esencial en R tal que $I \subseteq ann_R(x)$, entonces, por la porposición 2.2.70, item (a), el ideal $ann_R(x)$ es esencial en R. □

Proposición 2.2.103 (Proposición 1.22 de [12]). *(a) La clase de R-módulos no singulares es cerrada para submódulos, producto directo, extensiones esenciales y extensiones de módulos.*

(b) La clase de los R-módulos singulares es cerrada para submódulos, cocientes y sumas directas.

Proposición 2.2.104. *Sea un anillo R y un ideal no vacío $I \subseteq R$. Un ideal I es esencial en R si y solamente si el R-módulo R/I es singular.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que el ideal I es esencial en R, y sea un elemento $\overline{r} \in R/I$.
Vamos a mostrar que $ann_R(\overline{r})$ es un ideal esencial de R, para esto, basta mostrar que si K es un ideal principal de R entonces $K \cap ann_R(\overline{r}) \neq 0$.
Tomemos un elemento $x \in R$. Si $rx = 0$ entonces podemos tomar un elemento no nulo $\alpha \in R$ donde tenemos $rx\alpha \in I$, lo que implica que $\overline{r}x\alpha = 0$, luego, $xR \cap ann_R(\overline{r}) \neq 0$. Si $rx \neq 0$ entonces el ideal rxR es no vacío, así, como el ideal I es esencial en R, existe un elemento no nulo $\beta \in ((rx)R \cap I)$, es decir, existe un elemento no nulo $\alpha \in R$ tal que $rx\alpha \in I$, entonces, $\overline{r}x\alpha = 0$, por tanto, $xR \cap ann_R(\overline{r}) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que R/I es un R-módulo singular. Por el lema 2.2.102, $ann_R(\overline{1}) = I$ es un ideal esencial de R. □

Lema 2.2.105. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de R-módulos. Entonces $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$*

Demostración: Sea $f(x) \in f(Z(A))$, así, existe I ideal esencial de R tal que $xI = 0$, es decir, para todo $i \in I$, $xi = 0$, así, $(f(x))I = \{(f(x))i \in B; i \in I\} = \{f(xi) \in B; i \in I\} = \{0 \in B; i \in I\} = 0$,por lo tanto $f(x) \in Z(B)$. □

Lema 2.2.106. *Si B es un R-módulo entonces $Z(B)$ es un R-módulo singular.*

Demostración: Si $x \in Z(B)$ entonces existe un ideal esencial Ide R tal que $xI = 0$, luego, $x \in Z(Z(B))$, por lo tanto $Z(B) \subseteq Z(Z(B))$. Por otro lado, si $x \in Z(Z(B))$ entonces, por definición, $x \in Z(B)$, luego, $Z(B) = Z(Z(B))$. □

Proposición 2.2.107. *Un R-módulo B es no singular si y solo si $Hom_R(A, B) = 0$, para todo R-módulo singular A*

Demostración: $\Rightarrow$) Sean A un R-módulo singular, B un R-módulo no singular y $f \in Hom_R(A, B)$. Como A es un R-módulo singular, $f(A) = f(Z(A))$, luego, por el lema 2.2.105, $f(Z(A))$ es submódulo de $Z(B) = 0$, por lo tanto $f = 0$.
$\Leftarrow$) Si $Hom_R(A, B) = 0$ para todo R-módulo singular A entonces, por el lema 2.2.106, $Hom_R(Z(B), B) = 0$, así, el homomorfismo inclusión $i : Z(B) \longrightarrow B$ es el homomorfismo nulo, es decir, $Z(B) = 0$. □

Definición 2.2.108 (Anillo SI). R es un **anillo SI** si todo R-módulo singular es inyectivo.

Definición 2.2.109 (Condición C1)**.** Un módulo M satisface la **condición C1** para todo submódulo A de M si existe un submódulo K de M tal que A es esencial en K y K es un sumando directo de M.

Un módulo que satisface la condición C1 se dice un **módulo SC**.

Lema 2.2.110. *Si M es un R- módulo inyectivo. Entonces M satisface la condición C1.*

Demostración: Sea un submódulo $A \subseteq M$. Como M es inyectivo, podemos aplicar la proposición 2.2.82 donde tenemos que M contiene el envolvente inyectivo $E(A)$ de A. Como $E(A)$ es inyectivo, $E(A)$ es un sumando directo de M. Como A es cualquiera, concluimos que el R-módulo M satisface la condición C1. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema Central de [20]. No vamos a demostrar el Teorema Central de [20] ya que la demostración es extensa, de modo que el resultado será aceptado en este trabajo.

Lema 2.2.111. *Sea R un anillo tal que todo R-módulo cíclico y singular satisface $C1$. Entonces todo R-módulo cíclico y singular es suma directa de finitos submódulos uniformes.*

Lema 2.2.112 (Corolario 4 de [20])**.** *Sea R un anillo tal que todo R-módulo cíclico singular e inyectivo. Entonces todo R-módulo singular es semisimple.*

Demostración: Comenzamos probando que todo R-módulo singular que es cíclico es semisimple. Sea xR un R-módulo cíclico, singular. Por hipótesis, xR es inyectivo.
Así, por el lema 2.2.110, xR satisface la condición $C1$. Como xR es cualquier R-módulo cíclico singular, por el lema 2.2.111, tenemos que xR es suma directa finita de R-módulos uniformes. Denotemos $xR = U_1 \oplus ... \oplus U_n$ donde, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, U_i es un submódulo uniforme. Fijemos $i \in \{1, ..., n\}$.Sea $0 \neq y \in U_i$. Si $U_i \neq yR$ entonces existe un submódulo $0 \neq K \subseteq U_i$ tal que $yR \oplus K = U_i$ lo que es absurdo pues U_i es uniforme. Luego, $U_i = yR$. Como y es cualquier elemento de U_i, tenemos que U_i es simple. Por lo tanto, xR es semisimple.
Ahora, sea M un R-módulo singular cualquiera. Para todo $x \in M$, tenemos que $xR \subseteq M$ es un submódulo cíclico y singular. Por loque acabamos de probar xR es semisimple. Así, para todo $x \in M$, se tiene que $xR \subseteq Soc(xR) \subseteq Soc(M) \subseteq M$. Luego, $M = Soc(M)$, lo cual es semisimple. $\square$

Teorema 2.2.113. *Son equivalentes:*

(a) R es anillo SI;

(b) Todo R-módulo cíclico singular es inyectivo;

(c) Todo R-módulo singular es semisimple;

(d) Para todo ideal esencial I de R, se tiene que R/I es semisimple.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b) Inmediato.

(b) $\Rightarrow$ (c) Es el lema 2.2.112.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si I es un ideal esencial de R entonces, por la proposición 2.2.104 R/I es singular.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sean M un R módulo singular, I ideal esencial de R y los homomorfismos de módulos $f : I_R \longrightarrow R_R$, $g : I_R \longrightarrow M$ donde f es inyectivo. Como M es un R-módulo singular, $I/Ker(g)$ también lo es, pues $I/Ker(g) \simeq Im(g) \subseteq M$.
Bajo estas condiciones, por la proposición 2.2.104, $Ker(g)$ es un ideal esencial de R y por el item (d), $R/Ker(g)$ es semisimple, luego, existe un R-módulo A tal que $R/Ker(g) = I/Ker(g) \oplus A/Ker(g)$.

Consideremos el homomorfismo

$$\overline{f} : \frac{I}{Ker(g)} \longrightarrow \frac{R}{Ker(g)}$$

tal que

$$\overline{f}(i + Ker(g)) = f(i) + Ker(g), \forall i \in I$$

y el homomorfismo.

$$\overline{g} : \frac{I}{Ker(g)} \longrightarrow M$$

tal que

$$\overline{g}(i + Ker(g)) = g(i), \forall i \in I$$

Notemos que los homomorfismos f y g están bien definidos, en efecto, si $i+Ker(g), j+Ker(g)$ son elementos de $I/Ker(g)$ tales que $i + Ker(g) = j + Ker(g)$ entonces, $i - j \in Ker(g)$, así:

(i) $\overline{f}(i+Ker(g))-\overline{f}(j+Ker(g)) = (f(i)+Ker(g))-(f(j)+Ker(g)) = (f(i)-f(j))+Ker(g) = f(i-j) + Ker(g) = \overline{f}((i-j) + Ker(g)) = \overline{f}(0 + Ker(g)) = 0 + Ker(g)$

(ii) $\overline{g}(i + Ker(g)) - \overline{g}(j + Ker(g)) = (g(i) + Ker(g)) - (g(j) + Ker(g)) = (g(i) - g(j)) + Ker(g) = g(i-j) + Ker(g) = 0 + Ker(g)$.

Observemos también que $\overline{f}$ es inyectiva ya que si i, j son elementos de I tales que $\overline{f}(i + Ker(g)) = \overline{f}(j + ker(g))$ entonces $f(i) + Ker(g) = f(j) + Ker(g)$, lo que implica que $f(i-j) \in Ker(g)$, luego, $i + Ker(g) = j + Ker(g)$.

Así, existe un homomorfismo $\overline{h} : \frac{R}{Ker(g)} \longrightarrow M$ tal que $\overline{hf} = \overline{g}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{I}{Ker(g)} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & \frac{R}{Ker(g)} = \frac{I}{Ker(g)} \oplus \frac{A}{Ker(g)} \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.11: Diagrama de los homomorfimos $\overline{f}, \overline{g}$ y $\overline{h}$.

Si $i : R_R \longrightarrow R/Ker(g)$ indica el homomorfismo inclusión, podemos completar el diagrama anterior de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_R \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & & R_R \arrow[d, "i"] \\
 & & 0 \arrow[r] & \frac{I}{Ker(g)} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dll, "\bar{g}"'] & \frac{R}{Ker(g)} = \frac{I}{Ker(g)} \oplus \frac{A}{Ker(g)} \arrow[dlll, dashed, "\bar{h}"] \\
 & M & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.12: Diagrama de los homomorfimos $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ y el homomorfismo inclusión i.

Considerando el homomorfismo $h = \overline{h} \circ i$ tenemos que $h \circ f = g$. En efecto, si $x \in R_R$ entonces, $(\overline{h} \circ i)(f(x)) = \overline{h}(f(x) + Ker(g)) = \overline{h}(\overline{f}(x + Ker(g))) = \overline{g}(x + Ker(g)) = g(x)$. Por lo tanto M es inyectivo. $\square$

Teorema 2.2.114. *Si R es un dominio PCI entonces R es un dominio SI.*

Demostración: Sea R un dominio PCI. Un R- módulo cíclico (y singular) es de la forma R/I donde I es un ideal de R. Sabiendo esto, tomemos un R-módulo cíclico y singular R/I.
Si R/I es isomorfo a R_R entonces R_R es un R-módulo singular, luego, $0 = ann_R(1)$ es un ideal esencial de R, así, R=0 y, en particular, $R/I = 0$ es un R-módulo inyectivo. Si R/I no es isomorfo a R_R entonces, como R es PCI, R/I es inyectivo. Entonces por el teorema anterior item (b), R es SI. $\square$

2.3. Definición de términos básicos

2.3.1. Funciones:

Si f es una función de A a B, y si $a \in A$, escribimos $f(a)$ para el valor de f en a. Una notación como $f : A \longrightarrow B$ denota una función de A a B. La acción elemental de una función $f : A \longrightarrow B$ se describe mediante:

$$f : a \longrightarrow f(a) \qquad (a \in A)$$

Así, si $A \subseteq A'$, tenemos la restricción $(f|A')$ de f a A' es definida por:

$$(f|A') : a' \longrightarrow f(a') \qquad (a' \in A')$$

Dado $f : A \longrightarrow B$, $A \subseteq A'$, y $B \subseteq B'$, escribimos:

$$f(A') = \{f(a)/a \in A'\} \qquad \text{y } f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A/f(a) \in B'\}$$

Si tenemos una *composición o producto* de dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ escribimos $g \circ f$, o cuando no hay riesgo de ambigüedad, simplemente gf, por lo tanto, $g \circ f : A \longrightarrow C$ es definido por $g \circ f : a \longrightarrow g(f(a))$ para todo $a \in A$. La operación que resulte sobre las funciones es asociativa dondequiera que se defina.
La función identidad de A a sí misma se denota por 1_A. El conjunto de todas las funciones de A a B se denota por B^A o por $Map(A, B)$:

$$B^A = Map(A, B) = \{f/f : A \longrightarrow B\}$$

Un diagrama de conjuntos y funciones *conmuta* o es *conmutativo* en el caso de ir a su alrededor sea independiente de la trayectoria. Por ejemplo, el primer diagrama conmuta si y solo si $f = h \circ g$. Si el segundo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[dl, "j"] \\ D \arrow[r, "i"'] & E & \end{tikzcd}$$

Figura 2.13: Ejemplo de un diagrama conmutativo si $f = h \circ g$.

Entonces en particular, el viaje de A a E es independiente de la trayectoria, de donde $j \circ g \circ f = i \circ h$.

Decimos que una función $f : A \longrightarrow B$ es *inyectiva (sobreyectiva)* o es una *inyección(sobreyección)* en caso de que tenga una función inversa *izquierda (derecha)* $f' : B \longrightarrow A$; es decir, en el caso de que $f'f = 1_A$ $(ff' = 1_B)$ para algun $f' : B \longrightarrow A$. Entonces (ver 2.3.2) $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva (sobreyectiva) si y solo si es biyectiva uno a uno (sobre B). Una función $f : A \longrightarrow B$ es *biyectiva* o una *biyección* en el caso de que sea tanto inyectiva como sobreyectiva, es decir, si y solo si existe un (necesariamente único) inverso $f^{-1} : B \longrightarrow A$ con $ff^{-1} = 1_B$ y $f^{-1}f = 1_A$.

Si $A \subseteq B$, entonces la función $i = i_{A\subseteq B} : A \longrightarrow B$ definida por $i = (1_B|A) : a \longrightarrow a$ para todo $a \in A$ es llamada el *mapa de inclusión* de A en B. Note que si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, y si $B \neq C$, entonces $i_{A\subseteq B} \neq i_{A\subseteq C}$. Por supuesto $1_A = i_{A\subseteq A}$.

Con cada par $(0, 1)$ hay un *delta de Kronecker*, es decir, una función:
$\delta : (\alpha, \beta) \longrightarrow \delta_{\alpha\beta}$ en la clases de todos los pares ordenados definidos por:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & , si \quad \alpha = \beta \\ 0 & , si \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Siempre que usemos el delta de Kronecker, el contexto aclarará nuestra elección del par $(0, 1)$.

2.3.2. El axioma de elección

Sean A un conjunto, $\mathscr{S}$ una colección de subconjuntos no vacíos de B, y sea σ una función de A a $\mathscr{S}$. Entonces el axioma de elección establece que existe una función $g : A \longrightarrow B$ tal que:

$$g(a) \in \sigma(a) \qquad (a \in A)$$

Ahora supongamos que $f : B \longrightarrow A$ está sobre A; es decir, $f(B) = A$. Entonces, para cada $a \in A$, hay un subconjunto no vacío $\sigma(a) = f^{\leftarrow}(\{a\}) \subseteq B$. Aplicando el axioma de elección a A, la función $\sigma : a \longrightarrow \sigma(a)$, y la colección $\mathscr{S}$ de subconjuntos de B produce una g inversa derecha para f, así como se afirma en 2.3.1, f is sobreyectiva.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Un subconjunto R de A es un *conjunto (completo) irredundante* de representantes de la relación $\sim$ en caso de que para cada $a \in A$ exista un único $\sigma(a) \in R$ tal que $a \sim \sigma(a)$. El Axioma de elección garantiza la existencia de tal conjunto de representantes para cada relación de equivalencia.

2.3.3. Producto Cartesiano

Una función $\sigma : A \longrightarrow X$ a veces se llamará *conjunto indexado* (en X *indexado* por A) o un $A-tupla$ (en X) y se escribirá cómo:

$$\sigma = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$$

donde $x_\alpha = \sigma(\alpha)$. Si $A = 1, ..., n$, entonces usamos la variación estándar $(x_\alpha)_{\alpha \in A} = (x_1, ..., x_n)$. Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$, un conjunto indexado de subconjuntos no vacíos de un conjunto X. Entonces el producto cartesiano de $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ es:

$$X_A X_\alpha = \{\sigma : A \longrightarrow X/\sigma(\alpha) \in X_\alpha \quad (\alpha \in A)\}$$

Es decir $X_A X_\alpha$ es simplemente el conjunto de todas las A-tuplas $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, tales que $x_\alpha \in X_\alpha$ $(\alpha \in A)$.
Por el axioma de elección $X_A X_\alpha$ es no vacío. Si $A = \{1, ..., n\}$, entonces permitimos la variación notacional

$$X_A X_\alpha = X_1 \times ... \times X_n$$

Nótese que, si $X = X_\alpha \quad (\alpha \in A)$, entonces el producto cartesiano $X_A X_\alpha$ es simplemente X^A, el conjunto de todas las funciones de A a X. Para cada $\alpha \in A$ la $\alpha - proyeccin$

$\pi_\alpha : X_A X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ es definida por:

$$\pi_\alpha : \sigma \longrightarrow \sigma(a) \qquad (\sigma \in X_A X_\alpha)$$

En notación de A-upla , $\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta \in A}) = x_\alpha$. Una fácil aplicación del Axioma de Elección muestra que cada π_α es sobreyectiva. Obsérvese que si σ y $\sigma^{'}$ están en este producto cartesiano, entonces $\sigma = \sigma^{'}$ si y solo si $\pi_\alpha \sigma = \pi_\alpha \sigma^{'}$ para todo un $\alpha \in A$. Este hecho establece la afirmación de unicidad en el siguiente resultado. Este resultado, se usa para hacer ciertas definiciones coordinadas.

2.3.4. Relación de orden

Una relación $\leq$ sobre un conjunto P es un *orden parcial* sobre P en caso de que sea reflexivo $(a \leq a)$, transitivo $(a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c)$ y antisimétrico $(a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b)$ Un par $(P, \leq)$ formado por un conjunto y un orden parcial en el conjunto se denomina *conjunto parcialmente ordenado*. Si el orden parcial es un *orden total* ($a \leq b$ o $b \leq a$ para cada par a, b), entonces el conjunto parcialmente ordenado es una *cadena*. Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y si $P \subseteq P$, entonces $(P', \leq')$ es un subconjunto en el caso de que $\leq'$ sea la restricción de $\leq$ a P; por supuesto, esto requiere que $(P', \leq')$ sea un conjunto parcialmente ordenado. De ahora en adelante, generalmente identificaremos un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ con su conjunto subyacente P.

Sea P un conjunto parcialmente ordenado y sea $A \subseteq P$. Un elemento $e \in A$ es un elemento *mayor (menor)* de A en caso de que $a \leq e$ ($e \in a$) para todo $a \in A$. No todos los subconjuntos de un conjunto parcialmente ordenado tienen un elemento mayor o menor, pero claramente si existe uno, es único. Un elemento $b \in P$ es un *límite superior (límite inferior)* para A en caso de que $a \leq b(b \leq a)$ para todo $a \in A$. Entonces, un elemento mayor (menor), si existe, es un límite superior (inferior) para A. Si el conjunto de límites superiores de A tiene un elemento mínimo, se denomina *límite superior mínimo* (lub), *reunión* o *supremo* (sup) de A; si el conjunto de cotas inferiores tiene un elemento mayor, se denomina *cota mayor inferior* (glb), *encuentro* o *ínfimo* (inf) de A. Un *retículo (retículo completo)* es un conjunto parcialmente ordenado P en el que cada par *(cada subconjunto)* de P tiene un límite superior mínimo y un límite inferior máximo en P.

***Ejemplo* 2.8.** Sea X un conjunto. El *conjunto potencia* de X es el conjunto $\mathscr{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X. Entonces $\mathscr{P}(X)$ es ciertamente un conjunto parcialmente ordenado bajo el orden parcial de inclusión de conjuntos. Este conjunto parcialmente ordenado es un retículo completo porque si $\mathscr{A}$ es un subconjunto de $\mathscr{P}(X)$, entonces su unión en $\mathscr{P}(X)$ es su unión $\cup\mathscr{A}$ y su encuentro en $\mathscr{P}(X)$ es su intersección $\cap\mathscr{A}$.

***Ejemplo* 2.9.** Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X. Entonces $\mathscr{F}(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo inclusión de conjuntos, y es un retículo si $A, B \in \mathscr{F}(X)$, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son su unión y encuentro. Dado que estos también son unión y encuentro de A, B en $\mathscr{P}(X)$, se deduce que $\mathscr{F}(X)$ es un subretículo de $\mathscr{P}(X)$. Pero tenga en cuenta que si X es infinito, $\mathscr{F}(X)$ no es completo.

2.3.5. Homomorfismos reticulares

Sean P y P' conjuntos parcialmente ordenados. Un mapa $f : P \longrightarrow P'$ es de *orden conservado (orden reversible)* en caso de que $a \leq b$ en P, entonces $f(a) \leq f(b)(f(b) \leq f(a))$ en P'. Si P y P' son retículos, entonces f es un *homomorfismo reticular (antihomomorfismo reticular)* en caso de que $a, b \in P$,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \qquad (f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b))$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \qquad (f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b))$$

Es fácil ver (usando $a \leq b \iff a = a \wedge b$) que un homomorfismo reticular es de orden conservado. Sin embargo, lo contrario es falso. Un (anti) homomorfismo reticular biyectivo es un *(anti) isomorfismo reticular.*

Sean P y P' retículos, y sea $f : P \longrightarrow P'$ biyectiva con inversa $f^{-1} : P' \longrightarrow P$. Entonces f es un isomorfismo reticular si y solo si tanto f como f^{-1} conservan el orden.

2.3.6. El principio Máximo

Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $m \in P$ es *máximo (mínimo)* en P en el caso de $x \in P$ y $x \geq m$ $(x \leq m)$ implica $x = m$. Claramente, un elemento mayor (menor) en P, si existe, es máximo (mínimo) en P; por otro lado, un conjunto parcialmente ordenado puede tener muchos elementos máximos (mínimos) y ningún elemento mayor (menor).

Un conjunto parcialmente ordenado P es inductivo en caso de que cada subcadena de P tenga un límite superior en P; es decir, para cada subconjunto C de P que está totalmente ordenado por el ordenamiento parcial de P, hay un elemento de P mayor o igual que cada elemento de C. *El Principio Máximo* (frecuentemente llamado *Lema de Zorn*) es una forma equivalente de el Axioma de Elección. Se afirma que:

Todo conjunto parcialmente ordenado inductivo no vacío tiene al menos un elemento máximo.

2.3.7. Números Cardinales

Dos conjuntos A y B son *cardinalmente equivalentes* o tienen el *mismo cardinal* en caso de que haya una biyección de A a B (y por lo tanto una de B a A). Dado que esto define claramente una relación de equivalencia, la clase de todos los conjuntos (ver 2.3.8) puede dividirse en sus clases de conjuntos cardinalmente equivalentes. Estas clases son los *números cardinales*. La clase de un conjunto A se denota por $cardA$:

$$cardA = \{B / \text{ hay una biyección } A \longrightarrow B\}$$

Dados dos conjuntos A y B, escribimos:

$$cardA \leq cardB$$

en caso de que haya una inyección de A a B (o, de manera equivalente, una sobreyección de B a A). Claramente, esto es independiente de los representantes A y B. Dados los conjuntos A y B, siempre hay una inyección de uno a otro. El Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein establece que:

$$\text{Si } cardA \leq cardB \text{ y } cardB \leq cardA, \text{ entonces } cardA = cardB$$

Así la relación $\leq$ es un orden total sobre la clase de los números cardinales. Sean $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ los números naturales. Su cardinalidad a menudo se denota por $card\mathbb{N} = \mathcal{N}_0$. Un conjunto A es *finito* si la $cardA < card\ \mathbb{N}$. Por supuesto, la $card(\{1, ..., n\}) = n$ y $card\ \emptyset = 0$. Si $cardA \leq card\ \mathbb{N}$, entonces A es contable. Si $cardA \geq card\ \mathbb{N}$, entonces A es infinita.

Las operaciones de la aritmética cardinal están dadas por:

$$cardA + cardB = card((A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}))$$
$$cardA \cdot cardB = card(A \times B)$$
$$(cardA)^{(cardB)} = card(A^B)$$

Si A y B son conjuntos finitos, estas operaciones concuerdan con la suma, la multiplicación y la potenciación ordinarias. Además, satisfacen:

1. Si A es infinito entonces, $cardA + cardB = max\{cardA, cardB\}$.
2. Si A es infinito y $B \neq \emptyset$, entonces:
$$cardA \cdot cardB = max\{cardA, cardB\}$$
3. Para todos los conjuntos A, B y C,
$$((cardA)^{(cardB)})^{(cardC)} = (cardA)^{(cardB)(cardC)}$$
4. Si la $cardB \geq 2$, entonces $(cardB)^{(cardA)} > cardA$.

Es fácil establecer la existencia de una biyección entre el conjunto potencia $\mathscr{P}(A)$ y el conjunto de funciones de A a $\{1, 2\}$. Así card $(\mathscr{P}(A)) = 2^{(cardA)} > cardA$. Sin embargo, el conjunto de subconjuntos finitos de cualquier conjunto infinito A tiene la misma cardinalidad que A.

2.3.8. Categorías

El término *clase*, como el de *conjunto*, serán indefinidas. Todo conjunto es una clase y existe una clase que contiene todos los conjuntos. Tenga en cuenta que si A es un conjunto y es una clase, entonces una clase indexada $(A_C)_C$ en $\mathscr{P}(A)$ tiene una unión y una intersección en A. Sea $\mathscr{S}$ una clase para cada par A, $B \in \mathscr{S}$, sea $mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ un conjunto; escriba los elementos de $mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ como "flechas"$f : A \longrightarrow B$ donde A se llama *dominio* y B *codominio*. Finalmente, supongamos que para cada triple $A, B, C \in \mathscr{S}$ existe una función

$$\circ : mor_{\mathsf{C}}(B, C) \times mor_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow mor_{\mathsf{C}}(A, C)$$

Denotamos la flecha asignada a un par

$$g : B \longrightarrow C \qquad f : A \longrightarrow B$$

por la flecha $gf : A \longrightarrow C$. El sistema $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ que consta de la clase $\mathscr{C}$, el mapa $mor_{\mathsf{C}} : (A, B) \longrightarrow mor_{\mathsf{C}}(A, B)$, y la regla $\circ$ es una *categoría* en el caso:
(C.1) Para cada triple $h : C \longrightarrow D$, $g : B \longrightarrow C$, $f : A \longrightarrow B$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(C.2) Para cada $A \in \mathscr{C}$ hay un único $1_A \in mor_{\mathsf{C}} : (A, A)$ tal que si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow A$, entonces

$$f \circ 1_A \quad y \quad 1_A \circ g = g.$$

Si C es una categoría, entonces los elementos de la clase $\mathscr{C}$ se denominan objetos de la categoría, las "flechas $f : A \longrightarrow B$ se denominan *morfismos*, el mapa parcial $\circ$ se denomina *composición* y los morfismos 1_A se denominan *identidades* de la categoría. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en C se llama *isomorfismo* en caso de que exista un morfismo (necesariamente único) $f^{-1} : B \longrightarrow A$ en C tal que $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Para nuestro propósito, las categorías más interesantes son ciertas categorías *concretas*. Sea $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_c, \circ)$ una categoría. Entonces C es *concreto* en el caso de que exista una función u de $\mathscr{C}$ a la clase de conjuntos tal que para cada A, $B \in \mathscr{C}$

$$mor_{\mathsf{C}}(A, B) \subseteq Map(u(A), u(B)),$$

$$1_A = 1_{u(A)},$$

y tal que $\circ$ es la composición usual de funciones. Aquí un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es una biyección $f : u(A) \longrightarrow u(B)$.

***Ejemplo* 2.10.** Sea $\mathscr{S}$ la clase de todos los conjuntos; para cada $A, B \in \mathscr{S}$, sea $mor_{\mathsf{S}}(A, B) = Map(A, B)$, y para cada $A, B, C \in \mathscr{S}$, sea $\circ : mor_{\mathsf{S}}(B, C) \times mor_{\mathsf{S}}(A, B) \longrightarrow mor_{\mathsf{S}}(A, C)$ la composición de funciones. Entonces $\mathsf{S} = (\mathscr{S}, mor_{\mathsf{S}}, \circ)$ es una categoría concreta donde $u(A) = A$ para cada $A \in \mathscr{S}$. Llamemos a S la categoría de conjuntos.

***Ejemplo* 2.11.** Sea $\mathscr{S}$ la clase de todos los grupos, sea $mor_G(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos de grupo de G a H, y de nuevo sea $\circ$ la composición usual de funciones. Entonces $G = (\mathscr{S}, mor_G, \circ)$ es una categoría concreta, la categoría de grupos, donde $u(G)$ es el conjunto subyacente de G.

***Ejemplo* 2.12.** La categoría de V espacios vectoriales reales es la categoría $(\mathscr{V}, mor_{\mathsf{V}}, \circ)$ donde $\mathscr{V}$ es la clase de espacios vectoriales reales, $mor_{\mathsf{V}}(U, V)$ es el conjunto de transformaciones lineales de U a V, y $\circ$ es la composición habitual. Esta categoría es concreta donde $u(V)$ es el conjunto subyacente de V.

Si $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ es una categoría concreta, entonces el conjunto $u(A)$ se denomina conjunto subyacente de $A \in \mathscr{C}$.

Una categoría $\mathsf{D} = (\mathscr{D}, mor_{\mathsf{D}}, \circ)$ es una subcategoría de $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ siempre que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$, $mor_{\mathsf{D}}(A, B) \subseteq mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ para cada par $A, B \in \mathscr{D}$, $\circ$ en D es la restricción de $\circ$ en C. Si además $mor_{\mathsf{D}}(A, B) = mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ para cada $A, B \in \mathscr{D}$, entonces D es una subcategoría completa de C.

Es claro que la clase de grupos abelianos es la clase de objetos de una subcategoría completa de la categoría de grupos, y que esta categoría tiene una subcategoría completa cuyos objetos son los grupos abelianos finitos. Es una práctica común en álgebra identificar un objeto en una categoría con su conjunto subyacente. Así, por ejemplo, generalmente identificamos un grupo $(G, \circ)$, que consta de un conjunto G y una operación $\circ$, con su conjunto subyacente G. Tenga en cuenta, sin embargo, que la categoría de grupos no es una subcategoría de la categoría de conjuntos, simplemente porque para los grupos $(G, \circ), (H, \circ)$ en $\mathscr{G}$

$$mor_{\mathsf{G}}((G, \circ), (H, \circ)) \subseteq Map(G, H)$$

y

$$mor_{\mathsf{G}}((G, \circ), (H, \circ)) \nsubseteq Map((G, \circ), (H, \circ))$$

2.3.9. Funtores

Un funtor es algo que puede verse como un *homomorfismo de categorías*. Sean $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$y $\mathsf{D} = (\mathscr{D}, map_{\mathsf{D}}, \circ)$ dos categorías. Un par de funciones $F = (F', F'')$ es un *funtor covariante* de C a D en el caso de que F' sea una función de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, F'' es una función de los morfismos de C a los de D tales que para todo $A, B, C \in \mathscr{C}$ y todo $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ en C,

(F.1) $F''(f) : F'(A) \longrightarrow F'(B)$ en D;

(F.2) $F''(g \circ f) = F''(g) \circ F''(f)$;

(F.3) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

Por lo tanto, un funtor covariante envía objetos a objetos, mapas a mapas, identidades a identidades y *conserva triángulos conmutativos*:

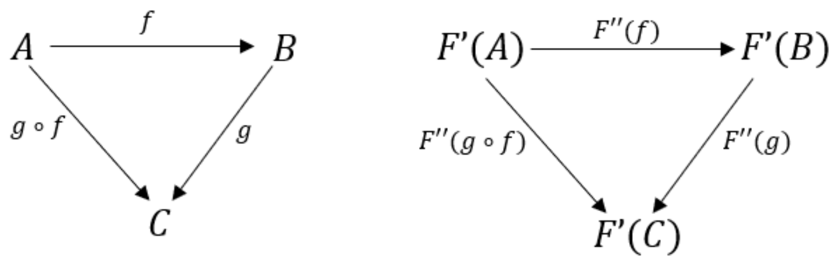

Figura 2.14: Triángulos conmutativos de funtores.

Un *funtor contravariante* es un par $F = (F', F'')$ que satisface de (F.1) y (F.2) sus duales

(F.1)* $F''(f) : F'(B) \longrightarrow F'(A)$ en D;

(F.2)* $F''(g \circ f) = F''(f) \circ F''(g)$;

(F.3) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$

Entonces, un funtor contravariante es "flecha invertida".

2.3.10. Transformaciones Naturales

Una transformación natural es algo que compara dos funtores entre las mismas categorías. Sean C y D categorías. Sean F y G funtores de C a D, digamos ambos covariantes. Sea $\eta = (\eta_A)_{A\in\mathsf{C}}$ una clase indexada de morfismos en D indexada por $\mathscr{C}$ tal que para cada $A \in \mathscr{C}$,

$$\eta_A \in mor_{\mathsf{D}}(F(A), G(A))$$

Entonces η es una transformación natural de F a G en caso de que para cada par, $A, B \in \mathscr{C}$ y cada $f \in mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.15: Diagrama conmutativo de homomorfismos donde: $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$.

conmuta; es decir $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$. Si cada η_A es un isomorfismo, entonces η se llama *isomorfismo natural*. (Si tanto F como G fueran contravariantes, el único cambio sería invertir las flechas $F(f)yG(f)$.) La propiedad crucial de los funtores es que *conservan los triángulos conmutativos*; entonces una transformación natural η logra una "traslación de triángulos conmutativos":

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "\eta_A"] \arrow[dr, "F(f)"] \arrow[dd, "F(gf)"'] & & G(A) \arrow[dd] \arrow[dr, "G(f)"] & \\
& F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dl, "F(g)"] & G(gf) \arrow[r] & G(B) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(C) \arrow[rr, "\eta_C"] & & G(C) &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.16: Traslación de triángulos conmutativos.

En efecto, observe que cualquier diagrama conmutativo Δ en C cuando F y G lo operan elemento a elemento produce un par de diagramas conmutativos $F(\Delta)$ y $G(\Delta)$ en D (porque F y G son funtores). Entonces, una transformación natural η de F a G *traslada* conmutativamente $F(\Delta)$ en $G(\Delta)$.

Algunas Notaciones Especiales

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, los números enteros no negativos;

$\mathbb{N} = 1, 2, ...,$ los números enteros positivos

$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}/p$ es número primo$\}$

$\mathbb{Z}=$ el conjunto de los números enteros;

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$;

$\mathbb{Q} =$ el conjunto de los números racionales;

$\mathbb{C} =$ el conjunto de los números complejos;

$\emptyset =$ el conjunto vacío.

2.3.11. Algunas definiciones importantes

Definición 2.3.1 (Anillo)**.** Un anillo es un conjunto no vacío A junto con dos operaciones algebraicas binarias, que denotaremos por $+$ y $\cdot$ las cuales llamaremos suma y multiplicación, respectivamente, tales que, para todo $a, b, c \in A$ se satisfacen los siguientes axiomas:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociatividad de la suma);
2. $a + b = b + a$ (conmutatividad de la suma);
3. existe un elemento $0 \in A$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (existencia de un elemento cero);
4. existe un elemento $x \in A$, tal que $a + x = 0$ (existencia de *inversos* para la suma);
5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividad derecha);
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividad izquierda);

Por lo general, escribiremos simplemente ab en lugar de $a \cdot b$ para $a, b \in A$. Se puede demostrar que un elemento $x \in A$ que satisface la propiedad 4 es único. En efecto, si $a + x = 0$ y $a + y = 0$, entonces $x = 0 + x = (y + a) + x = y + (a + x) = y + 0 = y$. El elemento x con esta propiedad lo denotamos por $-a$.

El grupo formado por todos los elementos de un anillo A bajo adición se llama **grupo aditivo de** A. El grupo aditivo de un anillo es siempre abeliano.

Un ejemplo trivial de un anillo es el anillo que tiene solo un elemento 0. Este anillo se llama **anillo trivial** o **anillo nulo**. Dado que el anillo trivial no es interesante en su estructura interna, consideraremos principalmente anillos que tienen más de un elemento y, por lo tanto, que tiene al menos un elemento distinto de cero. Tal anillo se llama **anillo distinto de cero**.

Un anillo A se llama **asociativo** si la multiplicación satisface la ley asociativa, es decir, $(a_1 a_2)a_3 = a_1(a_2 a_3)$ para todo $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Un anillo A se llama **conmutativo** si la multiplicación es conmutativa en A, es decir, $a_1a_2 = a_2a_1$ para elementos cualesquiera $a_1, a_2 \in A$; de lo contrario, es **no conmutativo**.

Por una **identidad** multiplicativa de un anillo A nos referimos a un elemento $e \in A$, que es neutral con respecto a la multiplicación, es decir, $ae = ea = a$ para todo $a \in A$. Observe que, si un anillo distinto de cero tiene un elemento de identidad, entonces está unívocamente determinado. Por lo general, se denota por 1. En general, un anillo no necesita tener una identidad. Un anillo con la identidad multiplicativa generalmente se llama **anillo con identidad** o, para abreviar, **un anillo con** 1.

Definición 2.3.2 (Subanillo)**.** Se dice que un subconjunto S no vacío de un anillo A es un subanillo de A si S mismo es un anillo bajo las mismas operaciones de suma y multiplicación en A.

Para un anillo con 1 se requiere que un subanillo tenga la misma identidad.

Para determinar si un conjunto S es un subanillo de un anillo A con 1 es suficiente verificar las siguientes condiciones:

(a) los elementos 0 y 1 están en S;

(b) si $x, y \in S$, entonces $x - y \in S$ y $xy \in S$.

De ahora en adelante, si no se indica lo contrario, por anillo siempre se entenderá un anillo asociativo con identidad $1 \neq 0$.

Sea A un anillo. Un elemento distinto de cero $a \in A$ se dice que es un **divisor de cero por la derecha** si existe un elemento distinto de cero $b \in A$ tal que $ba = 0$. Los divisores de cero por la izquierda se definen de manera similar. En el caso conmutativo, las nociones de divisores de cero por la derecha y por la izquierda coinciden y podemos hablar simplemente de divisores de cero. Un anillo A se llama **dominio** si $ab \neq 0$ para cualquier elemento distinto de cero $a, b \in A$. En tal anillo no hay divisores de cero a la izquierda (o a la derecha).

Se dice que un elemento $a \in A$ es **invertible por la derecha** si existe un elemento $b \in A$ tal que $ab = 1$. Tal elemento b se llama **inverso por la derecha** de a. Los elementos invertibles por la izquierda y sus inversas por la izquierda se definen de manera análoga. Si un elemento a tiene un inverso b a la derecha y un inverso c a la izquierda, entonces $c = c(ab) = (ca)b = b$. En este caso diremos que a es **invertible** o que a es una **unidad** y el elemento $b = c$ es el **inverso** de a. Es fácil ver que para cualquier elemento invertible a, su inversa está determinada de manera única y generalmente se denota por a^{-1}. Si a y b son unidades en un anillo A, entonces $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ y $a \cdot b \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a \cdot b = 1$, es decir, a^{-1} y ab también son unidades. Por lo tanto, en un anillo A, las unidades forman un grupo con respecto a la multiplicación, que se denomina grupo multiplicativo de A y generalmente se denota por A^* o $U(A)$.

Se dice que un elemento e de un anillo A es idempotente si $e^2 = e$. Dos idempotentes e y f se llaman **ortogonales** si $ef = fe = 0$. Es obvio que el cero y la identidad de cualquier anillo son idempotentes. Sin embargo, pueden existir muchos otros idempotentes.

Un **anillo de división** (o un **campo sesgado**) D es un anillo distinto de cero para el cual todos los elementos distintos de cero forman un grupo bajo la multiplicación; es decir, todo elemento distinto de cero es invertible. Un anillo de división conmutativa se llama **campo**.

Sea un campo L que contenga un campo K. En este caso decimos que el campo L es una **extensión** de K y que el campo K es un **subcampo** de L. Evidentemente, L es un espacio vectorial sobre K. Un elemento $\alpha \in L$ se llama **algebraico sobre el campo** K si a es raíz de algún polinomio $f(x) \in K[x]$.

Un campo L se llama **extensión algebraica** de un campo K si todo elemento de L es algebraico sobre K. Una extensión L de un campo K se llama **finita** si L es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. La dimensión L sobre K se llama el grado de una extensión y se denota por $[L : K]$. Si $[L : K] = n$ entonces para cualquier elemento $\alpha \in L$ los elementos $1, \alpha, ..., \alpha^n$ son linealmente dependientes de K, y por lo tanto a es una raíz de algún polinomio $f(x) \in K[x]$. Por lo tanto, cualquier extensión finita es algebraica.

Un **álgebra** sobre un campo K (o K-álgebra) es un conjunto A que es a la vez un anillo y un espacio vectorial sobre K de tal manera que las estructuras de los grupos aditivos son las mismas y el axioma

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$$

se cumple para todos los $\lambda \in K$ y $a, b \in A$.

Se dice que una K-álgebra A es de **dimensión finita** si el espacio vectorial A es de dimensión finita sobre K. La dimensión del espacio vectorial A sobre K se denomina **dimensión del álgebra** A y se denota por $[A : K]$.

Si un campo L contiene un campo K, entonces L es un álgebra sobre K.

Al igual que para los grupos podemos introducir las nociones de anillo cociente, homomorfismo e isomorfismo de anillos.

Definición 2.3.3. Un mapa φ de un anillo A en un anillo A' es llamado **morfismo de anillo** o simplemente un **homomorfismo**, si φ cumple las siguientes condiciones:

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3. $\varphi(1) = 1$

para cualquier $a, b \in A$.

Si un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A'$ es inyectivo, es decir, $a_1 \neq a_2$ implica $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, entonces se llama **monomorfismo** de anillos.

Si un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A'$ es sobreyectivo, es decir, para cualquier elemento $a' \in A'$ existe un $a \in A$ tal que $a' = \varphi(a)$, entonces φ se llama **epimorfismo** de anillos.

Si un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A'$ es una biyección, es decir, es tanto un monomorfismo como un epimorfismo, entonces se llama **isomorfismo** de anillos. Si existe un isomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A'$, se dice que los anillos A y A' son **isomorfos**, y escribiremos $A \simeq A'$. Tenga en cuenta que entonces $\varphi^{-1} : A' \longrightarrow A$ es también un morfismo de anillos, por lo que φ es un isomorfismo en la categoría de anillos en el sentido categorial. En el caso de que $A = A'$, φ es llamado **automorfismo**.

Por el **núcleo** de un homomorfismo φ de un anillo A en un anillo A' entendemos el conjunto de elementos $a \in A$ tales que $\varphi(a) = 0$. Denotamos este conjunto $Ker\varphi$. El subconjunto de A' que consta de los elementos de la forma $\varphi(a)$, donde $a \in A$, se llama **imagen homomórfica** de A bajo un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A'$ y denotada $Im\varphi$. Es fácil verificar que tanto $Ker\varphi$ como $Im\varphi$ son cerrados bajo las operaciones de suma y multiplicación. El núcleo juega un papel importante en la teoría de los anillos. En realidad, es un ideal en A según la siguiente definición.

Definición 2.3.4 (Ideal)**.** Un subgrupo $\mathcal{I}$ del grupo aditivo de un anillo A se denomina **ideal derecho** (resp. **izquierdo**) de A si $ia \in \mathcal{I}$ (resp. $ai \in \mathcal{I}$) para cada $i \in \mathcal{I}$ y cada $a \in A$. Un subgrupo $\mathcal{I}$ que es tanto un ideal derecho como un ideal izquierdo, se llama **ideal de dos lados** de A, o simplemente un **ideal**. Por supuesto, si A es conmutativo, todo ideal derecho o izquierdo es un ideal.

Cada anillo A tiene al menos dos ideales triviales, el anillo A completo y el ideal cero, que consta solo de 0. Cualquier otro ideal derecho (resp. izquierdo, de dos lados) se llama **ideal derecho propio** (resp. izquierdo, de dos lados).

Para cualquier familia de ideales derechos $\{\mathcal{I}_i : i \in I\}$ de un anillo A podemos definir su suma $\sum_{i\in I} \mathcal{I}_i$, como un conjunto de elementos de la forma $\sum_{i\in I} x_i$, donde $x_i \in \mathcal{I}_i$, y todos los x_i excepto un número finito, son iguales a cero para $i \in I$

También podemos definir el producto de dos ideales rectos $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ de A como el conjunto de elementos de la forma $\displaystyle\sum_i x_i y_i$, donde $x_i \in \mathcal{I}, y_i \in \mathcal{I}$ y solo un número finito de $x_i y_i$ no son iguales a cero.

Es fácil verificar que una suma y un producto de ideales derechos también son ideales derechos. Enunciados similares valen, por supuesto, para ideales e ideales de izquierda. De la manera usual, denotamos $\mathcal{I}\mathcal{I}$ por $\mathcal{I}^2$; y en general para cada entero positivo $n > 1$ escribimos $\mathcal{I}^n = \mathcal{I}^{n-1}$ para cualquier ideal derecho $\mathcal{I}$.

Para cualquier familia de ideales derechos $\{\mathcal{I}_i : i \in I\}$ de un anillo A podemos considerar su intersección $\bigcap_{i\in I} \mathcal{I}_i$ como un conjunto de elementos $\{x \in A\}$ tal que $x \in \mathcal{I}$ para cualquier $i \in I$. Obviamente, es un ideal derecho de A también. Tenga en cuenta que si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales de dos caras, entonces $\mathcal{I}\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales derechos, entonces$\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, pero no es necesariamente cierto que $\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. La unión de dos ideales no es necesariamente un ideal. Sin embargo, esto es cierto para algunos casos particulares.

Un ideal derecho $\mathcal{I}$ de un anillo A es **nilpotente** si $\mathcal{I}^n = 0$ para algún entero positivo $n > 1$. En este caso $x_1 x_2 ... x_n = 0$ para cualquier elemento $x_1, x_2, ..., x_n$ de $\mathcal{I}$.

Si A es un anillo y $a \in A$, entonces $\mathcal{I} = aA$ (resp. $\mathcal{I} = Aa$) es un ideal derecho (resp. izquierdo) que se llama **ideal principal derecho** (resp. **izquierdo**), determinado por a. Un anillo, cuyos ideales derechos (resp. izquierdos) son principales, se denomina **anillo ideal principal derecho** (resp. **izquierdo**). Análogamente, $\mathcal{I} = AaA$ se denomina ideal principal bilateral determinado por a y se denota por (a). Cada elemento de este ideal tiene la forma $\sum x_i a y_i$, donde x_i, $y_i \in A$. Un anillo, cuyos ideales derecho e izquierdo son principales, se llama **anillo ideal principal**. Un dominio, cuyos ideales derecho e izquierdo son principales, se **denomina dominio ideal principal** o **DIP** para abreviar.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal de dos caras de un anillo A. Entonces podemos construir un **anillo cociente** $A/\mathcal{I}$ definiéndolo como el conjunto de todas las clases laterales de la forma $a + \mathcal{I}$ para cualquier $a \in A$ con las siguientes operaciones de suma y multiplicación

$$(a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) = (a + b) + \mathcal{I},$$

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = (ab) + \mathcal{I}.$$

El cero de este anillo es la clase lateral $0 + \mathcal{I}$, y la identidad es la clase lateral $1 + \mathcal{I}$. La función $\pi : A \longrightarrow A/\mathcal{I}$ definida por $\pi(a) = a + \mathcal{I}$, es un epimorfismo de A sobre $A/\mathcal{I}$ y se llama la **proyección natural** de A sobre $A/\mathcal{I}$.

***Ejemplo* 2.13.** El conjunto de todos los números enteros $\mathbb{Z}$ forma un anillo conmutativo bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación. Mostraremos que todo ideal en $\mathbb{Z}$ es principal. Sea $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{Z}$. Si $\mathcal{I}$ es el ideal cero, entonces $\mathcal{I} = (0)$ es el ideal principal generado por 0. Si $\mathcal{I} \neq 0$, entonces $\mathcal{I}$ contiene números enteros positivos distintos de cero. Sea n el entero positivo más pequeño que pertenece al ideal $\mathcal{I}$. Obviamente, $(n) \subseteq \mathcal{I}$. Mostraremos que $\mathcal{I} \subseteq (n)$ también. Sea $m \in \mathcal{I}$. Por el algoritmo de división existen números enteros q y r tales que $m = qn + r$ y $0 \leq r < n$. Desde $m, n \in \mathcal{I}$ y $r = m - qn$, se sigue qué $r \in \mathcal{I}$. Si $r \neq 0$, entonces tenemos un entero positivo en el que es menor que n. Esta contradicción muestra que $r = 0$ y $m = qn$. De esta igualdad se sigue qué $m \in (n)$, entonces $\mathcal{I} \subseteq (n)$. Por lo tanto $\mathcal{I} = (n)$ es un principal ideal generado por n. Entonces el anillo $\mathbb{Z}$ es un dominio ideal principal conmutativo.

***Ejemplo* 2.14.** Los conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de números racionales, reales y complejos son campos.

***Ejemplo* 2.15.** Los polinomios en una variable x sobre un campo K forman un anillo conmutativo $K[x]$. El campo K puede considerarse naturalmente como un subanillo de $K[x]$. Mostraremos que todo ideal en $K[x]$ es también principal. Sea $\mathcal{I} \neq 0$ un ideal en $K[x]$. Elegimos en $\mathcal{I}$ un polinomio $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n (a_0 \neq 0)$

con el grado más pequeño $deg(p(x)) = n$. Obviamente, $(p(x)) \subseteq \mathcal{I}$. Mostraremos que $\mathcal{I} \subseteq (p(x))$ también. Sea $f(x)$ un elemento arbitrario en $\mathcal{I}$. Entonces por el algoritmo de división existen polinomios $q(x), r(x) \in K[x]$ tales que $f(x) = q(x)p(x) + r(x)$ y $0 \leq deg(r(x)) < n$. Como $p(x), f(x) \in \mathcal{I}$ y $r(x) = f(x) - q(x)p(x)$, se sigue qué $r(x) \in \mathcal{I}$. Si $r(x) \neq 0$, entonces tenemos el elemento en $\mathcal{I}$ cuyo grado es menor que n. Esta contradicción muestra que $r(x) = 0$ y $f(x) = q(x)p(x)$. Por lo tanto $f(x) \in (p(x)))$ y $\mathcal{I} \subseteq (p(x))$. Así, $\mathcal{I} = (p(x))$ es el ideal principal y $K[x]$ es un dominio de ideal principal conmutativo.

Podemos generalizar este ejemplo. Sea A un anillo arbitrario. podemos considerar $A[x]$, el conjunto de todos los polinomios en una variable x sobre A (es decir, con coeficientes en A). Si el anillo A es conmutativo, entonces $A[x]$ también lo es. La identidad de A es también la identidad de $A[x]$. Sin embargo, existen anillos A tales que no todos los ideales en $A[x]$ son principales. Por ejemplo, sea $A = \mathbb{Z}$ el anillo de los enteros y $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los polinomios con términos constantes pares. Es fácil ver qué $\mathcal{I}$ es un ideal en $\mathbb{Z}[x]$ pero no es un ideal principal.

Análogamente podemos considerar el anillo $A[x, y]$ de polinomios en dos variables x e y con coeficientes en un anillo A y así sucesivamente.

***Ejemplo* 2.16.** Sea K cualquier anillo asociativo y sea G un grupo multiplicativo. Considere el conjunto KG de todas las sumas finitas formales $\sum_{g\in G} a_g g$ con $a_g \in K$. Las operaciones en KG. Están definidos por las fórmulas:

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{g\in G} b_g g) = \sum_{h\in G} c_h h$$

donde $c_h = \sum a_x b_y$ con sumatoria sobre todo $(x, y) \in G \times G$ tal que $xy = h$. Es fácil verificar que KG es efectivamente un anillo asociativo. Este anillo se llama el anillo de grupo del grupo G sobre el anillo K. Claramente, KG es conmutativo si y solo si tanto K como G son conmutativos. Además, si K es un campo, entonces KG es un K-álgebra denominad **álgebra de grupos** del grupo G sobre el campo K. Si K es un anillo conmutativo con 1, el anillo de grupos KG suele denominarse **álgebra de grupos** del grupo G sobre el anillo K también.

***Ejemplo* 2.17.** El álgebra de Cayley (el álgebra de octavas u octoniones) O es un álgebra de división de 8 dimensiones (no asociativa) sobre el campo de los números reales. El álgebra de Cayley consiste en todas las sumas formales $\alpha + \beta e$, donde α, β son cuaterniones y e es un nuevo símbolo con $e^2 = -1$, con suma y multiplicación obvias por números reales.

En otras palabras, es un espacio vectorial de 8 dimensiones sobre R con base $\{1, i, j, k, e, ie, je, ke\}$ y la siguiente tabla de multiplicar:

	1	i	j	k	e	ie	je	ke
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	$-j$	ie	$-e$	$-ke$	je
j	j	$-k$	-1	i	je	ke	$-e$	$-ie$
k	k	j	$-i$	-1	ke	$-je$	ie	$-e$
e	e	$-ie$	$-je$	$-ke$	-1	i	j	k
ie	ie	e	$-ke$	je	$-i$	-1	$-k$	j
je	je	ke	e	$-ie$	$-j$	k	-1	$-i$
ke	ke	$-je$	ie	e	$-k$	$-j$	i	-1

Cuadro II.1: Tabla de multiplicación de vectores.

Un álgebra de división A se llama **alternativa** si todas sus subálgebras generadas por dos elementos son asociativas. Las siguientes álgebras de dimensión finita sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ son bien conocidas:

1. el campo de los números reales $\mathbb{R}$;
2. el campo de los números complejos $\mathbb{C}$;
3. el anillo de división de los cuaterniones $\mathbb{H}$.

Aquí está la estructura de permutaciones ortogonales que corresponde al campo de los números complejos $\mathbb{C}$, el anillo de división de los cuaterniones H y el álgebra de Cayley O:

1. los números complejos $\mathbb{C}$. Multiplicando el número complejo $a_1 + a_2 i$ correspondiente al vector $a = (a_1, a_2)$ por los elementos básicos 1 e i, obtenemos:

   $P_1 a = (a_1, a_2)$

   $P_2 a = (-a_2, a_1)$.

2. los cuaterniones H. De nuevo, multiplicando el cuaternión $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ correspondiente al vector $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ por los elementos básicos $1, i, j, k$, obtenemos las siguientes permutaciones en $\mathbb{R}^4$:

   $P_1 a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$,

   $P_2 a = (-a_2, a_1, -a_4, a_3)$,

   $P_3 a = (-a_3, a_4, a_1, -a_2)$,

   $P_4 a = (-a_4, -a_3, a_2, a_1)$.

3. el álgebra de Cayley O. De la misma manera se pueden obtener las siguientes permutaciones en $\mathbb{R}^8$ (por $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$):

   $P_1 a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$,

   $P_2 a = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5, a_8, a_7)$,

$$
\begin{aligned}
P_3a &= (-a_3, a_4, a_1, -a_2, -a_7, -a_8, a_5, a_6),\\
P_4a &= (-a_4, -a_3, a_2, a_1, -a_8, a_7, -a_6, a_5),\\
P_5a &= (-a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, -a_2, -a_3, -a_4),\\
P_6a &= (-a_6, -a_5, a_8, -a_7, a_2, a_1, a_4, -a_3),\\
P_7a &= (-a_7, -a_8, -a_5, a_6, a_3, -a_4, a_1, a_2),\\
P_8a &= (-a_8, a_7, -a_6, -a_5, a_4, a_3, -a_2, a_1).
\end{aligned}
$$

2.3.12. Módulos y Homomorfismos

Una de las nociones más importantes del álgebra moderna es la noción de módulo, que puede considerarse como una generalización natural de un espacio vectorial.

Definición 2.3.5. Un **módulo derecho sobre un anillo A** (o A-módulo derecho) es un grupo abeliano aditivo M junto con una función $M \times A \to M$ tal que a cada par (m, a), donde $m \in M$, $a \in A$, corresponde un elemento $ma \in M$ determinado unívocamente M y se cumplen las siguientes condiciones:

1. $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2$
2. $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$
3. $m(a_1a_2) = (ma_1)a_2$
4. $m \cdot 1 = m$

para cualquier $m, m_1, m_2 \in M$ y cualquier $a, a_1, a_2 \in A$.

De manera similar, se puede definir la noción de un A-módulo izquierdo. Algunas veces escribiremos $M = M_A$ para enfatizar la acción correcta de A. Si A es un anillo conmutativo y $M = M_A$ entonces podemos convertir M en un A-módulo izquierdo definiendo $am = ma$ para $m \in M$ y $a \in A$. Así, para los anillos conmutativos, podemos escribir los elementos del anillo a ambos lados. Si A no es conmutativo, en general no todo A-módulo derecho es también un módulo A izquierdo. En lo que sigue, al decir un A -módulo nos referiremos a un A-módulo derecho.

Tenga en cuenta que si A es un campo, entonces un módulo A derecho es precisamente un espacio vectorial derecho. Formalmente, la noción de módulo es una generalización de la idea de espacio vectorial. En general, las propiedades de los módulos pueden ser bastante diferentes de las propiedades de los espacios vectoriales.

***Ejemplo* 2.18.** Sea $M = A$ y como el mapa $\varphi : M \times A \to M$ tomamos la multiplicación habitual, es decir, $\varphi(m, a) = ma \in M$. Entonces obtenemos un módulo derecho A_A que se llama **módulo regular derecho**. Análogamente, podemos construir el módulo regular izquierdo ${}_AA$. Por lo tanto, cualquier anillo A puede considerarse como un módulo sobre sí mismo y cualquier ideal derecho (izquierdo) en A es claramente un A-módulo derecho (izquierdo).

***Ejemplo* 2.19.** Sea $A = \mathbb{Z}$ el anillo de los enteros. Entonces cualquier grupo abeliano G es un módulo $\mathbb{Z}$, si definimos el mapa $\varphi : G \times \mathbb{Z} \to G$ como la adición múltiple habitual $\varphi(g, n) = gn = g + ... + g \in G$.

***Ejemplo* 2.20.** Sea G un grupo abeliano primario, es decir, todo elemento $g \in G$ tiene orden p^k para algún número primo fijo p y un número k. Sea $\frac{m}{n}$ un elemento de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Ya que $(n, p) = 1$, tenemos $(n, p^k) = 1$ también. Por lo tanto, existen enteros x, y tales que $nx + p^k y = 1$. Así, para cualquier elemento $g \in G$ tenemos $g,1 = g.nx + g.p^k y = g.nx$. Entonces, $g = g.nx = (gx)n$, es decir, la operación $g.\frac{1}{n} = gx$ está bien definida en G. Por lo tanto, podemos definir un mapa $G \times \mathbb{Z}_{(p)} \to G$ por la siguiente regla:

$$g.\frac{m}{n} = (gm)x$$

y el grupo abeliano primario G puede considerarse como un $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulo.

Ahora presentamos los conceptos de homomorfismos e isomorfismos para módulos.

Definición 2.3.6. Un **homomorfismo** de un A-módulo derecho M en un A-módulo derecho N es un mapa $f : M \longrightarrow N$ que satisface las siguientes condiciones

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ para todo $m_1, m_2 \in M$.
2. $f(ma) = f(m)a$ para todo $m \in M, a \in A$.

El conjunto de todos estos homomorfismos f se denota por $Hom_A(M, N)$. Si $f, g \in Hom_A(M, N)$ entonces $f + g : M \to N$ está definido por $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ para todo $m \in M$. Se puede verificar que $f + g$ es también un homomorfismo y el conjunto $Hom_A(M, N)$ forma un grupo abeliano aditivo.

Si un homomorfismo $f : M \to N$ es inyectivo, es decir, $m_1 \neq m_2$ implica $f(m_1) \neq f(m_2)$, entonces se llama **monomorfismo**. Para verificar que f es un monomorfismo de A-módulos es suficiente mostrar que $f(m) = 0$ implica $m = 0$. Si un homomorfismo $f : M \to N$ es sobreyectivo, es decir, todo elemento de N es del forma $f(m)$, entonces f se llama epimorfismo.

Si un homomorfismo $f : M \to N$ es biyectivo, es decir, inyectivo y sobreyectivo, entonces se le llama isomorfismo de módulos. En este caso decimos que M y N son isomorfos y escribiremos $M \simeq N$. Los módulos isomorfos tienen el mismo propiedades y pueden ser identificados. Es fácil comprobar que entonces $f^{-1} : N \longrightarrow M$, definida por $f^{-1}(n) = m$ si y sólo si $f(m) = n$ es también un homomorfismo de módulos, de modo que un homomorfismo biyectivo es un isomorfismo en el sentido categórico.

Un subconjunto no vacío N de un A-módulo de M se llama A-**submódulo** si N es un subgrupo del grupo aditivo de M que es cerrado bajo la multiplicación por elementos de A. Tenga en cuenta que dado que A en sí mismo es un A-módulo derecho, los submódulos del módulo regular A_A son precisamente los ideales derechos de A.

Sea N un submódulo de un A-módulo M. Decimos que dos elementos $x, y \in M$ son equivalentes si $x - y \in N$. Considere el conjunto M/N de clases de equivalencia

$m + N$, donde $m \in M$. Podemos introducir una estructura de módulo en M/N si definimos las operaciones de suma y multiplicación por un elemento $a \in A$ haciendo

$$(m + N) + (m_1 + N) = (m + m_1) + N,$$
$$(m + N)a = ma + N$$

para todo $m, m_1 \in M$.

El A-módulo M/N se denomina **módulo cociente** de M por N.

Nótese que el módulo cociente tiene una aplicación natural $\pi : M \to M/N$ asignando a cada elemento $m \in M$ la clase $m + N \in M/N$. Además, es fácil ver qué π es un epimorfismo de A-módulos. Este epimorfismo se denomina **proyección natural** de M sobre el módulo cociente M/N.

Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de A-módulos. El conjunto

$$Ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

es un submódulo de M . Se llama **núcleo** del homomorfismo f. Obviamente, $f(m_1) = f(m_2)$ se cumple si y sólo si $m_1 - m_2 \in Ker(f)$. Es fácil probar que para la proyección natural $\pi : M \to M/N$ tenemos $Ker(\pi) = N$.

La imagen de un homomorfismo f es el conjunto $Im(f)$ de todos los elementos de N de la forma $f(m)$. Es fácil verificar que $Im(f)$ es un submódulo en N. El conjunto

$$Coker(f) = N/Im(f)$$

se llama el **conúcleo** del homomorfismo f y es el módulo cociente de N por $Im(f)$.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DEL PROYECTO

3.1. Categorías, Subcategorías y matriz de categorización apriorística

Para el presente trabajo se considerará las siguientes categorías y subcategorías

1. **Módulos pobres**: Esta categoría procura descubrir y analizar los módulos pobres sobre un anillo R. Un R-módulo M es llamado **pobre** cuando $SSMod-R = In^{-1}(M)$.

   Sus subcategorías que se considerarán serán:

   - R-módulos semisimples
   - Anillos Noetherianos y Artinianos

2. **Dominios de inyectividad**: Los Dominios de inyectividad de un R- módulo M representa la clase:

$$\{S \in Mod - R : MesS - inyectivo\} = In^{-1}(M).$$

   Sus subcategorías que se considerarán serán:

   - R-módulos inyectivos
   - Envolventes inyectivos

Adicionalmente, con respecto a la matriz de categorización apriorística, se tendrá lo siguiente:

Problema de investigación	**Preguntas de investigación**	**Objetivo general**	**Objetivos específicos**	**Categorías**	**Subcategorías**
¿Es posible realizar una descripción y análisis de los Módulos Pobres a partir de los dominios de inyectividad?	P1: ¿Existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres?	Realizar una descripción y análisis de los Módulos pobres a partir de los dominios de inyectividad.	OE1. Mostrar que existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres.	Módulos pobres.	▪ R-Módulos semisimples ▪ Anillos Artinianos y Noetherianos.
	P2: ¿Existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres?		OE2. Mostrar que existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres.	Dominios de inyectividad.	▪ R-Módulos inyectivos ▪ Envolventes Inyectivos.

Cuadro III.1: Matriz de categorización apriorística.

3.2. Escenario de estudio

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas - Universidad Nacional del Callao.

3.3. Participantes

Debido a la naturaleza cualitativa y documental del trabajo, los únicos participantes en la elaboración de este trabajo de investigación serán la autora y el asesor.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.

3.5. Procedimiento

Con respecto al procedimiento, el desarrolla de la investigación tendrá en cuenta los siguientes items:

1. **Método de recolección de información**: Dada la naturaleza básica y documental del trabajo, la recolección de la información se realizará a partir de la búsqueda y análisis teórico en la literatura sobre la teoría de anillos y módulos, en particular, centrando la información en los módulos pobres.
2. **Categorización**: A partir del conocimiento teórico con respecto al tema, se categorizó el trabajo en dos grandes familias de conocimiento: Los módulos pobres y los dominios de inyectividad. Esto se eligió de esta manera, debido a que uno de los objetivos principales del trabajo es mostrar que relación tienen estas dos categorías.
3. **Triangulación**: Después de realizar una búsqueda detallada de la información necesaria en la literatura, se pretende triangular los resultados mas relevantes con la finalidad de obtener un resultado novedoso sobre los módulos pobres. Para esto se realizará un análisis inductivo-deductivo de la teoría correspondiente.

3.6. Rigor científico

3.6.1. Tipo de investigación

Según el propósito, este trabajo presenta una investigación básica, pues, como se menciona en [4], la investigación básica tiene como objetivo producir e incrementar nuevos conocimientos, principalmente teóricos. Esto se puede observar fácilmente al contrastar el objetivo principal propuesto con lo descrito en la literatura.

Adicionalmente, según el nivel de investigación que se expone, se puede decir que es del tipo explicativo, pues, como bien comenta Hernández en [16], este tipo de investigación busca explicar el porqué del fenómeno y en qué condiciones se puede manifestar.

3.6.2. Diseño de la investigación

Según el diseño se puede decir que el presente trabajo de investigación es del tipo documental, pues, como bien mencionan [18], la revisión bibliográfica además de ser obligatoria sobre cualquier investigación, se basa en la búsqueda y análisis de fuentes documentales.
Esto es algo importante a destacar en la realización de este trabajo, ya que no se pretende realizar un estudio experimental que permita el desarrollo de la teoría a tratar, si no que el análisis propuesto se sugiere a partir de una exhaustiva revisión de la literatura sobre el tema (en el campo del álgebra) y bajo supuestos referentes al estudio de los R-módulos.
Es así que inicialmente en las bases teóricas del trabajo se propone una visión general de los R-módulos prestando especial atención en los R-módulos semi-simples, ya que los módulos pobres se caracterizan a partir de una clase de conjuntos generados por R-módulos semi-simples. Adicionalmente, se presentará una descripción detallada con respecto a los anillos noetherianos y artinianos ya que se pretende demostrar diferentes equivalencias con la definición de los módulos pobres a partir del tipo de anillo que lo genera.
Posteriormente, en el desarrollo del trabajo de investigación se pretende abordar a los dominios de inyectividad mostrando la definición de un módulo pobre a partir de la clase de submódulos semisimples del anillo que genera al módulo y del dominio de inyectividad del propio modulo. Esto permitirá realizar un análisis y una descripción detallada de los módulos pobres a partir de nuevos tipos de anillos como lo son los anillos sin clase media, los anillos indigentes, anillos que son utopías, entre otros.

3.7. Método de análisis de datos

Debido al tipo de investigación el presente trabajo presentará un método de investigación cualitativo donde la credibilidad, confiabilidad y consistencia general de los

datos e información a usarse se basan en las definiciones previas relacionadas a la literatura sobre el tema. Esto es debido a que los resultados a usarse son netamente teóricos y alimentan a la propia rama de estudio. No se pretenderá en ningún momento mostrar resultados experimentales o que presenten algún grado de validez por metodologías estadísticas.
Cabe mencionar que los resultados novedosos que se mostraran en el trabajo conllevan un estudio de la axiomática propia de la teoría matemática y un delicado trabajo deductivo-inductivo de los temas que se abordarán.

3.8. Aspectos éticos en investigación

El presente trabajo se realizará teniendo en cuenta los siguientes parámetros éticos:

1. **Beneficencia:** Debido al aporte científico que se pretende conseguir con este trabajo, se espera que diversos estudiantes de pregrado en matemática, puedan obtener beneficio del mismo a partir del desarrollo de futuros trabajos de investigación sobre este tema, ya que la teoría sobre los módulos pobres conlleva un avance significativo en el álgebra moderna.

2. **No maleficencia:** Por la naturaleza del trabajo, el mismo no implica algún riesgo de daño a terceros.

3. **Autonomía y justicia:** Con este trabajo no se pretende incurrir en algún tipo de plagio y en los casos que sea necesario, se citará la literatura correspondiente.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Como se mencionó a lo largo del trabajo, el objetivo principal que motivó el estudio de esta tesis son los módulos pobres. Es así que se ha dividido el capítulo de resultados en 3 secciones, la primera analizaremos algunos anillos que tengan un módulo pobre, para posteriormente en la sección 4.2 veremos anillos cuyos módulos sean o pobres o inyectivos, es decir, no poseen clase media. Finalmente, en la última sección 4.3 se explorarán las condiciones en las cuales un anillo es una utopía. Todos estos resultados están basados en el trabajo [23] y para dar más desarrollo a este trabajo se emplearon las demostraciones.

4.1. Anillos con Módulos Pobres

El análisis de los anillos PCI es el punto de partida de esta sección. El siguiente teorema, establece que, si tenemos un anillo R que es PCI, entonces R_R es un módulo pobre. Usaremos el siguiente lema para la demostración del teorema.

Lema 4.1.1. *Si R es un dominio PCI y xR es un R-módulo cíclico que no es isomorfo a R, entonces xR es semisimple.*

Demostración: Por hipótesis R es un dominio PCI, entonces por el Teorema 2.2.99, o R es semisimple o es noetheriano, hereditario y un V-dominio de Ore.

Analizamos los casos: Si R es semisimple, entonces todos los R-módulos lo son.

Si R es un dominio de Ore, entonces todo ideal I de R es esencial. Así, dado un R-módulo cíclico xR tenemos $xR \backsimeq R/I$, donde I es un ideal esencial de R.

Por el Teorema 2.2.114, R es un dominio SI, por lo tanto, por el Teorema 2.2.113 inciso (d), xR es semisimple.

Teorema 4.1.2. *Si R es un dominio PCI, entonces R no tiene clase media y R_R es un módulo pobre.*

Demostración: Comenzamos probando que R no tiene clase media: Si todo R-módulo es inyectivo, por el Teorema 2.2.54, todo R-módulo es semisimple, por lo que R no tiene clase media y R_R es un módulo pobre.

Ahora, supongamos que existe un R-módulo M que no es inyectivo, para que R no tenga clase media el R-módulo M tendría que ser pobre. Probaremos que todo $xR \in In^{-1}(M)$ es semisimple.

Si $xR \backsimeq R_R$ entonces $R_R \in In^{-1}(M)$, entonces M es inyectiva, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, xR es un R-módulo cíclico no isomorfo a R_R y, por el Lema 4.1.1, xR es semisimple. Como xR es cualquiera, M es pobre. En consecuencia, Mod-R no tiene clase media.

Ahora probaremos que R_R es pobre:

Por el Teorema 2.2.99, o R es semisimple o es noetheriano, hereditario, V-dominio de Ore.
Si R_R es semisimple, entonces por el Lema 2.2.67, R_R es un módulo pobre.
Si R_R no es semisimple, entonces en particular, R_R no es simple, es decir, existe un submódulo propio no trivial I_R de R_R.
En estas condiciones, supongamos, por contradicción, que R_R es inyectiva y tomemos un elemento $x \in I_R$ distinto de cero.
Así, el submódulo propio y cíclico xR de R_R es inyectivo: si xR no es isomorfo a R_R entonces xR es inyectivo, ya que R es un dominio PCI y si xR es isomorfo a R_R entonces xR es inyectivo, puesto que R_R lo es.
Además, observe que, dado que R_R es uniforme, xR es un submódulo esencial de R_R, es decir, R_R es una extensión esencial propia de xR y, por el teorema 2.2.78, xR no es inyectivo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, R_R no es inyectivo, en consecuencia, es pobre. $\square$

Corolario 4.1.3. *Si R es un dominio PCI, entonces R no es una utopía.*

Demostración: Pues R_R es un R-módulo pobre. $\square$

El siguiente teorema muestra que si R es un anillo artiniano, entonces Mod-R no es una utopía.

Teorema 4.1.4. *Si R es un anillo artiniano y J es su radical de Jacobson. Entonces el R-módulo cíclico $M = R/J$ es pobre.*

Demostración: Sea $xR \in In^{-1}(R/J)$ un módulo cíclico no vacío, y N_1 un submódulo simple de xR; tenga en cuenta que N_1 existe debido a que R es artiniano, por lo que también lo es xR. Existe un ideal maximal I de R tal que $N_1 \simeq R/I$. Está claro que $J \subseteq I$, por lo tanto, $R/J \supseteq R/I \backsimeq N_1$, es decir, M contiene una copia isomórfica de N_1. Como R/J es semisimple (dado que R/J es J-semisimple y artiniano), existe un submódulo B de R/J tal que $R/J = (R/I) \oplus B$.
Afirmamos que N_1 es xR-inyectivo. En efecto, sea A un submódulo de xR y homomorfismos $f : A \longrightarrow xR$, $g : A \longrightarrow N_1$ con f inyectiva. Consideremos los isomorfismos $\phi : N_1 \longrightarrow R/I$, $\phi^{-1} : R/I \longrightarrow N_1$ y los homomorfismos $i : R/I \longrightarrow R/J$, $\pi : R/J \longrightarrow R/I$, la inclusión y la proyección, respectivamente. Como $xR \in In^{-1}(R/J)$, existe el homomorfismo $j : xR \longrightarrow R/J$ tal que $j \circ f = i \circ \phi \circ g$, así, tomando h el homomorfismo $h : xR \longrightarrow N_1$ tal que $h = \phi^{-1} \circ \pi \circ j$, tenemos que $h \circ f = (\phi^{-1} \circ \pi \circ j) \circ f = \phi^{-1} \circ \pi \circ (j \circ f) = (\phi^{-1} \circ \pi) \circ (i \circ \phi \circ g) = (\phi^{-1} \circ \phi) \circ g = g$.
Lo podemos ver en el siguiente diagrama:

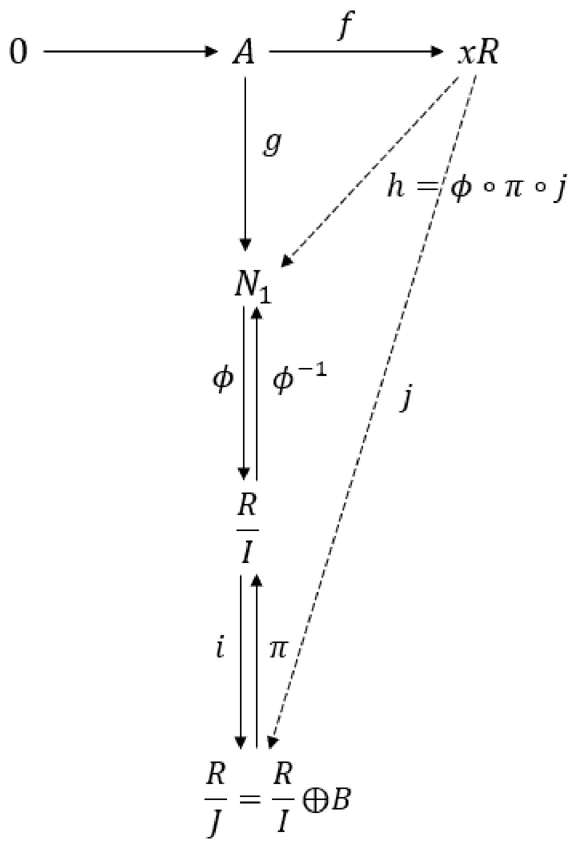

Figura 4.1: Diagrama de homomorfismos donde: $j \circ f = i \circ \phi \circ g$ y $h = \phi^{-1} \circ \pi \circ j$.

Por la proposición 2.2.56, N_1 es sumando directo de xR, es decir, existe un submódulo L_1 de xR tal que $xR = N_1 \oplus L_1$. Si $L_1 = 0$ entonces $xR = N_1 \backsimeq R/I \subseteq R/J$; entonces xR es semisimple. Si $L_1 \neq 0$ entonces vamos a repetir el procedimiento, es decir, tomemos un submódulo simple N_2 de L_1 y vamos a encontrar $L_2 \subseteq L_1$ tal que $L_1 = N_2 \oplus L_2$, y así sucesivamente. Nótese que estamos creando una cadena descendente $xR \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq ...$ y como xR es artiniano, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = L_{n+m}$, para todo número natural m, es decir, el proceso termina en un finito número de pasos. Por lo tanto, xR es semisimple. Como $xR \in In^{-1}(M)$ es cualquiera, M es pobre. $\square$

Vamos a introducir algunas definiciones para seguir buscando módulos pobres en el caso de que el anillo es un dominio hereditario y noetheriano.

Definición 4.1.5 (Anillo Primo)**.** Un anillo R es **primo** si dado dos elementos $a, b \in R$ tales que $aRb = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Definición 4.1.6 (Módulo Uniserial)**.** Un módulo es llamado **uniserial** si es artiniano, noetheriano y contiene una única serie de composiciones.

Definición 4.1.7 (Módulo de Cadena)**.** Un módulo M es un **módulo de cadena** si el conjunto $X = \{N \subseteq M; N \text{ es submódulo de } M\}$ es totalmente ordenado respecto a la inclusión.

Definición 4.1.8 (Módulo Uniserial Generalizado)**.** Un anillo R es llamado **uniserial generalizado** si cada R-módulo es una suma directa de submódulos de cadena.

***Ejemplo* 4.1.** El anillo $\mathbb{Z}$ es primo, hereditario y noetheriano. Si un $\mathbb{Z}$-módulo es de torsión y finitamente generado, entonces es un grupo abeliano finito. Estos grupos son suma directa de grupos cíclicos de órdenes de potencia de primos y estos son módulos uniseriales.

El Lema 4.1.9, es una generalización de esta observación.

Lema 4.1.9. *(a) (Lema 1 de [24]) Sea R un anillo noetheriano primo, hereditario. Todo R-módulo de torsión finitamente generado es suma directa de un número finito de módulos uniseriales;*

(b) (Lema 2 parte i de [26]) Si, en un R-módulo M, un elemento x es torsión, entonces xR es un submódulo de torsión con $ann_R(xR) \neq 0$;

Tenga en cuenta que un R-módulo uniserial contiene solo un submódulo simple, que es su único submódulo semisimple.

Proposición 4.1.10. *Sea R un dominio hereditario noetheriano y sea M el R-módulo semisimple que contiene exactamente una copia de cada R-módulo simple. Bajo estas condiciones, M es o pobre o inyectivo.*

Demostración: Supongamos que M no es inyectiva, en este caso, demostremos que M es pobre usando la proposición 2.2.63: Sea $xR \in In^{-1}(M)$; consideremos el homomorfismo sobreyectivo $\phi : R_R \longrightarrow xR$ tal que $\phi(a) = xa, \forall a \in R$. Así, $R_R/Ker(\phi) \simeq xR$. Si $Ker(\phi) = 0$ entonces $R_R \simeq xR$ y, según el criterio de Baer, M es inyectivo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Ker(\phi) \neq 0$ de donde concluimos que x es un elemento de torsión, así por el ítem b. del Lema 4.1.9, xR es un submódulo de torsión.

Teniendo en cuenta que todo dominio es un anillo primo, podemos aplicar el item a. del Lema 4.1.9, por lo tanto, xR es suma directa de un número finito de R-módulos uniseriales $U_1, ..., U_n$, es decir, $xR = U_1 \oplus ... \oplus U_n$. Probemos que U_i es simple, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$ y supongamos, por absurdo, que U_i no es simple. Tomemos el submódulo simple no vacío S de U_i, recuerde que S existe y es único ya que U_i es uniserial. Dado que S es un R- módulo simple, M contiene una copia de S, por lo que existe un homomorfismo módulos $g : S \longrightarrow M$ tal que $Im(g) \simeq S$, con, $Ker(g) = 0$. Como M es U_i-inyectivo, existe el homomorfismo de módulos $h : U_i \longrightarrow M$ tal que $g = h \circ i$, donde $i : S \longrightarrow U$, es la inclusión canónica. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & U_i \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Diagrama conmutativo de homomorfismos i, g y h

Como U_i; es uniserial o $Ker(h) = 0$ o $Ker(h) \supseteq S$. Si$Ker(h) \supseteq S$ entonces $g = h \circ i$ es el homomorfismo nulo, lo que contradice la hipótesis. Así, $Ker(h) = 0$ de donde se sigue que $U_i \simeq M$, por tanto, U_i es semisimple y como U_i es uniserial, $U_i = S$ es simple, una contradicción. Esta contradicción proviene del hecho de que asumimos que U_i no simple, entonces, U_i es simple y por lo tanto xR es semisimple. □

En el caso particular de la proposición anterior en el que R tiene solo un R-módulo simple M (a menos que sea isomorfismo), entonces M es o inyectivo o pobre.

Corolario 4.1.11. *Considerando las mismas condiciones de la proposición anterior, M es inyectivo si y solo si R es un V-anillo*

Demostración: $\Rightarrow$) Si M es inyectivo, entonces R es un V-anillo. En efecto, sea S un R-módulo simple, mostremos que S es inyectivo. Dados los R-módulos A, B y los homomorfismos de módulo $f : B \longrightarrow A$, $g : B \longrightarrow S$ con f inyectivo, considere el homomorfismo de inclusión $i : S \longrightarrow M$. Dado que M es inyectiva, existe el homomorfismo $j : A \longrightarrow M$ tal que $i \circ g = j \circ f$. Se puede ver en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[ddl, dashed, "j"] \\
& S \arrow[d, "i"'] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3: Diagrama conmutativo de homomorfismos f, g, i y j.

Consideremos el homomorfismo de proyección $\pi : M \longrightarrow S$, por lo tanto, existe el homomorfismo $h = \pi \circ j : A \longrightarrow S$ tal que $(\pi \circ j) \circ f = g$,

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, dashed, "j"] \\
& S \arrow[d, shift left, "i"] & \\
& M \arrow[u, dashed, shift left, "\pi"] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.4: Diagrama conmutativo de homomorfismos donde $h = \pi \circ j$.

entonces S es inyectiva, como S es cualquier módulo simple, R es un V-anillo.

$\Leftarrow$) Si R es un V-anillo, entonces, por la proposición 2.2.48, el R-módulo semisimple M, definido como en la proposición anterior, es inyectivo. $\square$

Corolario 4.1.12. *Sea R un dominio hereditario noetheriano. Si existe un R-módulo uniserial U no trivial y no simple, entonces el R-módulo M, definido como en la proposición 4.1.10, es un R-módulo pobre.*

Demostración: Basta con demostrar que M no es inyectivo. Supongamos, por absurdo, que M es inyectiva y tomemos el R-submódulo propio simple S de U (S existe porque U es uniserial, no trivial y no simple). Consideremos los homomorfismos de módulos $g : S \longrightarrow M$, $i : S \longrightarrow U$ tales que $Im(g) \simeq S$ e i es la inclusión. Como M es inyectiva, existe un homomorfismo de módulos $h : U \longrightarrow M$ tal que $g = h \circ i$, esquemáticamente tenemos lo siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & U_1 \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.5: Diagrama conmutativo de homomorfismos i, g y h.

Como U es uniserial, o $Ker(h) = 0$ o $Ker(h) \supseteq S$. Si $Ker(h) \supseteq S$ entonces $g = h \circ i$ es el homomorfismo nulo, lo que contradice la hipótesis. Así, $Ker(h) = 0$ de donde se sigue que $U \simeq M$, entonces U es semisimple y como U es uniserial concluimos que U es simple, lo cual es absurdo. Por lo tanto M no es inyectivo. $\square$

Mostraremos un ejemplo de la proposición 4.1.10:

***Ejemplo* 4.2.** Tomemos R $= \mathbb{Z}$. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, en particular, todo ideal es finitamente generado, es decir, $\mathbb{Z}$ es noetheriano, además, si I es un ideal de $\mathbb{Z}$, entonces el R-módulo I_R es un R-módulo libre, por lo que I_R es proyectivo, de lo que concluimos que $\mathbb{Z}$ es hereditario.

Afirmamos que todo $\mathbb{Z}$-módulo simple es isomorfo a $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$, para algún primo p. En efecto, sea S un $\mathbb{Z}$-módulo simple. S es cíclico, entonces existe un ideal $I = n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ tal que $S \simeq (\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_n$; si n no es primo, entonces $n = pq$, con $p, q \in Z - \{1\}$, por lo que $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$ son submódulos no triviales de S, lo que va en contra de la simplicidad de S, por lo que n es primo.

Tomemos M como en la proposición 4.1.10, del enunciado anterior sabemos que $M = \bigoplus_{p\ primo}(\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})) = \bigoplus_{p\ primo}\mathbb{Z}_p$. Probemos que M es pobre: sea $x\mathbb{Z} \in In^{-1}(M)$, sabemos que existen $p_1 ... . p_r$ primos distintos y $n_1, ..., n_r$ números naturales estrictamente positivos tales que $n = p_1^{n_1} ... p_r^{n_r}$ y $\mathbb{Z}_n = x\mathbb{Z}$, además, sabemos que dado un submódulo A de $x\mathbb{Z}$ y homomorfismo de módulos $f : A \longrightarrow x\mathbb{Z}$, $g : A \longrightarrow M$ como f es inyectiva, existe el homomorfismo $h : x\mathbb{Z} \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & x\mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.6: Diagrama conmutativo g, f y h.

Supongamos, por absurdo, que $x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ no es semisimple. Entonces existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $n_i \geq 2$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $n_1 \geq 2$. Nótese que $n/p_1 \in \mathbb{Z}$ ya que p_1^2 divide a n. Tomando $A = (n/p_1)\mathbb{Z}_n$, $g : A \longrightarrow M$ tal que $g(n/p_1) = 1_{\mathbb{Z}_{p_1}}$, y $f : (n/p_1)\mathbb{Z}_n \longrightarrow x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}n$ la inclusión canónica Bajo estas condiciones, tenemos que

$$1_{\mathbb{Z}_{p_1}} = g(\frac{n}{p_1}) = hf(\frac{n}{p_1}) = h(\frac{n}{p_1}) = \frac{n}{p_1}h(1) \tag{4.1}$$

Consideremos $\pi : \bigoplus_{p\ primo}\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p_1}$ la proyección habitual y consideremos $\pi(h(1)) \in \mathbb{Z}_{p_1}$. Por la ecuación 4.1, $(n/p_1)\pi(h(1)) = 1$, pero p_1 divide (n/p_1), entonces $1 = p_1(n/p_1^2)\pi(h(1)) = 0$, absurdo. Por lo tanto $x\mathbb{Z}$ es semisimple. Así, por la proposición 2.2.63, concluimos que M es pobre.

El $\mathbb{Z}$-módulo M también es un ejemplo de un módulo pobre tal que ningún submódulo propio es pobre. En efecto, sea N un submódulo propio de M, entonces existe

p un número primo tal que ningún submódulo de N es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{p^2}$, que no es semisimple; tenga en cuenta que $\mathbb{Z}_{p^2}$ tiene solo un submódulo no trivial, que incluso es simple, a saber, $p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq \mathbb{Z}_p$. Demostraremos que $\mathbb{Z}_{p^2} \in In^{-1}(N)$: Sea A un submódulo de $\mathbb{Z}_{p^2}$ y homomorfismos de módulos $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$, $g : A \longrightarrow N$ con f inyectiva.

Si A es uno de los submódulos triviales de $\mathbb{Z}_{p^2}$, entonces es trivial encontrar $h : \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.7: Diagrama conmutativo de homomorfismos f, g y h.

Si $A = p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq \mathbb{Z}_p$, entonces g es el homomorfismo nulo ya que, por hipótesis, ningún submódulo de N es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, por lo que basta con tomar h el homomorfismo nulo que conmuta el diagrama anterior.

Por lo tanto, $\mathbb{Z}_{p^2} \in In^{-1}(N)$, por lo tanto, N no es pobre.

***Ejemplo* 4.3.** Consideremos a R un dominio PCI.

Si R es semisimple entonces R es hereditario y noetheriano. Así, por el Teorema 2.2.99, en cualquier caso, R es hereditario y noetheriano.

En el conjunto de ideales maximales de R, definimos la relación $I \sim K$ si y sólo si $R/I \simeq R/K$, que obviamente es una relación de equivalencia. Sea $\mathbb{A}$ un conjunto de representantes de estas clases. Así, podemos escribir el R-módulo M, definido como en la proposición 4.1.10, como $M = \bigoplus_{I \in \mathbb{A}} R/I$.

Si existe un ideal I de $\mathbb{A}$ tal que $(R/I) \simeq R_R$ entonces $R_R \simeq R/I \subseteq M$, como M es semisimple, se sigue que R_R es semisimple, por lo que todo R-módulo es semisimple y M es pobre e inyectivo.

Si para todo ideal I de A, R/I no es isomorfo a R_R, entonces M es la suma de los R-módulos inyectivos y, por la proposición 2.2.49, es inyectivo.

Por tanto, si tomamos un dominio PCI tenemos un ejemplo donde M, definido como en la proposición 4.1.10, es inyectivo.

El último teorema que vamos a probar en esta sección es el siguiente:

Teorema 4.1.13. *Si R es un anillo no singular que tiene un R-módulo pobre no singular, entonces R es un anillo SI.*

Demostración: Sea R un anillo no singular que tiene un R-módulo pobre M no singular. Si N es un R-módulo singular, entonces $N \in In^{-1}(M)$. En efecto, sea un submódulo B de N y los homomorfismos de módulos $f : B \longrightarrow N$, $g : B \longrightarrow M$, con f inyectiva. Como N es singular, B también lo es, así, por la proposición 2.2.107, g es el homomorfismo nulo, entonces, basta con tomar el homomorfismo nulo $h : N \longrightarrow M$ que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g=0"'] & N \arrow[dl, dashed, "h=0"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.8: Diagrama conmutativo de homomorfismos nulos yf

Dado que M es pobre, concluimos que todo R-módulo singular es semisimple y por el teorema 2.2.113, R es un anillo SI. $\square$

4.2. Anillos Sin Clase Media

En la sección 2.2.5 se ha definido lo que significa que un anillo no tenga una clase media. De manera similar, si la clase de R-módulos simples de un anillo R no tiene clase media, se dirá que no tiene**clase media simple** Análogamente, definimos lo que quiere decir que el anillo R no tenga una clase media semisimple, una clase media proyectiva, etc.

Teorema 4.2.1. *Sea R un anillo tal que $J(R)$ es un ideal simple y esencial en R. Si $R/J(R)$ es semisimple, entonces R no tiene clase media. Además, $J(R)$ es un R-módulo pobre.*

Demostración: Sea M un R-módulo no inyectivo y sea xR un R-módulo cíclico tal que $xR \in In^{-1}(M)$. Como M no es inyectiva, xR no es isomorfo a R_R, es decir, existe un I ideal no vacío de R tal que $xR \simeq (R/I)$. Así, se sigue que $J(R) \subseteq I$ ya que I es no vacío y $J(R)$ es simple y esencial en R; luego, tenemos que:

$$\frac{\frac{R}{J(R)}}{\frac{I}{J(R)}} \simeq \frac{R}{I} \simeq xR.$$

Como R/J es semisimple, también lo es xR; así, por la proposición 2.2.63, M es pobre, es decir, R no tiene clase media. Como un anillo con unidad siempre contiene un ideal maximal, $J(R)$ es un ideal propio de R, es decir, $J(R)_R$ es un R-módulo propio y esencial de R_R; así, por el Teorema 2.2.78, $J(R)_R$ no es inyectivo y por lo tanto pobre. □

Veamos algunos ejemplos de familias que no tienen clase media:

***Ejemplo* 4.4.** Si R es un dominio PCI, entonces la familia de R- módulos no tiene clase media, por el teorema 4.1.2

***Ejemplo* 4.5.** Si R es un V-anillo, entonces la familia de R-módulos simples no tiene clase media, esto se da por la definición de V-anillo.

Para la siguiente proposición introduciremos la siguiente definición:

Definición 4.2.2 (Anillo Cuasi-Frobenius)**.** Un anillo inyectivo y noetheriano R se llama **anillo Quasi-Frobenius (QF)**.

Proposición 4.2.3. *Si un anillo R es QF, entonces todo R-módulo proyectivo es inyectivo.*

Demostración: Sea un anillo R que es QF.

Afirmamos que cada R-módulo libre es un R-módulo inyectivo. En efecto, cada R-módulo libre es una suma directa de copias de R. Como el anillo R es inyectivo tenemos que cada R-módulo libre es suma directa de submódulos inyectivos. Utilizando la hipótesis de que el anillo es noetheriano, podemos aplicar la proposición 2.2.49, de la que concluimos que todo R-módulo libre es inyectivo.

Así, si tomamos un R-módulo proyectivo P, tenemos que P es inyectivo ya que es una suma directa de un módulo libre y una suma directa de un R-módulo inyectivo es un R-módulo inyectivo, como vimos en 2.2.58. □

***Ejemplo* 4.6.** Por la proposición anterior tenemos que si R es un anillo QF, entonces la familia de R-módulos proyectivos no tiene clase media, ya que estos son inyectivos.

Definición 4.2.4. Un anillo R se llama **anillo de Frobenius** si R es Quasi-Frobenius y $Soc(R_R) \simeq (R/J)$.

En consecuencia, por definición y por la proposición 4.2.3, si R es un anillo de Frobenius, entonces la familia de R-módulos proyectivos no tiene clase media.

Definición 4.2.5 (Módulos Ortogonales)**.** Se dice que dos módulos M, N son ortogonales si no hay M_0, N_0 submódulos distintos de cero de M, N, respectivamente, de modo que M_0 y N_0 sean isomorfos.

Lema 4.2.6. *Sean un R-módulo proyectivo y semisimple M, un R-módulo semisimple B que es ortogonal al R-módulo M y un submódulo X de $E(B)$. Entonces $Hom(X, M) = 0$*

Demostración: Sean M, B y X como en el enunciado y sea $f \in Hom(X, M)$. Como M es semisimple, $f(X)$ es una suma directa de M, entonces, por el corolario

2.2.52, $f(X)$ también es proyectiva. Por la proposición 2.2.51, $f(X)$ es isomorfa a un sumando directo de X, es decir, $X = Y \oplus Ker(f)$ donde Y es isomorfa a $f(X)$.

Supongamos que $f(X \cap B) \neq 0$, entonces, por el mismo argumento que expusimos en el párrafo anterior, tenemos que $X \cap B$ es isomorfo a $f(X \cap B) \oplus [(Ker(f) \cap (X \cap B))]$ lo cual es una contradicción pues B y M son ortogonales. Por lo tanto, $f(X \cap B) = 0$, de donde se sigue que $X \cap B \subseteq Ker(f) \subseteq X$.

Como B es esencial en $E(B)$ y X es esencial en X, por la proposición 2.2.70, inciso (b), $X \cap B$ es esencial en X, entonces, por la proposición 2.2.70, inciso (a), $Ker(f)$ es esencial en X, entonces $Y = 0$, es decir, $X = Ker(f)$.

Teorema 4.2.7. *Si M es un módulo semisimple, pobre y proyectivo, entonces cualquier módulo semisimple B, que sea ortogonal a M, es inyectivo.*

Demostración: Probemos que $E(B) = B$, entonces, como $E(B)$ es inyectivo, B también lo es.

Tomemos $X \subseteq E(B)$. Por el lema 4.2.6, $Hom(X, M) = 0$ entonces, como X es cualquiera, M es $E(B)$ inyectiva. Nótese que si M es $E(B)$ inyectivo entonces $E(B)$ es semisimple porque M es pobre. En consecuencia, por el Teorema 2.2.78, $E(B)$ no tiene submódulo propio esencial, por lo que $E(B) = B$. □

Corolario 4.2.8. *Si R es un anillo tal que hay un R-módulo simple proyectivo y pobre M, entonces R es un VG-anillo.*

Demostración: Sea R un anillo tal que exista un R-módulo simple proyectivo y pobre M y sea B un R-módulo simple. Si B es isomorfo a M, entonces B es proyectivo ya que, por suposición, M lo es. Si B no es isomorfo a M entonces, por la simplicidad de B y M, B es ortogonal a M, entonces podemos aplicar el teorema 4.2.7, donde tenemos que B es inyectivo. Por lo tanto, R es un VG-anillo. □

Corolario 4.2.9. *Sea R un anillo que no es semisimple. Si hay un R-módulo simple, proyectivo y pobre $M \neq 0$, entonces*

(a) Toda suma directa de R-módulos simples e inyectivos es un R-módulo inyectivo.

(b) R no tiene clase media simple.

Demostración. (a) Sea $B = \bigoplus_{i \in \lambda} S_i$ una suma directa de R-módulos simples e inyectivos. Como S_i es inyectivo para todo $i \in \lambda$ y el anillo R no es semisimple, no existe $i_0 \in \lambda$ tal que S_{i_0} es no vacío y sea isomorfo a M ya que, si existiera tendríamos un R-módulo S_{i_0} inyectivo y pobre, por lo tanto, el anillo R es semisimple, lo cual es una contradicción.

Así, por la simplicidad de M, el R-módulo B, además de semisimple, es ortogonal a M. Por lo tanto, por el teorema 4.2.7, B es un R-módulo inyectivo.

(b) Se sigue inmediatamente del corolario 4.2.8.

□

Para el siguiente teorema, necesitaremos la siguiente definición y el siguiente resultado:

Definición 4.2.10 (Anillo de Kasch)**.** Un anillo R se llama **anillo de Kasch** si todo R-módulo simple es isomorfo a un ideal de R.

Proposición 4.2.11. *Si R es un anillo y A es un submódulo propio de R_R, entonces existe B submódulo maximal de R_R tal que $A \subseteq B$.*

Demostración: Sean un anillo R y un submódulo propio A de R_R. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de submódulos propios N de R_R con $A \subseteq N$; parcialmente ordenado por inclusión, es decir, $\mathcal{F} = \{N \text{ submódulo de } R_R; A \subseteq N \text{ y} 1 \notin R_R\}$. Tenga en cuenta que esta familia no es vacía porque el R-módulo A pertenece a $\mathcal{F}$, además, cada subfamilia completamente ordenada tiene un elemento máximo. En efecto, sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una subfamilia completamente ordenada de $\mathcal{F}$, por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} N_i$ es tal que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} N_i$; y $1 \notin \bigcup_{i\in I} N_i$, por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} N_i$; es un elemento maximal. Así, podemos aplicar el lema de Zorn, del cual concluimos que existe un elemento maximal B de la familia $\mathcal{F}$.

Lema 4.2.12. *Si todo ideal maximal $I \subseteq R$ es sumando directo del anillo R, entonces el anillo R es semisimple.*

Demostración: Supongamos que todo ideal maximal es sumando directo y tomemos A submódulo de R_R, por la proposición 2.2.73, existe B submódulo de R_R tal que $A \oplus B$ es esencial en R_R. Si $A \oplus B \neq R_R$ entonces, por la proposición 4.2.11, existe N submódulo maximal de R_R tal que $A \oplus B \subseteq N$. Como todo submódulo maximal es sumando directo, existe $E \neq 0$ tal que $N \oplus E = R_R$ en particular, $N \cap E = 0$ y como $A \oplus B \subseteq N$, $(A \oplus B) \cap E = 0$ lo que contradice el hecho de que $A \oplus B$ es esencial en R_R. Por lo tanto $A \oplus B = R_R$.

Teorema 4.2.13. *Sea R un anillo de Kasch. Si existe un módulo R no vacío, semisimple, pobre y proyectivo, entonces R es semisimple.*

Demostración: Tomemos R como en el enunciado. Para probar que R es semisimple, por el lema 4.2.12, basta con mostrar que todo ideal maximal es sumando directo.

Sea I un ideal maximal de R. Por el corolario 4.1.11 o R/I es inyectivo o R/I es proyectivo. Si R/I es proyectivo entonces podemos considerar el homomorfismo proyección $\pi : R \longrightarrow R/I$, entonces, R/I es imagen del R-módulo R_R por un epimorfismo, por lo tanto, por la proposición 2.2.51 inciso (b), R/I es isomorfo a un sumando directo de R_R, es decir, existe T submódulo de R_R tal que $R/I \simeq T$ y $T \oplus Ker(\pi) = T \oplus I = R_R$. En el caso de que R/I sea proyectivo, demostramos que I es un sumando directo de R_R.

Sea R/I inyectivo. Como R es un anillo de Kasch, existe S submódulo simple de R_R tal que R/I es isomorfo a S. Sabemos que S es inyectivo porque R/I lo es, así que por el corolario 2.2.57, S es sumando directo de R_R. Como R_R es un R-módulo libre, podemos aplicar la proposición 2.2.51 inciso (c), de lo cual concluimos que S es proyectivo, por lo tanto, R/I es proyectivo y, en este caso, ya hemos probado que I es sumando directo de R_R. □

4.3. Anillos que son Utopías

De manera similar a la sección anterior, un anillo R es una **utopía simple** si la clase $\{M \in Mod - R; M\ es\ simple\}$ es una utopía. De manera similar definimos para una clase de módulos **proyectivos**, **artinianos**, etc.

***Ejemplo* 4.7.** Sea R un V-anillo que no es semisimple y sea un R-módulo simple S. Por definición, el R-módulo S es inyectivo, por lo tanto $R \in In^{-1}(S)$. Como el anillo R no es semisimple, tenemos que el R-módulo S no es pobre. Dado que el R-módulo S es un R-módulo simple cualquiera, concluimos que el anillo R es una utopía simple.

***Ejemplo* 4.8.** Sea R un anillo QF que no es semisimple y sea un R-módulo proyectivo P. De la proposición 4.2.3, sabemos que el R-módulo P es inyectivo, por lo tanto $R \in In^{-1}(P)$. Como el anillo R no es semisimple, tenemos que el R-módulo P no es pobre. Como el R-módulo P es cualquier R-módulo proyectivo, concluimos que el anillo R es una utopía proyectiva.

***Ejemplo* 4.9.** Si R es un dominio PCI que no es un anillo con división, entonces R es una utopía singular.

En efecto, probaremos que si existe un R-módulo M singular y pobre entonces R es un anillo con división.

Ya sabemos que todo dominio PCI es SI (Teorema 2.2.114), por lo tanto, el R-módulo singular M es inyectivo, por lo tanto, $R \in In^{-1}(M)$ y como M es pobre, concluimos que el anillo R es semisimple .

En estas condiciones, demostremos que R es un anillo con división: tomemos un elemento no nulo $x \in R$. Como todo anillo semisimple es artiniano, la cadena descendente $xR \supseteq x^2R \supseteq ... \supseteq x^nR \supseteq ...$ se estaciona, es decir, existe un número natural n tal que para todo número natural $k \geq n$, tenemos $x^nR = x^kR$, en particular, $x^nR = x^{n+1}R$, entonces existe un elemento $r \in R$ tal que $x^n = x^{n+1}r$ por lo tanto, $x^n(1 - xr) = 0$ y como el anillo R es un dominio y x es un elemento no nulo, tenemos que $xr = 1$. Como el elemento x es cualquiera, tenemos que el dominio R es un anillo con división.

Teorema 4.3.1. *Sea un anillo R tal que existen subanillos $R_1, R_2 \subset R$ con $R = R_1 \oplus R_2$. Bajo estas condiciones, si M es un R-módulo pobre entonces, para $i \in \{1, 2\}$ se tiene que MR_i es un R_i-módulo pobre. Por otro lado, si R_2 no es semisimple, entonces el R-módulo MR_1 no es pobre.*

Demostración. Sea un anillo R y un R-módulo $M = MR$ como en el enunciado.

Mostraremos que $M_1 = MR_1$ es un R_1-módulo pobre. El mismo argumento prueba que MR_2 es un R_2-módulo pobre.
Sea un R_1-módulo cíclico $N \in In^{-1}(M_1)$.

Consideremos la operación $\blacklozenge : N \times R \longrightarrow N$ tal que, para todo $n \in N$ para todo $(r_1 + r_2) \in R$, se tiene que $n\blacklozenge(r_1 + r_2) = nr_1$.

Tenga en cuenta que con la operación definida anteriormente, N es un R-módulo. Lo denotaremos por N_R. Probaremos que N_R está en el dominio de inyectividad de M.

Sea A un submódulo de N_R y consideremos un homomorfismo inyector $f : A \longrightarrow N_R$. Sea un homomorfismo $g : A \longrightarrow M$. Esquemáticamente tenemos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N_R \\ & M & \end{tikzcd}$$

Figura 4.9: Diagrama de homomorfismos f y g.

Tenga en cuenta que $g(A) \subseteq M_1$, porque si $a \in A$, entonces $g(a) = g(a1_R) = g(a(1_{R_1} + 1_{R_2})) = g(a1_{R_1}) = g(a)1_{R_1} \in M_1$. Análogamente, $f(A) \subseteq N$.

Además, restringiendo los escalares, podemos considerar g y f como R_1-homomorfismos. Note que $A \subseteq N$ también hereda una estructura de R_1-módulo natural, tenemos el siguiente diagrama de R_1-módulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ & M_1 & \end{tikzcd}$$

Figura 4.10: Diagrama de homomorfismos restringidos f y g.

Como $N \in In^{-1}(M_1)$, existe un R_1-homomorfismo $h : N \longrightarrow M_1 \subseteq M$ tal que el diagrama anterior conmuta.

Afirmamos que h es también un R-homomorfismo. En efecto, si $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ y $n \in N$ entonces $h(n(r_1 + r_2)) = h(r_1 n) = r_1 h(n) = r_1 h(n) + r_2 h(n)$. Tenga en cuenta que $r_2 h(n) = 0$ pues $r_2 \in R_2$ y $h(n) \in M_1$.

Por lo tanto, $N_R \in In^{-1}(M)$, luego, es un R-módulo semisimple. Como los submódulos de N_R son los mismos que los de N, tenemos que N es un R_1-módulo semisimple. Con esto concluye la primera parte del teorema.

Ahora vamos a demostrar que si $M_1 = MR_1$ es pobre como R-módulo, entonces R_2 es semisimple.

Nótese que, con la operación $\Diamond : R_2 \times R \longrightarrow R_2$ tal que, para todo $r \in R_2$ y para todo $(r_1 + r_2) \in R$, se tiene $r \Diamond (r_1 + r_2) = rr_2$. Podemos considerar R_2 con estructura de R-módulo.

Sea un submódulo $S \subseteq R_2$ y $g : S \longrightarrow M_1$ un homomorfismo. Si $s \in S$ entonces $g(s) = g(s1_R) = g(s(1_{R_1} + 1_{R_2})) = g(s1_{R_2}) = g(s)1_{R_2} = 0$ ya que $g(s) \in M_1$. Como s es cualquier elemento de S, tenemos que $g = 0$. Así, para cualquier homomorfismo de R-módulos $f : S \longrightarrow R_2$ inyectivo, tomando el homomorfismo nulo: $h : R_2 \longrightarrow M_1$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & R_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & M_1 &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.11: Diagrama conmutativo de homomorfismos f, g y h.

Luego, $R_2 \subseteq In^{-1}(M_1)$.

Dado que M_1 es pobre, R_2 es un R-módulo semisimple.

Ya hemos visto que los submódulos de R_2 como R_2-módulo y como R-módulo coinciden, por lo que R_2 es un R_2-módulo semisimple.

Teorema 4.3.2. *Si R es un anillo y R_1, S_1 son subanillos de R tales que $R = R_1 \oplus S_1$, $R_1 \simeq R$ y S_1 no es semisimples. Entonces que el anillo R es una utopía artiniana.*

Demostración. Sea $M \neq 0$ un R - módulo pobre, para demostrar que M no es artiniano, construyamos una cadena descendente no estacionaria en M.

Por el Teorema 4.3.1, $M_1 = MR_1 \neq 0$ es un R_1-módulo pobre que no es un R-módulo pobre. Por lo tanto, M_1 es un R-submódulo no vacío propio de M.

Como $R_1 \simeq R$, existen subanillos R_2, S_2 de R_1 tales que $R_1 = R_2 \oplus S_2$, $R_2 \simeq R_1$ y S_2 no es semisimple. Repitiendo el argumento anterior, tenemos que existe un R-módulo no vacío, $M_2 = M_1R_2$, tal que M_2 es un submódulo propio de M_1 y M_2 es un R_2-módulo pobre.

Inductivamente tenemos la cadena decreciente $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que no es estacionaria. $\square$

***Ejemplo* 4.10.** Consideremos un campo F y sea el anillo sea $R = \prod_{i\in\mathbb{N}} F_i$; donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales y, para todo $i \in \mathbb{N}$, $F_i = F$. Es fácil ver que R no es artiniano y que $R \simeq R \oplus R$.

Así, nos encontramos en las hipótesis del Teorema 4.3.2, de las que podemos concluir que el anillo R es una utopía artiniana.

Tenga en cuenta que, en lugar de tomar el conjunto de números naturales, podríamos haber tomado cualquier conjunto infinito de índices. En cualquier caso, tendríamos satisfechas las hipótesis del Teorema 4.3.2.

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como hemos observado, en el Capítulo I de este trabajo, se muestra un problema general en el cual nos preguntamos ¿es posible realizar una descripción y análisis de los módulos pobres a partir de los dominios de inyectividad? La respuesta a este problema es sí, esto podemos apreciarlo directamente de la definición de dominios de inyectividad y posteriormente en los métodos/teoremas que nos garantizan cuando un módulo es pobre (estos teoremas están relacionados con los dominios de inyectividad).

También en este trabajo mostramos problemas específicos:

PE1. ¿Existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres?

PE2. ¿Existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres?

Las respuestas a estos problemas la encontramos en el Capítulo IV.

- En relación con el PE1, el Teorema 4.1.4 nos dice que si tenemos un anillo artiniano R entonces el R-módulo cíclico R/J es pobre, donde J es el radical de Jacobson de R.

  También, en el Teorema 4.3.2 vemos que si tenemos un anillo que se puede expresar como la suma directa de dos de sus subanillos, donde uno de estos es isomorfo al anillo y el otro subanillo es semisimple, entonces el anillo es una utopía artiniana (esto es, la clase de módulos artinianos forman una utopía).

- Respecto al PE2 podemos señalar que si existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres, pero en un caso particular, teniendo en cuenta más condiciones, esto se da en la Proposición 4.1.10 en la cual podemos notar que si tenemos un anillo primo, hereditario y noetheriano, además un módulo semisimple bajo este anillo que contiene solo una copia de cada módulo simple del anillo, entonces el módulo es o pobre o inyectivo.

  En el Corolario 4.1.12 observamos que si existe un módulo uniserial, no trivial y no simple bajo un anillo primo, hereditario y noetheriano, entonces el módulo semisimple bajo este anillo que contiene solo una copia de cada módulo simple del anillo es pobre.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

De acuerdo a lo desarrollado podemos concluir lo siguiente:

- Hay anillos que no poseen clase media, más aún, estos solo poseen módulos pobres, lo que implica que no son una utopía. Esto se da cuando se consideran dominios PCI.
- Un módulo es o pobre o inyectivo si este está bajo un dominio hereditario, noetheriano y se considera que el módulo contiene exactamente una copia de cada módulo simple del anillo. En un caso particular, si se considera la existencia de un módulo uniserial no simple y no trivial, el módulo será pobre.
- Si un anillo es QF o de Frobenius y todos los módulos bajo este anillo son proyectivos, entonces este no posee clase media.
- Podemos garantizar bajo ciertas hipótesis que un anillo es una utopía artiniana/singular; sin embargo, no tenemos un resultado similar para utopías noetherianas.

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

Según lo realizado en este trabajo, se recomienda lo siguiente:

- Si bien en este trabajo se consideraron una cierta variedad de anillos, hay muchos más con los que no se ha trabajado como, por ejemplo: anillo semiperfecto, anillo semiprimo, módulos SSC, etc. Para próximas investigaciones se recomienda considerar este tipo de anillos y responder a las mismas preguntas planteadas.
- Se trabajó con anillos que no poseen clase media y que son utopía. Se recomienda analizar que ocurre con los anillos que poseen clase indigente.
- Se recomienda profundizar en las utopías noetherianas y obtener así condiciones bajo las cuales un anillo será una utopía noetheriana.
- En el caso general, cuando se tiene un anillo noetheriano, se debería estudiar condiciones más débiles que las ya formuladas que impliquen módulos pobres.

CAPÍTULO VIII

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alahmadi AN, Alkan M y López-Permouth S. *Poor modules: the oppositive of injectivity.* Glasgow Mathematical Journal. 2010; volumen (52): p.7-17

[2] Alizade R, Büyükaşik E y López-Permouth S. *Poor modules with no proper poor direct summands.* Journal of Algebra. 2018; volumen (502): p. 24-44

[3] Anderson FW, Fuller KR. *Rings and categories of modules*, New-York: Springer-Verlag, 1974.

[4] Arias F. *El proyecto de investigación: Introducción a la investigación científica.* Caracas, Venezuela: Editorial Episteme, C.A., 5ta ed., 2006.

[5] Boyle A. *Hereditary QI rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 115–120.

[6] Boyle A, Goodearl K.*Rings over which certain modules are injective*, Pacific J. Math. 58 (1975), 43–53.

[7] Damiano R.*A right PCI ring is right noetherian.* Vol 77. American Mathematical Society, , 1979, p.11-14.

[8] Demirci YM, Türkmen BN y Türkmen E. *Rings with modules having a restricted injectivity domain.* São Paulo Journal of Mathematical Sciences. 2020: p. 312-326

[9] Dinh Van H, Smith P, Wisbauer R. *A note on GV-modules with Krull dimension*, Glasgow Math. J. 32(3) (1990), 389–390.

[10] Dung N, Huynh DV, Smith PF, Wisbauer R. *Extending modules.* Pitman RN mathematics Longman, Harlow, UK 313. 1994.

[11] Faith C. *On hereditary rings and Boyle's conjecture*, Arch. Math. (Basel) 27 (1976), 113–119.

[12] Goodearl K. *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1976.

[13] Goodearl K. *Singular torsion and the splitting properties.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, Memoirs of the AMS, Number 124. 1972.

[14] Goodearl K, Warfield R, Jr. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings Second Edition*,London Mathematical Society Student Texts 61, Cambridge University Press, 2004.

[15] Hazewinkel M, Gubareni N, Kanchenko V.*Algebras, Rings and Modules*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2004.

[16] Hernández R, Fernández C, Bautista M. *Metodología de la investigación*. 6ta ed. México D.F.: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. DE C.V.2014.

[17] Lambek J. *Lectures in Rings and Modules Third Edition*.New York: Chelsea Publishing Company. 1986.

[18] Martins F, Palella S. *Metodología de la Investigación Cuantitativa*. 3ra ed. Caracas, Venezuela: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (FEDUPEL). 2012.

[19] Michler G, Villamayor O. *On rings whose simpe modules are injective*,J. Algebra 25 (1973). p.185–201.

[20] Osofsky BL, Smith PF. *Cyclic Modules Whose Quotients Have All Complement Submodules Direct Summands*. Journal of Algebra, volume 139, 1991, p.342-354.

[21] Polcino M, F.C. *Anéis e Módulos*, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.

[22] Rotman JJ. *Advanced Modern Algebra*. 2da ed. Vol 114. Graduate Studies in Mathematics. Américan Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[23] Santos H.S. *Injetividade e Módulos Pobres*. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

[24] Singh S. *Modules over hereditary Noetherian prime rings*, Can. J. Math. 27, 1975, p.867–883.

[25] Singh S. *Modules over hereditary Noetherian prime rings, II*. Can. J. Math. 28, 1976, p.73–82.

[26] Singh S. *Quasi-injective y quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings*, Can. J. Math. 26 (1974), 1173–1185.

ANEXOS

7.1. Matriz de Categorización

Problema de investigación	**Preguntas de investigación**	**Objetivo general**	**Objetivos específicos**	**Categorías**	**Subcategorías**
¿Es posible realizar una descripción y análisis de los Módulos Pobres a partir de los dominios de inyectividad?	P1: ¿Existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres?	Realizar una descripción y análisis de los Módulos pobres a partir de los dominios de inyectividad.	OE1. Mostrar que existe una relación entre los anillos artinianos y los módulos pobres.	Módulos pobres.	▪ R-Módulos semisimples ▪ Anillos Artinianos y Noetherianos.
	P2: ¿Existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres?		OE2. Mostrar que existe una relación entre los anillos noetherianos y los módulos pobres.	Dominios de inyectividad.	▪ R-Módulos inyectivos ▪ Envolventes Inyectivos.

Cuadro VII.1: Matriz de categorización apriorística.