UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“REPAGO DE DEUDAS CON CAPITALIZACIÓN CONTINUA”

AUTOR: Walter Zans Arimana

PERIODO DE EJECUCIÓN: DEL 01/02/2022 AL 31/01/2023

Resolución de aprobación 153-22-R

Callao, 2023

PERÚ

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

El presente trabajo de investigación abordó el problema del repago de deudas con una tasa nominal que se capitaliza en forma instantánea. Para lograr fórmulas conducentes al cálculo de las respectivas cuotas, se emplearon los factores de la conversión continua. En cuanto a la metodología, la investigación fue aplicada, de enfoque cuantitativo, con diseño no experimental y transversal. Los resultados indican que las fórmulas así logradas, permiten en efecto calcular cuotas constantes y variables, con tasas nominales que se capitalizan instantáneamente.

Palabras clave: repago de deudas, conversión continua.

ABSTRACT

The present research paper addressed the problem of debt repayment with a nominal rate that is capitalized instantaneously. To achieve formulas leading to the calculation of the respective quotas, continuous conversion factors were used. Regarding the methodology, the research was applied, with a quantitative approach, with a non-experimental and cross-sectional design. The results indicate that the formulas thus achieved allow in effect to calculate constant and variable quotas, with nominal rates that are capitalized instantaneously.

Keywords: debt repayment, continuous conversion.

.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación, “Repago de deudas con capitalización continua” tuvo como objetivo principal la obtención de fórmulas que permitan pagar deudas, en lo que se refiere al cálculo de cuotas y de valores actuales, empleando tasas nominales capitalizables en forma continua o instantánea. Para ello se recurrió al número inconmensurable épsilon, el cual se deriva del desarrollo en serie del binomio de Newton.

Este trabajo busca ser un material de consulta útil para un mayor conocimiento del cálculo financiero.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

La matemática financiera tiene como concepto angular el valor del dinero en el tiempo. Así, la diferencia entre el provecho que puede obtenerse de una cantidad presente, en comparación con el provecho que se podría obtener en el futuro de esa misma cantidad, se concreta en una tasa que puede ser de interés o de descuento. Dentro de todas las aplicaciones de la matemática financiera, una de las más utilizadas es la determinación de métodos de repago de deudas.

En toda la literatura disponible, es posible encontrar solamente fórmulas de repago de deudas que emplean una tasa de interés que resulta de una capitalización discreta. Con ella, una tasa nominal se capitaliza en períodos conocidos que pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales, diarios o aun horarios. En cambio, ningún texto conocido aborda el diseño de métodos de repago que empleen capitalización continua o instantánea. Es un vacío de conocimiento que es necesario llenar.

1.2. Formulación del problema

Se trata de buscar herramientas matemáticas que lleven a la construcción de fórmulas que permitan repagar deudas con una tasa continua, demostrando tales características con las respectivas tablas de amortización y de retorno.

Problema general

¿Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con una tasa nominal que se capitaliza en forma continua?

Problemas específicos

Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con pagos vencidos y tasa continua?

¿Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con pagos adelantados y tasa continua?

1.3 Objetivos

Objetivo general

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Objetivos específicos

- Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas vencidas.
- Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas adelantadas.

1.4. Limitantes de la investigación

Solamente se consideran la aplicación de la tasa continua al repago de deudas y no a otras aplicaciones importantes de la matemática financiera, como la evaluación de proyectos.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

A nivel nacional, no es posible encontrar un trabajo similar. Es habitual que los autores de textos de matemática financiera dejen de lado la conversión continua, o la desarrollen mínimamente, diciendo que tales aplicaciones son propias de la ingeniería económica.

2.2 Bases teóricas

Los principios que servirán de fundamento de la investigación son los siguientes (Haeussler, et al.,1997):

Los números reales consisten en todos los números decimales.

Propiedad transitiva de la igualdad.

Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación.

Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación.

2.3 Conceptual

La matemática financiera emplea, fundamentalmente, las características de las anualidades. Se sabe que “una anualidad es una secuencia periódica de pagos, aun cuando el periodo de pago sea diferente de un año” (Allen, 1995).

Igualmente, la matemática financiera emplea los fundamentos del interés compuesto. “Cuando el cobro del interés para cualquier periodo de interés se basa en el monto principal restante más cualquier interés acumulado que se carga al principio de ese periodo, se dice que el interés es compuesto" (DeGarmo, 1997).

De la misma manera, la matemática financiera emplea las características de las progresiones.

Definición de términos básicos

Repago: método que permite determinar la forma en que se puede devolver un capital ajeno y, al mismo tiempo, remunerarlo con un rendimiento financiero.

Tasa: relación entre el capital ajeno y el interés que lo remunera. Puede expresarse como porcentaje, cociente o tanto por uno.

Capital o Principal: es el dinero ajeno que se entrega o recibe en una operación de crédito.

Monto o Valor Futuro: cantidad que se debe entregar al prestamista al final del plazo pactado.

Renta, pago o flujo: es la cantidad que se entrega periódicamente por parte del deudor o prestatario, en esquema de pago con cuotas.

Progresión: secuencia de términos que cambian de acuerdo con una ley matemática.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis general

- El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua.

Hipótesis específicas

- El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas.
- El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.

3.2 Definición conceptual de las variables

Variable Independiente:

- Empleo del número épsilon y de las progresiones

Variable Dependiente:

- Fórmulas para repagar deudas con una tasa continua

3.3 Operacionalización de las variables

Variable Independiente

VARIABLE	DIMENSIÓN	INDICADOR
Empleo del número épsilon y de las progresiones	Límite del factor de capitalización	Factores
	Razón constante de incremento o disminución	Factores

Variable Dependiente

VARIABLE	DIMENSIÓN	INDICADOR
Fórmulas para repagar deudas con una tasa continua	Repago con cuotas vencidas	Tablas de retorno y amortización
	Repago con cuotas adelantadas	Tablas de retorno y amortización

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de la investigación

La investigación es descriptiva y transversal. El diseño es experimental.

4.2 Método de investigación

El método es científico, con enfoque cuantitativo.

4.3 Población y muestra

La población a ser empleada en el presente estudio, está constituida por los métodos de repago conocidos.
La muestra es censal porque está conformada por los métodos de repago conocidos.

4.4 Lugar del estudio

Callao.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Se emplearon diagramas de flujo.
También se usaron formularios físicos y hojas de cálculo.

4.6 Plan de trabajo de campo

Por tratarse de matemática aplicada, no hubo trabajo de campo.

4.7 Análisis y procesamiento de datos

Se empleó hoja de cálculo.

Se empleó gráficos de barras y el coeficiente de correlación de Pearson.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

El repago de deudas es el proceso por el cual se devuelve un capital ajeno y se pagan los respectivos intereses. Puede darse a interés simple y a interés compuesto. La simbología que se emplea es la siguiente:

P = Capital o Principal. También Valor Actual o Valor Presente.
R = Pago, renta o flujo. También cuota.
S = Monto o valor futuro
i = Tasa de interés
n = Horizonte temporal o plazo. También número de cuotas.
(1+in) = Factor de acumulación a interés simple
1/(1+in) = Factor de actualización a interés simple
FSC = Factor simple de capitalización
FSA = Factor simple de actualización
FAS = Factor de actualización de la serie
FRC = Factor de recuperación del capital

A interés simple, se entiende que solamente el capital genera interés. La tasa se aplica solamente sobre el capital, o lo que queda de él. Esto se resume en la regla que dice que, en el interés simple, el interés periódico nunca se capitaliza.

Cuando el repago se efectúa con una sola entrega de dinero, el cálculo es sencillo pues basta con determinar el Monto a pagar. De la siguiente r

S = P (1+in)

Cuando el repago se efectúa con varias cuotas, se acostumbra emplear el concepto de valor actual para calcular la cuota constante. Para el efecto se recurre a la conocida regla que dice lo siguiente:

El crédito, deuda, capital o principal, es igual a la suma de los valores actuales de las cuotas.

Por tanto, si se trata de n cuotas constantes de importe R para devolver y remunerar un crédito de importe P:

$$P = R\,[1/(1+i)] + R\,[1/(1+2i)] + R\,[1/(1+3i)] + \ldots + R\,[1/(1+in)]$$

Si se desea pagar una deuda de S/ 25,000 con tres cuotas mensuales constantes y tasa mensual simple 2% se tendría lo siguiente:

$$25{,}000 = R\,(1/1.02) + R\,(1/1.04) + R\,(1/1.06)$$
$$25{,}000 = R\,(2.8853268448)$$
$$R = 8{,}664.53$$

Esto se explica así:

$$8{,}494.64\,(1.02) = 8{,}664.53$$
$$8{,}331.28\,(1.04) = 8{,}664.53$$
$$\underline{8{,}174.08}\,(1.06) = 8{,}664.53$$
$$25{,}000.00$$

El proceso ha permitido separar el capital S/ 25,000 en tres capitales parciales diferentes que, al recibir cada uno un factor de acumulación a interés simple según su propio plazo, han producido un monto que es constante y que no es otra cosa que la cuota calculada de S/ 8,664.53.

Este procedimiento, si bien es perfectamente entendible, no permite elaborar una tabla de amortización. Por eso algunos autores proponen emplear la fórmula del fondo a interés simple para, igualándola con el monto a interés simple, para obtener una cuota constante. De la siguiente manera:

$$P\,(1+in) = \frac{Rn\,[\,2 + (n-1)\,i\,]}{2}$$

Con los datos anteriores, el cálculo sería el siguiente:

$$25{,}000\,(1+0.02 \times 3) = \frac{R\,(03)\,[\,2 + (3 - 1)\,0.02\,]}{2}$$

Operando:

R = 8,366.14

En el interés compuesto, se emplea el Factor Singular de Capitalización (FSC) que tiene la forma $(1+i)^{n}$. De aquí se despeja el Factor Singular de Actualización (FSA) que tiene la forma $(1+i)^{-n}$.

En el caso anterior, el crédito de S/ 25,000 a pagar en tres cuotas constantes llevaría al siguiente cálculo:

$25{,}000 = R\,(1.02) + R\,(1.02)^{-2} + R\,(1.02)^{-3}$

25,000 = R (0.94232233454)

R = 8,668.87

Aquí sí es posible hacer una tabla de retorno y también una tabla de amortización.

Tabla N° 1 Retorno método francés

TABLA DE RETORNO					
Mes	Deuda inicial	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago	Deuda final
1	25,000.00	1.02	25,500.00	8,668.87	16,831.13
2	16,831.13	1.02	17,167.75	8,668.87	8,498.88
3	8,498.88	1.02	8,668.86	8,668.87	-0.01

Elaboración propia

Tabla N° 2 Amortización método francés

TABLA DE AMORTIZACIÓN					
Mes	Deuda inicial	Tasa mensual	Interés mensual devengado y pagado	Amortización	Deuda final
1	25,000.00	0.02	500.00	8,168.87	16,831.13
2	16,831.13	0.02	336.62	8,332.25	8,498.88
3	8,498.88	0.02	169.98	8,498.89	-0.01

Elaboración propia

Ahora bien; el FSC tiene una forma de presentación previa que es la siguiente:

$(1+j/m)^n$

En donde j es la tasa nominal (usualmente anual), m es el número de conversiones o capitalizaciones anuales y n es el número de períodos capitalizables contenido en el plazo u horizonte temporal.

Por ejemplo, si **j** es la tasa nominal anual y es capitalizable (convertible) mensualmente, **m** tendrá valor 12 y por lo tanto **j/m** será la tasa proporcional, la tasa mensual compuesta base, y **n** será el número de meses de todo el plazo.

Igualmente si **j** es la tasa nominal semestral y es capitalizable trimestralmente, **m** tendrá valor 2 (en un semestre hay dos trimestres), y **n** indicará el total de trimestres de todo el plazo.

En resumen, **j /m** indica la tasa proporcional, es decir la tasa del período básico o mínimo capitalizable, y **n** indica el total de esos períodos capitalizables. Es decir, **n** indica el total de períodos a que se refiere el cociente **j /m**. ¡Coherencia entre tasa y tiempo! ¡Coherencia entre **j /m** y **n** !

Pero el total de períodos **n** se puede expresar también como el producto de dos elementos **mn**. Aquí **m** es la frecuencia de conversión de la tasa nominal **j**, ya lo sabemos. Y **n** pasa a ser el número de unidades de tiempo a que se refiere **j**. Entendamos todo esto con un ejemplo:

- TNA de 36%, capitalizable **mensualmente**, durante 18 meses. Hallar el valor del factor singular de capitalización.

La conversión es mensual. Entonces la tasa proporcional es la tasa **mensual**.

Con la notación **original**:

$(1+j/m)^n = (1+0.36/12)^{18} = 1.702433$ (El total de períodos capitalizables es n = 18)

Con la notación **modificada:**

$(1 + j/m)^{mn} = (1+0.36/12)^{12\times1.5} = 1.702433$ (El total de períodos capitalizables es 12×1.5=18)

Entonces, con la notación modificada el plazo se expresa como un producto **mn**. Aquí **m** vale 12 porque la tasa nominal es **anual** y se capitaliza **mensualmente**. Y aquí **n** indica el número de unidades de tiempo a que se refiere **j**. Si **j** es nominal anual, **n** indicará el número de años. Entonces si 0.36 es tasa nominal anual, 1.5 indica el número de años. ¡Coherencia entre **j** y **n** ! El 12 (**m**) indica la frecuencia de conversión dentro del año, dentro del período de **j**. Un segundo ejemplo:

- TNS (tasa nominal semestral) de 12%, capitalizable **trimestralmente**, durante 2 años y medio. Hallar el factor de capitalización.

La tasa proporcional será aquí la tasa trimestral, TNS/2. En ese plazo de 2 años y medio hay 10 trimestres.

Con la notación **original:**

$(1+j/m)^n$ $= (1+0.12/2)^{10}$ $= 1.7908477$ (El total de períodos capitalizables es n = 10)

Con la notación **modificada:**

$(1 + j/m)^{mn} = (1+0.12/2)^{2\times 5} = 1.7908477$ (El total de períodos capitalizables es 2 × 5=10)

Si 0.12 (**j**) es tasa nominal semestral, 5 (**n**) indica el número total de semestres. El 2 (**m**) indica la frecuencia de conversión dentro del semestre, dentro del tiempo de **j**.

Entonces, cuando se usa la notación o escritura $(1+j/m)^n$, ya se sabe que el plazo está expresado como **n**, que indica el total de períodos capitalizables a que se refiere la tasa proporcional **j/m**. Hay coherencia entre **n** y **j/m**. Pero cuando usamos la notación modificada $(1+j/m)^{mn}$, ese mismo plazo está expresado como el producto de **m** (frecuencia de conversión de la tasa nominal **j**) por **n** (número de unidades de tiempo a que se refiere **j**). ¡Coherencia entre **n** y **j**!

Un par de ejemplos más, con la notación **modificada:**

- TNA 24% capitalizable semestralmente, durante 3 años.

$(1+j/m)^{mn} = (1+\mathbf{0.24}/2)^{2\times\mathbf{3}} = 1.973823$ (tasa nominal anual j = 0.24, número de años n = 3)

- TNA 18%, capitalizable bimestralmente, durante 3 años y medio.

$(1+j/m)^{mn} = (1+\mathbf{0.18}/6)^{6 \times \mathbf{3.5}} = 1.860295$ (tasa nominal anual j = 0.18, número de años n = 3.5)

Muy bien. Entonces ahora nos concentramos en esta forma modificada de expresar el factor de capitalización, $(1 + j/m)^{mn}$.

Recuerde que, en la conversión continua, la capitalización es instantánea. Es decir, **m** crece sin límite, mientras que **j** y **n** se mantienen constantes. Recuérdelo: **m** crece indefinidamente.

¿Recuerda usted el binomio de Newton? Es $(a + b)^n$. Aquí está el desarrollo del binomio para unos cuantos valores de su exponente *n*:

$(a + b)^{\mathbf{2}} = a^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}ab + b^2$

$(a + b)^{\mathbf{3}} = a^{\mathbf{3}} + \mathbf{3}a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^{\mathbf{4}} = a^{\mathbf{4}} + \mathbf{4}a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Recordando las reglas para el desarrollo de este binomio:

- El primer término tiene el mismo exponente del binomio (resaltado en negrita).
- El coeficiente del segundo término es igual al exponente del binomio (resaltado en negrita).
- La potencia o exponente del primer término **a** disminuye de **n** hasta cero.
- La potencia o exponente del segundo término **b** aumenta de cero hasta **n**.
- El coeficiente de cualquier término se obtiene de la siguiente manera: coeficiente del término anterior por el exponente de **a** en ese mismo término anterior. Este producto se divide por el exponente de **b** en ese mismo término anterior, exponente aumentado en 1. Por ejemplo en el desarrollo del último binomio, el de potencia 4, obtengamos el coeficiente del tercer término: cogemos el segundo término $4a^3b$ y hacemos el producto 4×3

(coeficiente por exponente de **a**) y lo dividimos entre el exponente de **b** aumentado en 1, es decir entre 1+1=2. Luego, (4×3)/2 = 6. Y vemos que el tercer término $6a^2b^2$ tiene justamente exponente 6. ¡Verificado!

Entonces, vamos a aplicar estas reglas para el desarrollo del factor de capitalización con la notación modificada. Veámoslo nuevamente. Vamos a variar su apariencia, sin cambiar el valor de la expresión:

$$(1+j/m)^{mn} = [(1+j/m)^{m}]^{n} = [(1+j/m)^{m/j}]^{nj} = \left(\left(1+\frac{1}{m/j}\right)^{m/j}\right)^{nj}$$

Los exponentes que deben multiplicarse **mn** los presentamos como **m/j** y **nj**. Su producto seguirá siendo **mn**. Y el cociente **j/m** lo hemos presentado como **1/(m/j)**. ¡Es inverso de inverso! El valor de la expresión no cambia.

Ahora, olvidemos por el momento ese exponente **nj**. Nos quedamos solamente con:

$$\left(1+\frac{1}{m/j}\right)^{m/j}$$

Vea este binomio. Pero ya usted sabe que en la conversión continua, **m** crece sin límite, crece indefinidamente. Si el dividendo **m** crece al infinito y el divisor **j** permanece constante, entones a medida que **m** crece indefinidamente, el divisor **j** pierde significado. ¡Infinito entre cualquier número positivo, es simplemente infinito! Por lo tanto:

$$\left(1+\frac{1}{m/j}\right)^{m/j} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

Ahora desarrollemos el binomio $(1 + 1/m)^m$ con las reglas del binomio $(a+b)^n$ que ya hemos recordado. El primer término del desarrollo será 1^m. y el exponente de 1 irá disminuyendo. El exponente de (1/m) irá aumentando. Y para formar los coeficientes, recuerde la multiplicación y división que hemos mencionado.

$$(1 + 1/m)^m = 1^m + \mathbf{m} \cdot 1^{m-1} \cdot (1/m)^1 + \frac{\mathbf{m(m-1)}}{\mathbf{1} + 1} \cdot 1^{m-2} \cdot (1/m)^2 + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)}{2+1} \cdot 1^{m-3} \cdot (1/m)^3 + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)}{3} \cdot \frac{(m-3)}{3+1} \cdot 1^{m-4} \cdot (1/m)^4 + \dots\dots\dots$$

Simplifiquemos. Sabemos que 1^m, 1^{m-1}, 1^{m-2},1^{m-3} y 1^{m-4} son simplemente 1. Y el 1, al estar como multiplicador o factor (a partir del segundo término), se puede ignorar:

$$(1 + 1/m)^m = 1 + \underbrace{m \cdot (1/m)}_{1} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot (1/m)^2 + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \times 3} \cdot (1/m)^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \times 3 \times 4} \cdot (1/m)^4 + \dots\dots\dots$$

Desdoblemos las potencias de (1/m) aplicándoles sus respectivos exponentes. El numerador 1 no cambia. El denominador **m** lo repetimos según su exponente.

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{1}{mm} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \times 3} \cdot \frac{1}{mmm} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \times 3 \times 4} \cdot \frac{1}{mmmm} + \dots\dots\dots$$

Cancelamos las **m** y añadimos un multiplicador **1** a los denominadores de los coeficientes:

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{\cancel{m}(m-1)}{\mathbf{1} \times 2} \cdot \frac{1}{\cancel{m}m} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{\cancel{m}(m-1)(m-2)}{\mathbf{1} \times 2 \times 3} \cdot \frac{1}{\cancel{m}mm} + \frac{\cancel{m}(m-1)(m-2)(m-3)}{\mathbf{1} \times 2 \times 3 \times 4} \cdot \frac{1}{\cancel{m}mmm} + \dots\dots\dots$$

Esas multiplicaciones de números naturales son factoriales 2!, 3! y 4! Asimismo, las **m** que están en los denominadores pasan a dividir. Por ejemplo, en el tercer término, (m–1)/m es igual a (1–1/m):

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{(1-1/m)}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

$$..+ \frac{(1-1/m)(1-2/m)}{3!} + \frac{(1-1/m)(1-2/m)(1-3/m)}{4!} + \ldots\ldots\ldots$$

Pero ya sabemos que **m** crece sin límite. Como ahora **m** es un divisor, en el infinito esos cocientes 1/m, 2/m y 3/m sencillamente tienden a cero. Por lo tanto, esos cocientes, como se están restando, se pueden ignorar. Porque 1 – 0 = 1.

Nos quedamos con lo que sería la siguiente suma infinita:

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$..+ \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots$$

En resumen y generalizando, nuestra suma sería la siguiente:

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$(1 + 1/m)^m = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \ldots\ldots\ldots$$

$(1 + 1/m)^m$ = 2.718281828... (es el número inconmensurable **e** o épsilon)

Pero recordemos que habíamos dejado pendiente el exponente **nj**. Entonces nuestro factor continuo es $\boldsymbol{e^{nj}}$. Y por lo tanto podemos decir que el monto continuo se obtiene aplicando al stock inicial o capital ese factor continuo:

$$\bar{S} = P \; . \; e^{nj}$$

Por tanto, recordando que la tasa efectiva se obtiene restando uno al factor de capitalización, tenemos que la tasa continua es:

$$i = e^{nj} - 1$$

Capitalizar el interés significa *convertir en capital*, al final de un período, el interés generado durante ese período. Por ello a veces, en lugar de decir "capitalización" decimos "conversión". Es lo mismo.

Se puede decir que básicamente hay dos formas de capitalizar o convertir los intereses a partir de una tasa nominal o aparente, para buscar una tasa efectiva:

a) **Capitalización discreta.** El interés se capitaliza por cada unidad determinada de tiempo como el día, el mes, el bimestre, el semestre, el año, etc. Es algo muy conocido. Solamente se está dando un nombre a esta forma de capitalizar, para confrontarla con la otra forma que se ve a continuación.
b) **Capitalización continua.** En cambio aquí la capitalización es instantánea. No se espera al final de cada unidad de tiempo sino que es inmediata. Vamos a entender esto plenamente.

Tomando una tasa nominal anual (TNA) de 36%. Calculemos la tasa efectiva ***ie*** anual (para un año) aplicando distintas frecuencias de conversión o capitalización:

Con capitalización semestral

$ie = (1 + j/m)^n - 1$

$ie = (1 + 0.36/2)^2 - 1 = (1.18)^2 - 1 =$ **0.3924**

Con capitalización trimestral

$ie = (1 + 0.36/4)^4 - 1 = (1.09)^4 - 1 =$ **0.41158161**

Con capitalización bimestral

$ie = (1 + 0.36/6)^6 - 1 = (1.06)^6 - 1 =$ **0.418519112**

Con capitalización mensual

$ie = (1 + 0.36/12)^{12} - 1 = (1.03)^{12} - 1 =$ **0.425760887**

Con capitalización diaria

$ie = (1 + 0.36/360)^{360} - 1 = (1.001)^{360} - 1 =$ **0.43307161**

Resumiendo, puede notarse claramente que teniendo una tasa nominal anual ***j*** de 0.36 (36%), si se aplican distintas frecuencias de conversión ***m*** se obtienen distintos factores y distintas tasas efectivas anuales:

Tasa nominal Anual	Frecuencia de conversión o capitalización	Valor del factor de capitalización (1 + *ie*)	Tasa efectiva resultante (*ie*)
0.36	Semestral (2)	1.3924	0.3924

0.36	Trimestral (4)	1.41158161	0.41158161
0.36	Bimestral (6)	1.418519112	0.418519112
0.36	Mensual (12)	1.425760887	0.425760887
0.36	Diaria (360)	1.43307161	0.43307161

Puede notarse que, a medida que la frecuencia de capitalización o conversión aumenta (a medida que aumenta *m*), el factor de capitalización crece igualmente. Por lo tanto, la tasa efectiva también se incrementa.

¿Y qué tal si se hace la conversión cada vez más frecuente? ¿Qué tal si se hace la conversión en forma horaria; es decir, que el interés se calcule y se capitalice cada hora? ¿Y qué tal cada minuto? ¿Y qué tal cada segundo? Mejor cada milésima de segundo. No, mejor cada millonésima de segundo. Lo que queda claro es que se puede llegar a la capitalización instantánea. Es lo que se llama **conversión continua** o capitalización continua.

El Monto Continuo es el monto que se obtiene cuando, permaneciendo constantes (sin variar) la tasa nominal y el plazo, el número de conversiones o capitalizaciones ***m*** crece sin límite. Es decir, ***m*** crece indefinidamente.

Para todo lo que es conversión continua, se tiene una simbología específica:

$\bar{F}$ = Factor Continuo $\bar{i}$ = Tasa Continua

$\bar{S}$ = Monto Continuo $\bar{I}$ = Interés Total Continuo

El factor continuo $\bar{F}$ es el factor de capitalización (el factor que convierte un stock inicial en un stock final o monto) cuando la conversión es continua; es decir, instantánea. Puede notarse que en este tema de conversión continua, al simbolizar el factor, el monto, la tasa efectiva y el interés total, se coloca una rayita (vírgula) encima. Esa rayita indica que se está aplicando la conversión continua.

Alguien podría imaginar: “bueno, si la frecuencia de conversión ***m*** crece sin límite, el factor de capitalización y la tasa efectiva crecerían también sin límite, con lo cual el interés y el stock final crecerían desmesuradamente, al infinito. Ningún banco sería tan loco como para pagar ese interés.”

No es así. Por más que la frecuencia de conversión ***m*** se haga cada vez más grande, el factor de capitalización tiende a un límite. En realidad, habrá muy poca diferencia entre el monto obtenido con capitalización continua (monto continuo) y el monto obtenido con capitalización diaria. El monto continuo será superior, claro, pero la diferencia será pequeña. Aunque usted no lo crea.

Para no seguir con dudas, se va a mostrar de una vez este factor continuo:

$$\bar{F} = e^{nj}$$

El número ***e*** – épsilon – es el número inconmensurable 2.718281828.... Es un número que no tiene fin. El producto ***nj*** (***n*** por ***j***) se le aplica como exponente.

Por lo tanto, el monto continuo es “stock inicial por factor continuo”:

$\bar{S} = P.\ e^{nj}$ Fórmula del Monto Continuo.

Ahora, si e^{nj} es el factor continuo, la tasa continua es:

$\bar{i} = e^{nj} - 1$ (siempre tasa efectiva es igual a “factor menos uno”)

Como todo esto es producto de una capitalización llevada al extremo, se puede decir que la tasa continua es **la máxima tasa efectiva posible para una**

determinada tasa nominal, dentro de su mismo plazo. Es la tasa efectiva límite.

Por ejemplo, si se tiene una tasa nominal mensual de 5%, la tasa continua será:

$e^{1\times0.05} - 1 = 0.051271096$ será la máxima tasa efectiva mensual resultante. Podemos expresarla como 5.1271096%. Por más a esa tasa nominal anual de 5% se la convierta cada día, cada hora, cada minuto o cada segundo, no se podrá obtener una tasa efectiva mayor que esta tasa continua que ya se ha calculado.

De nuevo, recordar que "stock inicial por factor es igual a monto", y que "stock inicial por tasa efectiva es igual a interés total". Por lo tanto, el interés total será:

$\bar{\boldsymbol{I}} = P\,(e^{nj} - 1)$ Interés Total Continuo.

Esto también se puede entender así: si el interés total es igual a monto menos stock inicial, entonces:

$\bar{I} = \bar{S} - P$ reemplazando $\bar{S}$ se tiene: $\bar{I} = P\,e^{nj} - P \;=\; \bar{I} = P\,(e^{nj} - 1)$ ¡Lo mismo!

Coherencia entre tasa y tiempo en el Factor Continuo

Viendo el factor continuo: e^{nj}

El número ***e*** (2.718281828...) se saca a la pantalla haciendo antilogaritmo natural de 1. Se debe entender lo que significan ***n*** y ***j*** en este factor continuo:

- ***j*** es la tasa nominal para un período y ***n*** es el número de esos mismos períodos que están comprendidos en el plazo.

Por ejemplo:

- si ***j*** es la tasa nominal anual, ***n*** es el número de años (es lo más usado)
- si ***j*** es la tasa nominal mensual, ***n*** es el número de meses
- si ***j*** es la tasa nominal trimestral, ***n*** es el número de trimestres

Fórmulas para aplicar la conversión continua:

$\bar{S} = P .\, e^{nj}$ Monto Continuo

$\bar{\boldsymbol{I}} = P\,(e^{nj} - 1)$ Interés Total Continuo.

$\bar{i} = e^{nj} - 1$ Tasa continua

Acumulación de un monto continuo con una serie de pagos uniformes:

$$\bar{S} = R.\ \frac{e^{nj} - 1}{e^{j} - 1}$$

A este factor se le podría denominar un “FCS continuo”.

Aplicando:

R = 3,000
n = 5 pagos anuales vencidos
j = 8% TNA

$\bar{S} = ?$

$$\bar{S} = 3,000 \ . \ \frac{e^{5\times0.08} - \ 1)}{e^{0.08} - 1}$$

$$\bar{S} = 3,000 \ . \ \frac{e^{0.4} - \ 1}{e^{0.08} - \ 1}$$

$$\bar{S} = \ 17,715.52$$

Tabla N° 3 Cuotas fijas y capitalización continua

Nro. cuota	Stock inicial	Factor anual	Factor anual	Stock capitalizado	Pago fijo	Stock Final
1		e 0.08	1.083287	-	3,000.00	3,000.00
2	3,000.00	e 0.08	1.083287	3,249.86	3,000.00	6,249.86
3	6,249.86	e 0.08	1.083287	6,770.39	3,000.00	9,770.39
4	9,770.39	e 0.08	1.083287	10,584.14	3,000.00	13,584.14
5	13,584.14	e 0.08	1.083287	14,715.52	3,000.00	17,715.52

Elaboración propia

Ahora, si se quisiera despejar un “FDFA continuo”:

$$R = \bar{S}. \ \frac{e^{j} - \ 1}{e^{nj} - \ 1}$$

Aplicando:

TNA = 4% conv. Continua

n = 6 anuales

$\bar{S}$ = 12,000

R = ?

$$R = 12{,}000 \, . \, \frac{e^{0.04} - 1}{e^{6\times0.04} - 1)}$$

$$R = 1{,}805.46$$

Tabla N° 4 FDFA: capitalización continua

TABLA DE CAPITALIZACIÓN

Mes	Stock inicial	Factor anual continuo	Stock capitalizado	Pago	Stock final
1		$e^{0.04}$	-	1,805.46	1,805.46
2	1,805.46	$e^{0.04}$	1,879.14	1,805.46	3,684.60
3	3,684.60	$e^{0.04}$	3,834.97	1,805.46	5,640.43
4	5,640.43	$e^{0.04}$	5,870.62	1,805.46	7,676.08
5	7,676.08	$e^{0.04}$	7,989.35	1,805.46	9,794.81
6	9,794.81	$e^{0.04}$	10,194.54	1,805.46	12,000.00

Elaboración propia

Repago de deudas con capitalización discreta

Se iniciará con el método de repago de deudas con cuotas que varían en progresión aritmética, siguiendo la serie de los números naturales. Para ello se requiere determinar, primero el monto y luego el valor actual de esa serie.

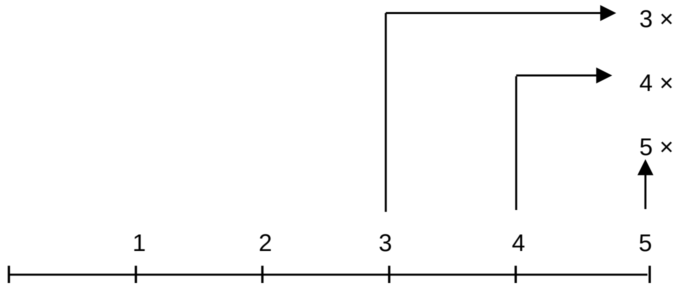
El monto de la anualidad variable en progresión aritmética.

- Sea una secuencia de cinco pagos vencidos que siguen la serie de los números naturales. Es decir, son 1, 2, 3, 4 y 5. La tasa periódica compuesta es 5%. Hallar el monto.

FSC

$1 \times (1.05)^4 = 1.21550625$

$2 \times (1.05)^3 = 2.31525$



$3 \times (1.05)^2 = 3.3075$

$4 \times (1.05)^1 = 4.20$

$5 \times (1.05)^0 = 5$

$S = 16.03825625$

¿Cómo se ha llegado al monto de toda la anualidad? Pues sumando los montos individuales. Expresemos esa suma de montos individuales:

$$S = 1\,(1.05)^4 + 2(1.05)^3 + 3(1.05)^2 + \ldots\ldots\ldots + (4)\,(1.05) + 5$$

El último pago no genera interés. Ahora con nuestra simbología:

$$S = 1(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + 3(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + (n-1)(1+i) + n \quad \text{(ecuación original)}$$

Multipliquemos por (1+i). Al resultado le restaremos la ecuación original, corriendo un lugar:

$$S\,(1+i) = 1(1+i)^{n-1}\,\mathbf{(1+i)} + 2(1+i)^{n-2}\,\mathbf{(1+i)} + 3(1+i)^{n-3}\,\mathbf{(1+i)} + \ldots + (n-1)(1+i)\mathbf{(1+i)} + \ldots + n\,\mathbf{(1+i)}$$

$$\begin{array}{rcl} S\,(1+i) & = & 1(1+i)^n + 2(1+i)^{n-1} + 3(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + n\,(1+i) \\ -S & = & \quad -1(1+i)^{n-1} - 2(1+i)^{n-2} - \ldots\ldots\ldots - (n-1)\,(1+i) - n \\ \hline S\,(1+i-1) & = & (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + (1+i) - n \end{array}$$

$$S\,(\,i\,) = [\,(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + (1+i)\,] - n$$

Tenemos entre los corchetes la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$ que es lo mismo que $1/(1+i)$. La fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética es:

$$\text{Suma} = \frac{ur - a}{r - 1} = \frac{a - ur}{1 - r}$$ (la segunda forma es más conveniente cuando la progresión es decreciente)

Como la progresión es decreciente, usamos la segunda forma que podemos explicar así:

$$\text{Suma} = \frac{\text{primer término} - \text{último término x razón}}{1 - \text{razón}}$$

Reemplacemos:

$$S\,(\,i\,) = \left(\frac{(1+i)^n - (1+i)\;.\;\dfrac{1}{(1+i)}}{1 - \dfrac{1}{(1+i)}} \right) - n$$

$$S\,(\,i\,) = \frac{(1+i)^n - 1}{\dfrac{(1+i) - 1}{(1+i)}} - n = \frac{(1+i)\,[\,(1+i)^n - 1\,]}{i} - n$$

Si hacemos que **i** suba a dividir (1+i) : $(1+i)/i = (1/i + 1) = (1 + 1/i\,)$

$$S\,(\,i\,) = (1 + 1/i)\,[\,(1+i)^n - 1\,] - n$$

Ahora la i que está multiplicando a S, pasa a la derecha como un divisor. Además colocamos R que es igual a 1; es el importe del primer pago y a la vez es el gradiente aritmético o incremento constante. Tenga usted en cuenta que los pagos 1,2,3,4 y 5 son en realidad coeficientes de R. Tenga en cuenta que si hubiésemos planteado en el diagrama consignando los pagos como 1R, 2R, 3R, 4R y 5R, igual hubiéramos tenido que factorizar en la ecuación original y tendríamos R como un multiplicador. Aquí lo escribimos al final:

$$S = R \quad \frac{(1 + 1/i)\,[\,(1+i)^n - 1\,] - n}{i}$$

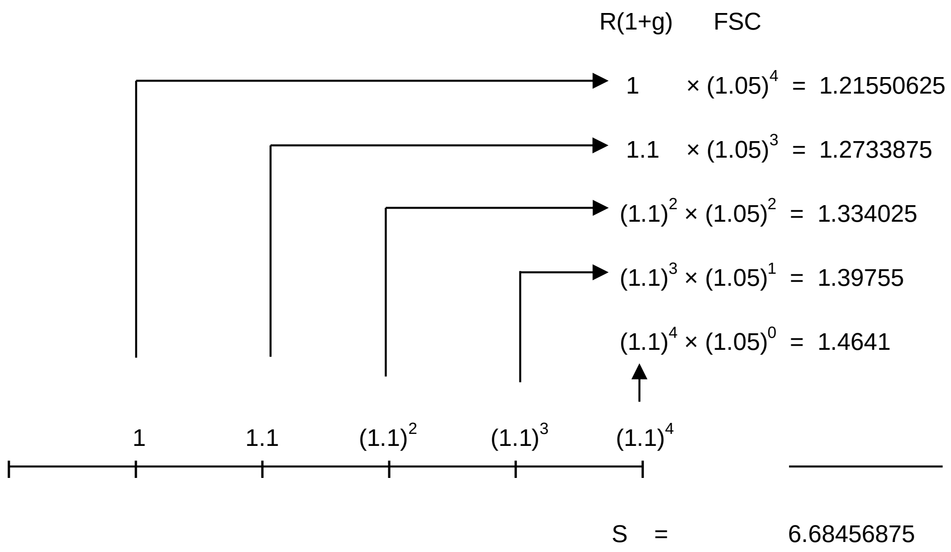
Es el monto de la serie variable aritméticamente. Es claro que, si le aplica un FSA por todo el plazo, resultará el valor actual de la serie. Por tanto:

$$P = R \; \frac{(1 + 1/i)\,[\,(1+i)^n - 1\,] \; - n}{i \;(1+i)^n}$$

Valor actual de la serie variable aritméticamente.

Ahora se verá el valor actual de la serie variable geométricamente. En primer lugar, se demostrará la fórmula del monto.

- Sea una secuencia de cinco pagos vencidos que crecen con gradiente geométrico o porcentaje constante 10%. La tasa periódica compuesta es 5%.



¿Y cómo se obtuvo ese monto de toda la serie? Pues sumando los montos individuales. El primer pago se ve luego incrementado en cada nueva unidad de tiempo, siendo multiplicado por (1.1), es decir por (1+g).

Expresemos esa suma de montos individuales comenzando por el monto generado por el primero de todos los pagos. Ese primer pago aún no recibe el incremento, solamente el factor de capitalización $(1.05)^4$. A partir del segundo pago, se aplica repetidamente el incremento (1.1) y el factor $(1.05)^{-1}$ que es lo mismo que 1/(1.05).

$$S = 1\,(1.05)^4 + (1.1)\,(1.05)^3 + (1.1)^2\,(1.05)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1.1)^4\,\underbrace{(1.05)^0}_{1}$$

Ahora expresemos esa suma aplicando nuestra simbología:

$$S = (1+i)^{n-1} + (1+g)\,(1+i)^{n-2} + (1+g)^2\,(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + (1+g)^{n-1}$$

Lo que tenemos en el lado derecho de la ecuación es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+g)\,(1+i)^{-1}$.

Pero $(1+i)^{-1}$ es lo mismo que $\frac{1}{(1+i)}$. Por lo tanto $(1+g)\,(1+i)^{-1} = \frac{1+g}{1+i}$ ¡la razón!

Usemos una vez más la fórmula 4 de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$\text{Suma} = \frac{ur - a}{r-1} \qquad \frac{\text{último término} \times \text{razón} - \text{primer término}}{\text{razón} - 1}$$

$$S = \frac{(1+g)^{n-1} \cdot \frac{(1+g)}{(1+i)} - (1+i)^{n-1}}{\frac{(1+g)}{(1+i)} - 1} = \frac{\frac{(1+g)^n}{(1+i)} - (1+i)^{n-1}}{\frac{(1+g) - (1+i)}{(1+i)}} = \frac{\frac{(1+g)^n - (1+i)^{n-1}\,(1+i)}{(1+i)}}{\frac{1+g-1-i}{(1+i)}}$$

$$S = \frac{\frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{(1+i)}}{\frac{(g-i)}{(1+i)}}$$

Hay un divisor (1+i) en el numerador y otro en el denominador. Se cancelan.

Ahora colocamos R. No olvidemos que los pagos 1, 1.1, $(1.1)^2$, $(1.1)^3$ y $(1.1)^4$ son en realidad coeficientes de R que es el primer pago.

$$S = R\left(\frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{(g-i)}\right)$$

Ya está la fórmula del monto. Pero se sabe que, si se aplica un FSA por todo el plazo, se convierte en valor actual. Por tanto:

$$P = R\left(\frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{(g-i)\,(1+i)^n}\right)$$

Fórmula del valor actual de la serie variable en progresión geométrica.

Seguidamente, se aplicará todo esto al repago de deudas.

Caso práctico: una deuda de S/ 24,000 se pagará con cuatro cuotas mensuales vencidas que crecen siguiendo la serie de los números naturales. La TEM es 2%. Hallar la primera cuota de amortización y desarrollar la tabla de retorno.

$P = 24{,}000$

$i = 0.02$

$n = 4$

$R = ?$

$$P = R \ . \ \frac{(1 + 1/i)\,[\,(1+i)^n - 1\,] - n}{i\,(1+i)^n}$$

$$24{,}000 = R \ . \ \frac{(1 + 1/0.02)\,[\,(1.02)^4 - 1\,] - 4}{0.02\,(1.02)^4}$$

$24{,}000 = R\,(9.42507842708)$

$R =$ **2,546.40**

Tabla N° 5 Cuotas variables aritméticamente

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	24,000.00	1.02	24,480.00	2,546.40	21,933.60
2	21,933.60	1.02	22,372.27	5,092.80	17,279.47
3	17,279.47	1.02	17,625.06	7,639.20	9,985.86
4	9,985.86	1.02	10,185.58	10,185.60	- 0.02

Elaboración propia

Caso práctico: una deuda de S/ 45,000 se pagará con cuatro cuotas mensuales que decrecen cada mes en 5%. La TEM es 2%. Calcular la primera cuota.

Aquí las cuotas serán decrecientes en progresión geométrica. Por tanto, el gradiente será negativo.

$P = 45{,}000$

$n = 4$

$i = 0.02$

$g = -0.05$

$R = ?$

$$P = R \cdot \frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{(g - i)\,(1+i)^n}$$

$$45{,}000 = R \cdot \frac{(1-0.05)^4 - (1.02)^4}{(-0.05 - 0.02)\,(1.02)^4}$$

$$45{,}000 = R \cdot \frac{(0.95)^4 - (1.02)^4}{(-0.07)\,(1.02)^4}$$

$45{,}000 = R\,(3.5360303781)$

$R =$ **12,726.14**

Tabla N° 6 Cuotas variables geométricamente

TABLA DE RETORNO					
Mes	Deuda inicial	Factor mensual	Deuda capitalizada	Cuota decreciente	Deuda final
1	45,000.00	1.02	45,900.00	12,726.14	33,173.86
2	33,173.86	1.02	33,837.34	12,089.83	21,747.50
3	21,747.50	1.02	22,182.45	11,485.34	10,697.11
4	10,697.11	1.02	10,911.06	10,911.07	- 0.02

Elaboración propia

Repago de deudas con capitalización continua, cuotas vencidas

En este caso se aplican las propiedades de las anualidades y las fórmulas de la conversión continua.

Cuotas variables aritméticamente, conversión continua

P = 50,000

j = TNM 0.02 CC

n = 5

R = ?

$$P \quad = \quad R \quad \frac{[\,1 + 1/(e^{j} - 1)\,]\ [\,e^{nj} - 1\,] - n}{(e^{j} - 1)\,(e^{nj})}$$

$$50{,}000 \qquad R \quad \frac{1 + 1/(e^{0.02} - 1)\,]\ [\,e^{5\times0.02} - 1\,] - 5}{(e^{0.02} - 1)\,(e^{5\times0.02})}$$

R = 3,585.84

Tabla N° 7 Cuotas variables aritméticamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	50,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	51,010.07	3,585.84	47,424.23
2	47,424.23	$e^{0.02}$	1.02020134	48,382.26	7,171.68	41,210.58
3	41,210.58	$e^{0.02}$	1.02020134	42,043.09	10,757.52	31,285.57
4	31,285.57	$e^{0.02}$	1.02020134	31,917.58	14,343.36	17,574.22
5	17,574.22	$e^{0.02}$	1.02020134	17,929.24	17,929.20	0.04

Elaboración propia

Puede notarse que, en efecto, la cuota calculada con conversión continua cumple con reducir progresivamente la deuda hasta su extinción.

Cuotas variables geométricamente, conversión continua

P = 40,000

j = 0.02 TNM CC
n = 5
g = 0.10
R = ?

$$P = R \quad \frac{(1+g)^{n} - e^{nj}}{e^{nj} \quad [g -(e^{j} - 1]}$$

$$40000 = R \quad \frac{(1.10)^{5} - e^{5\times 2}}{e^{5\times 2} \quad [0.10 -(e^{0.02} - 1)]}$$

R = 6,980.75

Tabla N° 8 Cuotas variables geométricamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	40,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	40,808.05	6,980.75	33,827.30
2	33,827.30	$e^{0.02}$	1.02020134	34,510.66	7,678.83	26,831.84
3	26,831.84	$e^{0.02}$	1.02020134	27,373.87	8,446.71	18,927.17
4	18,927.17	$e^{0.02}$	1.02020134	19,309.52	9,291.38	10,018.14
5	10,018.14	$e^{0.02}$	1.02020134	10,220.52	10,220.52	0.01

Elaboración propia

Cuotas variables aritméticamente con gradiente predeterminado

P = 35,000
j = 0.02 TNM CC
n = 5

g = 1,000
R =

$$P = R \quad \frac{e^{nj} - 1}{(e^{j} - 1)\, e^{nj}} \quad + \quad g \quad \frac{(1 + 1/(e^{j} - 1) \; [(e^{j})^{k} - 1] - k}{(e^{j} - 1)\,(e^{j})^{k}} \quad \frac{1}{(e^{j})^{n-k}}$$

$$35000 = R \quad \frac{e^{5\times 0.02} - 1}{(e^{0.02} - 1)\, e^{5\times 0.02}} \quad + \quad g \quad \frac{1 + 1/(e^{0.02} - 1) \; [(e^{0.02})^{3} - 1] - 3}{(e^{0.02} - 1)\,(e^{0.02})^{3}} \quad \frac{1}{(e^{0.02})^{5-3}}$$

R = 6,271.79

Tabla N° 9 Cuotas variables con gradiente predeterminado y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	35,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	35,707.05	6,261.79	29,445.26
2	29,445.26	$e^{0.02}$	1.02020134	30,040.09	6,261.79	23,778.30
3	23,778.30	$e^{0.02}$	1.02020134	24,258.65	7,261.79	16,996.86
4	16,996.86	$e^{0.02}$	1.02020134	17,340.22	8,261.79	9,078.43
5	9,078.43	$e^{0.02}$	1.02020134	9,261.83	9,261.79	0.04

Elaboración propia

Repago de deudas con capitalización continua, cuotas adelantadas

Cuotas constantes adelantadas, conversión continua

P = 30,000.00

j = 0.02 TNM CC

n = 5

R = ? adelantadas

$$P = R \frac{e^{j}}{e^{j} - 1} \frac{e^{nj} - 1}{e^{nj}}$$

$$P = R \frac{e^{0.02}}{e^{0.02} - 1} \frac{e^{5\times0.02} - 1}{e^{5\times0.02}}$$

R = 6,242.37

Tabla N° 10 Cuotas adelantadas y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda final
1	30,000.00	6,242.37	23,757.63	e^j	1.020201340	24,237.57
2	24,237.57	6,242.37	17,995.20	e^j	1.020201340	18,358.72
3	18,358.72	6,242.37	12,116.35	e^j	1.020201340	12,361.12
4	12,361.12	6,242.37	6,118.75	e^j	1.020201340	6,242.36
5	6,242.36	6,242.37	- 0.01	e^j		

Elaboración propia

Cuotas variables geométricamente y adelantadas, con conversión continua

P = 40,000

j = 0.02 TNM CC

n = 5

g = 0.10

R = ? adelantadas

$$P = R \; e^j \; \frac{(1+g)^n - e^{nj}}{e^{nj} \; [\, g - (e^j - 1) \,]}$$

$$40000 = R \; e^{0.02} \; \frac{(1.10)^5 - e^{5\times0.02}}{e^{5\times0.02} \; (0.10 - e^{0.02} - 1\,)}$$

R = 6,842.52

Tabla N° 11 Cuotas adelantadas variables geométricamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda Final
1	40,000.00	6,842.52	33,157.48	$e^{0.02}$	1.020201340	33,827.31
2	33,827.31	7,526.77	26,300.53	$e^{0.02}$	1.020201340	26,831.84
3	26,831.84	8,279.45	18,552.39	$e^{0.02}$	1.020201340	18,927.17
4	18,927.17	9,107.39	9,819.78	$e^{0.02}$	1.020201340	10,018.15
5	10,018.15	10,018.13	0.02			

Elaboración propia

Recolección de datos y tabulación

a) **Para contrastación del repago con cuotas vencidas**

Ahora se contrastarán dos casos de repago con datos similares y cuotas vencidas. Pero un caso implicará capitalización discreta y el otro implicará capitalización continua.

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables vencidas y en progresión aritmética, con TNM 0.02 capitalizable diariamente.

P = 60000

j = 0.02 TNM CD

TEM = 0.02019454

n = 10

R = ? vencidas

$$P = R \frac{(1 + 1/i)\ [(1+i)^{n} - 1] - n}{i\,(1+i)^{n}}$$

$$60000 = R \frac{(1 + 1/0.02019454)\ [(1.02019454)^{10} - 1] - 10}{0.02019454\,(1.02019454)^{10}}$$

R = 1,253.27

Tabla N° 12 Cuotas variables aritméticamente, vencidas, conversión discreta

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	60,000.00	1.02019454	61,211.67	1,253.27	59,958.40
2	59,958.40	1.02019454	61,169.23	2,506.54	58,662.69
3	58,662.69	1.02019454	59,847.36	3,759.81	56,087.55
4	56,087.55	1.02019454	57,220.21	5,013.08	52,207.13
5	52,207.13	1.02019454	53,261.43	6,266.35	46,995.08
6	46,995.08	1.02019454	47,944.13	7,519.62	40,424.51
7	40,424.51	1.02019454	41,240.86	8,772.89	32,467.97
8	32,467.97	1.02019454	33,123.65	10,026.16	23,097.49
9	23,097.49	1.02019454	23,563.93	11,279.43	12,284.50
10	12,284.50	1.02019454	12,532.58	12,532.70	- 0.12

Elaboración propia

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables vencidas y en progresión aritmética, con TNM 0.02 capitalizable en forma continua.

P = 60,000
j = TNM 0.02 CC
n = 10
R = ? vencidas

$$P = R \frac{[\,1 + 1/(e^{j} - 1)\,]\ [\,e^{nj} - 1\,] - n}{(e^{j} - 1)\,(e^{nj})}$$

$$60{,}000 = R \frac{[\,1 + 1/(e^{0.02} - 1)\,]\ [\,e^{10\times 0.02} - 1\,] - 10}{(e^{0.02} - 1)\,(e^{10\times 0.02})}$$

R = 1,253.33

Tabla N° 13 Cuotas variables aritméticamente, vencidas, conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	60,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	61,212.08	1,253.33	59,958.75
2	59,958.75	$e^{0.02}$	1.02020134	61,170.00	2,506.66	58,663.34
3	58,663.34	$e^{0.02}$	1.02020134	59,848.42	3,759.99	56,088.43
4	56,088.43	$e^{0.02}$	1.02020134	57,221.49	5,013.32	52,208.17
5	52,208.17	$e^{0.02}$	1.02020134	53,262.84	6,266.65	46,996.19
6	46,996.19	$e^{0.02}$	1.02020134	47,945.58	7,519.98	40,425.60
7	40,425.60	$e^{0.02}$	1.02020134	41,242.25	8,773.31	32,468.94
8	32,468.94	$e^{0.02}$	1.02020134	33,124.86	10,026.64	23,098.22
9	23,098.22	$e^{0.02}$	1.02020134	23,564.83	11,279.97	12,284.86
10	12,284.86	$e^{0.02}$	1.02020134	12,533.03	12,533.30	- 0.27

Elaboración propia

Ahora se confrontará la evolución de los saldos mensuales para ambos casos. Con ello se obtendrá dos matrices de datos.

Saldo al final del	Conversión discreta X	Conversión continua Y
Mes 1	59,958.40	59,958.75
Mes 2	58,662.69	58,663.34
Mes 3	56,087.55	56,088.43
Mes 4	52,207.13	52,208.17
Mes 5	46,995.08	46,996.19
Mes 6	40,424.50	40,425.60
Mes 7	32,467.96	32,468.94
Mes 8	23,097.48	23,098.22
Mes 9	12,284.49	12,284.86
Mes 10	- 0.13	- 0.27

Proceso e interpretación de los datos

Ahora se determinará la correlación de ambas matrices. Para ello se utilizará una fórmula del programa informático Excel:

=COEF.DE.CORREL(MATRIZ1,MATRIZ2)

El resultado que se obtiene es:

r = 1.0000

Mientras más se acerca a 1, mayor es la correlación directa. El resultado indica que es una correlación alta.

De lo anterior se desprende que la correlación es lineal positiva perfecta.

Luego, se puede concluir que, al tener la evolución de los saldos correlación lineal positiva perfecta, ambas fórmulas cumplen con la condición de disminución progresiva hasta aproximarse a cero. Por lo cual la fórmula que emplea el número inconmensurable épsilon para repago de deudas con cuotas vencidas, es válida.

b) Para contrastación del repago con cuotas adelantadas

Ahora se contrastarán dos casos de repago con datos similares y cuotas adelantadas. Pero un caso implicará capitalización discreta y el otro implicará capitalización continua.

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables adelantadas y en progresión geométrica, con TNM 0.02 capitalizable diariamente.

P = 60000

j = 0.02 TNM CD

TEM 0.02019454

n = 10

g = 0.10

R = ? adelantada

$$P = R \quad (1+i) \quad \frac{(1+g)^{n} - (1+i)^{n}}{(1+i)^{n} \quad (g - i)}$$

$$40000 = R \quad (1.02019454) \quad \frac{(1.10)^{10} - (1.02019454)^{10}}{(1.02019454)^{10} \quad (0.10 - 0.02019454)}$$

R = 4,176.80

Tabla N° 14 Cuotas variables geométricamente, adelantadas y conversión discreta

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Deuda Final
1	60,000.00	4,176.80	55,823.20	1.02019454	56,950.52
2	56,950.52	4,594.48	52,356.04	1.02019454	53,413.35
3	53,413.35	5,053.93	48,359.42	1.02019454	49,336.02
4	49,336.02	5,559.32	43,776.70	1.02019454	44,660.75
5	44,660.75	6,115.25	38,545.50	1.02019454	39,323.91
6	39,323.91	6,726.78	32,597.13	1.02019454	33,255.42
7	33,255.42	7,399.46	25,855.96	1.02019454	26,378.11
8	26,378.11	8,139.40	18,238.71	1.02019454	18,607.03
9	18,607.03	8,953.34	9,653.69	1.02019454	9,848.64
10	9,848.64	9,848.68	- 0.04		

Elaboración propia

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables adelantadas y en progresión geométrica, con TNM 0.02 capitalizable en forma continua.

P = 60,000

j = 0.02 TNM CC

n = 10

g = 0.10

R = ? adelantada

$$P = R \quad e^{j} \quad \frac{(1+g)^{n} - e^{nj}}{e^{nj} \quad [\, g - (e^{j} - 1)\,]}$$

$$60000 = R \quad e^{0.02} \quad \frac{(1.10)^{5} - e^{5\times0.02}}{e^{5\times0.02} \quad (0.10 - e^{0.02} - 1)}$$

$$60000 = R \quad 1.02020134 \quad \frac{(1.10)^{5} - 1.22140276}{1.22140276 \quad (0.10 - 0.02020134)}$$

R = 4,176.94

Tabla N° 15 Cuotas variables geométricamente, adelantadas y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda Final
1	60,000.00	4,176.94	55,823.06	$e^{0.02}$	1.02020134	56,950.76
2	56,950.76	4,594.63	52,356.13	$e^{0.02}$	1.02020134	53,413.79
3	53,413.79	5,054.10	48,359.69	$e^{0.02}$	1.02020134	49,336.62
4	49,336.62	5,559.51	43,777.11	$e^{0.02}$	1.02020134	44,661.47
5	44,661.47	6,115.46	38,546.01	$e^{0.02}$	1.02020134	39,324.69
6	39,324.69	6,727.00	32,597.69	$e^{0.02}$	1.02020134	33,256.20
7	33,256.20	7,399.70	25,856.50	$e^{0.02}$	1.02020134	26,378.83
8	26,378.83	8,139.67	18,239.16	$e^{0.02}$	1.02020134	18,607.61
9	18,607.61	8,953.64	9,653.97	$e^{0.02}$	1.02020134	9,848.99
10	9,848.99	9,849.01	- 0.01			

Elaboración propia

Ahora se confrontará la evolución de los saldos mensuales para ambos casos. Con ello se obtendrá dos matrices de datos.

Saldo al final del	Conversión discreta X	Conversión continua Y
Mes 1	56,950.52	56,950.76
Mes 2	53,413.35	53,413.79
Mes 3	49,336.02	49,336.62
Mes 4	44,660.75	44,661.47
Mes 5	39,323.91	39,324.69
Mes 6	33,255.42	33,256.20
Mes 7	26,378.11	26,378.83
Mes 8	18,607.03	18,607.61
Mes 9	9,848.64	9,848.99
Mes 10	-	-

Proceso e interpretación de los datos

Ahora se determinará la correlación de ambas matrices. Para ello se utilizará una fórmula del programa informático Excel:

=COEF.DE.CORREL(MATRIZ1,MATRIZ2)

El resultado que se obtiene es:

r = 1.0000

Mientras más se acerca a 1, mayor es la correlación directa. El resultado indica que es una correlación lineal positiva perfecta.

Luego, se puede concluir que, al tener la evolución de los saldos correlación lineal positiva perfecta, ambas fórmulas cumplen con la condición de disminución progresiva hasta aproximarse a cero. Por lo cual la fórmula que emplea el número inconmensurable épsilon para repago de deudas con cuotas adelantadas, es válida.

5.2. Resultados inferenciales

Primera hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas.

La primera hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Segunda hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.
La segunda hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de las tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Hipótesis general

Al haber sido demostradas la dos hipótesis específicas, se ha demostrado la hipótesis general.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

Primera hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas.

La primera hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Segunda hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.

La segunda hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de las tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Hipótesis general

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua.

Al ser probadas las dos hipótesis específicas, referentes al repago de deudas con cuotas vencidas y con cuotas adelantadas, queda también demostrada la hipótesis general.

6.2. Contrastación de la hipótesis con estudios similares

DeGarmo, P. (1997) en su obra Ingeniería económica, sí aborda el tema de la conversión continua, pero se limita a desarrollar casos con pagos constantes y vencidos. Es decir, no emplea gradientes. Tampoco desarrolla las respectivas tablas de retorno. En tal sentido, el presente trabajo de investigación muestra una marcada diferencia.

6.3. Responsabilidad ética

Este trabajo es de absoluta responsabilidad del autor. Asimismo, se han respetado los derechos de autor. Todas las definiciones incluidas en el marco teórico y en otros capítulos, han sido debidamente referenciadas.

CONCLUSIONES

Objetivo general

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Objetivos específicos

Primer objetivo específico: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas vencidas.

Se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues las fórmulas aquí creadas permiten establecer métodos de repago con tasas convertibles en forma continua y con cuotas vencidas.

Segundo objetivo específico: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas adelantadas.

Se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues las fórmulas aquí creadas permiten establecer métodos de repago con tasas convertibles en forma continua y con cuotas adelantadas.

Objetivo general: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Igualmente, se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues el uso de las fórmulas aquí creadas permite ampliar el conocimiento y las competencias profesionales en el campo del repago de deudas.

RECOMENDACIONES

a) Seguir investigando en el campo del repago de deudas, a efectos de encontrar más aplicaciones para apoyar en las operaciones de cálculo financiero.
b) Intensificar la difusión de conocimientos básicos del cálculo financiero, a efectos de propiciar la aparición de más investigadores que contribuyan en el desarrollo de este campo de la matemática aplicada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, Aníbal (1995). *Matemática Financiera*. Lima: Editorial San Marcos.

DeGarmo, Paul (1997). *Ingeniería Económica.* México: Prentice Hall.

Haeussler, Ernest; et al. (1997) *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. México: Prentice Hall.

Valderrama, S. (2014) Pasos para elaborar proyectos de investigación científica. Editorial San Marcos, Lima.

Velázquez, A. y Rey, N. (1999). Metodología de la Investigación científica. Editorial San Marcos, Lima.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA
REPAGO DE DEUDAS CON CAPITALIZACIÓN CONTINUA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	METODOLOGÍA
Problema general ¿Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con una tasa nominal que se capitaliza en forma continua?	**Objetivo general** Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.	**Hipótesis general** El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua.	**Independiente** Empleo del número épsilon y de las progresiones	**V. independiente** Límite del factor de capitalización Razón constante de incremento o disminución	Factores	Método científico. Enfoque: Investigación cuantitativa. Tipo de investigación: Aplicada. Diseño experimental Coeficiente de Pearson.
Problemas específicos ¿Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con pagos vencidos y tasa continua? ¿Cómo se puede construir fórmulas que permitan repagar deudas con pagos adelantados y tasa continua?	**Objetivos específicos** Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas vencidas. Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas adelantadas.	**Hipótesis específicas** El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas. El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.	**Dependiente** Fórmulas para repagar deudas con una tasa continua	**V. dependiente** Repago con cuotas vencidas Repago con cuotas adelantadas	Tablas de retorno y amortización	

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES

ARTÍCULO CIENTÍFICO

“Repago de deudas con capitalización continua”

Autor: Walter Zans Arimana

Callao, 2022

PERÚ

I. RESUMEN

El presente trabajo de investigación abordó el problema del repago de deudas con una tasa nominal que se capitaliza en forma instantánea. Para lograr fórmulas conducentes al cálculo de las respectivas cuotas, se emplearon los factores de la conversión continua. En cuanto a la metodología, la investigación fue aplicada, de enfoque cuantitativo, con diseño no experimental y transversal. Los resultados indican que las fórmulas así logradas, permiten en efecto calcular cuotas constantes y variables, con tasas nominales que se capitalizan instantáneamente.

Palabras clave: repago de deudas, conversión continua.

II. ABSTRACT

The present research paper addressed the problem of debt repayment with a nominal rate that is capitalized instantaneously. To achieve formulas leading to the calculation of the respective quotas, continuous conversion factors were used. Regarding the methodology, the research was applied, with a quantitative approach, with a non-experimental and cross-sectional design. The results indicate that the formulas thus achieved allow in effect to calculate constant and variable quotas, with nominal rates that are capitalized instantaneously.

Keywords: debt repayment, continuous conversion.

III. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación, “Repago de deudas con capitalización continua” tuvo como objetivo principal la obtención de fórmulas que permitan pagar deudas, en lo que se refiere al cálculo de cuotas y de valores actuales, empleando tasas nominales capitalizables en forma continua o instantánea. Para ello se recurrió al número inconmensurable épsilon, el cual se deriva del desarrollo en serie del binomio de Newton.

Este trabajo busca ser un material de consulta útil para un mayor conocimiento del cálculo financiero.

Antecedentes

A nivel nacional, no es posible encontrar un trabajo similar. Es habitual que los autores de textos de matemática financiera dejen de lado la conversión continua, o la desarrollen mínimamente, diciendo que tales aplicaciones son propias de la ingeniería económica.

Justificación

Todo vacío de conocimiento amerita que se apliquen tiempo, trabajo y recursos para llenarlo. Las fórmulas aquí creadas podrán ser utilizadas por todos los profesionales vinculados al cálculo financiero.

Objetivos

Objetivo general

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Objetivos específicos

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas vencidas.

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas adelantadas.

Hipótesis

Hipótesis general

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua.

Hipótesis específicas

- El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas.

- El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.

IV. MATERIALES Y MÉTODOS

Tipo y diseño

La investigación es descriptiva y transversal. El diseño es no experimental.

Población y muestra

La población a ser empleada en el presente estudio, está constituida por los métodos de repago conocidos.

La muestra es censal porque está conformada por los métodos de repago conocidos.

Técnicas e instrumentos

Se emplearon diagramas de flujo.

También se usaron formularios físicos y hojas de cálculo.

Análisis y procesamiento de datos

Se empleó hoja de cálculo.

Se empleó también el coeficiente de correlación de Pearson.

V. RESULTADOS

Repago de deudas con capitalización continua, cuotas vencidas

En este caso se aplican las propiedades de las anualidades y las fórmulas de la conversión continua.

Cuotas variables aritméticamente, conversión continua

P = 50,000

j = TNM 0.02 CC

n = 5

R = ?

$$P = R\ \frac{[\,1 + 1/(e^{j} - 1)\,]\ [\,e^{nj} - 1\,] - n}{(e^{j} - 1)\ (e^{nj})}$$

$$50{,}000 \quad R\ \frac{1 + 1/(e^{0.02} - 1)\,]\ [\,e^{5\times 0.02} - 1\,] - 5}{(e^{0.02} - 1)\ (e^{5\times 0.02})}$$

R = 3,585.84

Cuotas variables aritméticamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	50,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	51,010.07	3,585.84	47,424.23
2	47,424.23	$e^{0.02}$	1.02020134	48,382.26	7,171.68	41,210.58
3	41,210.58	$e^{0.02}$	1.02020134	42,043.09	10,757.52	31,285.57
4	31,285.57	$e^{0.02}$	1.02020134	31,917.58	14,343.36	17,574.22
5	17,574.22	$e^{0.02}$	1.02020134	17,929.24	17,929.20	0.04

Puede notarse que, en efecto, la cuota calculada con conversión continua cumple con reducir progresivamente la deuda hasta su extinción.

Cuotas variables geométricamente, conversión continua

P = 40,000

j = 0.02 TNM CC

n = 5

g = 0.10

R = ?

$$P = R \frac{(1+g)^{n} - e^{nj}}{e^{nj} \quad [g - (e^{j} - 1]}$$

$$40000 = R \frac{(1.10)^{5} - e^{5\times2}}{e^{5\times2} \quad [0.10 - (e^{0.02} -)]}$$

$$= \quad 6,980.75$$

Cuotas variables geométricamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	40,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	40,808.05	6,980.75	33,827.30
2	33,827.30	$e^{0.02}$	1.02020134	34,510.66	7,678.83	26,831.84
3	26,831.84	$e^{0.02}$	1.02020134	27,373.87	8,446.71	18,927.17
4	18,927.17	$e^{0.02}$	1.02020134	19,309.52	9,291.38	10,018.14
5	10,018.14	$e^{0.02}$	1.02020134	10,220.52	10,220.52	0.01

Cuotas variables aritméticamente con gradiente predeterminado

P = 35,000

j = 0.02 TNM CC

n = 5

g = 1,000

R = ?

$$P = R \frac{e^{nj} - 1}{(e^{j} - 1)\, e^{nj}} + g \frac{(1 + 1/(e^{j} - 1)\ [(e^{j})^{k} - 1] - k}{(e^{j} - 1)\,(e^{j})^{k}} \frac{1}{(e^{j})^{n-k}}$$

$$35000 = R \frac{e^{5\times0.02} - 1}{(e^{0.02} - 1)\, e^{5\times0.02}} + g \frac{1 + 1/(e^{0.02} - 1)\ [(e^{0.02})^{3} - 1] - 3}{(e^{0.02} - 1)\,(e^{0.02})^{3}} \frac{1}{(e^{0.02})^{5-3}}$$

$R = 6{,}271.79$

Cuotas variables con gradiente predeterminado y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	35,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	35,707.05	6,261.79	29,445.26
2	29,445.26	$e^{0.02}$	1.02020134	30,040.09	6,261.79	23,778.30
3	23,778.30	$e^{0.02}$	1.02020134	24,258.65	7,261.79	16,996.86
4	16,996.86	$e^{0.02}$	1.02020134	17,340.22	8,261.79	9,078.43
5	9,078.43	$e^{0.02}$	1.02020134	9,261.83	9,261.79	0.04

Repago de deudas con capitalización continua, cuotas adelantadas

Cuotas constantes adelantadas, conversión continua

$P = 30{,}000.00$

$j = 0.02$ TNM CC

$n = 5$

$R = ?$ adelantadas

$$P = R\,\frac{e^{j}}{e^{j}-1}\,\frac{e^{nj}-1}{e^{nj}}$$

$$P = R\,\frac{e^{0.02}}{e^{0.02}-1}\,\frac{e^{5\times0.02}-1}{e^{5\times0.02}}$$

$R = 6{,}242.37$

Cuotas adelantadas y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda final
1	30,000.00	6,242.37	23,757.63	e^j	1.020201340	24,237.57
2	24,237.57	6,242.37	17,995.20	e^j	1.020201340	18,358.72
3	18,358.72	6,242.37	12,116.35	e^j	1.020201340	12,361.12
4	12,361.12	6,242.37	6,118.75	e^j	1.020201340	6,242.36
5	6,242.36	6,242.37	- 0.01	e^j		

Cuotas variables geométricamente y adelantadas, con conversión continua

P = 40,000

j = 0.02 TNM CC

n = 5

g = 0.10

R = ? adelantadas

$$P = R \quad e^{j} \quad \frac{(1+g)^{n} - e^{nj}}{e^{nj} \quad [\, g - (e^{j} - 1)\,]}$$

$$40000 = R \quad e^{0.02} \quad \frac{(1.10)^{5} - e^{5\times0.02}}{e^{5\times0.02} \quad (0.10 - e^{0.02} - 1)}$$

$$= \quad 6{,}842.52$$

Cuotas adelantadas variables geométricamente y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda Final
1	40,000.00	6,842.52	33,157.48	$e^{0.02}$	1.020201340	33,827.31
2	33,827.31	7,526.77	26,300.53	$e^{0.02}$	1.020201340	26,831.84
3	26,831.84	8,279.45	18,552.39	$e^{0.02}$	1.020201340	18,927.17
4	18,927.17	9,107.39	9,819.78	$e^{0.02}$	1.020201340	10,018.15
5	10,018.15	10,018.13	0.02			

a) Para contrastación del repago con cuotas vencidas

Ahora se contrastan dos casos de repago con datos similares y cuc [illegible]. Pero un caso implicará capitalización discreta y el otro implicará capitalización continua.

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables vencidas y en progresión aritmética, con TNM 0.02 capitalizable diariamente.

P = 60000

j = 0.02 TNM CD

TEM = 0.02019454

n = 10

R = ? vencidas

$$P = R \frac{(1 + 1/i)\ [(1+i)^{n} - 1] - n}{i\,(1+i)^{n}}$$

$$60000 = R \frac{(1 + 1/0.02019454)\ [(1.02019454)^{10} - 1] - 10}{0.02019454\,(1.02019454)^{10}}$$

R = 1,253.27

Cuotas variables aritméticamente, vencidas, conversión discreta

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	60,000.00	1.02019454	61,211.67	1,253.27	59,958.40
2	59,958.40	1.02019454	61,169.23	2,506.54	58,662.69
3	58,662.69	1.02019454	59,847.36	3,759.81	56,087.55
4	56,087.55	1.02019454	57,220.21	5,013.08	52,207.13
5	52,207.13	1.02019454	53,261.43	6,266.35	46,995.08
6	46,995.08	1.02019454	47,944.13	7,519.62	40,424.51
7	40,424.51	1.02019454	41,240.86	8,772.89	32,467.97
8	32,467.97	1.02019454	33,123.65	10,026.16	23,097.49
9	23,097.49	1.02019454	23,563.93	11,279.43	12,284.50
10	12,284.50	1.02019454	12,532.58	12,532.70	- 0.12

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables vencidas y en progresión aritmética, con TNM 0.02 capitalizable en forma continua.

P = 60,000

j = TNM 0.02 CC

$n = 10$

$R = ?$ vencidas

$$P = R \frac{[\,1 + 1/(e^{j} - 1)\,]\;[\,e^{nj} - 1\,] - n}{(e^{j} - 1)\,(e^{nj})}$$

$$60{,}000 = R \frac{[\,1 + 1/(e^{0.02} - 1)\,]\;[\,e^{10\times 0.02} - 1\,] - 10}{(e^{0.02} - 1)\,(e^{10\times 0.02})}$$

$R = 1{,}253.33$

Cuotas variables aritméticamente, vencidas, conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial	Factor mensual	Factor mensual	Deuda capitalizada	Pago variable	Deuda Final
1	60,000.00	$e^{0.02}$	1.02020134	61,212.08	1,253.33	59,958.75
2	59,958.75	$e^{0.02}$	1.02020134	61,170.00	2,506.66	58,663.34
3	58,663.34	$e^{0.02}$	1.02020134	59,848.42	3,759.99	56,088.43
4	56,088.43	$e^{0.02}$	1.02020134	57,221.49	5,013.32	52,208.17
5	52,208.17	$e^{0.02}$	1.02020134	53,262.84	6,266.65	46,996.19
6	46,996.19	$e^{0.02}$	1.02020134	47,945.58	7,519.98	40,425.60
7	40,425.60	$e^{0.02}$	1.02020134	41,242.25	8,773.31	32,468.94
8	32,468.94	$e^{0.02}$	1.02020134	33,124.86	10,026.64	23,098.22
9	23,098.22	$e^{0.02}$	1.02020134	23,564.83	11,279.97	12,284.86
10	12,284.86	$e^{0.02}$	1.02020134	12,533.03	12,533.30	- 0.27

Ahora se confrontará la evolución de los saldos mensuales para ambos casos.

Con ello se obtendrá dos matrices de datos.

Saldo al final del	Conversión discreta X	Conversión continua Y
Mes 1	59,958.40	59,958.75
Mes 2	58,662.69	58,663.34
Mes 3	56,087.55	56,088.43
Mes 4	52,207.13	52,208.17
Mes 5	46,995.08	46,996.19
Mes 6	40,424.50	40,425.60
Mes 7	32,467.96	32,468.94
Mes 8	23,097.48	23,098.22
Mes 9	12,284.49	12,284.86
Mes 10	- 0.13	- 0.27

Proceso e interpretación de los datos

Ahora se determinará la correlación de ambas matrices. Para ello se utilizará una fórmula del programa informático Excel:

=COEF.DE.CORREL(MATRIZ1,MATRIZ2)

El resultado que se obtiene es:

r = 1.0000

Mientras más se acerca a 1, mayor es la correlación directa. El resultado indica que es una correlación alta.

De lo anterior se desprende que la correlación es lineal positiva perfecta.

Luego, se puede concluir que, al tener la evolución de los saldos correlación lineal positiva perfecta, ambas fórmulas cumplen con la condición de disminución progresiva hasta aproximarse a cero. Por lo cual la fórmula que emplea el número inconmensurable épsilon para repago de deudas con cuotas vencidas, es válida.

b) Para contrastación del repago con cuotas adelantadas

Ahora se contrastarán dos casos de repago con datos similares y cuotas adelantadas. Pero un caso implicará capitalización discreta y el otro implicará capitalización continua.

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables adelantadas y en progresión geométrica, con TNM 0.02 capitalizable diariamente.

P = 60000

j = 0.02 TNM CD

TEM 0.02019454

n = 10

g = 0.10

R = ? adelantada

$$P = R \quad (1+i) \quad \frac{(1+g)^{n} - (1+i)^{n}}{(1+i)^{n} \quad (g - i)}$$

$$40000 = R \quad (1.02019454) \quad \frac{(1.10)^{10} - (1.02019454)^{10}}{(1.02019454)^{10} \quad (0.10 - 0.02019454)}$$

R = 4,176.80

Cuotas variables geométricamente, adelantadas y conversión discreta

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Deuda Final
1	60,000.00	4,176.80	55,823.20	1.02019454	56,950.52
2	56,950.52	4,594.48	52,356.04	1.02019454	53,413.35
3	53,413.35	5,053.93	48,359.42	1.02019454	49,336.02
4	49,336.02	5,559.32	43,776.70	1.02019454	44,660.75
5	44,660.75	6,115.25	38,545.50	1.02019454	39,323.91
6	39,323.91	6,726.78	32,597.13	1.02019454	33,255.42
7	33,255.42	7,399.46	25,855.96	1.02019454	26,378.11
8	26,378.11	8,139.40	18,238.71	1.02019454	18,607.03
9	18,607.03	8,953.34	9,653.69	1.02019454	9,848.64
10	9,848.64	9,848.68	- 0.04		

Sea una deuda de S/ 60,000 que se pagará con diez cuotas mensuales variables adelantadas y en progresión geométrica, con TNM 0.02 capitalizable en forma continua.

P = 60,000

j = 0.02 TNM CC

n = 10

g = 0.10

R = ? adelantada

$$P = R \quad e^{j} \quad \frac{(1+g)^{n} - e^{nj}}{e^{nj} \quad [\, g - (e^{j} - 1) \,]}$$

$$60000 = R \quad e^{0.02} \quad \frac{(1.10)^{5} - e^{5\times 0.02}}{e^{5\times 0.02} \quad (0.10 - e^{0.02} - 1)}$$

$$60000 = R \quad 1.02020134 \quad \frac{(1.10)^{5} - 1.22140276}{1.22140276 \quad (0.10 - 0.02020134)}$$

R = 4,176.94

Cuotas variables geométricamente, adelantadas y conversión continua

Nro. cuota	Deuda inicial nominal	Pago variable adelantado	Deuda inicial real	Factor mensual	Factor mensual	Deuda Final
1	60,000.00	4,176.94	55,823.06	$e^{0.02}$	1.02020134	56,950.76
2	56,950.76	4,594.63	52,356.13	$e^{0.02}$	1.02020134	53,413.79
3	53,413.79	5,054.10	48,359.69	$e^{0.02}$	1.02020134	49,336.62
4	49,336.62	5,559.51	43,777.11	$e^{0.02}$	1.02020134	44,661.47
5	44,661.47	6,115.46	38,546.01	$e^{0.02}$	1.02020134	39,324.69
6	39,324.69	6,727.00	32,597.69	$e^{0.02}$	1.02020134	33,256.20
7	33,256.20	7,399.70	25,856.50	$e^{0.02}$	1.02020134	26,378.83
8	26,378.83	8,139.67	18,239.16	$e^{0.02}$	1.02020134	18,607.61
9	18,607.61	8,953.64	9,653.97	$e^{0.02}$	1.02020134	9,848.99
10	9,848.99	9,849.01	- 0.01			

Ahora se confronta la evolución de los saldos mensuales para ambos casos. Con ello se obtiene dos matrices de datos.

Saldo al final del	Conversión discreta X	Conversión continua Y
Mes 1	56,950.52	56,950.76
Mes 2	53,413.35	53,413.79
Mes 3	49,336.02	49,336.62
Mes 4	44,660.75	44,661.47
Mes 5	39,323.91	39,324.69
Mes 6	33,255.42	33,256.20
Mes 7	26,378.11	26,378.83
Mes 8	18,607.03	18,607.61
Mes 9	9,848.64	9,848.99
Mes 10	-	-

Proceso e interpretación de los datos

Ahora se determinará la correlación de ambas matrices. Para ello se utilizará una fórmula del programa informático Excel:

=COEF.DE.CORREL(MATRIZ1,MATRIZ2)

El resultado que se obtiene es:

r = 1.0000

Mientras más se acerca a 1, mayor es la correlación directa. El resultado indica que es una correlación lineal positiva perfecta.

Luego, se puede concluir que, al tener la evolución de los saldos correlación lineal positiva perfecta, ambas fórmulas cumplen con la condición de disminución progresiva hasta aproximarse a cero. Por lo cual la fórmula que emplea el número inconmensurable épsilon para repago de deudas con cuotas adelantadas, es válida.

VI. DISCUSIÓN

Primera hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas vencidas.

La primera hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Segunda hipótesis específica

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua y cuotas adelantadas.

La segunda hipótesis específica ha sido plenamente demostrada, por cuanto al contrastar el movimiento de las tablas de retorno, lo cual corresponde a la disminución progresiva del saldo, se ha establecido una relación lineal positiva perfecta.

Hipótesis general

El empleo de las propiedades del número inconmensurable épsilon y de las progresiones permitirá construir fórmulas para repagar deudas con una tasa continua.

VII. CONCLUSIONES

Objetivo general

Contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Objetivos específicos

Primer objetivo específico: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas vencidas.

Se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues las fórmulas aquí creadas permiten establecer métodos de repago con tasas convertibles en forma continua y con cuotas vencidas.

Segundo objetivo específico: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas con cuotas adelantadas.

Se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues las fórmulas aquí creadas permiten establecer métodos de repago con tasas convertibles en forma continua y con cuotas adelantadas.

Objetivo general: contribuir al incremento del conocimiento en el campo del repago de deudas.

Igualmente, se puede considerar que este objetivo ha sido alcanzado, pues el uso de las fórmulas aquí creadas permite ampliar el conocimiento y las competencias profesionales en el campo del repago de deudas.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, Aníbal (1995). *Matemática Financiera*. Lima: Editorial San Marcos.

DeGarmo, Paul (1997). *Ingeniería Económica.* México: Prentice Hall.

Haeussler, Ernest; et al. (1997) *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. México: Prentice Hall.

Valderrama, S. (2014) Pasos para elaborar proyectos de investigación científica. Editorial San Marcos, Lima.

Velázquez, A. y Rey, N. (1999). Metodología de la Investigación científica. Editorial San Marcos, Lima.