UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

INTERPOLACIÓN DE OPERADORES Y SUS APLICACIONES

Autor: Dionicio Orlando Moreno Vega

Linea de investigación: Matemática pura

(Periódo de ejecución: Del 01.04.2023 al 31.03.2024)

(Resolución de aprobación N° 277-2023-R)

Callao 2024

Perú

INFORMACIÓN BÁSICA

Facultad:
Ciencias Naturales y Matemática.

Unidad de Investigación:
Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Título:
Interpolación de Operadores y sus Aplicaciones

Autor:
Dionicio Orlando Moreno Vega
Código Orcid: 0000-0002-1522-0511
DNI: 09547775

Colaborador:
Ninguno

Lugar de Ejecución:
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Universidad Nacional del Callao

Tipo de Investigación:
Básica. Investigación de revisión.

Apoyo Administrativo:
Patricia del Carmen Giron Hidalgo

DEDICATORIA

A mi familia

AGRADECIMIENTO

A la señora Patricia del Carmen Giron Hidalgo, personal administrativo, por su colaboración durante el desarrollo del presente proyecto.

Al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Nacional del Callao por la subvención para el desarrollo del proyecto.

Índice

Resumen

En estas notas, exploramos y proporcionamos demostraciones detalladas de dos teoremas fundamentales en el campo de la interpolación de operadores: el Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin, que se aplica a operadores de tipos fuertes, y el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, que se utiliza para operadores de tipo débil. Nuestro análisis se centra en aplicaciones significativas de estos teoremas. En particular, examinamos la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood, un concepto central en el análisis armónico, discutimos cómo las estimativas de tipo débil permiten pasar a estimativas de tipo fuerte mediante la interpolación de Marcinkiewicz. También investigamos la acotación de la transformada de Fourier y la desigualdad de Young para la convolución, una herramienta esencial en el análisis de Fourier. Nuestro objetivo es proporcionar una comprensión más profunda de estos teoremas y su relevancia en la teoría de la interpolación de operadores, con la esperanza de fomentar futuras investigaciones y aplicaciones en este campo fascinante.

Palabras clave. Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin, Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, Desigualdad de Hausdorff-Young, desigualdad de convolución de Young, ecuación de Schrödinger, operador maximal de Hardy-Littlewood.

Abstract

In these notes, we explore and provide detailed demonstrations of two fundamental theorems in the field of operator interpolation: the Riesz-Thorin Interpolation Theorem, which applies to operators of strong types, and the Marcinkiewicz Interpolation Theorem, which is used for operators of weak type. Our analysis focuses on significant applications of these theorems. In particular, we examine the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, a central concept in harmonic analysis, and discuss how weak type estimates allow us to move to strong type estimates through Marcinkiewicz interpolation. We also investigate the boundedness of the Fourier transform and Young's inequality for convolution, an essential tool in Fourier analysis. Our goal is to provide a deeper understanding of these theorems and their relevance in the theory of operator interpolation, with the hope of fostering future research and applications in this fascinating field.

Keywords. Riesz-Thorin Interpolation Theorem, Marcinkiewicz Interpolation Theorem, Hausdorff-Young inequality, Young convolution inequality, Schrödinger equation, Hardy-Littlewood maximal operator.

Introducción

Existen diversas razones para estudiar la teoría de interpolación. Por un lado, puede ser impulsada por la curiosidad matemática inherente a la disciplina. Por otro lado, puede ser atraída por sus numerosas aplicaciones como, La desigualdad de Hausdorff-Young que establece acotación en la transformada de Fourier, la desigualdad de convolución de Young que proporciona acotación para la convolución de funciones, las desigualdades de dispersión para la ecuación de Schrodinger que es fundamental en la teoría cuántica y teoría de fluidos, la acotación del operador maximal que es un concepto clave en el análisis armónico y la generalización de la desigualdad de Young que extiende la desigualdad original a contextos más generales.

Frecuentemente, se estudian operadores de diversas clases con el objetivo de determinar si están acotados o no al pasar de un espacio de medida a otro. En muchas ocasiones, estos operadores poseen una expresión analítica que es aplicable a un conjunto específico o a tipos de funciones fácilmente manejables. Sin embargo, carece de sentido cuando intentamos extender el dominio del operador a un espacio más general o a un espacio de funciones diferente. La teoría de interpolación puede proporcionar información valiosa para resolver este tipo de problemas.

La interpolación de operadores en los espacios $L^p(\mu)$ se basa en una hipótesis que incluye dos estimativas, $A_0 \leq C_0 B_0$ y $A_1 \leq C_1 B_1$. A partir de estas, se deduce una familia de estimativas intermediarias $A_\alpha \leq C_\alpha B_\alpha$, donde C_0, C_1 y C_α son constantes para cualquier elección del parámetro $1 < \alpha < 1$. Este tipo de problemas son frecuentes en la Física y en diversas ramas de las Matemáticas.

El primer hito en la interpolación de operadores se remonta al año 1911, con un resultado de Schur [6]. De hecho, en ese artículo, Schur establece que si T es un operador lineal y continuo en los espacios de sucesiones ℓ^1 y ℓ^∞, entonces también está acotado del espacio ℓ^p en sí mismo, para todo $p \geq 1$. Un año después, Young [7] formuló un resultado del mismo tipo. Durante la primera mitad del siglo XX, matemáticos destacados como Marcel Riesz [9], G. Olof Thorin [10] y Josef Marcinkiewicz [13] ampliaron estos resultados a operadores lineales y sublineales entre espacios de Lebesgue generales.

Tartar [11], proporciona una prueba alternativa del teorema de interpolación de Riesz-Thorin para operadores de tipo fuerte $(1, 1)$ y (∞, ∞). Su método caracteriza la norma $L^p(\mu)$ en términos de los espacios de Lebesgue $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$, y funciona no solo para espacios de Lebesgue complejos sino también para espacios de Lebesgue real. Yoichi Miyazaki [14] extiende el resultado de Tartar para operadores de tipo fuerte (p_1, q_1) y (∞, ∞) con $1 < p_1 < q_1 < \infty$. Lech Maligranda [12], presenta una prueba simple del teorema de interpolación real Riesz–Thorin para operadores de tipos fuertes (p_0, q_0) y (∞, ∞) en el triángulo inferior, es decir, si $0 < p_0 \leq q_0 < \infty$ con la mejor estimativa de las normas.

En estas notas, ofrecemos dos resultados fundamentales en la teoría de interpolación de operadores: el Teorema de Interpolación de M. Riesz y G. O. Thorin y el Teorema de Józef Marcinkiewicz. El Teorema de Interpolación Riesz-Thorin establece que si un operador lineal está acotado en dos espacios $L^p(\mu)$, entonces también estará acotado en todos los espacios $L^p(\mu)$ intermedios entre estos dos. Por otro lado, el Teorema Marcinkiewicz proporciona una herramienta poderosa para demostrar que un operador sublineal, que cumple con estimativas de tipo débil, estará acotado en cualquier espacio $L^p(\mu)$ que se encuentre entre los dos espacios $L^p(\mu)$ débiles. Seguimos en gran medida la presentación en [Budge Folland Gerald, Real analysis, (1999), [3]].

Después de nuestra discusión sobre los dos teoremas de interpolación, consideramos varias aplicaciones: la acotación del operador maximal Hardy-Littlewood (Teorema 15), la Desigualdad de Hausdorff-Young para la transformada de Fourier (Teorema 12), la desigualdad de Young para convolución (Teorema 13) y las desigualdades de dispersión para la ecuación de Schrödinger.

I. Planteamiento del Problema

I.1 Descripción de la realidad problemática

La interpolación de operadores en los espacios de Lebesgue es un pilar fundamental en el análisis real. Un espacio de interpolación se define como un espacio que se sitúa entre dos espacios de Banach. Sus aplicaciones más destacadas se encuentran en los espacios de Sobolev, donde se interpolan espacios de funciones con un número no entero de derivadas a partir de espacios de funciones con un número entero de derivadas.

No obstante, este tema presenta varios desafíos y problemas que pueden complicar su comprensión y aplicación.

Los espacios $L^p(\mu)$, que son espacios de funciones medibles con respecto a una medida dada, donde p es un número real positivo, requieren un sólido entendimiento de la teoría de la medida y la integración.

Los teoremas de interpolación, como el Teorema de Riesz-Thorin y el Teorema de Marcinkiewicz, son fundamentales en este campo. Sin embargo, debido a su naturaleza abstracta y matemática, estos teoremas pueden resultar difíciles de comprender y aplicar.

A pesar de que la interpolación de operadores en espacios $L^p(\mu)$ tiene numerosas aplicaciones teóricas, puede ser un desafío encontrar aplicaciones prácticas directas. Esto puede llevar a que algunos estudiantes o investigadores perciban este tema como desconectado de la realidad.

I.2 Formulación del problema

I.2.1 Problema general

Un espacio de Banach X se dice que está inmerso continuamente en otro espacio de Banach Y si cumple con dos condiciones: en primer lugar, X debe ser un subespacio vectorial de Y; en segundo lugar, la aplicación de inclusión que mapea X en Y debe ser continua.

Las inmersiones continuas de los espacios de Banach X_0 y X_1 en un espacio vectorial Y nos permite considerar dos espacios de Banach específicos.

$$X_0 \cap X_1 \quad \text{y} \quad X_0 + X_1 = \{z \in Z : z = x_0 + x_1, \ \ x_0 \in X_0, \ x_1 \in X_1\}.$$

con las normas,

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} := \text{máx}\left(\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\right),$$

$$\|x\|_{X_0+X_1} := \text{ínf}\left\{\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\right\}.$$

Las siguientes inclusiones son todas continuas

$$X_0 \cap X_1 \subset X_i, \quad X_i \subset X_0 + X_1 \quad i = \{0, 1\}.$$

La interpolación estudia la familia de espacios X que son espacios intermediarios entre X_0 y X_1 en el sentido que

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1,$$

donde las dos aplicaciones de inclusión son continuas.

I.2.2 Problema Específico

a) Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin. Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ dos espacios de medida y $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$. Si $q_0 = q_1 = +\infty$, suponga que ν es semifinita. Para $0 < t < 1$, define p_t y q_t por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}; \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Si T es una transformación lineal de $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ tal que:

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq M_0\|f\|_{L^{p_0}(\mu)}, \quad \text{para todo} \quad f \in L^{p_0}(\mu)$$

y

$$\|Tf\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq M_1\|f\|_{L^{p_1}(\mu)}, \quad \text{para todo} \quad f \in L^{p_1}(\mu),$$

demostraremos que

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{L^{p_t}(\mu)} \quad \text{para todo} \quad f \in L^{p_t}(\mu).$$

b) Teorema interpolación de Marcinkiewicz. Supongamos que $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ son espacios de medida; p_0, p_1, q_0, q_1 son elementos de $[1, \infty]$, tal que $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, y $q_0 \neq q_1$; y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \quad \text{donde} \quad 0 < t < 1.$$

Si T es una aplicación sublineal desde $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ para el espacio de funciones medibles en Y que es tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1), entonces T es tipo fuerte (p, q). Más precisamente, si

$$[Tf]_{q_j} \leq C_j\|f\|_{p_j}, \quad j = 0, 1,$$

demostraremos que

$$\|Tf\|_q \leq B_p\|f\|_p$$

donde B_p depende solo de $p_j; q_j; C_j$ además de p;.

I.3 Objetivos

I.3.1 Objetivo General

El propósito de este estudio es explorar y clarificar los teoremas de interpolación de operadores de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz. Nuestro enfoque se centrará en profundizar en los fundamentos teóricos de estos teoremas y en buscar activamente las aplicaciones de estos resultados.

I.3.1 Objetivo Específico

El objetivo específico de este estudio es llevar a cabo una demostración meticulosa del teorema de interpolación de Riesz-Thorin en los espacios de Lebesgue, utilizando herramientas de análisis funcional y análisis complejo. Asimismo, se presentará una demostración detallada del teorema de Marcinkiewicz en el espacio $L^p(\mu)$ débil. Se buscará una comprensión profunda de las hipótesis y conclusiones de estos teoremas, así como de los métodos y técnicas empleados en sus demostraciones. Además, exploraremos las aplicaciones de estos teoremas en áreas como el análisis armónico, el análisis de Fourier y las ecuaciones diferenciales parciales.

I.4 Justificación

Los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz son fundamentales en el análisis real y tienen aplicaciones en una variedad de campos, lo que justifica su estudio detallado.

Importancia teórica: Estos teoremas proporcionan un marco sólido para entender y definir operadores lineales entre diferentes espacios $L^p(\mu)$. Esto es crucial para el estudio de problemas en análisis funcional, análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales.

Aplicaciones prácticas: Los teoremas de interpolación tienen numerosas aplicaciones en matemática y física. Por ejemplo, son útiles en el estudio de las ecuaciones de Schrödinger en física cuántica y en el análisis armónico.

Avance del conocimiento: El estudio de estos teoremas contribuye al avance del conocimiento en matemática pura. Podemos descubrir nuevas propiedades y entender mejor la estructura y el comportamiento de los espacios $L^p(\mu)$ y los operadores lineales.

Formación académica: Para los estudiantes y académicos de matemática, el estudio de estos teoremas es una parte esencial de su formación. Ayuda a desarrollar habilidades de razonamiento abstracto y a entender conceptos fundamentales en análisis real.

En resumen, el estudio de los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz es esencial tanto desde una perspectiva teórica como práctica, y contribuye significativamente al avance del conocimiento en matemática.

I.5 Limitantes de la Investigación

- **Limitante Teórico**

Restricciones en los espacios: Los teoremas de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz se aplican a operadores lineales definidos entre espacios $L^p(\mu)$ o espacios $L^p(\mu)$ débiles. No se puede en general aplicar directamente a operadores definidos en otros espacios funcionales.

Limitaciones en los operadores: El teorema de Riesz-Thorin se aplican a operadores lineales acotados. No se pueden aplicar a operadores no acotados o no lineales. El teorema de Marcinkiewicz se aplica a operadores sublineales. No se puede aplicar a operadores en general

Restricciones en las hipótesis: Los teoremas de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz requieren ciertas hipótesis para ser válidos. Por ejemplo, el teorema de Riesz-Thorin requiere que el operador sea acotado en los espacios extremos, y el teorema de Marcinkiewicz requiere que el operador sea de tipo débil en los espacios extremos.

Limitaciones en las conclusiones: Estos teoremas proporcionan información sobre la norma del operador en los espacios intermedios $L^r(\mu)$, pero no dan información sobre la estructura detallada del operador en estos espacios.

Dificultad en la aplicación práctica: Aunque estos teoremas son muy útiles en teoría, pueden ser difíciles de aplicar en la práctica debido a la complejidad de verificar sus hipótesis y de calcular las constantes de interpolación.

Estas limitaciones no disminuyen la importancia de estos teoremas en el análisis real, pero es crucial tenerlas en cuenta al aplicar estos teoremas en la investigación.

- **Limitante Temporal**

El trabajo que presentamos es teórico; netamente abstracto, no tiene limitante temporal alguno; por tanto. NO APLICA.

- **Limitante Espacial**

Por el mismo argumento de la limitante temporal se considera que no existe limitante espacial. Por tanto, NO APLICA.

II. Marco Teórico

II.1 Antecedentes

II.1.1 Internacionales

Issai Schur [6], introdujo el primer resultado de interpolación de operadores, que afirma que si T es un operador lineal y continuo en el espacio de las sucesiones ℓ^1 y ℓ^∞, entonces también es acotado de ℓ^p en sí mismo, para todo $p \geq 1$.

Tartar [11], proporciona una prueba alternativa del teorema de interpolación de Riesz-Thorin para operadores de tipo fuerte $(1, 1)$ y (∞, ∞). Su método caracteriza la norma $L^p(\mu)$ en términos de los espacios de Lebesgue $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$, y funciona no solo para espacios de Lebesgue complejos sino también para espacios de Lebesgue real.

Yoichi Miyazaki [14] extiende el resultado de Tartar para operadores de tipo fuerte (p_1, q_1) y (∞, ∞) con $1 < p_1 < q_1 < \infty$.

Lech Maligranda [12], presenta una prueba simple del teorema de interpolación real Riesz–Thorin para operadores de tipos fuertes (p_0, q_0) y (∞, ∞) en el triángulo inferior, es decir, si $0 < p_0 \leq q_0 < \infty$ con la mejor estimativa de las normas.

II.1.2 Nacionales

No se encontró a la fecha trabajos de la teoría de interpolación de operadores en nuestro medio.

II.2 Marco

II.2.1 Teórico

La interpolación de operadores ha sido objeto de estudio por muchos años, y ha sido desarrollado y mejorado por diversos autores. Entre los trabajos más relevantes se encuentran los de Marcel Riesz [9], G. Olof Thorin [10] y Josef Marcinkiewicz [13]. En años recientes, se continua publicando diversos artículos que profundizan en las bases teóricas de la interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz, como Tartar [11], Lech Maligranda [12] y Yoichi Miyazaki [14].

El teorema de Riesz-Thorin, a menudo denominado teorema de interpolación de Riesz-Thorin o teorema de convexidad de Riesz-Thorin, es un resultado sobre la interpolación de operadores. Este teorema acota las normas de los operadores lineales que actúan entre espacios $L^p(\mu)$. Su utilidad proviene del hecho de que algunos de estos espacios tienen una estructura más simple que otros, como $L^2(\mu)$, que es un espacio de Hilbert, o $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$. Por lo tanto, uno puede probar teoremas sobre los casos más complicados probándolos en dos casos simples y luego usando el teorema de Riesz-Thorin para pasar de los casos simples a los casos complicados. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz, descubierto por Józef Marcinkiewicz, es un resultado que acota las normas de los operadores sublineales que actúan en espacios $L^p(\mu)$.

En este trabajo estudiaremos el teorema de interpolación clásico de Riesz-Thorin y el teorema de Marcinkiewicz y presentaremos diferentes aplicaciones. En el estudio de estos resultados son importantes los espacios de Lebesgue y los espacios de Lebesgue débil.

II.2.2 Conceptual

Es fácil demostrar que si una función f pertenece a los espacios $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ entonces también pertenece a $L^r(\mu)$ para todo $p \leq r \leq q$. Esta idea es generalizada por el teorema de Riesz-Thorin de la siguiente manera:

Consideramos a T como un operador lineal que cumple con las siguientes propiedades: T mapea de manera continua desde $L^{p_0}(\mu)$ a $L^{q_0}(\mu)$ y desde $L^{p_1}(\mu)$ a $L^{q_1}(\mu)$. Bajo estas condiciones, se puede establecer una estimativa de la norma de T que mapea un subespacio intermedio entre $L^{p_0}(\mu)$ y $L^{p_1}(\mu)$ hacia un subespacio intermedio entre $L^{q_0}(\mu)$ y $L^{q_1}(\mu)$. Es importante notar que recuperamos la afirmación inicial cuando consideramos a T como el operador identidad.

En la demostración del teorema de Riesz-Thorin, se utilizan funciones holomorfas para establecer un resultado dentro del análisis real. Posteriormente, introducimos los espacios $L^p(\mu)$ débiles para probar un segundo resultado de interpolación, conocido como el teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

II.3 Definición de Términos Básicos

Esta sección se basa en los materiales disponibles en las obras de Bartle [1], Brezis [2] y Folland [3]. Nuestro objetivo es revisar algunos resultados clave de la teoría de la medida.

El propósito principal de esta revisión es demostrar los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz, y explorar sus aplicaciones. Para alcanzar este objetivo, discutiremos sobre las σ-álgebras, las medidas y las funciones medibles, y examinaremos algunas de sus propiedades fundamentales. Además, estableceremos la definición de la integración de funciones medibles.

Iniciaremos nuestra discusión con la definición de una σ-álgebra. A lo largo de esta sección, nos esforzaremos por proporcionar una comprensión clara y concisa de estos conceptos y teoremas

Espacios medibles y funciones medibles

Definición 1. *Sea X conjunto. Una σ-álgebra en X es un conjunto $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X satisfaciendo*

i) $\emptyset \in \mathcal{X}$ *y* $X \in \mathcal{X}$,

ii) *Si* $A \in \mathcal{X}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{X}$,

iii) *Si* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{X}$ *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Un espacio medible es un par $(X, \mathcal{X})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{X}$ es una σ-álgebra en X.

Cualquier conjunto en $\mathcal{X}$ se llama conjunto $\mathcal{X}$-medible, pero cuando la σ-álgebra $\mathcal{X}$ es fijo (como suele ser el caso), normalmente se dirá que el conjunto es medible.

Observe que la intersección de cualquier colección no vacía de σ–álgebras en X es también una σ–álgebra en X. Si $P(X)$ es el conjunto potencia de X, entonces para cualquier $\mathcal{C} \subset P(X)$, la intersección de todas las σ–álgebras en X que contienen a $\mathcal{C}$, es la menor σ–álgebra en X que contiene $\mathcal{C}$. A menudo se conoce como σ–álgebra generada por $\mathcal{C}$.

Definición 2. *Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se denomina $\mathcal{X}$-medible (o simplemente medible) si, y solo si, para cualquier número real α, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{X}$, es decir, es un conjunto medible.*

Lema 1. *Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

i) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha := \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es medible.*

ii) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_\alpha := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.*

iii) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $C_\alpha := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.*

iv) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $D_\alpha := \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es medible.*

Demostración.
Consulte el Lema 2.4 en la página 8 del libro de Bartle [1]. ■

Proposición 1. *Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible. Si $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ son $\mathcal{X}$-medibles y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf, f^2, $f + g$, $f.g$ y $|f|$ son $\mathcal{X}$-medibles.*

Demostración.

Consulte el Lema 2.6 en la página 9 del libro de Bartle [1]. ■

Definición 3. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. definimos la parte positiva y negativa de f denotados por f^+ y f^- respectivamente como*

$$f^+(x) := \text{máx}\{f(x), 0\} \;\; y \;\; f^-(x) := \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

Observamos que la función f puede ser expresada como la diferencia $f = f^+ - f^-$ y su valor absoluto como la suma $|f| = f^+ + f^-$. A partir de estas identidades, podemos deducir que

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad f^- \frac{|f| - f}{2}.$$

En consecuencia, de acuerdo con la Proposición 1, la función f es $\mathcal{X}$-medible si y solo si su parte positiva f^+ y negativa f^- son ambas $\mathcal{X}$-medibles.

Definición 4. *Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ se denomina $\mathcal{X}$-medible si, para cualquier número real α, el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.*

Es importante destacar que el Lema 1 sigue siendo válido incluso en esta situación.

Notación. Denotaremos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ al conjunto de todas las funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son $\mathcal{X}$-medibles.

Observación 1. *Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, entonces*

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\} \in \mathcal{X}.$$

y

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \in \mathcal{X}.$$

Lema 2. *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{X}$-medible si y solo si los conjuntos $A := \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y $B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ son medibles, y la función $f_1 : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & si \;\; x \notin A \cup B, \\ 0 \;\; si \;\; x \in A \cup B, \end{cases}$$

es $\mathcal{X}$-medible.

Demostración.
Consulte el Lema 2.8 en la página 11 del libro de Bartle [1]. ■

Corolario 1. *Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, entonces cf, f^2, $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.*

Observación 2. *Si las funciones f, g pertenecen a $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, la suma de estas no está definida en la unión de los conjuntos*

$$E_1 := \{x \in X : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty\} \in \mathcal{X},$$

y

$$E_2 := \{x \in X : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty\} \in \mathcal{X}.$$

No obstante, si definimos $f + g$ como cero en el conjunto $E_1 \cup E_2$, entonces esta será una función $\mathcal{X}$-medible.

Proposición 2. *Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$. Defina*

$$f(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad F(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$f^\star(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad F^\star(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces f, F, $f^\star$ y $F^\star \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$

Demostración.
Consulte el Lema 2.9 en la página 12 del libro de Bartle [1]. ■

Corolario 2. *Si (f_n) es una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ que converge puntualmente para una función f en X, entonces $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.*

Demostración.
Consulte el Corolario 2.10 en la página 12 del libro de Bartle [1]. ■

Proposición 3. *Si las funciones f y g pertenecen a $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, entonces el producto $f \cdot g$ también pertenece a $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.*

Demostración.
Consulte en la página 12 del libro de Bartle [1]. ■

Definición 5. *Dada una función $f : X \to \mathbb{C}$, existen dos funciones reales $u : X \to \mathbb{R}$ y $v : X \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = u(x) + iv(x)$ para todo $x \in X$. Aquí, u es la parte real de f (denotada como Ref) y v es la parte imaginaria de f (denotada como Imf).*

Decimos que la función $f : X \to \mathbb{C}$ es $\mathcal{X}$-medible si y solo si tanto $u : X \to \mathbb{R}$ como $v : X \to \mathbb{R}$ son $\mathcal{X}$-medibles.

Ahora nos centraremos en las funciones fundamentales para la teoría de la integración. Supongamos que $(X, \mathcal{X})$ es un espacio medible y que E es un subconjunto de X. En este contexto, la función característica de E, denotada por χ_E (también conocida como la función indicadora de E y representada por 1_E), se define de la siguiente manera:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} x \in E, \\ 0 & \text{si} x \notin E. \end{cases}$$

Una función simple sobre X es una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos en $\mathcal{X}$, con coeficientes en el conjunto de los números complejos. Cabe destacar que no permitimos que las funciones simples tomen los valores $\pm\infty$. De forma equivalente, una función $f : X \to \mathbb{C}$ se considera simple si y solo si f es $\mathcal{X}$-medible y el conjunto imagen de f, denotado por Img(f), es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$. En efecto, tenemos que

$$f := \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{E_j}, \text{ donde } E_j = f^{-1}(\{z_j\}) \text{ y } \mathrm{Img}(f) = \{z_1, \cdots, z_n\}.$$

Esto se conoce como la representación estándar de la función f. Dicha representación descompone a f en una combinación lineal de funciones características, con coeficientes distintos, correspondientes a conjuntos que son disjuntos dos a dos y cuya unión conforma el conjunto X.

Es importante destacar que, aunque uno de los coeficientes z_j pueda ser 0, el término $z_j \chi_{E_j}$ sigue siendo considerado parte de la representación estándar de la función f. Esto se debe a que el conjunto E_j puede desempeñar un papel crucial cuando f interactúa con otras funciones.

Notamos que si f y g son funciones simples, entonces las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ también son simples. A continuación, demostraremos que es posible aproximar funciones arbitrarias $\mathcal{X}$-medibles mediante el uso de funciones simples.

Lema 3. *Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible.*

i) *Si tenemos una función $\mathcal{X}$-medible $f : X \to [0, \infty]$, entonces podemos encontrar una sucesión (φ_n) de funciones simples $\mathcal{X}$-medibles en X con valores en $[0, \infty[$ tal que $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ para todo $x \in X$ y que $f(x)$ es el límite de $\varphi_n(x)$ cuando n tiende a infinito, para todo $x \in X$. Además, si f es una función acotada, podemos seleccionar los φ_n de tal manera que la convergencia de φ_n para f sea uniforme en X.*

ii) *Si tenemos una función $\mathcal{X}$-medible $f : X \to \mathbb{C}$, entonces podemos encontrar una sucesión (φ_n) de funciones simples $\mathcal{X}$-medibles en X con valores en $\mathbb{C}$. Esta sucesión satisface que $|\varphi_1(x)| < |\varphi_2(x)| < \cdots < |f(x)|$ para todo $x \in X$ y que $f(x)$ es el límite de $\varphi_n(x)$ cuando n tiende a infinito, para todo $x \in X$. Además, si f es una función acotada, podemos seleccionar los φ_n de tal manera que la convergencia de φ_n para f sea uniforme en X.*

Demostración.
Consulte el Teorema 2.10, en la página 47 del libro de Folland [3]. ■

Medidas

Definición 6. *Una medida positiva en un espacio medible* $(X, \mathcal{X})$ *se define como una función* $\mu : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ *que cumple con las siguientes propiedades:*

i) *La medida del conjunto vacío es cero, es decir,* $\mu(\emptyset) = 0$*,*

ii) *Para cualquier sucesión* (E_n) *de conjuntos medibles que son disjuntos dos a dos, la medida de la unión enumerable de estos conjuntos es igual a la suma de sus medidas individuales. Matemáticamente, esto se expresa como* $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Si la medida de todo el espacio X, es finita ($\mu(X) < \infty$), entonces la medida de cualquier conjunto E en el espacio medible $\mathcal{X}$ también será finita. En este contexto, nos referimos a μ como una medida finita.

Si el espacio X puede ser expresado como la unión enumerable de conjuntos E_j pertenecientes a $\mathcal{X}$, es decir, $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, y cada conjunto E_j tiene una medida finita, entonces la medida μ se denomina medida $\sigma-$finita.

Si para cualquier conjunto E en $\mathcal{X}$ que tiene medida infinita, existe un subconjunto F en $\mathcal{X}$ tal que F está contenido en E y la medida de F es finita y positiva, entonces la medida μ se denomina medida semifinita.

La función μ se denomina medida de probabilidad si la medida del espacio total X es exactamente 1.

Definición 7. *Un espacio de medida se define como una terna* $(X, \mathcal{X}, \mu)$*, donde* $(X, \mathcal{X})$ *representa un espacio medible y* μ *es una medida sobre* $(X, \mathcal{X})$*.*

Proposición 4. *Consideremos un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$*. Si tenemos dos conjuntos* E *y* F *que pertenecen a* $\mathcal{X}$ *y* E *es un subconjunto de* F*, entonces la medida de* E *es menor o igual a la medida de* F*. Además, si la medida de* E *es finita, entonces la medida del conjunto diferencia entre* F *y* E*, denotado por* $F - E$*, es igual a la diferencia entre las medidas de* F *y* E*.*

Demostración.
Dado que el conjunto F puede ser expresado como la unión disjunta de E y $F - E$, la medida de F es igual a la suma de las medidas de E y $F - E$, lo que

implica que $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$. Esto, a su vez, es mayor o igual que la medida de E.

Además, si la medida de E es finita, entonces podemos restar la medida de E de ambos lados de la ecuación para obtener la medida del conjunto $F - E$, lo que nos da $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. ■

Proposición 5. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Establecemos las siguientes propiedades:*

a) *Si tenemos una sucesión (E_n) de conjuntos medibles que es creciente (es decir, cada conjunto en la sucesión es un subconjunto del siguiente), entonces la medida de la unión enumerable de estos conjuntos es igual al límite de las medidas de los conjuntos en la sucesión cuando n tiende al infinito. Es decir,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

b) *Si tenemos una sucesión (F_n) de conjuntos medibles que es decreciente (es decir, cada conjunto en la sucesión contiene al siguiente) y la medida del primer conjunto es finita, entonces la medida de la intersección enumerable de estos conjuntos es igual al límite de las medidas de los conjuntos en la sucesión cuando n tiende al infinito. Es decir,*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Demostración.
Consulte el Lema 3.4, en la página 21 del libro de Bartle [1]. ■

Definición 8. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y una propiedad P que se aplica a los elementos de X. Decimos que la propiedad P es válida para casi todos los puntos (c.t.p.) de X si y solo si existe un conjunto medible N que es un subconjunto de X, tal que $\mu(N) = 0$, y todos los elementos x en el conjunto diferencial $X - N$ poseen la propiedad P.*

La integral

Denotamos por $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ al conjunto de todas las funciones que son no negativas y $\mathcal{X}$-medibles, de X a $\overline{\mathbb{R}}$. Esto es,

$$\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}) := \{f : X \to [0, +\infty] : f \text{ es } \mathcal{X}\text{-medible}\}.$$

Definición 9. *Consideremos el espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$. *Sea* φ *una función simple perteneciente al conjunto de funciones medibles no negativas* $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. *Consideremos esta función simple* φ *en su representación estándar,* $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, *donde* a_j *son los valores que toma la función y* E_j *son los conjuntos en los que toma dichos valores.*

La integral de la función simple φ *con respecto a la medida* μ *se define como:*

$$\int_X \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j),$$

donde $\mu(E_j)$ *es la medida de los conjuntos* E_j.

Definición 10. *Consideremos un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *y una función* f *que pertenece al conjunto de funciones medibles no negativas* $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$.

i) *Definimos la integral de* f *con respecto a* μ *de la siguiente manera:*

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}) \\ simple}} \int_X \varphi \, d\mu.$$

Aquí, el supremo se toma sobre todas las funciones simples φ *que son positivos y menores o iguales a* f.

ii) *Definimos la integral de* f *sobre un conjunto medible* E *con respecto a* μ *de la siguiente manera:*

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \, \chi_E \, d\mu.$$

Aquí, χ_E *es la función característica del conjunto* E.

Lema 4. *Consideremos un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$. *En este contexto, podemos establecer las siguientes propiedades:*

a) *Si* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ *son funciones simples y* $c \geq 0$ *es una constante, entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

- *La integral de una función simple positiva multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función:*

$$\int_X c\varphi \, d\mu = c \int_X \varphi \, d\mu$$

- *La integral de la suma de dos funciones simples positivas es igual a la suma de las integrales de las funciones:*

$$\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$$

b) *Si $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ es una función simple y definimos $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ por*

$$\lambda(E) := \int_X \varphi\, \chi_E\, d\mu,$$

entonces λ es una medida sobre $(X, \mathcal{X})$.

Demostración.
Consulte el Lema 4.3, en la página 28 del libro de Bartle [1]. ■

Teorema 1. *(Teorema de Convergencia Monótona) Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ que es monótonamente creciente y converge puntualmente para una función f. Entonces, la integral de f sobre el conjunto X es igual al límite de las integrales de las funciones f_n cuando n tiende al infinito. Es decir,*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Demostración.
Consulte el Teorema 4.6, en la página 31 del libro de Bartle [1].

Este teorema es una herramienta fundamental en la teoría de la medida y es especialmente útil en el estudio de la convergencia de sucesiones de funciones. ■

Proposición 6. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida.*

a) Dada una función f que pertenece al conjunto $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ y un número real no negativo c, la función cf también pertenece a $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Además, la integral de cf es igual a c veces la integral de f. Es decir,

$$\int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu.$$

b) Si f y g son dos funciones que pertenecen a $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, entonces la suma $f + g$ también pertenece a $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. La integral de $f + g$ es igual a la suma de las integrales de f y g. Es decir,

$$\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Demostración.
Consulte el Corolario 4.7, en la página 32 del libro de Bartle [1]. ■

Lema 5. *(Lema de Fatou) Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones en el conjunto de funciones medibles no negativas $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Entonces, el límite inferior de la sucesión f_n cuando n tiende al infinito, denotado por $\liminf_{n\to\infty} f_n$, también pertenece a $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Además, la integral de $\liminf_{n\to\infty} f_n$ sobre el conjunto X es menor o igual al límite inferior de las integrales de las funciones f_n cuando n tiende al infinito. Es decir,*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración.
Consulte el Lema 4.8, en la página 33 del libro de Bartle [1].

Este lema es una herramienta fundamental en la teoría de la medida y es especialmente útil en el estudio de la convergencia de sucesiones de funciones. ■

Corolario 3. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones en el conjunto de funciones medibles no negativas $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ que es monótonamente creciente y converge casi en todas partes (c.t.p.) a una función f que también pertenece a $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Entonces, la integral de f es igual al límite de las integrales de las funciones f_n cuando n tiende al infinito. Es decir,*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración.
Este corolario es una consecuencia directa del Teorema de Convergencia Monótona y es una herramienta útil en el estudio de la convergencia de sucesiones de funciones.

Consulte el Corolario 4.12, en la página 35 del libro de Bartle [1]. ■

Funciones integrables

Definición 11. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable si cumple con las siguientes condiciones:*

- *f es $\mathcal{X}$-medible.*
- *Las integrales de las partes positivas y negativas de f sobre X son finitas, es decir,*

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \ \ y \ \ \int_X f^- \, d\mu < \infty.$$

Bajo estas condiciones, definimos la integral de f con respecto a μ como la suma de las integrales de las partes positivas y negativas de f sobre X:

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

Denotamos por $L(X, \mathcal{X}, \mu)$ al conjunto de todas las funciones integrables $f : X \to \mathbb{R}$.

Proposición 7. *Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Supongamos que $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones integrables y que α es un número real. Entonces, la función αf y la suma de las funciones f y g también son integrables. Además, se cumplen las siguientes igualdades:*

- *La integral de αf sobre X es igual a α veces la integral de f sobre X, es decir,*
$$\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu.$$
- *La integral de la suma de f y g sobre X es igual a la suma de las integrales de f y g sobre X, es decir,*
$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Demostración.
Consulte el Teorema 5.5, en la página 43 del libro de Bartle [1]. ■

Consideremos una función $f : X \to \mathbb{C}$ que es $\mathcal{X}$-medible. La integral de f se define como la suma de la integral de la parte real de f y la integral de la parte imaginaria de f, multiplicada por i. Es decir,

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f)\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f)\, d\mu.$$

A partir de esta definición, podemos deducir que el conjunto de todas las funciones integrables con valores en $\mathbb{C}$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Además, la integral de estas funciones es una funcional lineal sobre este espacio vectorial complejo.

Teorema 2. *[Teorema de Convergencia Dominada] Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y una sucesión de funciones integrables (f_n) donde cada $f_n : X \to \mathbb{C}$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *La sucesión de funciones (f_n) converge a una función f en casi todos los puntos con respecto a la medida μ, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-c.t.p.*

2. *Existe una función integrable $g : X \to [0, +\infty]$ tal que el valor absoluto de cada función f_n es menor o igual a g en casi todos los puntos con respecto a la medida μ, esto es, $|f_n| \leq g$ μ-c.t.p.*

Bajo estas condiciones, la función límite $f : X \to \mathbb{C}$ es integrable y la integral de f es igual al límite de las integrales de las funciones f_n. En otras palabras,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demostración.

Consulte el Teorema 2.24, en la página 54 del libro de Folland [3]. ■

Espacios de Lebesgue

En esta sección, nos centraremos en un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ específico. Adoptamos la convención habitual de que dos funciones se consideran iguales si estos coinciden excepto en un conjunto de μ-medida cero.

Consideremos un número real p en el intervalo $[1, \infty)$. Denotamos por $L^p(\mu)$, o alternativamente por $L^p(X, d\mu)$, $L^p(X)$ o simplemente por L^p, al espacio de Lebesgue de (todas las clases de equivalencia de) funciones $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{X}$-medibles, tales que

$$||f||_{L^p(\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

es finito.

Cuando $p = \infty$, el espacio $L^\infty(\mu)$ consiste de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{X}$-medibles y que son iguales casi en todas partes (c.t.p.) a alguna función acotada $g : X \to \mathbb{C}$ que también es $\mathcal{X}$-medible. En este caso, definimos la norma de f en $L^\infty(\mu)$ como:

$$||f||_{L^\infty(\mu)} = \text{ess sup}_X |f(x)| = \text{ínf}\{B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0\}.$$

Es evidente que si f y g son dos funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^p(\mu)$, entonces la suma de estas dos funciones, también pertenece a $L^p(\mu)$. Además, si multiplicamos la función f por cualquier número complejo α, también pertenece a $L^p(\mu)$. Por lo tanto, podemos concluir que $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos para cualquier p en el intervalo $[1, \infty]$.

Para cualquier número real p en el intervalo abierto $(1, \infty)$, definimos el número conjugado de Hölder, denotado por p' como $p' = \frac{p}{p-1}$. Además, extendemos esta definición para los extremos del intervalo, estableciendo que el conjugado de Hölder de 1 es ∞, y viceversa, es decir, $1' = \infty$ y $\infty' = 1$. Esta definición tiene la propiedad interesante de que el conjugado del conjugado de un número es el número original, es decir, $(p')' = p$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Teorema 3. *(Desigualdad de Hölder) Considere un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *y dos números reales* p *y* q *en el intervalo* $[1, \infty]$ *que son conjugados de Hölder, es decir, cumplen con la relación* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* f *es una función en el espacio de Lebesgue* $L^p(\mu)$ *y* g *es una función en el espacio de Lebesgue* $L^q(\mu)$*, entonces el producto de estas dos funciones, denotado por* fg*, pertenece al espacio de Lebesgue* $L^1(\mu)$*. Además, la norma de* fg *en* $L^1(\mu)$ *es menor o igual al producto de las normas de* f *en* $L^p(\mu)$ *y de* g *en* $L^q(\mu)$*. Es decir,*

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Demostración.
Consulte el 6.2 en la página 182 y 6.8a. en la página 184 del libro de Folland [3].

Esta desigualdad es una herramienta fundamental en el análisis funcional y tiene numerosas aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas. ■

Teorema 4. *Para cualquier número real* p *en el intervalo cerrado* $[1, \infty]$*, el espacio de Lebesgue* $L^p(\mu)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración.
Consulte el Teorema 6.6 y el Teorema 6.8 en la página 183 y 184 del libro de Folland [3]. ■

Teorema 5. *Considere un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *y un número real* p *en el intervalo abierto* $(1, \infty)$*. El conjunto de funciones simples* $\varphi : X \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde, $\{A_i\}$ *es una sucesión de conjuntos en* X *que son disjuntos dos a dos,* $\alpha_i \in \mathbb{C}$ *son coeficientes complejos distintos y la medida de cada conjunto* A_i *es finita, para cada índice* $1 \leq i \leq n$*. Este conjunto de funciones simples es denso en el espacio de Lebesgue* $L^p(\mu)$*.*

Demostración.
Consulte la Proposición 6.7, en la página 183 del libro de Folland [3]. ■

Definición 12. *Definimos una sucesión* (f_n) *de funciones complejas* $\mathcal{X}$*-medibles en el espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *como de Cauchy en medida si cumple la siguiente condición: para cualquier número real positivo* ε*,*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Esto significa que, a medida que m *y* n *se hacen muy grandes, la medida del conjunto de puntos donde las funciones* f_m *y* f_n *difieren significativamente tiende a cero.*

Definición 13. *Decimos que una sucesión* (f_n) *de funciones complejas* $\mathcal{X}$*-medibles en el espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *converge en medida a una función* f *si cumple la siguiente condición: para cualquier número real positivo* ε*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Esto significa que, a medida que n *se hace muy grande, la medida del conjunto de puntos donde las funciones* f_n *y* f *difieren significativamente tiende a cero.*

Teorema 6. *Supongamos que tenemos una sucesión* (f_n) *de funciones que es de Cauchy en medida. Bajo esta suposición, afirmamos que existe una función* f $\mathcal{X}$*-medible tal que la sucesión* (f_n) *converge a* f *en medida, y podemos extraer una subsucesión* (f_{n_j}) *de* (f_n) *que converge a* f *casi en todas partes (c.t.p.) con respecto a la medida* μ*.*

Además, si suponemos que la sucesión (f_n) *también converge a otra función* g *en medida, entonces podemos afirmar que* g *y* f *son iguales casi en todas partes (c.t.p.) con respecto a la medida* μ*.*

Demostración.
Consulte el Teorema 2.30, en la página 61 del libro de Folland [3]. ■

Teorema 7. *Sea* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *un espacio de medida y un número real* p *tal que* $1 \leq p < \infty$*. Si* $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, entonces* $f_n \to f$ *en medida, y por lo tanto existe una subsucesión de* (f_n) *que converge a* f *en casi en todas partes (c.t.p.) con respecto a* μ*.*

Además,, si $f_n \to f$ *en medida y* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $g \in L^p(\mu)$*. Entonces* $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Demostración.
1. Suponga que $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $n \to \infty$, para algún $1 \leq p < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ defina el conjunto $E_{n,\varepsilon}$ como

$$E_{n,\varepsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Entonces, tenemos que

$$\varepsilon\, \mu(E_{n,\varepsilon})^{1/p} = (\varepsilon^p \mu(E_{n,\varepsilon}))^{1/p} = \left(\int_{E_{n,\varepsilon}} \varepsilon^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$
$$\leq \left(\int_X |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|f_n - f\|_{L^p(\mu)}.$$

Por lo tanto, por hipótesis, tenemos que $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\|f_n - f\|^p_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto significa que $f_n \to f$ en medida.

2. Dado que $f_n \to f$ en medida, podemos aplicar el Teorema 6, Este teorema nos garantiza que existe una subsucesión de (f_n) que converge a f casi en todas partes con respecto a μ.

3. Por otro lado, suponga que $f_n \to f$ en medida y que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $g \in L^p(\mu)$ tenemos que $g^p \in L^1(\mu)$.

Desde que $f_n \to f$ en medida, por el Teorema 6, sabemos que existe una subsucesión f_{n_j} de (f_n) que converge para f casi en todas partes (c.t.p.) con respecto a μ. También se cumple que $|f_{n_j}| \leq g$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Si tomamos el límite cuando $j \to \infty$ obtenemos que $|f| \leq g$ casi en todas partes (c.t.p.) con respecto a μ. Por lo tanto, tenemos que

$$|f_{n_j} - f|^p \leq (|f_{n_j}| + |f|)^p \leq 2^p g^p \ \text{ y } \ 2^p g^p \in L^1(\mu).$$

Aplicando el Teorema de convergencia dominada, Teorema 2, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_{n_j} - f|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_{n_j} - f|^p \, d\mu = 0$$

Por lo tanto, concluimos que $\|f_{n_j} - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Afirmamos que $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Supongamos que la afirmación es falsa. Esto implica que existe un número real positivo $\delta > 0$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \geq \delta$ para infinitos términos f_n de la sucesión. Con estos términos f_n, formamos una nueva subsucesión de (f_n), a la que vamos a denotar por g_n.

Por lo tanto, tenemos que $g_n \to f$ en medida y $|g_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, g pertenece a $L^p(\mu)$.

Aplicando el mismo razonamiento que hemos utilizado anteriormente, podemos establecer que existe una subsucesión, denotada por (g_k) de la sucesión (g_n) tal que $\|g_k - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Esto significa que, para k suficientemente grande $\|g_k - f\|_{L^p(\mu)} < \delta$, Sin embargo, esto contradice la suposición inicial que habíamos hecho. Por lo tanto, podemos concluir que nuestra afirmación inicial es, verdadera. ■

Consideremos que p y q son exponentes conjugados. Es un hecho bien establecido en el campo de las matemáticas que el espacio dual $(L^p(\mu))'$ de $L^p(\mu)$ es isométrico a $L^q(\mu)$. Esto es válido para todo p en el intervalo $[1, \infty)$. Además, esta propiedad también se mantiene cuando $p = \infty$, siempre y cuando μ sea semifinita.

Además, es importante destacar que la norma $L^p(\mu)$ de una función puede ser determinada a través de un proceso de dualidad. Este proceso es aplicable cuando el valor de p se encuentra en el intervalo $[1, \infty]$. El procedimiento para obtener la norma enunciamos en el siguiente Lema.

Lema 6. *Considere un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *y dos números reales* p *y* q *en el intervalo* $[1, \infty]$ *que son conjugados de Hölder, es decir, cumplen con la relación* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Suponga que* $f : X \to \mathbb{C}$ *es una función* $\mathcal{X}$*-medible tal que* $f\varphi \in L^1(\mu)$, *para todo* $\varphi \in \sum_X$ *(*$\sum_X$ *es el espacio de las funciones simples que se desvanecen fuera de un conjunto de medida finita). Suponga también que*

$$M_q(f) = \sup\left\{\left|\int_X f\varphi\, d\mu\right| : \varphi \in \sum_X \ \ y \ \ \|\varphi\|_{L^p(\mu)} = 1\right\}$$

es finito. Además suponga que el conjunto $S_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ *es* σ*-finito, o que la medida* μ *es semifinita. Entonces* $f \in L^q(\mu)$ *y* $M_q(f) = \|f\|_{L^q(\mu)}$.

Demostración.

1. Comencemos observando que si tenemos una función medible acotada φ que se desvanece fuera de un conjunto E de medida finita y $\|\varphi\|_{L^p(\mu)} = 1$, entonces se cumple que

$$\left|\int \varphi f\, d\mu\right| \leq M_q(f).$$

Esto se puede demostrar de la siguiente manera: por el Lema 3, sabemos que existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples que cumple que $|\varphi_n| \leq |\varphi|$ (en particular, φ_n se desvanece fuera de E) y que φ_n converge casi en todas partes a φ.

Además, dado que

$$|\varphi_n| \leq \|\varphi\|_\infty \chi_E \quad \text{y} \quad \chi_E f \in L^1(\mu),$$

podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para concluir que

$$\left|\int \varphi f\, d\mu\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int \varphi_n f\, d\mu\right| \leq M_q(f).$$

2. Supongamos ahora que $q < \infty$.

Afirmamos que, si μ es semifinita, entonces el conjunto $\{x : |f(x)| > \varepsilon\}$ tiene medida finita para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, S_f es σ-finita.

Para demostrar esto, supongamos que la afirmación es falsa. Esto implicaría que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E_\varepsilon) = \infty \quad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \delta,$$

donde

$$E_\varepsilon = \{x : |f(x)| > \varepsilon\}.$$

Definamos

$$\lambda = \sup\{\alpha > 0 : \mu(E_\alpha) = \infty\}.$$

(λ existe ya que μ es semifinita, por lo que el conjunto $\{\alpha > 0 : \mu(E_\alpha) = \infty\}$ es acotado.)

Observemos que, definiendo $\varphi = \frac{1}{\mu(E_{\lambda+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}}}\chi_{E_{\lambda+\frac{1}{n}}}\operatorname{sgn}(f)$, tenemos que $\|\varphi\|_{L^p(\mu)} = 1$.

Por lo tanto,

$$M_q(f) \geq \left|\int \varphi f \, d\mu\right| = \frac{1}{\mu(E_{\lambda+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}}} \int_{E_{\lambda+\frac{1}{n}}} |f| \, d\mu > \mu(E_{\lambda+\frac{1}{n}})^{1-\frac{1}{p}} \left(\lambda + \frac{1}{n}\right).$$

Esto implica que

$$\infty > M_q(f) \geq \lim_{n\to\infty} \mu(E_{\lambda+\frac{1}{n}})^{1-\frac{1}{p}} \left(\lambda + \frac{1}{n}\right) = \lambda\mu(E_\lambda)^{1-\frac{1}{p}} = \infty.$$

Esto es una contradicción, por lo que podemos concluir que nuestra afirmación es verdadera.

Podemos asumir que S_f es σ-finita, ya que esta condición se cumple automáticamente cuando μ es semifinito, según la afirmación anterior.

Consideremos $\{E_n\}$ una sucesión creciente de conjuntos de medida finita tal que $S_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones simples tal que $\phi_n \to f$ puntualmente y $|\phi_n| \leq |f|$, y definamos $f_n = \phi_n \chi_{E_n}$. Entonces, $f_n \to f$ puntualmente, $|f_n| \leq |f|$, y f_n se desvanece fuera de E_n.

Definamos

$$\varphi_n = \frac{|f_n|^{q-1} \cdot sgn(f)}{\|f_n\|_{L^q(\mu)}^{q-1}}.$$

Se deduce que

$$\|\varphi_n\|_{L^p(\mu)}^p = \frac{1}{\|f_n\|_{L^q(\mu)}^{p(q-1)}} \int_X |f_n|^{p(q-1)} \, d\mu = \frac{\|f_n\|_{L^q(\mu)}^q}{\|f_n\|_{L^q(\mu)}^q} = 1,$$

donde la igualdad del medio se deriva del hecho de que p y q son exponentes conjugados. Además, por el Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\mu)} &\leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^q(\mu)} = \liminf_{n\to\infty} \int |\varphi_n f_n| \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int |\varphi_n f| \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int \varphi_n f \, d\mu \leq M(f). \end{aligned}$$

(Para la última estimativa, utilizamos la observación al inicio de la demostración.)

Por otro lado, la desigualdad de Hölder nos da

$$M_q(f) \leq \|f\|_{L^q(\mu)} \|\varphi\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^q(\mu)} \quad \text{ya que} \quad \|\varphi\|_{L^p(\mu)} \leq 1.$$

Con esto, la demostración está completa para el caso $q < \infty$.

3. Supongamos ahora que $q = \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, definamos $A = \{x : |f(x)| \geq M_\infty(f) + \varepsilon\}$. Si $\mu(A)$ fuera positivo, podríamos seleccionar un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$ (esto es posible ya sea porque μ es semifinito o porque $A \subseteq S_f$).

Definamos $\varphi = \mu(B)^{-1}\chi_B \mathrm{sgn} f$. Con esta definición, tendríamos que $\|\varphi\|_{L^1(\mu)} = 1$, y

$$M_\infty(f) \geq \int \varphi f = \mu(B)^{-1} \int_B |f| \geq M_\infty(f) + \varepsilon.$$

Esto es una contradicción con la observación al principio de la demostración, por lo que debemos concluir que $\mu(A) = 0$. Por lo tanto, $f \in L^\infty(\mu)$ y

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq M_\infty(f),$$

La desigualdad inversa se obtiene, una vez más, a partir de la desigualdad de Hölder. ■

Funciones de Distribución y L^p débil.

Si f es una función medible en $(X, \mathcal{X}, \mu)$, definimos su función de distribución $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ por

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

La función de distribución λ_f proporciona información sobre la magnitud de f pero no ofrece detalles sobre el comportamiento local f en punto punto dado. Por ejemplo, una función en $\mathbb{R}^n$ y cada una de sus traslaciones tienen la misma función de distribución.

Ahora, presentamos algunas propiedades de las funciones de distribución.

Proposición 8. *a*) *λ_f es decreciente y continua por la derecha.*

b) *Si $|f| \leq |g|$, entonces $\lambda_f \leq \lambda_g$.*

c) *Si $|f_n|$ cresce y converge para $|f|$, entonces λ_{f_n} crece y converge para λ_f.*

d) *Si $f = g + h$, entonces $\lambda_f(\alpha) < \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$.*

Demostración.

Para simplificar, denotamos $E(\alpha, f) = \{x : |f(x)| > \alpha\}$ para todo $\alpha > 0$.

(a) La función λ_f es decreciente ya que si $\alpha < \beta$ entonces $E(\beta, f) \subset E(\alpha, f)$. Supongamos que $\{a_k\}$ es una sucesión decreciente de números positivos que converge a α, entonces se tiene que

$$E(\alpha, f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(a_k, f).$$

Dado que $\{E(a_k, f)\}$ es una sucesión creciente de conjuntos, se cumple que

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(E(\alpha, f)) = \lim_{k\to\infty} \mu(E(a_k, f)) = \lim_{k\to\infty} \lambda_f(a_k).$$

Esto implica que $\lambda_f(\alpha)$ es continua por la derecha.

(b) Si se cumple que $|f| \leq |g|$, entonces $E(\alpha, f) \subseteq E(\alpha, g)$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición, se tiene que $\lambda_f \leq \lambda_g$.

(c) Si $|f_n|$ crece y converge para $|f|$, entonces el conjunto $E(\alpha, f)$ es la unión creciente de los conjuntos $\{E(\alpha, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(E(\alpha, f)) = \lim_{n\to\infty} \mu(E(\alpha, f_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{f_n}(\alpha).$$

Por lo tanto, podemos concluir que λ_{f_n} crece y converge para λ_f.

(d) Si $|g(x) + h(x)| > \alpha$, entonces $|g(x)| > \alpha/2$ o $|h(x)| > \alpha/2$. Por lo tanto, $E(\alpha, f) \subset E(\frac{1}{2}\alpha, g) \cup E(\frac{1}{2}\alpha, h)$. Esto implica que

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(E(\alpha, f)) \leq \mu(E(\frac{1}{2}\alpha, g)) + \mu(E(\frac{1}{2}\alpha, h)) = \lambda_g(\alpha/2) + \lambda_h(\alpha/2).$$

■

Proposición 9. *(La norma equivalente de $L^p(\mu)$). Considere un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ donde μ es σ-finita. Para una función $f \in L^p(\mu)$, con $p \in [1, \infty]$, tenemos las siguientes propiedades:*

(a) Si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\|f\|_p = \left(p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha\right)^{1/p}.$$

(b) Si $p = \infty$, entonces $\|f\|_\infty = inf\{\alpha : \lambda_f(\alpha) = 0\}$.

Demostración.

(a) Aplicando el teorema de Fubini, obtenemos la siguiente secuencia de igualdades:

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mu)} &= \int_X |f|^p\, d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\, d\alpha d\mu \\
&= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \int_X \chi_{E(\alpha,f)}\, d\mu d\alpha = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha,
\end{aligned}$$

(b) Consideremos la siguiente secuencia de igualdades:

$$\begin{aligned}
\inf\{\alpha : \lambda_f(\alpha) = 0\} &= \inf\{\alpha : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \\
&= \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha,\ c.t.p.\} \\
&= \text{ess sup}_{x\in X}|f(x)| = \|f\|_{L^\infty(\mu)}.
\end{aligned}$$

Con esto, completamos las pruebas. ∎

Una variante de los espacios $L^p(\mu)$ que aparece con bastante frecuencia es la siguiente. Si f es una función medible en X y $1 \leq p < \infty$, introducimos la siguiente definición:

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p}.$$

Definimos el espacio $L^p(\mu)$ débil como el conjunto de todas las funciones f para las cuales $[f]_p < \infty$. Cuando $p = \infty$, $L^\infty(\mu)$ débil por definición es igual a $L^\infty(\mu)$. Es importante notar que $[\cdot]_p$ no satisface la desigualdad triangular, por lo que no constituye una norma. Sin embargo, se cumple que $[cf]_p = |c|[f]_p$. Esto se puede deducir a partir de,

$$\mu(\{x : |cf(x)| > \alpha\}) = \mu(\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\}),$$

lo que implica que $\lambda_{cf}(\alpha) = \lambda_f(\frac{\alpha}{|c|})$. Por lo tanto,

$$[cf]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{\beta|c|>0} \beta^p |c|^p \lambda_f(\beta)\right)^{\frac{1}{p}} = |c|\left(\sup_{\beta>0} \beta^p \lambda_f(\beta)\right)^{1/p} = |c|[f]_p.$$

La relación entre los espacios $L^p(\mu)$ y $L^p(\mu)$ débil es la siguiente,

$$L^p(\mu) \subset L^p(\mu) \text{ débil, y } [f]_p \leq \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Esta relación se deduce del hecho de que

$$\|f\|^p_{L^p(\mu)} = \int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}} |f|^p \, d\mu \geq \alpha^p \int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}} d\mu = \alpha^p \lambda_f(\alpha)$$

Esto es,

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Un ejemplo clásico de una función que pertenece al espacio $L^p(\mu)$ débil pero no al espacio $L^p(\mu)$ es la función $f(x) = x^{-1/p}$ efinida en el intervalo $(0, \infty)$ (con respecto a la medida de Lebesgue).

A menudo resulta útil descomponer una función en una parte "pequeña" y una parte "grande". A continuación, presentamos un método para realizar esta descomposición que proporciona una fórmula sencilla para las funciones de distribución.

Proposición 10. *Si f es una función medible y $A > 0$, definimos $E(A) = \{x : |f(x)| > A\}$. A continuación, establecemos dos nuevas funciones, h_A y g_A, de la siguiente manera:*

$$h_A = f\chi_{(X-E(A))} + A(sgn\ f)\chi_{E(A)},$$
$$g_A = f - h_A = (sgn\ f)(|f| - A)\chi_{E(A)}.$$

Entonces,

$$\lambda_{g_A}(\alpha) = \lambda_f(\alpha + A),$$
$$\lambda_{h_A}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & si\ \alpha < A, \\ 0 & si\ \alpha \geq A. \end{cases}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\lambda_{g_A}(\alpha) &= \mu\left(\{x : |g_A(x)| > \alpha\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : ||f(x)| - A|\chi_{E(A)}(x) > \alpha\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| - A > \alpha\} \cap \{x : |f(x)| > A\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha + A\} \cap \{x : |f(x)| > A\}\right),
\end{aligned}
$$

Dado que $\alpha + A > A$, se sigue que $\{x : |f(x)| > \alpha + A\} \subset \{x : |f(x)| > A\}$. Así,

$$
\lambda_{g_A}(\alpha) = \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha + A\}\right) = \lambda_f(\alpha + A).
$$

A continuación, consideremos

$$
\begin{aligned}
\lambda_{h_A}(\alpha) &= \mu\left(\{x : |h_A(x)| > \alpha\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)|\chi_{(X-E(A))}(x) > \alpha\}\right) + \mu\left(\{x : A\chi_{E(A)}(x) > \alpha\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\} \cap \{x : |f(x)| \leq A\}\right) + \mu\left(\{x : A\chi_{E(A)}(x) > \alpha\}\right)
\end{aligned}
$$

Si tenemos que $\alpha \geq A$ entonces se cumple que $\{x : |f(x)| > \alpha\} \cap \{x : |f(x)| \leq A\} = \emptyset$ y $\{x : A\chi_{E(A)}(x) > \alpha\} = \emptyset$, Por lo tanto, $\lambda_{h_A}(\alpha) = 0$.

Si se cumple que $\alpha < A$, entonces

$$
\begin{aligned}
\lambda_{h_A}(\alpha) &= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\} \cap \{x : |f(x)| \leq A\}\right) + \mu\left(\{x : A\chi_{E(A)}(x) > \alpha\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\} \cap \{x : |f(x)| > A\}^c\right) + \mu\left(\{x : |f(x)| > A\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\} - \{x : |f(x)| > A\}\right) + \mu\left(\{x : |f(x)| > A\}\right) \\
&= \mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\}\right) - \mu\left(\{x : |f(x)| > A\}\right) + \mu\left(\{x : |f(x)| > A\}\right) \\
&= \lambda_f(\alpha) - \lambda_f(A) + \lambda_f(A) \\
&= \lambda_f(\alpha).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\lambda_{h_A}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \text{si } \alpha < A, \\ 0 & \text{si } \alpha \geq A. \end{cases}
$$

■

La convolución.

Consideremos dos funciones, f y g, que son medibles en $\mathbb{R}^n$. La convolución de f y g, denotada por $f * g$, es una nueva función que se define de la siguiente manera:

$$
f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy.
$$

Esta definición es válida para todo x para el cual la integral existe. Es importante notar que la existencia de la convolución $f * g$, al menos casi en todo punto, puede depender de las propiedades de las funciones f y g. En particular, si f es una función acotada con soporte compacto, y g es una función que es integrable localmente, entonces la convolución $f * g$ está bien definida al menos casi en todo punto.

Estas condiciones sobre f y g son solo un ejemplo de las muchas que podríamos imponer para garantizar la existencia de la convolución. En general, el estudio de las condiciones bajo las cuales la convolución de dos funciones está bien definida es un tema importante en el análisis de Fourier y en el análisis armónico.

Proposición 11. *Supongamos que todas las integrales involucradas existen. Bajo esta suposición, podemos establecer las siguientes propiedades de la convolución de las funciones f y g:*

a) *La convolución es una operación conmutativa, $f * g = g * f$,*

b) *La convolución es una operación asociativa, $(f * g) * h = f * (g * h)$,*

c) *Para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$, se cumple, $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$,*

d) *Si A es la clausura de $\{x + y : x \in supp(f), y \in supp(g)\}$, entonces $supp(f * g) \subseteq A$.*

Demostración.

Consulte la proposición 8.6, en la página 240 del libro de Folland [3]. ■

La Transformada de Fourier.

Definición 14. *Para cualquier $f \in L^1(m)$ definimos la transformada de Fourier de f como:*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.y}.f(y)dy, \quad \textit{para todo} \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Aquí la integral es con respecto a la medida de Lebesgue.

Tenga en cuenta que el operador de transformada de Fourier es lineal ya que para $f_1, f_2 \in L^1(m)$ y $c \in \mathbb{C}^n$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(cf_1 + f_2)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (cf_1 + f_2)(y) e^{-ix.y} \, dy \\
&= c\,(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) e^{-ix.y} dy + (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_2(y) e^{-ix.y} dy \\
&= c\mathcal{F}(f_1)(x) + \mathcal{F}(f)_2(x).
\end{aligned}$$

III. Hipótesis y variables

III.1 Hipótesis

III.1.1 Hipótesis General

Supongamos que tenemos dos espacios de Banach, denotados como X_0 y X_1. Las siguientes inmersiones continuas:

$$X_0 \cap X_1 \subset X_i, \quad X_i \subset X_0 + X_1$$

donde $0 \leq i \leq 1$, nos permitirán establecer la interpolación de operadores.

III.1.2 Hipótesis Específica

Supongamos que tenemos cuatro números reales $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$. Consideraremos un operador lineal acotada T con las siguientes propiedades: $T : L^{p_0}(\mu) \to L^{q_0}(\mu)$ y $T : L^{p_1}(\mu) \to L^{q_1}(\mu)$. Esto nos permitirá demostrar que T mapea un subespacio intermedio entre $L^{p_0}(\mu)$ y $L^{p_1}(\mu)$ en un subespacio intermediario entre $L^{q_0}(\nu)$ y $L^{q_1}(\nu)$ tal que $\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}$.

III.2 Definición Conceptual de Variables

Las variables identificadas en la hipótesis general se pueden definir conceptualmente de la forma que se indica a continuación.

- **Variable Independiente**
  Inmersión continua entre espacios de Banach

- **Variable Variable dependiente**
  Operador que mapean subespacios intermediarios.

III.3 Operacionalización de la variable

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente Inmersión continua entre espacios de Banach.	Espacios de Banach	Comportamiento de los espacios de Banach	Problema de interpolación	Analítico, Inductivo-Deductivo	Constructiva
Dependiente Operador que mapeo subespacios intermediarios.	Teoría de operadores lineales acotadas	Comportamiento de los operadores acotados	Problema de interpolación	Analítico, Inductivo-Deductivo	Constructiva

IV. Diseño metodológico

IV.1 Tipo y diseño de la investigación

El estudio en cuestión es de naturaleza básica, tal como lo define Alva Lucía Marín Villada (2008), quien lo denomina también como investigación pura, teórica o dogmática. Esta se distingue por su origen y permanencia en un marco teórico. Su propósito principal es la formulación de nuevas teorías o la modificación de las existentes, con el objetivo de ampliar los conocimientos científicos o filosóficos. Sin embargo, estos conocimientos no se contrastan con aspectos prácticos.

Este estudio se clasifica como básico debido a que su objetivo es contribuir con conocimientos que permitan refinar ciertos aspectos del marco teórico. En cuanto a su diseño, este es de tipo no experimental.

IV.2 Método de investigación

El estudio se basa en dos enfoques principales: Análisis y Síntesis. En el análisis, se examinarán los elementos del problema en estudio para descubrir sus aplicaciones. La síntesis, por otro lado, se llevará a cabo a partir de los resultados obtenidos en el análisis. En este contexto, se analizan diferentes espacios donde se aplican los resultados de la interpolación.

El método Inductivo-Deductivo también es fundamental en nuestro estudio. Utilizaremos la inducción como una forma de razonamiento que nos permite pasar del conocimiento de casos particulares a un conocimiento más general. De manera similar, emplearemos la deducción, otra forma de razonamiento, que nos permite pasar de un conocimiento general a uno de menor nivel o particular. Este método es una herramienta constante en nuestra investigación, especialmente al plantear y desarrollar teoremas y lemas correspondientes.

IV.3 Población y muestra

Dado el carácter de nuestra investigación, no empleamos técnicas convencionales de recolección de datos, tales como la observación, la experimentación o la encuesta. En consecuencia, no realizamos la recolección de datos de una muestra o población.

Población: **No Aplica**
Muestra: **No Aplica**

IV.4 Lugar de estudio

El estudio se llevará a cabo en las instalaciones de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la UNAC. Sin embargo, es importante precisar que debido a la situación sanitaria actual que enfrenta el país, gran parte del trabajo se realizará en el domicilio del autor.

IV.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Dada la naturaleza de nuestra investigación, no empleamos técnicas convencionales de recolección de datos, como la observación, la experimentación o la encuesta. Al tratarse de un trabajo estrictamente "matemático" (teórico-abstracto), no se requieren procedimientos especiales para la recolección de información. En su lugar, realizamos una búsqueda y revisión bibliográfica exhaustiva, que incluye libros especializados, páginas web, artículos y revistas especializadas. Además, mediante el uso de técnicas de análisis-síntesis e inductivo-deductivo, avanzamos progresivamente hacia los resultados propuestos.

IV.6 Plan de Trabajo de Campo

El proyecto no necesita de un análisis técnico ni de un estudio de la estructura administrativa, ya que se trata de un trabajo de carácter teórico y no está dirigido a un proyecto de inversión. Además, el proyecto no tiene como objetivo evaluar el impacto ambiental ni desarrollar un plan de trabajo de campo. No obstante, el área de estudio se centra en el análisis real.

IV.7 Análisis y Procesamiento de datos

Dado que se trata de un trabajo no experimental, no se realiza ningún análisis ni procesamiento de datos. La dirección del proyecto no está orientada a la inversión ni al impacto ambiental. El proyecto se ha llevado a cabo tras una extensa revisión de material bibliográfico y especializado en el área de análisis real.

V. Resultados

V.1 Resultados descriptivos

Consideremos el caso en el que $1 \leq p < q < r \leq \infty$. En este escenario, encontramos que $(L^p(\mu) \cap L^r(\mu)) \subseteq L^q(\mu) \subseteq (L^p(\mu) + L^r(\mu))$. Surge una pregunta natural: si tenemos un operador lineal T en $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ y está acotado tanto en $L^p(\mu)$ como en $L^r(\mu)$, ¿estará también acotado en $L^q(\mu)$?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Este resultado no solo es válido en este caso, sino que puede ser generalizado de diversas formas. Los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz son fundamentales para entender esta cuestión. En esta sección presentaremos estos teoremas en detalle.

IV.1.1 La interpolación de Riesz-Thorin.

En esta sección seguimos en gran medida la presentación en [Budge Folland Gerald, Real analysis, (1999), [3]].

Nos enfocaremos en trabajar con escalares que son números complejos. Sea T una aplicación lineal de $L^p(\mu)$ en $L^q(\nu)$. En términos matemáticos, esto implica que para cualquier par de funciones $f, g \in L^p(\mu)$ y y cualquier par de escalares complejos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$. En este caso escribiremos

$$T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$$

si además T es acotado, es decir, si

$$A := \sup_{\{f : \|f\|_{L^p(\mu)} \neq 0\}} \frac{\|Tf\|_{L^q(\mu)}}{\|f\|_{L^p(\mu)}} = \sup_{\|f\|_{L^p(\mu)} \neq 0} \|Tf\|_{L^q(\nu)}$$

es finito. El número A se define como la norma de T. Además, será esencial abordar de manera simultánea los operadores T definidos en varios espacios $L^p(\mu)$.

Definición 15. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$, definimos el espacio $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ como el espacio que contiene todas las funciones f tal que $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in L^p(\mu)$ y $f_2 \in L^r(\mu)$.*

Teorema 8. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Si se cumple que $1 \leq p < q < r \leq \infty$, entonces se tiene que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu) + L^r(\mu)$. Es decir, cada $f \in L^q(\mu)$ es la suma de una función en $L^p(\mu)$ y una función en $L^r(\mu)$.*

Demostración.
Sea $f \in L^q(\mu)$ y sea γ una constante positiva fija. Sea

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \gamma, \\ 0, & |f(x)| \leq \gamma, \end{cases}$$

y $f_2(x) := f(x) - f_1(x)$. Entonces

$$\int_X |f_1(x)|^p \, d\mu = \int_X |f_1(x)|^q |f_1(x)|^{p-q} \, d\mu \leq \gamma^{p-q} \int_X |f(x)|^q \, d\mu,$$

ya que $p - q \leq 0$. De manera similar, debido a $r \geq q$.

$$\int_X |f_2(x)|^r \, d\mu = \int_X |f_2(x)|^q |f_2(x)|^{r-q} \, d\mu \leq \gamma^{r-q} \int_X |f(x)|^q \, d\mu,$$

Así $f_1 \in L^p(\mu)$ y $f_2 \in L^r(\mu)$, con $f = f_1 + f_2$ y $r < \infty$. Si $r = \infty$. Entonces

$$\|f_2\|_{L^\infty(\mu)} = \inf_{C>0} \{C \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f_2(x)| > C\}) = 0\} \leq \gamma,$$

Así $f_2 \in L^\infty(\mu)$, y el teorema está probado. ∎

Teorema 9. *Sea* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *un espacio de medida. Si* $1 \leq p < q < r \leq \infty$, *entonces* $L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \subset L^q(\mu)$ *y*

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^t \|f\|_r^{1-t},$$

con $t \in (0, 1)$ *definida por*

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{r}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \textit{esto es} \quad t = \frac{1/q - 1/r}{1/p - 1/r}.$$

Demostración.

1. Supongamos que $r < \infty$. Dada la ecuación

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{r}, \tag{0.1}$$

si reorganizamos los términos para tener q en el lado derecho, obtenemos los exponentes conjugados

$$1 = \frac{qt}{p} + \frac{q(1-t)}{r}.$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Holder, Teorema 3, podemos calcular la norma $L^q(\mu)$ de f:

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^q \, d\mu &= \int_X |f|^{qt} |f|^{q(1-t)} \, d\mu \\
&\leq \left(\int_X |f|^{qt \cdot \frac{p}{qt}} \, d\mu \right)^{\frac{qt}{p}} \left(\int_X |f|^{q(1-t) \cdot \frac{r}{q(1-t)}} \, d\mu \right)^{\frac{q(1-t)}{r}} \\
&= \|f\|_{L^p(\mu)}^{qt} \|f\|_{L^r(\mu)}^{q(1-t)},
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^t \|f\|_{L^r(\mu)}^{1-t}.$$

2. Supongamos que $r = \infty$. Entonces tenemos que $t = p/q$ y que

$$|f|^p = |f|^{q-p}|f|^p \leq \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$$

Por lo tanto, podemos expresar la norma $L^q(\mu)$ de f como

$$\|f\|_{L^q(\mu)} = \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq \|f\|_\infty^{1-p/q}\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_\infty^{1-p/q}\|f\|_{L^p(\mu)}^{p/q} = \|f\|_\infty^{1-t}\|f\|_{L^p(\mu)}^{t}.$$

■

Proposición 12. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Si se cumple que $1 \leq p < r \leq \infty$, entonces $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ es un espacio de Banach con la norma definida como $\|f\| = \|f\|_{L^p(\mu)} + \|f\|_{L^r(\mu)}$. Además, si $p < q < r$, la aplicación inclusión $L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \to L^q(\mu)$ es continua.*

Demostración.
1. $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ es un espacio normado. Para demostrar esto, consideremos $f, g \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $f, g \in L^p(\mu)$ y $f, g \in L^r(\mu)$ por tanto se satisfacen todas las condiciones para ser un subespacio vectorial, ya que tanto $L^p(\mu)$ como $L^r(\mu)$ son espacios vectoriales. Además

i) $\| \, . \, \| \geq 0$, para todo $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Esta afirmación es evidente dado que las normas $\|f\|_{L^p(\mu)}$ y $\|f\|_{L^r(\mu)}$ son siempre no negativas.

ii) $\|f\| = 0$ si, y solo si, $\|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^r(\mu)} = 0$ si y solo si, $f = 0$ μ-c.t.p.

iii) $\|\alpha f\| = \|\alpha f\|_{L^p(\mu)} + \|\alpha f\|_{L^r(\mu)} = |\alpha| \, \|f\|_{L^p(\mu)} + |\alpha| \, \|f\|_{L^r(\mu)} = |\alpha| \, \|f\|$

iv) $\|f + g\| = \|f + g\|_{L^p(\mu)} + \|f + g\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)} + \|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^r(\mu)} = \|f\| + \|g\|$.

2. $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ es un espacio de Banach. Para demostrar esto, consideremos (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Entonces (f_n) es también una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ y en $L^r(\mu)$. Por lo tanto, existen funciones $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^r(\mu)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ en } L^p(\mu) \quad \lim_{n\to\infty} f_n = g \text{ en } L^r(\mu).$$

Esto implica que $f_n \to f$ en medida y si $r < \infty$ también $f_n \to g$ en medida. Si $r = \infty$ entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $f_{n_k} \to g$ μ-c.t.p. Por el Toerema 6, tenemos que $f = g$ μ-c.t.p. Por lo tanto, concluimos que $f = g \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Dado que $f_n \to f$ tanto en $L^p(\mu)$ como en $L^r(\mu)$, se deduce que $f_n \to f$ en $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ y por lo tanto, $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ es un espacio de Banach.

3. La aplicación $i : L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \to L^q(\mu)$ es continua. Esto se puede demostrar utilizando el Teorema 9, que nos dice que existe un $t \in (0, 1)$ tal que

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^t \|f\|_{L^r(\mu)}^{1-t},$$

donde

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{r}.$$

Dado que $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|$ y $\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|$, obtenemos

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|^t_{L^p(\mu)}\|f\|^{1-t}_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^t\|f\|^{1-t} = \|f\|$$

Ahora, consideremos un $\varepsilon > 0$ y dos funciones $f, g \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, Si elegimos $\delta = \varepsilon$ y $\|f - g\| < \delta$ entonces $\|f - g\|_{L^q(\mu)} \leq \|f - g\| < \varepsilon$. Por lo tanto, la aplicación $i : L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \to L^q(\mu)$ es uniformemente continua. ■

Proposición 13. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Si $1 \leq p < r \leq \infty$, entonces el espacio $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es un espacio de Banach, equipado con la norma definida por $\|f\| = \text{ínf}\{\|g\|_{L^p(\mu)} + \|h\|_{L^r(\mu)} : f = g + h\}$. Además, si $p < q < r$, la aplicación inclusión $L^q(\mu) \to L^p(\mu) + \|h\|_{L^r}$ es continua.*

Demostración.

1. El espacio $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es un espacio normado. Para demostrar esto, consideremos $f, g \in L^p(\mu) + L^r(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Podemos expresar f y g como $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$ respectivamente, donde $f_1, g_1 \in L^p(\mu)$ y $f_2, g_2 \in L^r(\mu)$. Dado que tanto $L^p(\mu)$ como $L^r(\mu)$ son espacios vectoriales, se cumplen todas las condiciones necesarias para que $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ sea un subespacio vectorial. Además,

i) $\| \,.\, \| \geq 0$, para todo $f \in L^p(\mu) + L^r(\mu)$. Esto se deduce directamente del hecho de que, $\|f\|_{L^p(\mu)} + \|f\|_{L^r(\mu)}$ es siempre mayor o igual a cero. Por lo tanto, el ínfimo es mayor o igual que cero.

ii) $\|f\| = 0$ si, y solo si, $\|g\|_{L^p(\mu)} = \|h\|_{L^r(\mu)} = 0$ tal que $f = g + h$. Además, esto ocurre si, y solo si, $f = 0$ μ-c.t.p.

iii)

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \text{ínf}\{\|\alpha g\|_{L^p(\mu)} + \|\alpha h\|_{L^r(\mu)} : \alpha f = \alpha g + \alpha h\} \\
&= \text{ínf}\{|\alpha|\ \|g\|_{L^p(\mu)} + |\alpha|\ \|h\|_{L^r(\mu)} : \alpha f = \alpha g + \alpha h\} \\
&= |\alpha|\,\text{ínf}\{\|g\|_{L^p(\mu)} + \|h\|_{L^r(\mu)} : f = g + h\} \\
&= |\alpha|\ \|f\|.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\| &= \text{ínf}\{\|g\|_{L^p(\mu)} + \|h\|_{L^r(\mu)} : f_1 + f_2 = g + h\} \\
&= \text{ínf}\{\|g_1 + g_2\|_{L^p(\mu)} + \|h_1 + h_2\|_{L^r(\mu)} : f_1 + f_2 = g + h = (g_1 + g_2) + (h_1 + h_2)\} \\
&\leq \text{ínf}\{(\|g_1\|_{L^p(\mu)} + \|g_2\|_{L^p(\mu)}) + \|h_1\|_{L^r(\mu)} + \|h_2\|_{L^r(\mu)} : f_1 + f_2 = g + h \\
&\qquad = (g_1 + g_2) + (h_1 + h_2)\} \\
&\leq \text{ínf}\{\|g_1\|_{L^p(\mu)} + \|h_1\|_{L^r(\mu)} : f_1 = g_1 + h_1\} + \text{ínf}\{\|g_2\|_{L^p(\mu)} + \|h_2\|_{L^r(\mu)} : f_2 = g_2 + h_2\} \\
&= \|f_1\| + \|f_2\|
\end{aligned}$$

2. El espacio $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es un espacio de Banach. Para demostrar esto, hacemos uso del Teorema 5.1 de la página 152 en Folland [3] que establece que un espacio vectorial normado, X, es completo si y solo si, toda serie absolutamente convergente en X converge.

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una serie absolutamente convergente en $L^p(\mu) + L^r(\mu)$. Por la definición de ínfmo y la norma $\|\ .\ \|$, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $g_n \in L^p(\mu)$ y $h_n \in L^r(\mu)$ tal que $f_n = g_n + h_n$ y

$$\|g_n\|_{L^p(\mu)} + \|h_n\|_{L^p(\mu)} < \|f_n\| + 1/2^n.$$

A partir de esta desigualdad, y dado que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ son absolutamente convergentes, se deduce que las series $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ también son absolutamente convergentes en los espacios $L^p(\mu)$ y $L^r(\mu)$ respectivamente.

Como los espacios $L^p(\mu)$ y $L^r(\mu)$ son espacios de Banach, existen $g \in L^p(\mu)$ y $h \in L^r(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \to g$ en $L^p(\mu)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \to h$ en $L^r(\mu)$. Además,

$$\|g - \sum_{n=1}^{\infty} g_n\| \leq \|g - \sum_{n=1}^{\infty} g_n\|_{L^p(\mu)} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

De manera similar,

$$\|h - \sum_{n=1}^{\infty} h_n\| \leq \|h - \sum_{n=1}^{\infty} h_n\|_{L^r(\mu)} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Combinando estas dos desigualdades, obtenemos que

$$\|g + h - \sum_{n=1}^{\infty} f_n\| \leq \|g - \sum_{n=1}^{\infty} g_n\|_{L^p(\mu)} + \|h - \sum_{n=1}^{\infty} h_n\|_{L^r(\mu)} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Por lo tanto,la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n + h_n)$, converge para $g + h \in L^p(\mu) + L^r(\mu)$. Esto demuestra precisamente lo que queríamos.

3. La aplicación $i : L^q(\mu) \to L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es continua. Para demostrar esto, consideremos $p < q < r$ y $f \in L^q(\mu)$. Definamos el conjunto E de la siguiente manera:

$$E := \{x \in X : 1 < |f(x)|\}.$$

Por construcción de E se tiene que

$$|f\chi_E|^p \leq |f\chi_E|^q \ \text{ y } \ |f\chi_{E^c}|^r \leq |f\chi_{E^c}|^q,$$

Por lo tanto, tenemos que $f\chi_E \in L^p(\mu)$ y $f\chi_{E^c} \in L^r(\mu)$. Entonces,

$$\|f\| = \|f\chi_E + f\chi_{E^c}\| \leq \|f\chi_E\|_{L^p(\mu)} + \|f\chi_{E^c}\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\chi_E\|_{L^q(\mu)} + \|f\chi_{E^c}\|_{L^q(\mu)} = \|f\|_{L^q(\mu)}.$$

Dado un $\varepsilon > 0$ y $f, g \in L^q(\mu)$, si definimos $\delta = \varepsilon$ y si $\|f - g\|_{L^q(\mu)} < \delta$ entonces $\|f - g\| \leq \|f - g\|_{L^q(\mu)} < \varepsilon$.

Por lo tanto, la aplicación $i : L^q(\mu) \to L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es uniformemente continua y, en consecuencia, es continua. ∎

Lema 7. *(Lema de las tres lineas). Sea Φ una función continua y acotado en la franja $0 \leq Re(z) \leq 1$ que es holomorfa en el interior de la franja. Supongamos que $M_0 > 0$ y $M_1 > 0$. Si se cumple que*

$$|\Phi(z)| \leq M_0, \ \ \textit{cuando} \ \ Re(z) = 0,$$

y

$$|\Phi(z)| \leq M_1, \ \ \textit{cuando} \ \ Re(z) = 1,$$

entonces se deduce que:

$$|\Phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t, \ \ \textit{cuando} \ \ Re(z) = t, \ \ \textit{para todo} \ \ 0 < t < 1.$$

Demostración.

Consideremos $0 < \varepsilon < 1$. Para todo $z \in \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(w) \leq 1\}$ definamos la función $\Phi_\varepsilon(z)$ como

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{e^{-\varepsilon z(1-z)}\Phi(z)}{M_0^{1-z} M_1^z}.$$

Observemos que Φ_ε es una función holomorfa en el interior de la franfa y continua en toda la franja. Ahora, consideremos $z = t + ib$

$$\mathrm{Re}[z(1-z)] = \mathrm{Re}[(t+ib)(1-t-ib)] = t(1-t) + b^2$$

• Si establecemos que $\mathrm{Re}(z) = t = 0$, entonces obtenemos:

$$|\Phi_\varepsilon(z)| = \frac{|e^{-\varepsilon z(1-z)}||\Phi(z)|}{|M_0^{1-z}||M_1^z|} \leq \frac{e^{\mathrm{Re}(-\varepsilon z(1-z))} M_0}{M_0^{\mathrm{Re}(1-z)} M_1^{\mathrm{Re}(z)}} = \frac{e^{-\varepsilon b^2} M_0}{M_0} = e^{-\varepsilon b^2} \leq 1.$$

• Si establecemos que $\mathrm{Re}(z) = t = 1$, entonces obtenemos:

$$|\Phi_\varepsilon(z)| = \frac{|e^{-\varepsilon z(1-z)}||\Phi(z)|}{|M_0^{1-z}||M_1^z|} \leq \frac{e^{\mathrm{Re}(-\varepsilon z(1-z))} M_1}{M_0^{\mathrm{Re}(1-z)} M_1^{\mathrm{Re}(z)}} = \frac{e^{-\varepsilon b^2} M_1}{M_1} = e^{-\varepsilon b^2} \leq 1.$$

Observemos que Φ_ε cumple las condiciones del lema, con M_0 y M_1 ambos iguales a 1. Para comprobar que Φ_ε está acotada en la franja, consideremos $t \in (0, 1)$

$$|\Phi_\varepsilon(z)| = \frac{|e^{-\varepsilon z(1-z)}||\Phi(z)|}{|M_0^{1-z}||M_1^z|} = \frac{e^{\mathrm{Re}(-\varepsilon z(1-z))}|\Phi(z)|}{M_0^{\mathrm{Re}(1-z)} M_1^{\mathrm{Re}(z)}} = \frac{e^{-\varepsilon(t(1-t)+b^2)}|\Phi(z)|}{M_0^{1-t} M_1^t}$$

$$= \frac{e^{-\varepsilon t(1-t)} e^{-\varepsilon b^2} |\Phi(z)|}{M_0^{1-t} M_1^t} \leq C e^{-\varepsilon b^2}$$

donde $C > 0$ y $\frac{e^{-\varepsilon t(1-t)}|\Phi(z)|}{M_0^{1-t} M_1^t} \leq C$. Esto es factible ya que, por hipótesis, sabemos que la función Φ está acotada en la franja. Como

$$e^{-\varepsilon b^2} \to 0 \ \ \text{cuando} \ \ |b| \to \infty,$$

tenemos que

$$|\Phi_\varepsilon(z)| \to 0 \ \text{ cuando } \ |\mathrm{Im}(z)| \to \infty.$$

Esto significa que,

$$\text{existe } A_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |\Phi_\varepsilon(z)| < 1 \text{ siempre que } |\mathrm{Im}(z)| > A_\varepsilon. \tag{0.2}$$

Sea $L_\varepsilon > A_\varepsilon$, entonces $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq 1$ en la frontera del rectángulo $0 \leq \mathrm{Re(z)} \leq 1$ y $-L_\varepsilon \leq \mathrm{Im}(z) \leq L_\varepsilon$.

Aplicando el principio del módulo máximo, Corolario 4.6 de la página 92 del libro de Elias M. Stein y Rami Shakarchi [16], obtenemos que

$$|\Phi_\varepsilon(z)| \leq 1 \text{ en el interior del rectágulo también.} \tag{0.3}$$

A partir de las ecuaciones (0.2) y (0.3), concluimos que $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq 1$ en toda la franja. Dado que,

$$|\Phi_\varepsilon(z)| = \left| \frac{e^{-\varepsilon z(1-z)}\Phi(z)}{M_0^{1-z}M_1^z} \right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(-\varepsilon z(1-z))}|\Phi(z)|}{M_0^{\mathrm{Re}(1-z)}M_1^{\mathrm{Re}(z)}} = \frac{e^{-\varepsilon(t(1-t)+b^2)}|\Phi(z)|}{M_0^{1-t}M_1^t}$$

entonces

$$\frac{e^{-\varepsilon(t(1-t)+b^2)}|\Phi(z)|}{M_0^{1-t}M_1^t} \leq 1, \ \text{para todo } 0 < \mathrm{Re}(z) = t < 1,$$

es decir

$$e^{-\varepsilon(t(1-t)+b^2)}|\Phi(z)| \leq M_0^{1-t}M_1^t.$$

Al aplicar el límite cuando $\varepsilon \to 0$, obtenemos que

$$|\Phi(z)| \leq M_0^{1-t}M_1^t, \ \text{para todo } z \text{ en la franja.}$$

■

Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ dos espacios de medida, y $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$. Sean $T_0 : L^{p_0}(\mu) \to L^{q_0}(\nu)$ y $T_1 : L^{p_1}(\mu) \to L^{q_1}(\nu)$ dos operadores. Decimos que T_0 y T_1 coinciden en el espacio $L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ si para todo $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$, se cumple que $T_0 f \in L^{q_1}(\nu)$ y $T_0 f = T_1 f$.

Dado que $L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ es un subespacio denso de $L^{p_j}(\mu)$, para $j \in \{0, 1\}$, cada operador T_j está completamente determinado por su restricción en $L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$.

Cuando T_0 y T_1 coinciden, existe un único operador continuo $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ cuya restricción a $L^{p_j}(\mu)$ es T_j: Este operador T se define como sigue:

$$Tf = T_0 f_0 + T_1 f_1 \tag{0.4}$$

donde $f = f_0 + f_1$ y $f_j \in L^{p_j}(\mu)$. Según nuestra hipótesis, el segundo término de la igualdad en la ecuación (0.4) no depende de la descomposición $f = f_0 + f_1$.

La restricción del operador $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ a $L^p(\mu)$ para p entre p_0 y p_1 tiene sentido porque $L^p(\mu)$ es un subespacio (denso) de $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$.

PREGUNTA: ¿Existe un valor apropiado de q tal que el operador $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ es acotado?

En otras palabras, la imagen $T(L^p(\mu))$ que está incluida en $L^{q_0}(\mu) + L^{q_1}(\mu)$, ¿también está contenida en $L^q(\nu)$ y el número $\|T\|_{L^p(\mu)\to L^q(\nu)}$ es finito? Un ejemplo evidente es: si $p_0 = p_1 = p$ y q entre q_0 y q_1, en este caso T es un operador lineal acotado.

De hecho, si definimos $t \in [0, 1]$ por la relación

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

entonces, utilizando el mismo razonamiento que en la demostración del Teorema 9 tenemos que $Tf \in L^q(\nu)$ y que

$$\|Tf\|_{L^q(\nu)} \le \|Tf\|^{1-t}_{L^{q_0}(\nu)} \|Tf\|^t_{L^{q_1}(\nu)} \le C\|f\|_{L^p(\mu)},$$

donde

$$C = \|T\|^{1-t}_{L^{p_0}(\mu)\to L^{q_0}(\nu)} \|T\|^t_{L^{p_1}(\mu)\to L^{q_1}(\nu)}.$$

En este ejemplo particular, todos los valores de q que se encuentran entre q_0 y q_1 son válidos, debido a que $p_0 = p_1$. En un caso más general, la respuesta proporcionada por el teorema de Riesz-Thorin indica que $1/q$ depende linealmente de $1/p$. Dado que q debe ser igual a q_j cuando p es igual a p_j, obtenemos la siguiente relación:

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right)/\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)/\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right).$$

Teorema 10. *(Interpolación de Riesz-Thorin). Consideremos dos espacios de medida, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ y sean $1 \le p_0, q_0, p_1, q_1 \le \infty$. Si $q_0 = q_1 = \infty$, asumamos que ν es semifinita. Para $0 < t < 1$, definimos p_t y q_t de la siguiente manera:*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}; \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Si T es una transformación lineal que mapea $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ en $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ tal que:

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(\nu)} \le M_0\|f\|_{L^{p_0}(\mu)}, \text{ para todo } f \in L^{p_0}(\mu)$$

y

$$\|Tf\|_{L^{q_1}(\nu)} \le M_1\|f\|_{L^{p_1}(\mu)}, \text{ para todo } f \in L^{p_1}(\mu),$$

entonces se cumple que

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L^{p_t}(\mu)} \text{ para todo } f \in L^{p_t}(\mu). \tag{0.5}$$

Demostración.

1. En el caso en que $p_0 = p_1 = p$, se deduce que $p_t = p$. Este escenario particular ya ha sido analizado en la página precedente.

2. Supongamos que $p_0 \neq p_1$, con $p_0 < p_1$, en este caso $1 < p_t < \infty$ para todo $0 < t < 1$.

En primer lugar, vamos a demostrar que la desigualdad (0.5) es válida para f perteneciente al espacio $\sum$ de funciones simples que se desvanecen fuera de un conjunto de medida finita. Es importante destacar que el espacio $\sum$ es denso en $L^p(\mu)$, para cualquier $1 \leq p < \infty$).

Denotemos por $\sum_X$ y $\sum_Y$ a los conjuntos de todas las funciones simples en X e Y respectivamente. De acuerdo con el Teorema 5, tanto $\sum_X$ como $\sum_Y$ son densos en los espacios $L^p(\mu)$ y $L^p(\nu)$ respectivamente, para $1 \leq p < \infty$.

Observemos que, para cualquier $f \in \sum_X$, $Tf \in L^{q_0}(\nu) \cap L^{q_1}(\nu)$, Por lo tanto, el conjunto $\{y \in Y : Tf(y) \neq 0\}$ es σ finita siempre que no se tiene $q_0 = q_1 = \infty$. Sin embargo, si $q_0 = q_1 = \infty$, entonces ν es simifinita, y se cumple la hipótesis del Lema 6. Por lo tanto, tenemos que

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} = \sup\left\{\left|\int_Y (Tf)g\, d\nu\right| : g \in \textstyle\sum_Y \text{ y } \|g\|_{L^{q_t'}(\nu)} = 1\right\},$$

donde q_t' representa el exponente conjugado de q_t. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $f \neq 0$. En este caso, cambiamos la escala de f tal que $\|f\|_{L^{p_t}} = 1$. Por lo tanto, nuestro objetivo es demostrar que, para cualquier función $f \in \sum_X$ que cumpla con la condición $\|f\|_{L^{p_t}(\mu)} = 1$, verifique que

$$\int_Y (Tf)g\, d\nu \leq M_0^{1-t} M_1^t \text{ para todo } g \in \textstyle\sum_Y \text{ tal que } \|g\|_{L^{q_t'}(\nu)} = 1.$$

Sea $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{E_j}$ y $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{F_k}$, donde los E_j y los F_k son disjuntos dos a dos en X e Y respectivamente, y c_j, $d_k \in \mathbb{C}$ diferentes de cero. Si expresamos c_j y d_k en coordenadas polares, tenemos

$$c_j := |c_j| e^{i\gamma_j} \text{ y } d_k := |d_k| e^{i\psi_k}.$$

Introducimos las funciones $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ de la siguiente manera:

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \text{ y } \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Es importante notar que,

$$\alpha(t) = \frac{1}{p_t} \text{ y } \beta(t) = \frac{1}{q_t} \text{ para } 0 < t < 1.$$

Fijemos $t \in (0,1)$. Dado que $p_t < \infty$, se deduce que $\alpha(t) > 0$. A continuación, definimos las siguientes funciones,

$$f_z := \sum_{j=1}^{n} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j},$$

$$g_z := \sum_{k=1}^{m} |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i\psi_k} \chi_{F_k} \text{ si } \beta(t) \neq 1,$$

en el caso que $\beta(t) = 1$, definimos $g_z = g$ para todo z. Además, si $z = t$ entonces se cumple que $f_t = f$ y $g_t = t$.

Finalmente, definamos la función $\Phi(z)$ de la siguiente manera:

$$\Phi(z) = \int_Y (Tf_z) g_z \, d\nu.$$

Caso I: Consideremos la situación en la que $\beta(t) = 1$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_Y T\Big(\sum_{j=1}^{m} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j}\Big) \sum_{k=1}^{n} |d_k| e^{i\psi_k} \chi_{F_k} \, d\nu \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} |d_k| e^{i(\gamma_j + \psi_k)} \int_Y (T\chi_{E_j}) \chi_{F_k} \, d\nu. \end{aligned}$$

Caso II: Ahora consideremos la situación en la que $\beta(t) \neq 1$.

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_Y T\Big(\sum_{j=1}^{m} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j}\Big) \sum_{k=1}^{n} |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i\psi_k} \chi_{F_k} \, d\nu \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}} |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}} e^{i(\gamma_j + \psi_k)} \int_Y (T\chi_{E_j}) \chi_{F_k} \, d\nu. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\Phi(z)$ es una función holomorfa de z, que es continua y acotada en el conjunto donde $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ ya que, por la desigualdad de Holder, Teorema 3, tenemos

$$\begin{aligned} |\int_Y (T\chi_E) \chi_F \, d\nu| &\leq \|T\chi_E\|_{L^{q_0}(\nu)} \|\chi_F\|_{L^{q_0'}(\nu)} \\ &\leq M_0 \|\chi_E\|_{L^{p_0}(\mu)} \|\chi_F\|_{L^{q_0'}(\nu)} \\ &= M_0 \mu(E)^{1/p_0} \nu(F)^{1/q_0'}. \end{aligned}$$

Observemos que, si tomamos $z = t$ tenemos que

$$\Phi(t) = \int_Y (Tf) g \, d\nu.$$

Además, se cumple que

$$f_t = \sum_{j=1}^{m} |c_j|^{\frac{\alpha(t)}{\alpha(t)}} e^{i\gamma_j}\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{m} |c_j| e^{i\gamma_j}\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{m} c_j\chi_{E_j} = f.$$

De manera análoga, se verifica que $g_t = g$.

Aplicando el Lema de las Tres Líneas, Lema 7, es suficiente demostrar que $|\Phi(z)| \leq M_0$ cuando $\mathrm{Re}(z) = 0$ y $|\Phi(z)| \leq M_1$ cuando $\mathrm{Re}(z) = 1$, desde que

$$|\Phi(t)| \leq M_0^{1-t} M_1^t \text{ cuando } t \in (0, 1).$$

Caso I. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, entonces $z = ib$, donde $b \in \mathbb{R}$. En este caso tenemos

$$\alpha(z) = \frac{1 - ib}{p_0} + \frac{ib}{p_1} = \frac{1}{p_0} + ib(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}),$$

luego, obtenemos

$$\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)} = \frac{\frac{1}{p_0} + ib(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0})}{\frac{1}{p_t}} = \frac{p_t}{p_0} + ibp_t(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}).$$

Por lo tanto, $\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}) = \frac{p_t}{p_0}$.

De manera análoga,

$$1 - \beta(z) = \frac{1 - ib}{q_0} + \frac{ib}{q_1} = 1 - \frac{1}{q_0} + ib(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}),$$

lo que nos permite obtener

$$\frac{1 - \beta(z)}{1 - \beta(t)} = \frac{1 - \frac{1}{q_0} + ib(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0})}{1 - \frac{1}{q_t}}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1 - \beta(z)}{1 - \beta(t)}\Big) = \frac{1 - \frac{1}{q_0}}{1 - \frac{1}{q_t}} = \frac{\frac{1}{q_0'}}{\frac{1}{q_t'}} = \frac{q_t'}{q_0'},$$

dado que se cumple que

$$\frac{1}{q_t} + \frac{1}{q_t'} = 1 \text{ y } \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0'} = 1.$$

Luego, tenemos que

$$|f_z| := \sum_{j=1}^{n} |c_j|^{\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)})} |e^{i\gamma_j}| \chi_{E_j} = |f|^{\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)})} = |f|^{\frac{p_t}{p_0}},$$

y

$$|g_z| := \sum_{k=1}^{m} |d_k|^{\mathrm{Re}\left(\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}\right)} |e^{i\psi_k}| \chi_{F_k} = |g|^{\mathrm{Re}\left(\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}\right)} = |g|^{\frac{q_t'}{q_0'}}.$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Holder, Teorema 3,

$$\begin{aligned}
|\Phi(z)| &= \left| \int_Y (T f_z) g_z \, d\nu \right| \\
&\leq \|T f_z\|_{L^{q_0}(\nu)} \|g_z\|_{L^{q_0'}(\nu)} \\
&\leq M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}(\mu)} \|g_z\|_{L^{q_0'}(\nu)} \quad \text{por hipótesis} \\
&= M_0 \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}^{\frac{p_t}{p_0}} \|g\|_{L^{q_t'}(\nu)}^{\frac{q_t'}{q_0'}} = M_0
\end{aligned}$$

Puesto que se tomó $\|f\|_{L^{p_t}(\mu)} = 1$ y $\|g\|_{L^{q_t'}(\nu)} = 1$.

Caso II. Si $\mathrm{Re}(z) = 1$, entonces $z = 1 + ib$, donde $b \in \mathbb{R}$. En este caso, tenemos que

$$\alpha(z) = \frac{1-(1+ib)}{p_0} + \frac{1+ib}{p_1} = \frac{1}{p_1} + ib(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}),$$

a continuación, obtenemos

$$\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)} = \frac{\frac{1}{p_1} + ib(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0})}{\frac{1}{p_t}} = \frac{p_t}{p_1} + ibp_t(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}).$$

Por lo tanto, $\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)}) = \frac{p_t}{p_1}$.

De manera análoga, tenemos

$$1-\beta(z) = 1 - \frac{1-(1+ib)}{q_0} + \frac{1+ib}{q_1} = 1 - \frac{1}{q_1} + ib(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}),$$

lo que nos permite obtener

$$\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)} = \frac{1 - \frac{1}{q_1} + ib(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1})}{1 - \frac{1}{q_t}}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}\right) = \frac{1 - \frac{1}{q_1}}{1 - \frac{1}{q_t}} = \frac{\frac{1}{q_1'}}{\frac{1}{q_t'}} = \frac{q_t'}{q_1'},$$

dado que se cumple que

$$\frac{1}{q_t} + \frac{1}{q_t'} = 1 \text{ y } \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1'} = 1.$$

Luego obtenemos

$$|f_z| := \sum_{j=1}^{n} |c_j|^{\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)})} |e^{i\gamma_j}| \chi_{E_j} = |f(x)|^{\mathrm{Re}(\frac{\alpha(z)}{\alpha(t)})} = |f(x)|^{\frac{p_t}{p_1}},$$

y

$$|g_z| := \sum_{k=1}^{m} |d_k|^{\mathrm{Re}\left(\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}\right)} |e^{i\psi_k}| \chi_{F_k} = |g(x)|^{\mathrm{Re}\left(\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}\right)} = |g(x)|^{\frac{q_t'}{q_1'}}.$$

Aplicando la desigualdad de Holder, Teorema 3, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &= \left| \int_Y (Tf_z) g_z \, d\nu \right| \\ &\leq \|Tf_z\|_{L^{q_1}(\nu)} \|g_z\|_{L^{q_1'}(\nu)} \\ &\leq M_1 \|f_z\|_{L^{p_1}(\mu)} \|g_z\|_{L^{q_1'}(\nu)} \quad \text{por hipótesis} \\ &= M_1 \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}^{\frac{p_t}{p_1}} \|g\|_{L^{q_t'}(\nu)}^{\frac{q_t'}{q_1'}} = M_1, \end{aligned}$$

esto se debe a que hemos establecido que $\|f\|_{L^{p_t}(\mu)} = 1$ y $\|g\|_{L^{q_t'}(\nu)} = 1$.

Por lo tanto, Φ satisface las hipótesis del Lema de las tres líneas, así tenemos que

$$|\Phi(z)| \leq M_0^{-t} M_1^t \quad \text{para } \mathrm{Re}\,(z) = t \in (0,1).$$

Ahora, por el Lema 6, tenemos que

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{-t} M_1^t \|f\|_p$$

para f simple.

3. supongamos que f es una función arbitraria en $L^{p_t}(\mu)$. De acuerdo con el Teorema 5, existe una sucesión de funciones (f_n), $f_n \in \sum_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n| < |f|$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Definamos

$$A = \{x \in X : |f(x)| > 1\}, \quad g = f\chi_A, \quad g_n = f_n\chi_A \quad h = f\chi_{A^c} \text{ y } h_n = f_n\chi_{A^c}.$$

Entonces tenemos que

$$f = f\chi_X = f\chi_A + f\chi_{A^c} = g + h,$$

$$f_n = f_n\chi_X = f_n\chi_A + f_n\chi_{A^c} = g_n + h_n.$$

Supongamos que $1 \leq p_0 < p_t < p_1 \leq \infty$. En caso contrario, simplemente podemos reasignar las etiquetas de p_0 y p_1.

Por lo tanto, concluimos que $g \in L^{p_0}(\mu)$ y $h \in L^{p_1}(\mu)$, dado que $\|g\|_{L^{p_0}(\mu)} \leq \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}$ y $\|h\|_{L^{p_1}\mu} \leq \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}$.

Podemos justificar esto de la siguiente manera:

$$|g(x)|^{p_0} = |f(x)|^{p_0}\chi_A(x) \leq |f(x)|^{p_t}\chi_A(x) < \infty,$$

dado que $|f(x)| > 1$ y $p_t > p_0$.

$$|h(x)|^{p_1} = |f(x)|^{p_1}\chi_{A^c}(x) \leq |f(x)|^{p_t}\chi_{A^c}(x) < \infty,$$

desde que $|f(x)| \leq 1$ y $p_t < p_1$ y $f \in L^{p_t}(\mu)$, Este es el mismo argumento utilizado en la demostración del Teorema 8.

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, Teorema 2, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p_t} = 0 \text{ con } g = |f| \in L^{p_t}(\mu),$$

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{p_0} = 0 \text{ con } g = |f|\chi_A \in L^{p_0}(\mu),$$

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_{p_1} = 0 \text{ con } h = |f|\chi_{A^c} \in L^{p_1}(\mu).$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|Tg_n - Tg\|_{L^{q_0}(\nu)} = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \|Th_n - Th\|_{L^{q_1}(\nu)} = 0,$$

dado que

$$\|T(g_n - g)\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq M_0\|g_n - g\|_{L^{p_0}(\mu)} \text{ y } \|T(h_n - h)\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq M_1\|h_n - h\|_{L^{p_1}(\mu)}.$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 7, tenemos que existe una subsucesión (Tg_{n_k}) y (Th_{n_k}) de (Tg_n) y (Th_n) respectivamente, tal que

$$\lim_{n\to\infty} Tg_n = Tg \ \ \nu - c.t.p. \text{ y } \lim_{n\to\infty} Th_n = Tg \ \ \nu - \text{c.t.p.}$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf \ \ \nu - \text{c.t.p.},$$

dado que

$$f_n = g_n + h_n \text{ y } f = g + h,$$

y

$$T(f_n) = T(g_n) + T(h_n) \to T(g) + T(h) = T(f).$$

Aplicando el Lema de Fatou, Lema 5 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|Tf\|^{q_t}_{L^{q_t}(\nu)} &= \int_X |Tf|^{q_t}\, d\nu = \int_Y \lim_{n\to\infty} |Tf_n|^{q_t}\, d\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_Y |Tf_n|^{q_t}\, d\nu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|Tf_n\|^{q_t}_{L^{q_t}(\nu)}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|Tf_n\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq \liminf_{n\to\infty} M_0^{1-t}M_1^t\|f_n\|_{L^{p_t}(\mu)} = M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{L^{p_t}(\mu)}.$$

Con esto concluimos la demostración. ■

La conclusión del teorema de Riesz-Thorin puede ser reformulada de una manera más fuerte. Consideremos $M(t)$ como la norma del operador T que mapea de $L^{p_t}(\mu)$ a $L^{q_t}(\nu)$. Hemos demostrado que

$$M(t) \leq M_0^{1-t}M_1^t$$

Es posible que se mantenga una desigualdad estricta; No obstante, si se da que $0 < s < t < u < 1$ y $t = (1-\tau)s + \tau u$, entonces el teorema puede ser aplicado de nuevo para demostrar que

$$M(t) \leq M(s)^{1-\tau}M(u)^{\tau}.$$

En resumen, la conclusión es que $\log M(t)$ es una función convexa de t.

IV.1.2 La interpolación de Marcinkiewicz.

En gran medida, seguimos la presentación de Budge Folland Gerald, en su libro Real Analysis (1999), [3].

Procedamos a explorar el Teorema de Marcinkiewicz, lo cual requiere la introducción de terminología adicional. Consideremos T como una aplicación que mapea el espacio vectorial $\mathcal{D}$, compuesto por funciones medibles en el espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$, hacia el conjunto de todas las funciones medibles en el espacio de medida $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$.

- La aplicación T se denomina sublineal, si cumple con las siguientes dos propiedades: $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$ y $|T(cf)| = c|Tf|$ para todo $f, g \in \mathcal{D}$ y $c > 0$.

- Una aplicación sublineal T se clasifica como de tipo fuerte (p, q), donde $(1 \leq p, q \leq \infty)$, si cumple las siguientes condiciones $L^p(\mu) \subseteq \mathcal{D}$, $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$, y existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ para todo $f \in L^p(\mu)$.

- Una aplicación sublineal T se clasifica como de tipo débil (p, q), donde $(1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty)$, si cumple las siguientes condiciones $L^p(\mu) \subseteq \mathcal{D}, T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ débil, y existe una constante $C > 0$ tal que $[Tf]_q \leq C\|f\|_p$, para todo $f \in L_p(\mu)$. Además, diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si y solo si T es de tipo fuerte (p, ∞).

Teorema 11. *(Interpolación de Marcinkiewicz). Supongamos que $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ son espacios de medida; p_0, p_1, q_0, q_1 son elementos de $[1, \infty]$, tal que $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, y $q_0 \neq q_1$; y*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad y \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \quad donde \quad 0 < t < 1.$$

Si T es una aplicación sublineal desde $L^{p_0}(\mu)+L^{p_1}(\mu)$ para el espacio de funciones medibles en Y que es tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1), entonces T es tipo fuerte (p, q). Más precisamente, si

$$[Tf]_{q_j} \leq C_j \|f\|_{p_j}, \quad j = 0, 1,$$

entonces

$$\|Tf\|_q \leq B_p \|f\|_p$$

donde B_p depende solo de $p_j; q_j; C_j$ además de p.

Demostración.

1. Consideremos el caso en el que $p_0 = p_1 = p$. Dada la desigualdad

$$[Tf]_{q_j} \leq C_j \|f\|_{p_j}, \quad j = 0, 1,$$

podemos deducir que

$$\alpha^{q_0} \lambda_{Tf}(\alpha) \leq \sup_{\alpha>0} \alpha^{q_0} \lambda_{Tf}(\alpha) \leq C_0^{q_0} \|f\|_p^{q_0}.$$

De lo anterior, se sigue que

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_0 \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_0}. \tag{0.6}$$

De manera similar a lo discutido anteriormente, obtenemos

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_1 \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_1}. \tag{0.7}$$

Utilizando las ecuaciones (0.6) y (0.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_X |Tf|^q = q \int_0^\infty s^{q-1} \mu(\{x \in X : |(Tf)(x)| > s\})\, ds \\
&= q \int_0^{\|f\|_p} s^{q-1} \mu(\{x : |(Tf)(x)| > s\})\, ds + q \int_{\|f\|_p}^\infty s^{q-1} \mu(\{x : |(Tf)(x)| > s\})\, ds \\
&\leq q \int_0^{\|f\|_p} s^{q-1} \left(\frac{C_0 \|f\|_p}{s} \right)^{q_0} ds + q \int_{\|f\|_p}^\infty s^{q-1} \left(\frac{C_1 \|f\|_p}{s} \right)^{q_1} ds \\
&= q \left(\frac{C_0^{q_0}}{q - q_0} + \frac{C_1^{q_1}}{q_1 - q} \right) \|f\|_p^q,
\end{aligned}$$

concluimos que,

$$\|Tf\|_q \leq q^{1/q} \left(\frac{C_0^{q_0}}{q - q_0} + \frac{C_1^{q_1}}{q_1 - q} \right)^{1/q} \|f\|_p.$$

2. Ahora consideremos el caso en el que $p_0 \neq p_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p_0 < p_1$, Por el momento, también asumiremos que $q_0 < \infty$ y $q_1 < \infty$, lo que implica que $p_0 < p_1 < \infty$. Dada una función $f \in L^p(\mu)$ y $A > 0$, definamos las funciones g_A y h_A como en la Proposición 10. Entonces, aplicando las Proposiciones 9 y 10, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int |g_A|^{p_0}\, d\mu &= p_0 \int_0^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_{g_A}(\beta)\, d\beta = p_0 \int_0^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta + A)\, d\beta, \quad h = B + A \\
&= p_0 \int_A^\infty (\beta - A)^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \leq p_0 \int_A^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta, \\
\int |h_A|^{p_1}\, d\mu &= p_1 \int_0^\infty \beta^{p_1-1}\lambda_{h_A}(\beta)\, d\beta = p_1 \int_0^A \beta^{p_1-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta.
\end{aligned} \tag{0.8}$$

De forma análoga, podemos escribir la siguiente igualdad:

$$\int |Tf|^q\, d\nu = q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)\, d\alpha = 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(2\alpha)\, d\alpha. \quad h = \alpha/2 \tag{0.9}$$

Dado que T es sublineal, por la Proposición 8 *d*) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\lambda_{Tf}(2\alpha) \leq \lambda_{Tg_A}(\alpha) + \lambda_{Th_A}(\alpha). \tag{0.10}$$

Esta relación es cierto para todo $\alpha > 0$ y $A > 0$, lo que nos permite hacer que A dependa de α. Ahora, vamos a hacer una elección específica de A. A partir de las ecuaciones que definen p y q, y mediante un cálculo algebraico sencillo, obtenemos que

$$\frac{1/q - 1/q_0}{1/q_1 - 1/q_0} = t = \frac{1/p - 1/p_0}{1/p_1 - 1/p_0} \quad \text{y} \quad \frac{1/q - 1/q_1}{1/q_1 - 1/q_0} = 1 - t = \frac{1/p - 1/p_1}{1/p_0 - 1/p_1}.$$

De aquí, deducimos que

$$\frac{1/q - 1/q_0}{1/p - 1/p_0} = \frac{1/q_1 - 1/q_0}{1/p_1 - 1/p_0} = \frac{1/q - 1/q_1}{1/p - 1/p_1},$$

lo que implica que

$$\frac{1/q - 1/q_0}{1/p - 1/p_0} = \frac{1/q - 1/q_1}{1/p - 1/p_1}.$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{p_0(q_0 - q)}{q_0(p_0 - p)} = \frac{p^{-1}(q^{-1} - q_0^{-1})}{q^{-1}(p^{-1} - p_0^{-1})} = \frac{p^{-1}(q^{-1} - q_1^{-1})}{q^{-1}(p^{-1} - p_1^{-1})} = \frac{p_1(q_1 - q)}{q_1(p_1 - p)}; \tag{0.11}$$

Denotamos el valor común de estas cantidades por σ, y elegimos $A = \alpha^\sigma$. Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (0.8), (0.9), (0.10), y las estimativas de tipo débil en T, tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &\leq 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left[(C_0 \|g_A\| p_0/\alpha)^{q_0} + (C_1 \|h_A\| p_1/\alpha)^{q_1} \right] \, d\alpha, \\
&\leq 2^q q \, C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \left[\int_{\alpha^\sigma}^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) \, d\beta \right]^{q_0/p_o} d\alpha \\
&\quad + 2^q q \, C_1^{q_1} p_1^{q_1/p_1} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} \left[\int_0^{\alpha^\sigma} \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta) \, d\beta \right]^{q_1/p_1} d\alpha, \\
&= \sum_0^1 2^q q \, C_j^{p_j} p_j^{q_j/p_j} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta) \, d\beta \right]^{q_j/p_j} d\alpha,
\end{aligned} \tag{0.12}$$

donde, denotamos por χ_0 y χ_1 las funciones características de los conjuntos $\{(\alpha,\beta) : \beta > \alpha^\gamma\}$ y $\{(\alpha,\beta) : \beta < \alpha^\gamma\}$, respectivamente. Entonces, tenemos que

$$\phi_j(\alpha,\beta) = \chi_j(\alpha,\beta) \, \alpha^{(q-q_j-1)p_j/q_j} \beta^{p_j-1} \lambda_f(\beta).$$

Dado que $q_0/p_0 \geq 1$ y $q_1/p_1 \geq 1$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski para integrales para obtener

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta) \, d\beta \right]^{q_j/p_j} d\alpha \leq \left[\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha,\beta)^{q_j/p_j} d\alpha \right]^{p_j/q_j} d\beta \right]^{q_j/p_j}, \tag{0.13}$$

Si definimos $\tau = 1/\sigma$, y si $q_1 > q_0$, entonces tanto $(q - q_o)$ como σ son positivos. En este caso, la desigualdad $\beta > \alpha^\sigma$ es equivalente a $\alpha < \beta^\tau$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_0(\alpha,\beta)^{q_0/p_0} \, d\alpha \right]^{p_0/q_0} d\beta & \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{\beta^\tau} \alpha^{q-q_0-1} \, d\alpha \right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) \, d\beta \\
&= (q-q_0)^{-p_0/q_0} \int_0^\infty \beta^{p_0-1+p_0(q-q_0)/q_0\sigma} \lambda_f(\beta) \, d\beta \\
&= (q-q_0)^{-p_0/q_0} \int_0^\infty \beta^{p-1} \lambda_f(\beta) \, d\beta \\
&= |q-q_0|^{-p_0/q_0} p^{-1} \|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

para simplificar el exponente de β, recurrimos a la ecuación (0.11), para obtener que

$$p_0 - 1 + \frac{p_0(q-q_0)}{q_0\sigma} = p_0 - 1 + \frac{p_0(q-q_0)}{q_0 \cdot \frac{p_0(q_0-q)}{q_0(p_0-p)}} = p_0 - 1 - (p_0 - p) = p - 1$$

Por otro lado, si $q_1 < q_0$, entonces $q - q_0$ y σ son negativos y la desigualdad $\beta >$

α^{σ} es equivalente a $\alpha > \beta^{\tau}$, entonces como se demostró anteriormente, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\phi_0(\alpha,\beta)^{q_0/p_0}\,d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta &= \int_0^{\infty}\left[\int_{\beta^{\tau}}^{\infty}\alpha^{q-q_0-1}\,d\alpha\right]^{p_0/q_0}\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\,d\beta\\
&= (q_0-q)^{-p_0/q_0}\int_0^{\infty}\beta^{p-1}\lambda_f(\beta)\,d\beta\\
&= |q-q_0|^{-p_0/q_0}p^{-1}\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Un cálculo análogo nos permite demostrar que

$$
\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\phi_1(\alpha,\beta)^{q_1/p_1}\,d\alpha\right]^{p_1/q_1} d\beta = |q-q_1|^{-p_1/q_1}p^{-1}\|f\|_p^p.
$$

Al combinar estos resultados con las ecuaciones (0.12) y (0.13), observamos que

$$
\sup\left\{\|Tf\|_q : \|f\|_p = 1\right\} \leq B_p = 2q^{1/q}\left[\sum_{j=0}^{1} C_j^{q_j}(p_j/p)^{q_j/p_j}|q-q_j|^{-1}\right]^{1/q}.
$$

Pero dado que la propiedad $|T(cf)| = c|Tf|$ es cierto para todo $c > 0$, podemos deducir que

$$
\begin{aligned}
\|T(\frac{f}{\|f\|_p})\|_q &= \left(\int |T(\frac{f}{\|f\|_p})|^q\,d\nu\right)^{1/q}\\
&= \left(\int \frac{1}{\|f\|_p^q}|Tf)|^q\,d\nu\right)^{1/q}\\
&= \frac{1}{\|f\|_p}\|Tf\|_q.
\end{aligned}
$$

Esto implica que para toda $f \in L^P(\mu)$, se cumple que $\|Tf\|_q \leq B_p\|f\|_p$. Con esto, hemos completado la demostración.

Aún queda por discutir cómo adaptar este argumento para tratar los casos excepcionales donde $q_0 = \infty$ o $q_1 = \infty$. Para ello, distinguiremos tres casos.

Caso I: Si $p_1 = q_1 = \infty$ (lo que implica que $p_0 \leq q_0 < \infty$), en lugar de tomar $A = \alpha^{\sigma}$ en la descomposición de f, tomamos $A = \alpha/C_1$. Entonces, se tiene que

$$
\|Th_A\|_\infty \leq C_1\|h_A\|_\infty \leq \alpha,
$$

lo que implica que

$$
\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0.
$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación (0.12) con $\phi_1 = 0$ y reemplazamos α^σ por α/C_1 en la definición de ϕ_0. Aplicando el mismo razonamiento que antes, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &\leq 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Tg_A}(\alpha)\, d\alpha, \\
&\leq 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left[C_0 \|g_A\|_{p_0}/\alpha\right]^{q_0}\, d\alpha, \\
&= 2^q q\, C_0^{q_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \|g_A\|_{p_0}^{q_0}\, d\alpha \\
&= 2^q q\, C_0^{q_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \left(p_0 \int_A^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta\right)^{q_0/p_0} d\alpha, \\
&= 2^q q\, C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} \int_o^\infty \left[\int_0^\infty \alpha^{p_0(q-q_0-1)/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta\right]^{q_0/p_0} d\alpha.
\end{aligned}
\tag{0.14}
$$

Dado que $q_0/p_0 \geq 1$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski para integrales, para obtener

$$
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)\, d\beta\right]^{q_0/p_0} d\alpha \leq \left[\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0}\, d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta\right]^{q_0/p_0}, \tag{0.15}
$$

donde χ_0 representa la función característica del conjunto $\{(\alpha,\beta) : \beta > \alpha/C_1\}$,

$$
\phi(\alpha,\beta) = \chi_0\, \alpha^{(q-q_0-1)p_0/q_0}\, \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta)
$$

Dado que $(q - q_0)$ es positivo y la desigualdad $\beta > \alpha/C_1$ es equivalente a $\alpha < C_1\beta$, podemos deducir que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0} d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta &= \int_0^\infty \left[\int_0^{c_1\beta} \alpha^{q-q_0-1} \beta^{(p_0-1)q_0/p_0} \lambda_f(\beta)^{q_0/p_0}\, d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{c_1\beta} \alpha^{q-q_0-1}\, d\alpha\right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{C_1^{q-q_0} \beta^{q-q_0}}{q-q_0}\right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= C_1^{(q-q_0)p_0/q_0} (q-q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p_0-1+(q-q_0)p_0/q_0} \lambda_f(\beta)\, d\beta.
\end{aligned}
\tag{0.16}
$$

Dado que $p_1 = q_1 = \infty$, utilizando las hipótesis, tenemos

$$
\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} \text{ y } \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0}.
$$

De aquí, se deduce que
$$\frac{p_0}{p} = 1 - t = \frac{q_0}{q}$$
Por lo tanto, obtenemos que
$$p = p_0 q/q_0.$$
A partir de esto,obtenemos
$$\begin{aligned} p_0 - 1 + (q - q_0)p_0/q_0 &= p_0 + (q - q_0)p_0/q_0 - 1 \\ &= \frac{p_0 q_0 + q p_0 - q_0 p_0}{q_0} - 1 \\ &= p_0 q/q_0 - 1 = p - 1. \end{aligned}$$
A partir de la ecuación (0.16), podemos deducir que
$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0} d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta &= C_1^{(q-q_0)p_0/q_0}(q - q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\ &= C_1^{(q-q_0)p_0/q_0}(q - q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} p^{-1}\|f\|_p^p \end{aligned}$$
A partir de la ecuación (0.15), obtenemos que
$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta) d\beta\right]^{q_0/p_0} d\alpha \leq C_1^{q-q_0}(q - q_0)^{-1} p^{-q_0/p_0}\|f\|_p^{pq_0/p_0}.$$
Luego, utilizando la ecuación (0.14), deducimos que
$$\|Tf\|_q^q \leq 2^q q\, C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} C_1^{q-q_0}(q - q_0)^{-1} p^{-q_0/p_0}\|f\|_p^{pq_0/p_0},$$
esto implica que
$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q_0} C_1^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q - q_0|^{-1}\right]^{1/q} \|f\|_p^{pq_0/p_0 q}.$$
Dado que $p_0/p = q_0/q$ entonces $1 = q_0 p/p_0 q$, luego podemos simplificar la expresión anterior
$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q_0} C_1^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q - q_0|^{-1}\right]^{1/q} \|f\|_p.$$
Finalmente, obtenemos que
$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q_0} C_1^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q - q_0|^{-1}\right]^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Caso II: Si $p_0 < p_1 < \infty$ y $q_0 < q_1 = \infty$, la estrategia es seleccionar A de tal manera que $\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0$. La elección apropiada es $A = (\alpha/d)^\sigma$, donde $d =$

$C_1\left[p_1\|f\|_p^p/p\right]^{1/p_1}$ y $\sigma = p_1/(p_1-p)$. En efecto, dado que $p_1 > p$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|Th_A\|_\infty^{p_1} &\leq C_1^{p_1}\|h_A\|_{p_1}^{p_1} = C_1^{p_1}p_1\int_0^A \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha \\
&= C_1^{p_1}p_1\int_0^A \alpha^{p-1}.\alpha^{p_1-p}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha \\
&\leq C_1^{p_1}p_1A^{p_1-p}\int_0^A \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha = C_1^{p_1}p_1A^{p_1-p}p^{-1}\|f\|_p^p \\
&= C_1^{p_1}\frac{p_1}{p}\left[\frac{\alpha}{d}\right]^{\sigma(p_1-p)}\|f\|_p^p = C_1^{p_1}\frac{p_1}{p}\left[\frac{\alpha}{d}\right]^{p_1}\|f\|_p^p \\
&= C_1^{p_1}\frac{p_1}{p}\frac{1}{d^{p_1}}\|f\|_p^p\alpha^{p_1} = \frac{C_1^{p_1}}{d^{p_1}}\left(p_1\|f\|_p^p/p\right)\alpha^{p_1} \\
&= \frac{C_1^{p_1}}{d^{p_1}}\left(\frac{d}{C_1}\right)^{p_1}\alpha^{p_1} = \alpha^{p_1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0.$$

Al igual que en el Caso I, descubrimos que $\phi_1 = 0$ en la ecuación (0.12). Además, la integral que involucra a ϕ_0 está acotada por una constante B_p, siempre que la norma de $\|f\|_p = 1$. Esto nos proporciona el resultado que buscamos.

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &\leq 2^q q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tg_A}(\alpha)\,d\alpha, \\
&\leq 2^q q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\left[C_0\|g_A\|_{p_0}/\alpha\right]^{q_0}\,d\alpha, \\
&= 2^q q\,C_0^{q_0}\int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1}\|g_A\|_{p_0}^{q_0}\,d\alpha \\
&= 2^q q\,C_0^{q_0}\int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1}\left(p_0\int_A^\infty \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\,d\beta\right)^{q_0/p_0}\,d\alpha, \\
&= 2^q q\,C_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}\int_o^\infty\left[\int_0^\infty \alpha^{p_0(q-q_0-1)/q_0}\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\,d\beta\right]^{q_0/p_0}\,d\alpha.
\end{aligned}
\tag{0.17}
$$

Dado que $q_0/p_0 \geq 1$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski para integrales para obtener

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)\,d\beta\right]^{q_0/p_0}d\alpha \leq \left[\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0}\,d\alpha\right]^{p_0/q_0}d\beta\right]^{q_0/p_0}, \tag{0.18}$$

donde χ_0 representa la función característica del conjunto $\{(\alpha,\beta) : \beta > (\alpha/d)^\sigma\}$, y

$$\phi(\alpha,\beta) = \chi_0\alpha^{(q-q_0-1)p_0/q_0}\beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)$$

Si definimos $\tau = 1/\sigma$ y dado que $(q-q_0)$ es positivo, la desigualdad $\beta > \left(\frac{\alpha}{d}\right)^{\sigma}$ es equivalente a $\alpha < d\beta^{\tau}$, Por lo tanto, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0} d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta &= \int_0^\infty \left[\int_0^{d\beta^\tau} \alpha^{q-q_0-1}\beta^{(p_0-1)q_0/p_0}\lambda_f(\beta)^{q_0/p_0}\, d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{d\beta^\tau} \alpha^{q-q_0-1}\, d\alpha\right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{d^{q-q_0}\beta^{(q-q_0)/\sigma}}{q-q_0}\right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= d^{(q-q_0)p_0/q_0}(q-q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p_0-1+(q-q_0)p_0/q_0\sigma}\lambda_f(\beta)\, d\beta.
\end{aligned} \tag{0.19}$$

Dado que $p_1 = q_1 = \infty$, entonces se deduce de las ecuaciones que definen p y q, a través de un cálculo algebraico simple, que

$$\frac{q-q_0}{q} = t = \frac{1/p - 1/p_0}{1/p_1 - 1/p_0} \quad \text{y} \quad \frac{q_0}{q} = 1 - t = \frac{1/p - 1/p_1}{1/p_0 - 1/p_1}.$$

De manera equivalente, obtenemos que

$$\frac{1/p_1 - 1/p}{q_0} = \frac{1/p_1 - 1/p_0}{q} \quad \text{y} \quad \frac{1/p - 1/p_0}{q-q_0} = \frac{1/p_1 - 1/p_0}{q}.$$

Esto nos lleva a la relación

$$\frac{1/p_1 - 1/p}{q_0} = \frac{1/p - 1/p_0}{q-q_0},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
\frac{p-p_1}{q_0 p_1 p} &= \frac{p_0 - p}{(q-q_0)pp_0} \\
\frac{(q-q_0)(p-p_1)p_0}{q_0 p_1} &= p_0 - p \\
p &= p_0 + \frac{(q-q_0)(p_1-p)p_0}{q_0 p_1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned}
p_0 - 1 + (q-q_0)p_0/q_0\sigma &= p_0 + (q-q_0)(p_1-p)p_0/q_0p_1 - 1 \\
&= p - 1.
\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (0.19), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_0/p_0} d\alpha\right]^{p_0/q_0} d\beta &= d^{(q-q_0)p_0/q_0}(q-q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= d^{(q-q_0)p_0/q_0}(q-q_0)^{-\frac{p_0}{q_0}} p^{-1}\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Además, de la ecuación (0.18), deducimos que

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)d\beta\right]^{q_0/p_0} d\alpha \leq d^{q-q_0}(q-q_0)^{-1}p^{-q_0/p_0}\|f\|_p^{pq_0/p_0}$$

Luego, a partir de la ecuación (0.17), obtenemos que

$$\|Tf\|_q^q \leq 2^q q\, C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} d^{q-q_0}(q-q_0)^{-1}p^{-q_0/p_0}\|f\|_p^{pq_0/p_0},$$

esto implica que

$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q_0} d^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q-q_0|^{-1}\right]^{1/q}\|f\|_p^{pq_0/p_0q}$$

Dado que

$$p_0/p = q_0/q \text{ entonces } 1 = q_0p/p_0q$$

podemos simplificar la expresión anterior

$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q_0} C_1^{q-q_0}(p_0/p)^{q_0/p_0}|q-q_0|^{-1}\right]^{1/q}\|f\|_p.$$

Caso III: Si $p_0 < p_1 < \infty$ y $q_1 < q_0 = \infty$, el razonamiento es fundamentalmente el mismo que en el Caso II. En este caso, la elección apropiada es $A = (\alpha/d)^\sigma$, donde $d = C_0\left[p_0\|f\|_p^p/p\right]^{1/p_0}$ y $\sigma = \dfrac{p_0}{p_0-p}$. En efecto, dado que $p_0 < p$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|Tg_A\|_\infty^{p_0} &\leq C_0^{p_0}\|g_A\|_{p_0}^{p_0} = C_0^{p_0} p_0\int_A^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha\\ &= C_0^{p_0} p_0\int_A^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{p_0-p}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha.\end{aligned}$$

Como $A \leq \alpha$ entonces $\alpha^{p_0-p} < A^{p_0-p}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|Tg_A\|_\infty^{p_0} &\leq C_0^{p_0} p_0 A^{p_0-p}\int_A^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha\\ &= C_0^{p_0} p_0 A^{p_0-p}p^{-1}\|f\|_p^p = C_0^{p_0}\,(p_0/p)\left[\frac{\alpha}{d}\right]^{\sigma(p_0-p)}\|f\|_p^p\\ &= C_0^{p_0}\,(p_0/p)\,\frac{1}{d^{\sigma(p_0-p)}}\|f\|_p^p\alpha^{\sigma(p_0-p)}\\ &= C_0^{p_0}\,(p_0/p)\,\frac{1}{d^{p_0}}\|f\|_p^p\alpha^{p_0}\\ &= (C_0/d)^{p_0}\left(p_0\|f\|_p^p/p\right)\alpha^{p_0}\\ &= (C_0/d)^{p_0}\,(d/C_0)^{p_0}\,\alpha^{p_0} = \alpha^{p_0}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\|Tg_A\|_\infty \leq \alpha$ entonces $\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0$.

Como en el Caso I, encontramos que $\phi_1 = 0$ en la ecuación (0.12), y la integral que involucra ϕ_0 está acotada por una constante B_p, cuando $\|f\|_p = 1$. Esto nos proporciona el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &\leq 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Th_A}(\alpha)\, d\alpha, \\
&\leq 2^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left[C_1 \|h_A\|_{p_1}/\alpha \right]^{q_1} \, d\alpha, \\
&= 2^q q\, C_1^{q_1} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} \|h_A\|_{p_1}^{q_1}\, d\alpha \qquad (0.20) \\
&= 2^q q\, C_1^{q_1} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} \left(p_1 \int_0^A \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \right)^{q_1/p_1} \, d\alpha, \\
&= 2^q q\, C_1^{q_1} p_1^{q_1/p_1} \int_o^\infty \left[\int_0^\infty \alpha^{p_1(q-q_1-1)/q_1} \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \right]^{q_1/p_1} \, d\alpha.
\end{aligned}$$

Como $q_1/p_1 \geq 1$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski para integrales y obtener

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)\, d\beta \right]^{q_1/p_1} \, d\alpha \leq \left[\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_1/p_1}\, d\alpha \right]^{p_1/q_1} \, d\beta \right]^{q_1/p_1}, \quad (0.21)$$

donde χ_1 denota la función característica de $\{(\alpha,\beta) : \beta < (\alpha/d)^\sigma\}$. La función $\phi(\alpha,\beta)$ está definida como:

$$\phi(\alpha,\beta) = \chi_1 \alpha^{(q-q_1-1)p_1/q_1} \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta)$$

Si definimos $\tau = 1/\sigma$, la desigualdad $\beta < \left(\frac{\alpha}{d}\right)^\sigma$ es equivalente a $\alpha < d\beta^\tau$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_1/p_1} d\alpha \right]^{p_1/q_1} \, d\beta &= \int_0^\infty \left[\int_0^{d\beta^\tau} \alpha^{q-q_1-1} \beta^{(p_1-1)q_1/p_1} \lambda_f(\beta)^{q_1/p_1}\, d\alpha \right]^{p_1/q_1} \, d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{d\beta^\tau} \alpha^{q-q_1-1}\, d\alpha \right]^{p_1/q_1} \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{d^{q-q_1} \beta^{(q-q_1)/\sigma}}{q-q_1} \right]^{p_1/q_1} \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&= d^{(q-q_1)p_1/q_1} (q-q_1)^{-\frac{p_1}{q_1}} \int_0^\infty \beta^{p_1-1+(q-q_1)p_1/q_1\sigma} \lambda_f(\beta)\, d\beta. \qquad (0.22)
\end{aligned}$$

Sabemos que $q_0 = \infty$. A través de un cálculo algebraico sencillo, deducimos de las ecuaciones que definen p y q, lo siguiente:

$$\frac{q_1}{q} = t = \frac{1/p - 1/p_0}{1/p_1 - 1/p_0},$$

equivalentemente

$$\frac{1/p_1 - 1/p_0}{1/p - 1/p_0} = \frac{q}{q_1},$$

Restamos a ambos lados de la igualdad el número 1

$$\frac{1/p_1 - 1/p_0}{1/p - 1/p_0} - 1 = \frac{q}{q_1} - 1,$$

simplificando,

$$\frac{p(p_0 - p_1)}{p_1(p_0 - p)} - 1 = \frac{q}{q_1} - 1,$$

esto implica que

$$\frac{p_0(p - p_1)}{p_1(p_0 - p)} = \frac{q}{q_1} - 1.$$

Finalmente,

$$\frac{(p - p_1)}{p_1(1 - p/p_0)} = \frac{q}{q_1} - 1.$$

De aquí se sigue que:

$$p - p_1 = (\frac{q}{q_1} - 1)(1 - p/p_0)p_1.$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned} p_1 - 1 + (q - q_1)p_1/q_1\sigma &= p_1 + (\frac{q}{q_1} - 1)(1 - p/p_0)p_1 - 1 \\ &= p - 1. \end{aligned}$$

De la ecuación (0.22), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta)^{q_1/p_1} d\alpha\right]^{p_1/q_1} d\beta &= d^{(q-q_1)p_1/q_1}(q - q_1)^{-\frac{p_1}{q_1}} \int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\ &= d^{(q-q_1)p_1/q_1}(q - q_1)^{-\frac{p_1}{q_1}} p^{-1}\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Y de la ecuación (0.21) tenemos

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi(\alpha,\beta) d\beta\right]^{q_1/p_1} d\alpha \le d^{q-q_1}(q - q_1)^{-1} p^{-q_1/p_1}\|f\|_p^{pq_1/p_1}$$

Luego de la ecuación (0.20):

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q^q &\le 2^q q\, C_1^{q_1}\, p_1^{q_1/p_1} d^{q-q_1}(q - q_1)^{-1} p^{-q_1/p_1}\|f\|_p^{pq_1/p_1} \\ &= 2^q q\, C_1^{q_1}\, (p_1/p)^{q_1/p_1}\, d^{q-q_1}(q - q_1)^{-1}\|f\|_p^{pq_1/p_1} \\ &= 2^q q\, C_1^{q_1}\, (p_1/p)^{q_1/p_1}\, C_0^{q-q_1}\, (p_0/p)^{(q-q_1)/p_0}\, (q - q_1)^{-1}\|f\|_p^{pq_1/p_1+(q-q_1)p/p_0}, \end{aligned}$$

esto implica que,

$$\|Tf\|_q \leq 2\left[q\, C_0^{q-q_1} C_1^{q_1}\, (p_1/p)^{q_1/p_1}\, (p_0/p)^{(q-q_1)/p_0}\, (q-q_1)^{-1}\right]^{1/q} \|f\|_p^{pq_1/p_1q+(q-q_1)p/p_0q}.$$

Finalmente obtenemos,

$$\sup\{\|Tf\|_q : \|f\|_p = 1\} \leq B_p = 2\left[q\, C_0^{q-q_1} C_1^{q_1}\, (p_1/p)^{q_1/p_1}\, (p_0/p)^{(q-q_1)/p_0}\, (q-q_1)^{-1}\right]^{1/q}.$$

Dado que $|T(cf)| = c|Tf|$ para $c > 0$, tenemos

$$\left\|T(\frac{f}{\|f\|_p})\right\|_q = \left(\int \left|T\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right)\right|^q d\nu\right)^{1/q} = \left(\int \frac{1}{\|f\|_p^q}|Tf|^q\, d\nu\right)^{1/q} = \frac{1}{\|f\|_p}\|Tf\|_q.$$

Esto implica que $\|Tf\|_q \leq B_p\|f\|_p$ para todo $f \in L^p(\mu)$. ■

IV.1.3 Aplicaciones.

Esta parte del trabajo se fundamenta en los materiales disponibles en las obras de Serre Denis [8] y Gerald B.Folland [3]. Nuestro objetivo es examinar aplicaciones de los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz.

La desigualdad de Hausdorff-Young.

La transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$, se define como sigue:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx.$$

A partir de esta definición, es evidente que:

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty(m)} \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(m)}.$$

La transformada de Fourier se puede extender de manera natural a $L^2(m)$. Además, cumple con el Teorema de Plancherel, que establece que:

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(m)} = \|f\|_{L^2(m)}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que este operador está acotado en el espacio $L^p(m)$ para $1 \leq p \leq 2$. Aqui p' representa el exponente conjugado de p.

Teorema 12. *(Desigualdad de Hausdorff-Young para la transformada de Fourier). La transformada de Fourier está acotada en el espacio $L^p(m)$ para $1 \leq p \leq 2$. Es decir, si $f \in L^p(m)$, entonces, $\mathcal{F}f \in L^{p'}(m)$, donde p' es el exponente conjugado de p. Además, se cumple que:*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}(m} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(m} \quad para \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Demostración.

Podemos observar que la Transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, tiene las siguientes propiedades:

$$\mathcal{F} : L^1(m) \to L^\infty(m) \text{ con } \|\mathcal{F}f\|_{L^\infty(m)} \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(m)},$$

y

$$\mathcal{F} : L^2(m) \to L^2(m) \text{ con } \|\mathcal{F}f\|_{L^2(m)} = \|f\|_{L^2(m)}.$$

Aplicando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, deducimos que $p_0 = 1, q_0 = \infty$, $p_1 = q_1 = 2$ y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - t + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

De aqui obtenemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, lo que implica que $q = p'$. Por lo tanto concluimos que:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}(m)} &\leq (2\pi)^{-n/2(1-\frac{2}{p'})}\|f\|_{L^p(m)} = (2\pi)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})}\|f\|_{L^p(m)}\\ &= (2\pi)^{-n(\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{p}))}\|f\|_{L^p(m)} = (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(m)},\end{aligned}$$

para todo $p \in [1, 2]$. ■

La desigualdad de convolución de Young.

Proposición 14. *Consideremos dos funciones, f y g, tales que $f \in L^1(m)$ y $g \in L^p(m)$ donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * g(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g \in L^p(m)$, y*

$$\|f * g\|_{L^p(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^p(m)}.$$

Demostración.

• Consideremos el caso en que $p = 1$. En este caso, la función $H(x, y) = f(x - y)g(y)$ es integrable para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$, y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |H(x, y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\, dx = |g(y)|\|f\|_{L^1(m)} < \infty.$$

Además obtenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |H(x, y)|\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\|f\|_{L^1(m)}\, dy = \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^1(m)}.$$

Finalmente, aplicando el teorema de Fubini, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\|f * g\|_{L^1(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^1(m)}.$$

• Consideremos el caso en que $p = \infty$. Sabemos que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ la función $|f(x-y)||g(y)|$ es integrable con respecto a y. Esto nos permite establecer la siguiente desigualdad:

$$|(f * g)(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(m)}\|f\|_{L^1(m)},$$

De esta desigualdad, podemos concluir que

$$\|f * g\|_{L^\infty(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^\infty}.$$

• Consideremos el caso en que $1 < p < \infty$. Dado que la convolución es bilineal, podemos considerarla como un operador lineal fijando una de las funciones, en este caso vamos a fijar f en $L^1(m)$. De lo demostrado anteriormente, tenemos que el operador T_f definida por

$$g \xrightarrow{Tf} T_f(g) := f * g$$

posee las siguientes propiedades:

$$T_f : L^1(m) \to L^1(m), \text{ con } \|T_f(g)\|_{L^1(m)} = \|f * g\|_{L^1(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^1(m)}.$$

y

$$T_f : L^\infty(m) \to L^\infty(m), \text{ con } \|T_f(g)\|_{L^\infty(m)} = \|f * g\|_{L^\infty(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^\infty(m)}.$$

Aplicando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, deducimos que $p_0 = q_0 = 1$, $p_1 = q_1 = \infty$ y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{\infty} = 1 - t,$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{\infty} = 1 - t.$$

De aqui tenemos que $p = q$. Por lo tanto concluimos que:

$$\|f * g\|_{L^p(m)} = \|T_f(g)\|_{L^p(m)} \leq \|f\|_{L^1(m)}\|g\|_{L^p(m)}$$

para todo $p \in [1, \infty]$. ■

Proposición 15. *Consideremos dos funciones, f y g, tales que $f \in L^p(m)$, y $g \in L^q(m)$. Aquí, p y q son exponentes conjugados. Entonces $f * g(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y $\|f * g\|_{L^\infty(m)} \leq \|f\|_{L^p(m)}\|g\|_{L^q(m)}$.*

Demostración.

La existencia de la convolución$f*g$ y la estimativa $\|f*g\|_{L^\infty(m)} \leq \|f\|_{L^p(m)}\|g\|_{L^q(m)}$ son consecuencias directas de la desigualdad de Hölder, Teorema 3. ■

Teorema 13. *(Desigualdad de Young para convolución). Consideremos tres números reales que satisfacen $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $1 + 1/r = 1/p + 1/q$. Si $g \in L^p(m)$ y $f \in L^q(m)$, entonces $f * g$ existe en casi todo punto y*

$$\|f * g\|_{L^r(m)} \leq \|g\|_{L^p(m)}\|f\|_{L^q(m)}.$$

Demostración.

Dado que la operación de convolución es bilineal, podemos transformarla en un operador lineal fijando $g \in L^p(m)$. El operador lineal, denotado por T_g, se define como:

$$f \xrightarrow{Tg} T_g(f) := f * g.$$

Este operador tiene las siguientes propiedades:

$$T_g : L^1(m) \to L^p(m) \text{ con } ||T_g(f)||_{L^p(m)} = ||g||_{L^p(m)}||f||_{L^1(m)}$$

y

$$T_g : L^{p'}(m) \to L^\infty(m) \text{ con}$$

$$|T_g(f)| = |f * g| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|\,dy$$

$$\leq ||g(x-\cdot)||_{L^p(m)}||f||_{L^{P'}(m)} = ||g||_{L^p(m)}||f||_{L^{P'}(m)},$$

lo que implica que

$$||T_g(f)||_{L^\infty(m)} \leq ||g||_{L^p(m)}||f||_{L^{P'}(m)}.$$

Aplicando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin, deducimos que $p_0 = 1, q_0 = p$, $p_1 = p', q_1 = \infty$ y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = 1 - t + \frac{t}{p'},$$

$$\frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{p},$$

De aqui haciendo la resta, obtenemos

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 - t + \frac{t}{p'} - \frac{1}{p} + \frac{t}{p} = 1 - \frac{1}{p}$$

esto implica que,

$$1 + 1/r = 1/p + 1/q.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$||f * g||_{L^r(m)} = ||T_g(f)||_{L^r(m)} \leq ||g||_{L^p(m)}||f||_{L^q(m)}.$$

■

Las desigualdades de dispersión para la ecuación de Schrödinger.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$i\partial_t u = \Delta u, \tag{0.23}$$

donde la función desconocida es $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. las variables de u son las variables espaciales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y la variable temporal t. El operador Δ en la ecuación es el laplaciano, definido como

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

La ausencia de un potencial de interacción en la ecuación significa que no tiene una interpretación física. Sin embargo, entender esta ecuación es fundamental para abordar modelos más realistas. Por ejemplo, la siguiente ecuación:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + Vu,$$

donde $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función dada que representa un potencial de interacción.

Consideremos el siguiente problema:

PROBLEMA 1. Dada una función inicial $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, encontrar una solución u de la ecuación diferencial parcial (0.23) tal que $\lim_{t\to 0} u(.,t) = u_0$, en un sentido adecuado.

Multiplicamos formalmente la ecuación (0.23) por $\overline{u}(x,t)$, lo que nos da

$$i\partial_t u(x,t)\overline{u}(x,t) = \Delta u(x,t)\overline{u}(x,t).$$

Al integrar esta ecuación en $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$i\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(x,t)\overline{u}(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\text{grad } u(x,t)|^2\, dx.$$

Tomando la parte imaginaria de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx = \text{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(x,t)\overline{u}(x,t)\, dx = 0.$$

Tomando en cuenta la función inicial $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, obtenemos la ley de conservación de la masa, que se escribe de la siguiente manera

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2\, dx.$$

Esto nos sugiere buscar una función u tal que

$$u : \mathbb{R} \to L^2(m)$$

$$t \mapsto u(.,t)$$

sea una función continua. Denotamos este como $u \in C(\mathbb{R}; L^2(m))$. Por lo tanto, es suficiente expresar la condición inicial como

$$u(x,0) = u_0(x),$$

en casi en todo punto, para expresar la condición inicial. Para conocer el significado que debe darse a la ecuación (0.23), consulte a continuación.

Resulta que esta idea es efectiva. El método convencional para resolver el problema de Cauchy se basa en el teorema de Hille-Yosida sobre semigrupos (ver H. Brézis, capítulo 7). Sin embargo, una demostración más básica será de gran utilidad en etapas posteriores.

Teoría $L^2(m) - L^2(m)$ de la ecuación de Schrodinger

Consideremos $\mathcal{G}$ el espacio vectorial generado por las funciones gaussianas y sus traslaciones. Una función $g \in \mathcal{G}$ si y solo si existen números complejos a_j, z_j, con $\mathrm{Re}(z_j) > 0$, y vectores $x_j \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$g = \sum_{j=1}^{m} a_j f_{z_j}(x - x_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j e^{-z_j \|x - x_j\|^2}.$$

El conjunto $\mathcal{G}$ es denso de $L^p(m)$ para todo $p \in [1, +\infty)$.

Resolvemos inicialmente el problema de Cauchy de manera explícita cuando $u_0 \in \mathcal{G}$. La solución existe para todo tiempo, pertenece a $\mathcal{G}$ y es de clase C^∞; por lo tanto, es una solución en el sentido usual. Si

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{\beta_j}(x - x_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e^{-\beta_j \|x - x_j\|^2},$$

entonces una función de la forma

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) f_{z_j(t)}(x - x_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) e^{-z_j(t} \|x - x_j\|^2$$

es la solución del problema de Cauchy siempre que se cumplan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\partial_t a_j(t) = -2n a_j(t) z_j(t), \quad -i\partial_t z_j(t) = 4 z_j(t)^2 \tag{0.24}$$

con las condiciones iniciales

$$a_j(0) = \alpha_j, \quad z_j(0) = \beta_j.$$

La solución única de este sistema de ecuaciones diferenciales está dada por

$$z_j(t) = \frac{\beta_j}{1 - 4it\beta_j}, \quad a_j(t) = \frac{\alpha_j}{(1 - 4it\beta_j)^{n/2}}.$$

A continuación, utilizamos el hecho de que $\mathrm{Re}(\beta_j) > 0$, tenemos que $1 - 4it\beta_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$. Entonces podemos escribir

$$(1 - 4it\beta_j)^{n/2} = \exp(\frac{n}{2} \log(1 - 4it\beta_j)),$$

con la seguridad de que el logaritmo está bien definido. Dado que $1 - 4it\beta_j$ no se anula y

$$\mathrm{Re}(z_j)(t) = \frac{\mathrm{Re}(\beta_j)}{|1 - 4it\beta_j|^2} > 0,$$

La función $u(.,t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{G}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A esta función denotaremos por $S(t)u_0 := u(t)$.

La conservación de la masa, mencionada anteriormente, está relacionada con la identidad

$$\begin{aligned}\partial_t |u|^2 &= 2\mathrm{Re}(\partial_t u\, \overline{u}) = \mathrm{Im}(\overline{u}\Delta u)\\ &= 2\mathrm{div}\left(\mathrm{Re}(u) \text{ grad } \mathrm{Im}(u) - \mathrm{Im}(u) \text{ grad } \mathrm{Re}(u)\right),\end{aligned}$$

esta se obtiene al multiplicar la ecuación de Schrödinger en (0.23) por $\overline{u}$ y al considerar las partes imaginarias. La fórmula de Green muestra que (nuestras soluciones gaussianas son de clase C^∞)

$$\int_{\|x\|<r} \partial_t |u|^2 \, dx = 2 \int_{\|x\|=r} \left(\mathrm{Re}(u)\frac{\partial \mathrm{Im}(u)}{\partial r} - \mathrm{Im}(u)\frac{\partial \mathrm{Re}(u)}{\partial r}\right) ds(x),$$

donde $\frac{\partial u}{\partial r} = \text{grad } u \cdot r$ denota la derivada normal de u. Como u, $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\partial_t u$ decrecen exponencialmente, podemos hacer que r tienda a infinito para obtener,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t |u|^2 \, dx = 0.$$

Finalmente, gracias al teorema de convergencia dominada podemos intercambiar la integral y la derivada. De esto se deduce que $\|u(.,t)\|_{L^2(m)}$ es constante:

$$\forall u_0 \in \mathcal{G}, \quad \|S(t)u_0\|_{L^2(m)} = \|u_0\|_{L^2(m)}.$$

Esto demuestra que el operador lineal $S(t) : \mathcal{G} \to L^2(m)$, donde $\mathcal{G}$ está equipado con la norma $\|\cdot\|_{L^2(m)}$, es uniformemente continuo. Dado que $\mathcal{G}$ es denso en $L^2(m)$, existe una única extensión continua de $S(t)$ a todo $L^2(m)$; esta extensión que aún denotamos por $S(t)$, es también un operador lineal y constituye una isometría de $L^2(m)$. Como $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$ sobre $\mathcal{G}$ (expresa la invariancia por traslación en tiempo de la ecuación de Schrödinger), tenemos que $S(t) \circ S(-t) = Id_{\mathcal{G}}$. Por continuidad, esto sigue siendo cierto en $L^2(m)$, lo que demuestra que $S(t)$ es un automorfismo de $L^2(m)$.

Los operadores $S(t)$ forman lo que se llama un grupo continuo de isometrías de $L^2(m)$. La continuidad se entiende en sentido puntual:

Proposición 16. *Para todo $u_0 \in L^2(m)$, la aplicación*

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to L^2(m)\\ t &\mapsto S(t)u_0\end{aligned}$$

es continua.

Demostración.

Sea $(v_m)_{m\geq 0}$ una sucesión en $\mathcal{G}$ que converge para u_0. La aplicación $t \mapsto S(t)v_m$ es continua con valores en $L^2(m)$. Como $\|S(t)v_m - S(t)u_0\|_{L^2(m)} \leq \|v_m - u_0\|_{L^2(m)}$, la convergencia de $S(t)v_m$ para $S(t)u_0$ es uniforme con respecto a t. Entonces el límite también es continuo. ■

Esto nos lleva al concepto de solución en el sentido $L^2(m)$:

Definición 16. *Dado $u_0 \in L^2(m)$, decimos solución del problema de Cauchy de la ecuación* (0.23) *a la función $u(x,t) := (S(t)u_0)(x)$. Esta solución pertenece a $C(\mathbb{R}, L^2(m))$.*

Teoría $L^1(m) - L^\infty(m)$ de la ecuación de Schrodinger.

Comencemos con un resultado relacionado con las gaussianas. Definimos una función en $\mathbb{R}^n$

$$K_t(x) := \left(\frac{i}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-i\|x\|^2/4t},$$

con la notación clásica $z^{n/2}$ cuando $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.

Lema 8. *Sea $t \neq 0$ y $z \in \mathbb{C}$, con $Re(z) > 0$. Entonces*

$$S(t)f_z = K_t * f_z, \quad f_z(x) = e^{-z\|x\|^2}. \tag{0.25}$$

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que

$$K_t * f_z(x) = \left(\frac{i}{4\pi t}\right)^{n/2} \int e^{-q_x(y)}\, dy$$

donde q_x es la forma cuadrática

$$\begin{aligned} q_x(y) &= z\|x-y\|^2 + \frac{i}{4t}\|y\|^2 \\ &= (z + \frac{i}{4t})\|y - \frac{4tzx}{4tz+i}\|^2 + \frac{z}{1-4itz}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Así,

$$K_t * f_z(x) = \left(\frac{i}{4\pi t}\right)^{n/2} f_w(x) \int f_Z(y - \frac{4tzx}{4tz+i})\, dy,$$

para $w = \dfrac{z}{1-4itz}$ y $Z = z + \frac{i}{4t}$. En esta fórmula, hemos extendido la definición de f_Z a $\mathbb{C}^n$ por holomorfa. El cálculo de la integral se reduce, por Fubini, a las integrales simples de la misma forma. En este último caso ($n = 1$), la fórmula de los residuos asegura que, para $X \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_Z(y - X)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f_Z(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F} f_Z)(0) \\ &= \left(\frac{4\pi t}{4tz + i}\right)^{n/2} f_{1/4Z}(0) \\ &= \left(\frac{4\pi t}{4tz + i}\right)^{n/2},\end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. ■

La convolución por una función (aquí K_t) es una operación que conmuta con traslaciones. Lo mismo ocurre con $S(t)$, porque la ecuación de Schrodinger tiene coeficientes independientes de x. De esto se sigue que la fórmula (0.25) sigue siendo verdadera si reemplazamos f_z por una traslación $f_z(. - x_0)$. Por linealidad, esto es cierto para cada elemento de $\mathcal{G}$. Cómo $K_t \in L^\infty(m)$, deducimos la siguiente desigualdad

$$\forall f \in \mathcal{G}, \quad \|S(t)f\|_{L^\infty(m)} \leq (4\pi t)^{-n/2}\|f\|_{L^1(m)}. \tag{0.26}$$

Como $\mathcal{G}$ es denso en $L^1(m)$, vemos que, para cada $t \neq 0$, $S(t)$ admite una y sólo una extensión continua de $L^1(m)$ en $L^\infty(m)$ y que es lineal. Se verifica fácilmente que esta extensión coincide con $S(t)$ en $L^1(m) \cap L^2(m)$, lo que justifica que aún se denote como $S(t)$. Por continuidad, (0.26) sigue siendo cierto para toda $f \in L^1(m)$. Entonces tenemos

$$\|S(t)f\|_{L^\infty(m)} \leq (4\pi t)^{-n/2}\|f\|_{L^1(m)}, \quad \forall f \in L^1(m),$$

y

$$|S(t)f\|_{L^2(m)} = \|f\|_{L^2(m)}, \quad \forall f \in L^2(m),$$

por ser $S(t)$ un grupo de isometría en $L^2(m)$.

Aplicando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, deducimos que $p_0 = 1, q_0 = \infty, p_1 = q_1 = 2$ y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - t + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

De aquí obtenemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, lo que implica que $q = p'$. Por lo tanto concluimos que:

$$\begin{aligned}\|S(t)f\|_{L^{p'}(m)} &\leq (4\pi t)^{-n/2(1-\frac{2}{p'})}\|f\|_{L^p(m)} = (4\pi t)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})}\|f\|_{L^p(m)} \\ &= (4\pi t)^{-n(\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{p}))}\|f\|_{L^p(m)} = (4\pi t)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(m)},\end{aligned}$$

para todo $p \in [1,2]$.

El Operador Maximal de Hardy-Littlewood.

Ahora vamos a explorar una aplicación útil del Teorema de Marcinkiewicz.

Definición 17. *Una función medible $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, según Lebesgue, se considera localmente integrable en X si para cualquier conjunto compacto $K \subset X$,*

$$\int_K |f| < \infty.$$

El conjunto de todas las funciones que son localmente integrables se denota por L^1_{loc}.

Es importante destacar que el espacio L^1_{loc} guarda ciertas similitudes con el espacio $L^1(m)$. Sin embargo, existe una diferencia en el caso de funciones localmente integrables, no se requiere que estas funciones tiendan a cero en el infinito.

Definición 18. *Consideremos una función $f \in L^1_{loc}$. Definimos la función maximal de Hardy-Littlewood de f, la cual denotamos como Hf, de la siguiente manera:*

$$Hf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

aquí, $B_r(x)$ representa una bola abierta con radio r y centrada en x.

Es importante destacar que la función maximal calcula el supremo del valor promedio de $|f|$ sobre todas las bolas centradas en x. Nuestro objetivo es demostrar que la función H está acotada en el espacio $L^p(m)$ para $1 < p < \infty$. Sin embargo, antes de abordar esta demostración, vamos a establecer un lema preliminar que resultará útil en nuestra argumentación.

Lema 9. *Consideremos $\mathcal{C}$, una colección de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$, y sea $U = \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Si $m(U) > c$ para alguna constante no negativa c, entonces, existen bolas disjuntas $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{C}$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{k} m(B_i) > 3^{-n}c.$$

Demostración.

Si $c < m(U)$, entonces, por el Teorema 2.40 de la página 70 del libro de Folland [3] existe un conjunto compacto $K \subset U$ tal que $m(K) > c$. Además existen un número finito de bolas en $\mathcal{C}$, digamos $A_1, ..., A_m$ que cubren K. Dada una bola B denotamos por B^* la bola concéntrica con B con radio 3 veces el radio de B. Inicialmente escoja B_1 como la bola más grande entre las A_i (es decir, elige B_1 con radio máximo). Luego seleccionamos B_2 como la bola más grande entre las A_i que son disjuntas de B_1, escoja B_3 como la bola más grande de las A_i que son disjuntas de B_1 y B_2, y así sucesivamente hasta que se agoten todas las A_i. De acuerdo con esta construcción, si una bola A_i no es una de las B_i, entonces existe un j tal que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, y si j es el índice más pequeño con esta propiedad, entonces el radio de A_i es a lo sumo el radio de B_j. Por lo tanto, $A_i \subset B_j^*$. Pero entonces $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_j^*$, luego, tenemos que

$$c < m(K) \leq \sum_{j=1}^{k} m(B_j^*) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_j).$$

■

Teorema 14. *Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier función $f \in L^1$ y para cualquier número real $\alpha > 0$,*

$$m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)| dx.$$

Demostración.

La función Hf es medible y el conjunto $E_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$ es abierto, como se establece en el Lema 3.16 de la página 96 del libro de Folland [3]. Si E_α es vacío, entonces la desigualdad se cumple trivialmente. Si E_α no es vacío, entonces, por definición, podemos seleccionar un radio $r_x > 0$ para cada $x \in E_\alpha$ tal que

$$\frac{1}{m(B(r_x, x))} \int_{B(r_x,x)} |f(y)| dy > \alpha$$

Las bolas $B(r_x, x)$ cubren E_α, así, por el Lema 9, si $c < m(E_\alpha)$ existen $x_1, \cdots, x_k \in E_\alpha$ tal que las bolas $B_1 = B_1(r_{x_1}, x_1), ..., B_k = B_k(r_{x_k}, x_k)$ son disjuntas y $\sum_1^k m(B_j) > 3^{-n} c$. Por lo tanto, tenemos que

$$c < 3^n \sum_{i=1}^{k} m(B_i) < \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} |f(y)| dy < \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

Al tomar el límite cuando $c \to m(E_\alpha)$, obtenemos el resultado deseado. ■

Teorema 15. *Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier número real $1 < p < \infty$ y para cualquier función $f \in L^p(m)$, se cumple*

$$||Hf||_{L^p(m)} \leq C \, ||f||_{L^p(m)}.$$

Demostración.

Iniciamos observando que la función maximal de Hardy-Littlewood satisface las propiedades $|H(cf)| = |c||Hf|$ y por la desigualdad triangular para el valor absoluto,

$|H(f+g)| \leq |Hf| + |Hg|$, lo que indica que H es sub-lineal. Adicionalmente, H es de tipo débil (∞, ∞) como se puede ver en la siguiente desigualdad:

$$Hf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy \leq \sup_{r>0} \frac{m(B_r(x))}{m(B_r(x))} \|f\|_{L^\infty(m)} = \|f\|_{L^\infty(m)}.$$

Esto implica que, $\|Hf\|_{L^\infty(m)} \leq \|f\|_{L^\infty(m)}$.

El Teorema 14 establece precisamente que H es de tipo débil $(1,1)$. Es decir,

$$\sup_{\alpha>0} \alpha_{Hf}(\alpha) \leq C_1 \int |f|$$

para todo f en $L^1(m)$ y alguna constante positiva C_1.

Finalmente, aplicando el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, obtenemos que para todo $p \in (1, \infty)$,

$$\|Hf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

■

V.2 Resultados Inferenciales

El propósito de este estudio fue establecer dos resultados esenciales en la teoría de interpolación de operadores: el Teorema de Interpolación de M. Riesz y G. O. Thorin, y el Teorema de interpolación de Józef Marcinkiewicz. Basándonos en una hipótesis que contempla dos estimativas en los espacios extremos, pudimos deducir un conjunto de estimativas intermediarias.

VI. Discusión de Resultados

VI.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

En este trabajo de investigación se formuló la hipótesis general de que, dado dos espacios de Banach, X_0 y X_1, se cumplen las siguientes inmersiones continuas:

$$X_0 \cap X_1 \subset X_i, \quad X_i \subset X_0 + X_1$$

donde $0 \leq i \leq 1$, y además nos permitirán establecer la interpolación de operadores.

También se formuló la hipótesis específica de que, dados cuatro números reales $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, y un operador lineal acotada T con las siguientes propiedades: $T : L^{p_0}(\mu) \to L^{q_0}(\mu)$ y $T : L^{p_1}(\mu) \to L^{q_1}(\mu)$, nos permitirá demostrar que T mapea un subespacio intermedio entre $L^{p_0}(\mu)$ y $L^{p_1}(\mu)$ en un subespacio intermediario entre $L^{q_0}(\nu)$ y $L^{q_1}(\nu)$ tal que $\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq C\,\|f\|_{L^p(\mu)}$.

Enunciamos y demostramos en las Proposiciones 12 y 13 que, para cualquier par de números reales p y r tal que $1 \leq p < r \leq \infty$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) El espacio de intersección $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ es un espacio de Banach cuando se equipa con la norma definida por $\|f\| = \|f\|_{L^p(\mu)} + \|f\|_{L^r(\mu)}$.

b) El espacio de suma $L^p(\mu) + L^r(\mu)$ es un espacio de Banach, pero en este caso, se equipa con la norma definida por $\|f\| = \inf\{\|g\|_{L^p(\mu)} + \|h\|_{L^r(\mu)} : f = g + h\}$.

En los Teoremas 8 y 9, enunciamos y demostramos las siguientes propiedades para cualquier trío de números reales p, q y r que cumplan $1 \leq p < q < r \leq \infty$:

a) El espacio $L^q(\mu)$ es un subconjunto de la suma de los espacios $L^p(\mu)$ y $L^r(\mu)$, es decir, $L^q(\mu) \subset L^p(\mu) + L^r(\mu)$.

b) La intersección de los espacios $L^p(\mu)$ y $L^r(\mu)$ es un subconjunto del espacio $L^q(\mu)$, es decir, $L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \subset L^q(\mu)$.

En nuestros resultados principales, consideramos las siguientes hipótesis:

a) **Teorema de interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 10)**: Consideramos una transformación lineal acotada T que mapea $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ en $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$. Esta transformación cumple con las siguientes propiedades:

- Para todo $f \in L^{p_0}(\mu)$, se tiene que $\|Tf\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq M_0\|f\|_{L^{p_0}(\mu)}$.
- Para todo $f \in L^{p_1}(\mu)$, se tiene que $\|Tf\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq M_1\|f\|_{L^{p_1}(\mu)}$.

b) **Teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 11)**: Consideramos una transformación sublineal T de tipo débil que cumple con las siguientes propiedades:

- Se tiene que $[Tf]_{q_0} \leq C_0\|f\|_{p_0}$.
- Se tiene que $[Tf]_{q_1} \leq C_1\|f\|_{p_1}$.

Estas hipótesis nos permiten enunciar y demostrar los Teoremas de interpolación de Riesz-Thorin y de Marcinkiewicz.

VI.12 Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Podemos encontrar estudios similares sobre la interpolación de operadores en el

trabajo de Lech Maligranda [12]. Maligranda presenta una demostración del teorema de interpolación real de Riesz-Thorin para operadores de tipos fuertes (p_0, q_0) y (∞, ∞) en el triángulo inferior, Específicamente, esta demostración se aplica cuando $0 < p_0 \leq q_0 < \infty$, y proporciona una estimativa mejorada de las normas.

Yoichi Miyazaki [14] extiende el resultado de Tartar para operadores de tipo fuerte. Específicamente, su trabajo se aplica a operadores de tipo (p_1, q_1) y (∞, ∞) con $1 < p_1 < q_1 < \infty$.

VI.3 Responsabilidad Ética

De acuerdo con el código de ética de investigación aprobado por el Consejo Universitario N° 210-2017-CU de la Universidad Nacional del Callao, hemos verificado que nuestra investigación cumple con todas las normativas institucionales que regulan su proceso. Hemos procedido con rigor científico para garantizar la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados. En todo momento, hemos actuado con responsabilidad y transparencia.

Conclusiones

Este estudio ha permitido identificar las diferencias entre la interpolación de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz, así como las propiedades y estructuras relevantes para la interpolación en este contexto.

A partir de los resultados obtenidos, podemos establecer las siguientes conclusiones:

Al comparar nuestros dos teoremas de interpolación, observamos que el teorema de Marcinkiewicz requiere algunas restricciones en p_j y q_j que no están presentes en el teorema Riesz-Thorin. Sin embargo, estas restricciones se satisfacen en todas las aplicaciones de interés. Además, las hipótesis del teorema de Marcinkiewicz son más débiles: T puede ser sublineal en lugar de lineal, y solo necesita satisfacer una estimativa de tipo débil en los puntos finales. En ambos casos, la conclusión es que T está acotada desde $L^p(\mu)$ a $L^q(\nu)$, pero el teorema Riesz-Thorin proporciona una estimativa mucho más precisa para la norma del operador T. Por lo tanto, ninguno de los teoremas incluye al otro.

Además, presentamos varias aplicaciones importantes en análisis de Fourier, análisis armónico y ecuaciones diferenciales parciales.

En la primera aplicación, Teorema 12, observamos que el resultado es óptimo, para $1 \leq p \leq 2$. Sin embargo, no nos da el valor exacto de $\|\mathcal{F}\|$ y tampoco tenemos información para $p > 2$.

Recomendaciones

Para futuras investigaciones, se recomienda expandir la búsqueda en diversas bases de datos y fuentes de literatura. Esto permitirá garantizar una revisión exhaustiva en términos de las aplicaciones y generalizaciones de los Teoremas de interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 10) y de Marcinkiewicz (Teorema 11).

Referencias bibliográficas

[1] Bartle, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley Classics Library, 1995.

[2] Brezis, Haim *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[3] Folland, Gerald Budge *Real analysis.* Second edition. John Wiley, New York, 1999.

[4] Rudin, Walter *Real and Complex Analysis.* Mc. Graw-Hill Inc., 1974.

[5] Stein E. and Weiss G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, 1971.

[6] I. Schur. J., *Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinear-formen mit unendlich vielen Veranderlichen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. Math. 140, (1911) 1-28.

[7] Young, W. H., *falta.* Proc. Royal Soc. ser. A 87, (1912) 331-339.

[8] Serre Denis, *Interpolation D'Opérateurs Aplications.* Le journal de maths des élèves, Volume 1 (1998). N° 4.

[9] Riesz, Marcel, *Sur les maximas des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires.* Acta Math. vol. 49 (1926) pp. 464–497.

[10] Thorin, G.Olof, *An extension of a convexity theorem due to M.Riesz.* Kungl.Fysiografiska Saellskapets i Lund Forhandlinger, N°.14, vol.8 (1939).

[11] Tartar, L., *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces.* Springer, Berlin (2007).

[12] Maligranda, Lech, *A Simple Proof of the real Riesz–Thorin interpolation Theorem in the lower triangle.* Colloquium Mathematicum, N°.1, vol.172 (2023).

[13] Marcinkiewicz, J., *Sur l'interpolation d'opérateurs.* C.R. Acad. Sci. Paris, 208 (1939), 1272–1273

[14] Miyazaki Yoichi, *Tartar's method for the Riesz–Thorin interpolation theorem.* Arch. Math., (2021). https://doi.org/10.1007/s00013-021-01636-7

[15] Stein, Elias M. and Rami Shakarchi *Functional Analysis.* Introduction to Further Topics in Analysis. Princeton University Press, 2011.

[16] Stein, Elias M. and Rami Shakarchi *Complex Analysis.* Princeton University Press, 2003.

Matriz de Consistencia

VIII. Anexos

Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de Variables			Diseño metodológico
			Variable	**Dimensión**	**Indicador**	
GENERAL ¿Qué hipótesis debemos imponer a los espacios X_0 y X_1, para que los métodos de interpolación sean aplicables?	**GENERAL** El proposito de este estudio es explorar y clarificar los teoremas de interpolaci ´ on´ de operadores de Riesz-Thorin y Marcinkiewicz. Nuestro enfoque se centrará en ´ profundizar en los fundamentos teoricos de estos teoremas y en buscar activamente ´ las aplicaciones de estos resultados.	**GENERAL** Si X_0 y X_1 son espacios de Banach, entonces $X_0 \cap X_1 \subset X_i$, $X_i \subset X_0 + X_1$ Donde $0 \leq i \leq 1$, tiene sentido, estableceremos la interpolación de operadores.	**INDEPENDIENTE** Inmersión continua entre espacios de Banach.	Espacios de Banach	Comportamiento de los espacios de Banach.	El tipo de investigación es básica, y el método utilizadoes analítico; inductivo – deductivo. El trabajo es Teórico, no es experimental, menos estadístico, por tanto, no haypoblación que estudiar;tampoco se requiere procedimientos especiales,lo que se utiliza esabundante materialbibliográfico especializado(libros, revistasespecializados, páginas web,etc.). El lugar donde se desarrolla el trabajo es la FCNM, teniendo consigo unequipo computador.
ESPECIFICOS • ¿Qué método podemos aplicar para demostrar el teorema de interpolación Riesz-Thorin? • ¿Qué método podemos aplicar para demostrar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz?	**ESPECIFICOS** Dado un operador lineal acotada T con las siguientes propiedades $T: L^{p_0} \to L^{q_0}$ y $T: L^{p_1} \to L^{q_1}$, se quiere mostrar que T mapea subespacio intermediario entre L^{p_0} y L^{p_1} en subespacio intermediario entre L^{q_0} y L^{q_1}, $\|Tf\|_{L^q(Y,v)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$.	**ESPECIFICAS** Consideraremos un operador lineal acotada T con las siguientes propiedades $T: L^{p_0} \to L^{q_0}$ y $: L^{p_1} \to L^{q_1}$, permitirán concluir que T mapea subespacio intermediario entre L^{p_0} y L^{p_1} en subespacio intermediario entre L^{q_0} y L^{q_1}, $\|Tf\|_{L^q(Y,v)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$.	**DEPENDIENTE** Operador que mapea subespacios intermediarios	Teoría de operadores a lineales cotadas	Comportamiento de los operadores lineales acotados	