UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

“CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS INVERSIBLES EN ALGUNAS $\mathbb{C}$-ALGEBRAS TOPOLÓGICAS”

Autor: SOFÍA IRENA DURAN QUIÑONES

(Período de Ejecución: Del 01-04-2023 al 31-03-2024)

Resolución de Aprobación Nº 335-2023-R

Callao, 2023

PERÚ

DEDICATORIA

A mi Dios por darme salud, y así poder contribuir con un grano de arena en el mundo académico de la matemática.

AGRADECIMIENTO

A la UNAC que, a través de su VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando con mucho esmero y responsabilidad la realización de la noble tarea de Investigación.

A mi familia, por el estímulo recibido y la comprensión durante el lapso en que este trabajo absorbió gran parte del tiempo que debí haberles dedicado.

A todas las personas, que, de alguna manera, estuvieron motivándome en todo momento para la ejecución y culminación del proyecto.

INDICE

DEDICATORIA ii
AGRADECIMIENTO iii
INDICE 1
RESUMEN 3
ABSTRACT 4
INTRODUCCIÓN 5
CAPITULO I 7
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 7
1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA 7
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 8
Problema General 8
Problema Específico 8
1.3 OBJETIVOS 8
Objetivo General 8
Objetivos Específicos 8
1.4 JUSTIFICACIÓN 8
1.5 LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN 9
a) Limitante Teórico 9
b) Limitante Temporal 9
c) Limitante Espacial 9
CAPITULO II 10
MARCO TEÓRICO 10
2.1 ANTECEDENTES 10
2.1.1 Internacionales 10
2.1.2 Nacionales 10
2.2 MARCO 11
2.2.1 Teórico 11
2.2.2 Conceptual 11
2.3. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BASICOS 12
CAPITULO III 31
HIPÓTESIS Y VARIABLES 31

3.1 HIPÓTESIS ... 31
3.1.1 Hipótesis General ... 31
3.1.2 Hipótesis Específicas ... 31
3.2 DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES ... 31
3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE LA VARIABLE ... 32
CAPITULO IV ... 33
DISEÑO METODOLÓGICO ... 33
4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN ... 33
4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN ... 33
4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA ... 33
4.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN ... 33
4.5. ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS ... 34
CAPITULO V ... 47
5.1. RESULTADOS DESCRIPTIVOS ... 47
5.2 RESULTADOS INFERENCIALES ... 51
5.3. OTRO TIPO DE RESULTADO ... 58
CAPITULO VI ... 68
DISCUSIÓN DE RESULTADOS ... 68
6.1. DISCUSIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON OTROS RESULTADOS ... 68
6.2. CONTRASTACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON ESTUDIOS SIMILARES .. 68
6.3. RESPONSABILIDAD ÉTICA ... 69
CONCLUSIONES ... 70
RECOMENDACIONES ... 71
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 72
ANEXOS ... 73

RESUMEN

En este trabajo, empezamos haciendo una breve revisión de algunos tópicos de: Análisis funcional, topología y álgebra abstracta. Seguido de estos temarios definimos una familia de espacios nucleares en términos de funciones positivas sobre un monoide abeliano y establecemos una caracterización de aquellas, en el cual una desigualdad de la forma: $\|f \lozenge g\|_p \leq \alpha(p-q)\|f\|_q \|g\|_p$ para todo $p \geq q+2$, donde $\alpha(p-q) > 0$ es satisfecha; ya que tal desigualdad fue primero probada por Våge (en el marco del espacio Kondratiev de distribuciones estocásticos).

Nosotros a tales espacios la denominamos: Espacios Våge; mostramos que estos espacios son $\mathbb{C}-$ algebras topológicas; y damos una caracterización de sus elementos inversibles.

En este contexto consideramos, el Producto Tensorial de dos espacios Våge y se muestra que dicho producto también es un espacio Våge. Además, presentamos algunos ejemplos y aplicaciones a la Teoría de Sistemas Lineales.

Palabras claves. - Espacios Nucleares, monoide abeliano, $\mathbb{C}-$ algebras topológicas, espacios Våge, elementos invertibles.

ABSTRACT

In this work, we begin by making a brief review of some topics: Functional analysis, topology and abstract algebra. Following these agendas we define a family of nuclear spaces in terms of positive functions on an abelian monoid and establish a characterization of those, in which an inequality of the form: $\| f \lozenge \mathrm{g}\|_p \leq \alpha(p-q)\|f\|_q \|g\|_p$ para todo $p \geq q+2,$ donde $\alpha(p-q) > 0$ for everything is satisfied; since such inequality was first proven by Våge (in the framework of the Kondratiev space of stochastic distributions).

We call such spaces: Våge Spaces; we show that these spaces are topological algebras; and we give a characterization of its invertible elements.

In this context we consider the Tensor Product of two Vager spaces and show that said product is also a Våge space. We also present some examples and applications to Linear Systems Theory.

Keywords. - Nuclear Spaces, abelian monoid, topological algebras, Våge spaces, invertible elements.

INTRODUCCIÓN

Cuando nos referimos a $\mathbb{C}-$algebras topológicas evidentemente estamos ante dos estructuras matemáticas: una estructura algebraica y la otra topológica.

La primera definición correcta y concreta de un álgebra asociativa sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{K}$ lo estableció L.E. Dickson (1903). Nosotros realizaremos nuestra investigación cuando el cuerpo $\mathbb{K}=\mathbb{C}$; es decir el cuerpo de los números complejos de los cuales hablaremos muy brevemente. Históricamente existen dos razones fundamentales para su consideración, una es naturalmente algebraica la cual consiste la imposibilidad de solucionar la ecuación $x^2+1=0$ en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. La otra razón o motivo aparece más tarde como un hecho emergente en la Geometría y en las Ciencias Físicas con el concepto de la cantidad direccionada o vector. En tal sentido y con el propósito de dar atención a tal hecho era necesario crear un concepto aritmético análogo de vector. Es así que el sistema de números complejos surge como un candidato perfecto de un “ALGEBRA” para representar y operar los vectores en el plano, muchos investigadores llegaron independientemente a la interpretación geométrica de los números complejos. Entre ellos Gauss y Hamilton; el primero de ellos en 1797 tuvo pleno conocimiento de esta interpretación geométrica, mientras que Hamilton en 1833 presentó a los números complejos como parejas de números reales y es como actualmente se estudia.

Con el trascurso del tiempo al aparecer otros fenómenos físicos como el caso, cuando actúan varias fuerzas sobre un objetivo (cuerpo) ellas no necesariamente se encuentran en el plano; de este modo era necesario encontrar una algebra para representar y operar vectores en espacios de mayores dimensiones. Esto motivo a los matemáticos europeos a buscar lo referente a números complejos tridimensionales y más generalmente el de los números llamados hipercomplejos (ALGEBRAS). En este contexto introducimos las denominadas $\mathbb{C}-$algebras topológicas y por ende en ellas se estudia la caracterización de elementos inversibles.

Ahora sobre la otra estructura que es la topológica, se desarrolla sobre la teoría básica de álgebras normadas, haciendo especial énfasis en el caso de álgebras complejas completas, que tengan unidad y sean asociativas. Las álgebras normadas que no son asociativas, son consideradas cuando no ofrecen dificultad en la obtención de los resultados. En este contexto y con el fin de un mejor tratamiento de los elementos inversibles en un $\mathbb{C}-$álgebra; se estudia topológicamente los llamados divisores de cero en un álgebra normada; involucrando de este modo la demostración de muchos resultados en la discusión de la compleficación, la extensión unitaria, y a la Completación de un álgebra normada.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

La Topología y el Álgebra son dos ramas de la Matemática que independiente o relacionándolo una con la otra te permite la obtención de muchos resultados; más aún una teoría topológica mediante la llamada "Teoría Funtorial" se puede algebrizar de este modo obtener información topológica y recíprocamente. De manera precisa la topológica es una disciplina que estudia parte de la naturaleza de las figuras geométrica o espacios en cambios continuos en la forma, mientras que álgebra es una disciplina que básicamente permite operar elemento dentro de ciertos objetos matemáticos denominados "***Estructuras Algebraicas***" como son los grupos, anillos, módulos, cuerpos, álgebras, etc.

Es el caso que en el presente trabajo definiremos una familia muy grande de espacios nucleares en términos de funciones sobre un monoide conmutativo; y el problema que siempre se presenta en una investigación es la de ***caracterización***. Es el caso que nosotros pretendemos dar una caracterización de tales funciones en lo cual se sostiene la desigualdad $\| f \lozenge g\|_p \leq E(p-q)\| f \|_q \|g\|_p$, para todo $p \geq q+2$; donde $E(p-q) = \left(\sum_{\alpha \in L} (2u)^{-(p-q)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}$ es finito, L es el conjunto de sucesiones de elementos $\mathbb{N}_0$, indexado por $\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales) estos es: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ y $(2u)^{\alpha} = 2^{\alpha_1} 4^{\alpha_2} 6^{\alpha_3} \ldots$, donde además "$\lozenge$" denota la operación llamada "producto media", ya que dicha relación fue mostrada por Våge, obteniéndose de este modo los denominados "***espacios de Våge***" presentándose uno de los primeros problemas el mostrar que tales espacios son particularmente $\mathbb{C}-$álgebras topológicas, y seguida de ellos es dar una caracterización de sus elementos inversibles.

Para este propósito consideramos el producto tensorial de dos espacios Våge y mostramos que también es un espacio de Våge. Como el espacio de Schwartz de distribuciones temporadas $\mathscr{L}'$ no es un espacio de Våge; entonces se define un espacio de Våge conteniendo $\mathscr{L}'$. Este espacio es el dual de un espacio el cual está incluido en el espacio de Schwartz de funciones prueba $\mathscr{L}$, consistente de funciones enteras, y es invariante bajo las transformaciones de Fourier, definiéndolo sobe su dual.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Problema General

¿De qué forma, se puede establecer una caracterización de elementos inversibles en $\mathbb{C}-$álgebras topológicas?

Problema Específico

a) ¿Bajo qué condiciones se muestra que un $\mathbb{C}-$álgebra es un espacio topológico?

b) ¿De qué manera se podrían caracterizar los elementos inversibles de álgebra complejas topológicas?

1.3 OBJETIVOS

Objetivo General

Mostrar que los espacios Våge son $\mathbb{C}-$álgebras topológicas, y dar una caracterización de sus elementos.

Objetivos Específicos

a) Establecer algunas propiedades topológicas y algebraicas trascendentes en la determinación del espacio de Våge como un $\mathbb{C}-$álgebras topológicas.

b) Mostrar una caracterización de los elementos invertibles de algunos $\mathbb{C}-$álgebras topológicas.

1.4 JUSTIFICACIÓN

La Topología considerada como una subrama de la Geometría, permite el estudio en esta ocasión de dos espacios topológicos con una estructura de álgebra sobre el cuerpo de los números complejos como son el ***Espacio de Schwartz*** de las funciones temperades $\mathscr{L}'$ y el ***Espacio de Kondratiev*** de las distribuciones estocásticas S_{-1}. Los elementos de S_{-1} son llamadas distribuciones estocásticas y juegan un papel preponderante en las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas. El estudio de las $\mathbb{C}-$álgebras topológicas y la caracterización de sus elementos inversibles se ejecuta y se justifica considerando una familia de espacios sobre una monoide conmutativo el cual incluye el espacio $\mathscr{L}'$ que es llamado espacio admisible regular que es caracterizado con la operación de convolución satisfaciendo la desigualdad $\|f \lozenge g\|_p \leq E(p-q)\|f\|_q \|g\|_p$ para todo "p" mayor o igual que $q+2$.

1.5 LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN

a) Limitante Teórico

El estudio de los espacios de las funciones temperadas y de las distribuciones estocásticas están enmarcados en un espacio topológico, y en un $\mathbb{K}-$álgebra en este contexto. Nuestro trabajo tiene como limitante teórico al espacio topológico como un $\mathbb{C}-$álgebra es decir el álgebra sobre el cuerpo de los números complejos.

b) Limitante Temporal

El trabajo a investigar es naturalmente teórico, no tiene limitante temporal, por tanto NO APLICA.

c) Limitante Espacial

Por el mismo argumento expuesto en el ítem (b) se considera que no existe ***limitante espacial***, por tanto NO APLICA.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

2.1.1 Internacionales

El área de Álgebra Topológica y sus aplicaciones es recientemente muy desarrollada con un gran número de investigación. Daniel Alpay y Guy Salomón en setiembre del 2012 en una de sus obras tituladas: "New Topological $\mathbb{C}-$algebras with Applications in Linear Systems Theory" demuestra que los llamados "***Espacios Våge***" son $\mathbb{C}-$álgebras topológicas y muestra además que el producto tensorial de dos espacios Våge es un espacio Våge; todo ello lo hace definiendo una familia de espacios nucleares, cuyos elementos son funciones sobre un monoide conmutativo libre. En este contexto del estudio de las álgebras topológicas existen gran variedad de trabajo pero de modo específico sobre las denominadas C*-álgebras tales como: M. Frank and A. A. Pavlov, 2007, con la obra "Strict Essential Extensions of C*-álgebra and Hilbert C*-modules" también K.H. Kanimi and Sharifi, 2006, con la obra "Completely positive maps on Hilbert Modules over Pro-C*-algebras" donde estudia las aplicaciones completamente positivas que son la generalización natural de funciones lineales positivas, tales aplicaciones son extremadamente aplicadas en la Teoría Moderna de las C*-álgebras y de los Modelos Matemáticos de la probabilidad cuántica.

2.1.2 Nacionales

El álgebra topológica sobre el cuerpo de los números complejos es un área que tiene aplicaciones dentro de la misma topología y la misma álgebra.

No es ajeno las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Es el caso que muchos trabajos de Tesis de pregrado y posgrado en la FCM–UNMSM y de otras universidades peruanas, en las líneas de EDP han sido realizadas con ciertas aplicaciones a las denominadas $\mathbb{C}-$álgebras topológicas, entre las cuales mencionamos a continuación:

La Tesis titulada: “Estudio de los Sistemas Cuánticos de los estados desde el enfoque de Álgebra Geométrica” que corresponde a Pedro Amao Cutipa, así como el de trabajo de tesis titulada: “Teoría de Galbis de ecuaciones diferenciales lineales” cuya autora es Suzanne María Huaringa Mosquera.

2.2 MARCO

2.2.1 Teórico

En la topología y en el álgebra dos grandes ramas de la matemática nos permiten estudiar dos espacios.

El ***espacio Schwartz de distribuciones temperados*** $\mathscr{S}'$ y el ***espacio Kondratiev*** de distribuciones estocásticas S_{-1}, donde definimos una amplia familia de espacios nucleares los cuales son uniones crecientes de espacios de Hilbert (duales de) $\mathcal{H}_{p,}^{'}$ $p \in \mathbb{N}$ con normas decrecientes $\left\| \bullet \right\|_p$.

Los elementos de estos espacios son funciones en un monoide libre conmutativo. Nosotros caracterizamos estos anillos en esta familia los cuales satisfacen una desigualdad de la forma: $\left\| f * g \right\|_p \leq E\left(p-q\right)\left\| f \right\|_q \left\| g \right\|_p$ para todo $p \geq q+d$, donde "*" denota la convolución en el monoide, $E\left(p-q\right)$ es un número estrictamente positivo, y d es un número natural fijo, en este caso obtenemos $\mathbb{C}-$álgebras topológicas conmutativas.

Tal desigualdad se mantiene en S_{-1}, pero no en $\mathscr{S}'$. Nosotros damos un ejemplo de tal anillo que contiene $\mathscr{S}'$. Caracterizamos elementos inversibles en estos anillos y presentamos aplicaciones a la Teoría de Sistema Lineales.

2.2.2 Conceptual

El termino ***caracterización***, en el contexto matemático hablando no es otra cosa que establecer una ***identificación***; en nuestro trabajo realizaremos la caracterización de elementos inversibles en alguna $\mathbb{C}-$álgebras topológicas, específicamente dotamos al espacio de distribuciones estocástica (llamado también espacio de Kondratiev) de una $\mathbb{C}-$álgebra topológica, para que en ella identifiquemos o caractericemos elemento que admiten inverso (multiplicativo).

2.3. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BASICOS

A) Definiciones Básicas de Análisis Funcional:

Definición (2.3.1)

Sean *E, F* dos espacios vectoriales sobre un campo *K*, una aplicación *f* de *E* en *F* es lineal si $f\left(ax+by\right)=a\,f\left(x\right)+b\,f\left(y\right)$, para todo $x,y\in E$; para todo $a,b\in K$.

Definición: (Espacio Normado) (2.3.2)

Dado un espacio vectorial E sobre un campo *K,* una norma sobre *E* es una aplicación $\|\bullet\|$ de E en $\left[0\,,+\infty\right\rangle$ tal que: satisface los axiomas siguientes:

$\left(N_1\right)$ $\|x\|=0$ si y solo si $x=0$.

$\left(N_2\right)$ $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda\in K,$ para todo $x\in E.$

$\left(N_3\right)$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, para todo $x,y\in E.$

El par $\left(E,\|\bullet\|\right)$ se llama ***ESPACIO NORMADO***.

Definición: (Espacio Métrico) (2.3.3)

Sea *X* un conjunto, una métrica sobre X, es una función "d" de X en $\left[0\,,+\infty\right\rangle$ tal que satisface los axiomas siguientes:

$\left(d_1\right)$ $d\left(x,y\right)=0,$ si y solo si $x=y.$

$\left(d_2\right)$ $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$, para todo $x,y\in E.$

$\left(d_3\right)$ $d\left(x,y\right)\leq d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$, para todo $x,y,z\in E.$

El para $\left(X\,,\,d\right)$ se llama ***ESPACIO MÉTRICO***.

En un espacio métrico, tenemos nociones topológicas como conjuntos cerrados y abiertos vecindades, convergencia, etc. Particularmente una sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ converge a *x*, si para cada $\varepsilon>0,$ existe $N=N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ tal que $d\left(x,x_n\right)<\varepsilon$ para cada $n>N$. Una sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice convergente si esta converge a algún punto de *X*. Una sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ convergente es de Cauchy si para cada $\varepsilon>0,$ existe $N=N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ tal que $d\left(x_m,x_n\right)<\varepsilon$ para $m,n>N$.

Definición (2.3.4).

Un espacio normado E es llamado ***ESPACIO DE BANACH*** si este es completo como espacio métrico.

Ejemplos (2.3.1).

(1) Denotemos por C_0 al conjunto de todas las sucesiones $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tienden a cero, y sea $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos $x+y=(x_n+y_n)$, $ax=(ax_n)$ claramente se muestra que C_0 es un espacio vectorial en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, ahora definamos $\|x\|_M = \max\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$, como (x_n) tiende a cero, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, así $(C_0, \|\bullet\|_M)$ es espacio normado y también se prueba que C_0– es completo.

(2) Sea p- un número real tal que $1\le p<\infty$. Escribamos ℓ^p es el conjunto de todas las sucesiones de elementos en $K=(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$, para lo cual las series infinitas $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_n|^p$ son convergentes. Definiendo $\|x\| = \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right]^{1/p}$ es una norma en ℓ^p, con esta norma se prueba que ℓ^p es completo.

Definición (Producto Interno) (2.3.5).

Sea E un espacio normado sobre un campo K, se dice que E es un espacio con producto interno si existe una aplicación $\langle\, ,\rangle$ definida de $E\times E$ en K tal que cumple los axiomas siguientes:

(i) $\langle x,x\rangle\ge 0$ para cada $x\in E$.

(ii) $\langle x,x\rangle=0$ si y solo si $x=0$.

(iii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ para cada $x\in E$, $y\in E$.

(iv) $\langle \lambda x+\alpha y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\alpha\langle y,z\rangle$ para cada $x,y,z\in E$; $\lambda,\alpha\in K$.

El valor $\langle x,y\rangle$ es llamado el producto interno o producto escalar de x e y.

Definición (2.3.6).

Sea E un espacio con producto interno y $\|x\| = \left(\langle x, x\rangle\right)^{1/2}$ (norma). Si E es completo para esta norma, entonces se dice que E es un espacio de Hilbert.

Ejemplo (2.3.2).

El conjunto de todas las funciones continuas sobre un intervalo $I = [a\,, b]$ con el producto interno $\langle f\,, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ es un espacio con producto interno, más no es completo.

Definición (Seminorma) (2.3.7).

Un funcional lineal $\rho\colon E \to \mathbb{R}$ es llamado ***seminorma***, cuando para todo x, y en E y $\lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ son verdaderas las condiciones siguientes:

(s_1) $\rho(x) \geq 0$

(s_2) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$

(s_3) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definición (2.3.8)

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se dice que una topología τ sobre E es ***compatible*** con la estructura vectorial de E cuando $+ : E\times E \to E$ y el producto pro un escalar $\bullet : K\times E \to E$ son funciones continuas. Con respecto a la topología producto de $E\times E$ y $K\times E$ respectivamente.

El para (E, τ) es un espacio vectorial topológico.

Definición (2.3.9).

Sea E un espacio vectorial, $C \subset E$ es **convexo** si $tx + (1-t)y \in E$, para todo t en $[0,1]$; $x, y \in E$; es **equilibrada** cuando $tx \in C$, para todo $|t| \leq 1$ con $x \in E$. Es **absorbente** cuando para todo $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $r_x^{-1}.x \in C$.

Si C es una parte absorbentes de E, el funcional $\rho_C(x) = \inf\left\{r > 0 : r^{-1}x \in C\right\}$ con $x \in E$ es llamada el ***funcional de Minkowsky***.

Proposición (2.3.1).

Sea (E, τ) un espacio vectorial, entonces:

(i) Toda vecindad de cero es una parte absorbentes de *E*.

(ii) Las vecindades equilibradas de cero constituyen una base de vecindades de cero.

(iii) Si *C* es una parte absorbentes, equilibrada y cerrada de *E* entonces:

$$C = \{x \in E : \rho_C(x) \leq 1\}$$

Demostración (Ver $[1]$, página: 8)

Proposición (2.3.2).

Sea (E, τ) un espacio vectorial topológica y ρ una seminorma de *E*, son equivalentes:

(i) ρ es continua.

(ii) La bola $B_1(\rho) = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$ es un abierto de *E*.

(iii) El disco $D_1(\rho) = \{x \in E : \rho(x) \leq 1\}$ es una vecindad de cero.

(iv) ρ es continua en cero.

Demostración (Ver $[1]$, página: 8)

Definición (2.3.10).

Un espacio vectorial topológico (E, τ) es **localmente convexo** cuando la familia de todos las vecindades cerradas, convexas, absorbentes y equilibradas de cero, es una base de vecindades de cero.

Proposición (2.3.3).

La condición necesaria y suficiente para que el espacio vectorial topológico (E, τ) sea localmente convexo es que exista una familia Γ de seminormas definidas sobre *E*, tal que $\tau = \tau(\Gamma)$.

Demostración

Si $\tau=\tau(\Gamma)$, (E,τ) es un espacio localmente convexo (Ver $[1]$; página 14)

Ahora supongamos que E es localmente convexo, y sea v_0 una familia de vecindades cerradas, convexas y absorbentes, equilibradas de cero en la topológica τ. Para toda disco $D\in v_0$, sea ρ_D es funcional de Minkowsky asociada a D; consideremos $\Gamma=\{\rho_D : D\in v_0\}$. De esta manera se tiene:

(1) $\tau<\tau(\Gamma)$: pues sean $U\in\tau, x_0\in U$, entonces $(-x_0)+U$ es una vecindad del cero, luego existe $D\in v_0$ tal $x_0+D\subset U$ pero $D=D_1(\rho_0)$; por tanto $U\in\tau_\Gamma$.

(2) $\mathrm{T}(\Gamma)<\tau$: no es difícil ver que $B(\Gamma)\subset\tau$ por tanto se tiene el resultado.

Definición (2.3.11).

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea *u*- una función escalar definida en Ω. La adherencia en Ω del conjunto $S(u)=\{x\in\Omega: u(x)\neq 0\}$ es llamada soporte de la función *u*. Usaremos la notación $spp(u)$ para representar el soporte de la función "*u*", por ejemplo consideremos la función $u(x)=\begin{cases}1 \;, & x\in\Omega\\ 0 \;, & x\neq\Omega\end{cases}$, entonces $spp(u)=\overline{\Omega}$ mientras que $spp\left(u_{|\Omega}\right)=\Omega$.

Definición (2.3.12).

(1) Sean u,v dos funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^n$ medibles Lebesgue y tales que para todo $x\in\mathbb{R}^n$, existe la llamada convolución de *u* por *v* denotada y definida por:

$$u*v(x)=\int_{\mathbb{R}^n}u(x-y)v(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}u(y)v(x-y)dy$$

(2) Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ una función, definimos el simétrico de f como la función $f^S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ dada por $f^S(x)=f(-x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. El ***trasladado*** de *f* por $x_0\in\mathbb{R}^n$ como la función $\mathrm{T}_{x_0}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ dada por $(\mathrm{T}_{x_0}f)(x)=f(x-x_0)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

(3) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $v \subset \mathbb{R}^n$ ambos abiertos y sea $f : U \to K$ y $g : v \to k$, la función $f \otimes g : U \times V \to K$ definida por la expresión $(f \otimes g)(x)$: $f(x) f(y)$ es llamada producto de f y g.

Definición (Función de Prueba) (2.3.13).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una función $u : \Omega \to \mathbb{K}$ es una función de prueba en Ω, si u posee derivadas parciales continuas de cualquier orden y $spp(u)$ es un compacto de Ω. El espacio de funciones de prueba en Ω es denotada por $C_0^\infty(\Omega)$.

Sea $\mathscr{C} = \{\Omega_i\}_{i \in \Lambda}$ una cobertura abierta de Ω. Una familia $\mathscr{F} = \{f_j\}_{j \in \Lambda'}$ de funciones de prueba en Ω es llamada partición C^∞ de la unidad subordinada a la cubierta $\mathscr{C}$ se verifica las condiciones:

(p_1) $0 \leq f_j(x) \leq 1$; $j \in \Lambda'$, $x \in \Omega$.

(p_2) Para todo $j \in \Lambda'$ existe $i \in \Lambda$ tal que $spp(f_j) \subset \Omega_i$.

(p_3) Para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $I \subset \Lambda'$ finito tal que $K \cap spp(f_j) \neq \phi$ para $j \in I$.

(p_4) $\sum_{j \in \Lambda'} f_j(x) = 1$, para todo $x \in \Omega$.

El espacio $D_K(\Omega)$ (2.3.14)

Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y sea el conjunto $C_K^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega) : spp(u) \subset K\}$. Claramente $C_K^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$ más aún es un subespacio vectorial. Ahora consideremos $u : \Omega \to \mathbb{K}$ con derivadas parciales continuas hasta el orden de m y sea $E \subset \Omega$. . Definamos:

$$\|u\|_{E,m} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in E} \left| D^\alpha u(x) \right| \leq +\infty$$

Si $u \in C_K^\infty(\Omega)$, entonces $\|u\|_{K,m} < +\infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Más aún $\|\bullet\|_{K,m}$ es una norma norma sobre $C_K^\infty(\Omega)$. Consideremos $\Gamma_K(\Omega) = \left\{ \|\bullet\|_{K,m} : m \in \mathbb{N} \right\}$, el espacio respectivo localmente convexo será denotad por $D_K(\Omega)$.

Proposición (2.3.4)

Sea $\left(u_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas definidas en Ω.

Si para todo compacto $K\subset\Omega$ y $\varepsilon>0$ existe $j_0=j_0\left(\varepsilon,k\right)$ tal que $\left\|u_j-u_K\right\|_{K,0}\leq\varepsilon$, para todo $j\geq j_0, K\geq j_0$ existe función continua $u:\Omega\to K$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty}u_j\left(x\right)=u\left(x\right)$, uniformemente en las partes compactas de Ω.

(1) Si las funciones $\left(u_j\right)_j$ admiten derivadas parciales continuas hasta el orden m y para todo $\left|\alpha\right|\leq m$ existe $u_\alpha:\Omega\to\mathbb{K}$ continua, tal que: $\lim\limits_{j\to\infty}D^\alpha u_j\left(x\right)=u_\alpha\left(x\right)$ uniformemente en las partes compactas de Ω, entonces $u=u_0$ admite inversas parcialmente hasta orden de m y $D^\alpha u=u_\alpha$, $\left(\left|\alpha\right|\leq m\right)$.

Demostración: ($\left[1\right]$: página 66)

Observación (2.3.1)

Del lema anterior, se puede mostrar que: para todo compacto $K\subset\Omega$, $D_K\left(\Omega\right)$ es espacio métrico completo, bornológico y tonelado.

Proposición (2.3.5)

Sea $E\subset C_0^\infty\left(\Omega\right)$ son equivalentes:

$\left(i\right)$ E es una parte acotada de $D\left(\Omega\right)$.

$\left(ii\right)$ • Existe un compacto $K\subset\Omega$ tal que $spp\left(u\right)\subset K$, para todo $u\in E$.

• Para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\sup\limits_{u\in E}\left\|u\right\|_\alpha<+\infty$.

$\left(iii\right)$ Existe $K\subset\Omega$ comptacto tal que E es limitado en $D_K\left(\Omega\right)$.

Demostración (Ver $\left[1\right]$: Página 71)

Proposición (2.3.6)

Sea $\left(u_j\right)_{j\in\mathbb{N}}\subset C_0^\infty\left(\Omega\right)$ son equivalentes:

$\left(1\right)$ $\lim\limits_{j\to\infty}u_j=0$ en $D\left(\Omega\right)$.

$\left(2\right)$ $\left(i\right)$ Existe un compacto $K\subset\Omega$ tal que $spp\left(u_j\right)\subset K$ $\left(j=1,2,\ldots\right)$.

(ii) $\lim\limits_{j \to \infty} D^{\alpha} u_j(x) = 0$, uniformente en Ω.

(3) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\lim\limits_{j \to \infty} u_j = 0$ en $D_K(\Omega)$.

De esta proposición se muestra que: $D(\Omega)$ no es metrizable, pero si es de Hausdorff, bornológico, tonelado y secuencialmente completo.

Demostración:

$(1) \to (2)$ Como $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente, se tiene que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $D(\Omega)$; más aún el conjunto, $\{u_j : j = 1, 2, \ldots\}$ esta contenido integralmente en $D(\Omega)$ y es acotada, entonces por la proposición inmediata anterior $(2 - a)$; se tiene la parte (i) De otro lado sabemos que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene que $\|u\|_{\alpha} = \max\limits_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u_j(x)|$ es una seminorma admisible, con $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ puesto que $\|u\|_{\alpha} \leq \|u\|_K$ para $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, entonces observando y aplicando esto, se tiene como consecuencia la parte (ii).

$(2) \to (3)$ Se obtiene aplicando el Lema (*) parte (2).

$(3) \to (1)$ Tenemos $D_K(\Omega) \subset D(\Omega)$, también sabemos que para $u : E \to F$ lineal continua entre dos espacios $(E \text{ y } F)$ localmente convexos se tiene que

• Si $u_j \to u(E)$ entonces $A(u_j) \to A(u)$; así como si $(u_j)_j$ es de Cauchy en E entonces lo es $(A(u_j))_j$ en F , aplicando esto se tiene el resultado (1).

(B) Definiciones Básicas

De: Álgebra Topología

Es necesario y conveniente introducir la definición de un álgebra (Asociativa) sobre un cuerpo *K.*

Por un álgebra asociativa sobre *K* o simplemente un álgebra entendemos por un espacio vectorial *A* sobre *K* tal que está definida una multiplicación,

$$\bullet : A \times A \to A, \ (x, y) \mapsto x \bullet y$$

satisfaciendo las condiciones:

(1) $(xy)z = x(yz)$

$(2)\ x(y+z)=xy+xz$

$(3)\ \alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$ para todo $x,y,z\in A$; $\alpha\in\mathbb{K}$.

$(\bullet)$ Un subconjunto $B\subset A$ es un subálgebra, si B con la multiplicación de A es un álgebra. Asimismo, un álgebra A **n**-dimensional sobre $\mathbb{K}$, consiste de todas las combinaciones lineales $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ donde $\{v_1, \ldots, v_n\}\subset A$ es un conjunto de elementos básicos (base) de A y $\alpha_i\in\mathbb{K}$, para todo $i=1,2,\ldots,n$.

Los números complejos $\mathbb{C}=A$ forman un álgebra bidimensional sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Más generalmente $\mathbb{K}\subset F$ es extensión finita de cuerpos, entonces F es un álgebra n-dimensional sobre $\mathbb{K}$, donde n es el grado de la extensión.
En este trabajo los estudiantes las algebras sobre el cuerpo de los números complejos.

Definición (Algebra Normada) (2.3.15).
Sea A un álgebra provisto de una norma $\|\bullet\|$, se dice que A es un álgebra normada si $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$, para todo x,y en A.
Si A posee un elemento unidad (identidad) "$\mathbf{1}$" diferente de cero, supondremos que la norma verifica la condición: $\|\mathbf{1}\|=1$.
De la definición anterior es fácil mostrar que la aplicación bilineal $(x,y)\mapsto x\cdot y$ de $A\times A$ en A es continua. Llamamos ***Álgebra de Banach*** a toda álgebra normada completa. Claramente toda subálgebra B de un álgebra normada A, dotado de la norma restricción $\|\bullet\|_B$ es un álgebra normada.
Si $\boldsymbol{m}$ es un ideal bilatero cerrado de A, el álgebra cociente $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{m}}$ dotado de la norma: $\|\bullet\|_{\sim}$.

$$\|\bar{x}\|_{\sim}=\inf_{z\in\bar{x}}\|z\|=d(0,\bar{x}) \text{ donde } \bar{x}=x+\boldsymbol{m},\ x\in\boldsymbol{A}$$

Donde $\|\bullet\|$ es norma de A, es también un algebra normada cuando no tiene identidad.
En efecto
sean $\bar{x},\bar{y}$ en $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{m}}$, para todo $\varepsilon>0$ existen $x\in\bar{x}$, $y\in\bar{y}$ tales que:

$$\| x \| \leq \| \bar{x} \|_{\sim} + \varepsilon \quad ; \qquad \| y \| \leq \| \bar{y} \|_{\sim} + \varepsilon$$

Entonces $\|xy\| \leq \left(\| \bar{x} \|_{\sim} + \varepsilon\right).\left(\| \bar{y} \|_{\sim} + \varepsilon\right)$ y como $xy \in \bar{x} \cdot \bar{y}$ y $\varepsilon > 0$ es arbitrario; esto prueba que $\| \bar{x} \cdot \bar{y} \|_{\sim} \leq \| \bar{x} \|_{\sim} \cdot \| \bar{y} \|_{\sim}$.

Ahora si A tiene identidad $\mathbf{1}$, entonces $\bar{\mathbf{1}} = 1 + \boldsymbol{m}$, más aún $\|\bar{\mathbf{1}}\| = 1$ y así $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{m}}$ es un álgebra normada.

Definición (2.3.16)

Sea A un álgebra normada, la adherencia en A de una subálgebra de A (respectivamente de un subálgebra conmutativa, respectivamente de un ideal (izquierda o derecha)) es un subálgebra (respectivamente de una subálgebra conmutativa, respectivamente de un ideal (izquierda o derecha)).

Sea A, A' dos álgebra normada, un isomorfismo de álgebra $\varphi : A \rightarrow A'$ se dice isomorfismo topológico si es bicontinua, dicho de otra manera si existen $a, b \in \mathbb{R}^{+}$ tales que para todo $x \in A$, se tiene : $a\|x\| \leq \|\varphi(x)\| \leq b\|x\|$, si además $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in A$.

Ejemplos de álgebra normadas (2.3.3)

(1) Sea X un no vacío, denotemos por $B_{\mathbb{C}}(X)$ el conjunto de funciones complejas acotadas en X es un álgebra de Banach conmutativo con la norma: $\| f \| = \sup\limits_{x \in X} \| f(x) \|$ y la multiplicación usual. Claramente se cumple: $\|f\,g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ la función constante u igual a uno es el elemento unidad de $B_{\mathbb{C}}(X)$; verificándose $\|u(x)\| = \|\mathbf{1}\| = 1$.

(2) Sea A un álgebra sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ de las funciones definidas y k-veces continuamente derivables en $I = [0,1]$, para $x \in A$, definamos la función: $\|x\| = \sum\limits_{K=0}^{n} \dfrac{1}{K!} \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \left| x^{(K)}(t) \right|$ entonces $\| \bullet \|$ es una norma definida de A, más aún se tiene que con dicha norma A es un álgebra de Banach.

Espectro de un elemento de álgebra normada (2.3.17)

Sea A un álgebra normada, con identidad $\mathbf{1}$. Para cada $x \in A$, se dice que un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor regular para x, si $(x - \lambda\mathbf{1})$ tiene inverso en A.

Los números complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ que no son valores regulares para x se llaman ***valores espectrales*** de x.

El conjunto de valores espectrales de x se llama ***espectro de x*** y se denota por $S_{p_A}(x)$ ó $S_p(x)$; es decir:

$$S_p(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda\mathbf{1}) \text{ no es inversible}\}$$

Observación (2.3.2)

Claramente de la definición de espectro:

(i) $S_p(\lambda\mathbf{1}) = \{\lambda\}$, $S_p(x + \lambda\mathbf{1}) = S_p(x) + \lambda$, para todo $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Todo elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(x - \lambda\mathbf{1})$ es divisor de cero en A es un valor espectral de x.

(iii) Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ no constante de grado "n".

Escribamos $p(z) = a_0\mathbf{1} + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ en A; y sabemos que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos escribir: $p(z) - \lambda = \alpha_n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ \ldots \ (z - \lambda_n)$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y como la subálgebra de A engendrada. Por $\mathbf{1}$ y z es conmutativo, entonces se tiene: $p(z) - \lambda\mathbf{1} = \alpha_n (z - \lambda_1\mathbf{1}) \ \ldots \ (z - \lambda_n\mathbf{1})$; ahora para que $(p(z) - \lambda\mathbf{1})$ sea invertible en A, es necesario y suficiente que todos los elementos $(z - \lambda_j\mathbf{1})$ lo sean; es decir que $\lambda \in S_p(p(z))$ equivale a decir que los $\lambda_j \in S_p(z)$ por lo menos para j, y como $p^{-1}(\lambda) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ equivale a que $\lambda \in p(S_p(z))$ por tanto:

$S_p(p(z)) = p(S_p(z))$.

Proposición (2.3.7)

Sea A un álgebra de Banach con elemento identidad $\mathbf{1}(1 \neq 0)$.

(i) El Grupo Multiplicativo G de los elementos invertibles en A es abierto en A, contiene a la bola $\|x - \mathbf{1}\| < 1$ y la topología inducida sobre G por la de A es compatible con su estructura de grupo.

(ii) Para cada $x \in A$, el complemento de $S_p(x)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y la aplicación $\lambda \mapsto (x-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ de $\left(S_p(x)\right)^C$ en A es analítica.

(iii) El conjunto $S_{p_A}(x) = S_p(x)$ es no vacío y compacto en $\mathbb{C}$ y está contenido en la bola $B_{\|x\|}(0)$.

Demostración:

(i) Para mostrar este ítem, recordemos que $\mathscr{L}(E,F)$ es el conjunto de todos las aplicaciones lineales continuas el cual es un espacio vectorial donde E y F son espacios normados, en este caso reemplazamos el A por $\mathscr{L}(E,F)$ y el conjunto $\mathscr{H}$ de los homeomorfismo lineales que es abierto en $\mathscr{L}(E,F)$ por el grupo *G*, pues en este caso la aplicación $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}^{-1}$ de homeomorfismos lineales de F sobre E es continuo y diferenciable, y la derivada de $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ en el punto x_0 es la aplicación lineal $\left[\text{de } \mathscr{L}(E,F) \text{ en } \mathscr{L}(F,E)\right]$ $t \mapsto -x_0^{-1} \circ t \circ x_0^{-1}$; en este contexto para nuestro caso, lo que se ha probado es que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ del grupo *G* en sí mismo también es derivable, de modo similar se prueba los ítems (ii) y (iii).

Proposición (Teorema de Gelfand – Mazur) (2.3.8)

Sea *A* un álgebra de Banach, si *A* es un cuerpo, se tiene necesariamente $A = \mathbb{C}.\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es la identidad de *A*.

Demostración:

Si $x \in A$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(x-\lambda\mathbf{1})$ no es invertible (Ver Proposición (2.3.7), parte (iii)) pero como *A* es un cuerpo, se tiene que $x = \lambda\mathbf{1}$ por tanto $A = \mathbb{C}-\mathbf{1}$.

Proposición (2.3.9)

Sea *A* un algebra de Banach. Con identidad $\mathbf{1}$, y $x \in A$ un elemento invertible si $\|x\| = \|x^{-1}\| = \mathbf{1}$ entonces $S_p(x)$ está contenido en el circulo unitario.

Demostración:

Sea $B = B_1(0) \subset \mathbb{C}$, de la proposición anterior tenemos que $S_p(x) \subset B$ y $S_p(x^{-1}) \subset B$ y como $S_p(x^{-1}) = \left(S_p(x)\right)^{-1}$ entonces esto prueba lo requerido.

Proposición (2.3.10)

(i) Sea A un álgebra normada. Para cada $x \in A$, la sucesión $\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right)$ es convergente, más aún convergente al $\underset{n}{\text{ín}f}\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right)$.

(ii) Si A es un álgebra de Banach con identidad $\mathbf{1}(1\neq 0)$, el número $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right)$ es igual al radio de menor disco de centro el origen contenido a $S_p(x)$.

Demostración (Ver $[2]$: página 289)

Nota: el número $\rho(x)$ es el llamado radio espectral de *x*.

Caracteres y espectro de un álgebra de Banach conmutativa (2.3.18)

Sea A un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Se llama ***carácter*** de A a todo homomorfismo de Ψ de A en $\mathbb{C}$ $(\text{ie. } \Psi: A \to \mathbb{C}, \text{ homomorfismo})$ no idénticamente nulo.

Como $\Psi(\lambda x) = \lambda\Psi(x)$, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ esto a decir que $\Psi(A) = \mathbb{C}$.

Si A posee $\mathbf{1}$, entonces $\Psi(\mathbf{1}) \neq 0$. Ahora para un álgebra de Banach conmutativo con identidad $\mathbf{1}(1\neq 0)$.

Se tiene:

(i) Para cada $x \in A$ y todo carácter Ψ de A se tiene $\Psi(x) \in S_p(x)$..

(ii) Todo carácter Ψ de A es una forma lineal continua de norma 1.

(iii) La aplicación $\Psi \mapsto \Psi^{-1}(0)$ es una biyección del conjunto de los caracteres de A sobre el conjunto de los ideales maximales de *A*.

Proposición (2.3.11)

Sea I un ideal de $A(I \neq A)$ entonces $\overline{I} \neq A$.

Demostración:

Sea *G* el grupo de los elementos invertibles de *A*, entonces el complemento de *I* contiene a *G* el cual es abierto de *A* y por tanto el resultado.

Escribamos el conjunto de caracteres de A como $X(A)$. Si A es un álgebra de Banach con identidad $\mathbf{1}(1\neq 0)$; entonces $X(A)\subset B_1(\|x'\|)$ en el de $A(A')$ del espacio de Banach A, y es cerrado en A' para la topología débil. Ahora en A es separable, entonces $X(A)$ es metrizable y compacto para la topología débil.

(C) Definiciones Básicas de Topología

Espacios Topológicos (2.3.19).

Sea E un conjunto; y τ una parte de $P(E)$, se denomina ***topología*** sobre elementos de τ .

(T_1) E,ϕ son elementos de τ.

(T_2) Si E_1, E_2 son elementos de τ, entonces $E_1 \cap E_2$ lo es de τ.

(T_3) La de cualquier familia $\{E_K\}_{K\in\Lambda}$ de τ es un elemento de τ .

$(*)$ La pareja (E, τ) se denomina ***espacio topológico***, los elementos de τ se denominan conjuntos abiertos del espacio topológico de E.

Definición (2.3.20).

Sean τ_1, τ_2 dos topologías de E, se dice que τ_2 es mas fina eque τ_1 (o que τ_1 es menos fina que τ_2); si $\tau_1 \subset \tau_2$, dos topologías se dicen ***comparables*** si una de ellas es más fina que la otra. La topología caótica es la menos fina que cualquier otra; mientras que la topología diserta es la más fina que cualquier otra.

Sea (E,τ) un espacio topológico. Una ***base*** para τ es una colección $\mathfrak{B}$ de E (llamada elementos básicos) tal que:

(i) Para cada $x\in E$, hay al menos un elemento básico $\mathfrak{B}$ que contiene a x.

(ii) Si x pertenece a la intersección de B_1 , B_2 (con B_1 , $B_2 \in \mathfrak{B}$) entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ con $x\in B_3$.

Si $\mathfrak{B}$ satisface las condiciones anteriores, se define la Topología τ *generada* por $\mathfrak{B}$ como: Un subconjunto U de E se dice que es abierto en *E*, si para cada $x \in U$ existe un elemento básico $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Definición (2.3.21).

Si $\mathfrak{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos de la recta $\mathbb{R}$; $\langle a,b \rangle = \{x : a < x < b\}$ la topología generada por $\mathfrak{B}$ se llama ***Topología Usual*** sobre $\mathbb{R}$.

Si $\mathfrak{B}'$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo: $[a,b\rangle = \{x : a \leq x < b\}$ la topología generada por $\mathfrak{B}'$ se denomina ***Topología de límite inferior*** sobre $\mathbb{R}$; en este caso al conjunto $\mathbb{R}$ dotado de dicho límite lo denotamos como $\mathbb{R}_\ell$. Ahora sea $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{C}^+\right\}$ y sea $\mathfrak{B}''$ la colección de todos los intervalos abiertos $\langle a,b \rangle$ junto con todos los conjuntos de la forma $\langle a,b \rangle - K$; la topología generada por $\mathfrak{B}''$ se llama $\underline{K - \text{topología}}$ sobre $\mathbb{R}$, y cuando $\mathbb{R}$ está dotado de tal topología lo denotamos como $\mathbb{R}_K$

.

Definición (Subbase) (2.3.22).

Sea (E,τ) un espacio topológico, una subbase S de τ es una colección de subconjuntos de *E* cuya unión es *E*. La topología generada por la subbase *S* se define como $\mathfrak{U}$ la todos las uniones e intersecciones finitas de elementos de *S*.

Un subconjunto *F* de un espacio topológico (E,τ) se dice que es ***cerrado*** si $(E-F)$ es abierto. El ***interior*** de *F* se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en *F*, y la ***clausura*** de *F* se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a *F*. El interior de *F* se denota como $\overset{\circ}{F}$ ó $\overset{\circ}{I}nt(F)$, y la clausura como $cl(A)$ ó $\overline{A}$. Claramente: $\overset{\circ}{F}$ es abierto y $\overline{A}$ es cerrado más aún se verifica: $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Espacios Localmente Convexos (2.3.23).

Sea E a $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $(\mathbb{K}=\mathbb{R}\circ\mathbb{C})$, y sea ρ una seminorma sobre E, $d(x,y)=\rho(x-y)$ es una seudodistancia sobre E invariantes por traslaciones y tal que $d(\lambda x, \lambda y)=|\lambda| d(x,y)$ para todo $\lambda\in\mathbb{K}$.

Considerando $\{\rho_K\}_{K\in\Lambda}$ una familia cualquiera de seminormas sobre E; la topología definida por las seudodistancias $d_K(x,y)=\rho_K(x-y)$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de E.

Definición (2.3.24).

Un espacio vectorial topológico E cuya topología puede ser definida por una familia de seminormas $\{\rho_K\}_{K\in\Lambda}$ se dice ***localmente convexo***.

Topologías Débiles (2.3.25).

Sea $\{E_k\}_{k\in\Lambda}$ una familia de espacio localmente convexos y, para cada $k\in\Lambda$ sea $\left\{\rho_{k_j}\right\}_{j\in L_k}$ una familia de seminormas que define la topología de E_k. Sea $E=\prod_{k\in\Lambda} E_k$ el espacio vectorial producto; para cada $k\in\Lambda$ y todo $j\in L_k$,pongamos: $\rho'_{k_j}(x)=\rho_{k_j}(Pr_k(x))$ para todo $x\in E$ entonces las ρ'_{k_j} son seminormas sobre E y definen sobre el mismo E la llamada ***Topología Producto de los*** E_k. Si todos los $E_k=F$ (F localmente convexo), la topología producto sobre el espacio vectorial F^I de todos los aplicaciones de I en F está definida por las seminormas $f\mapsto\rho(f(k))$, para un $k\in\Lambda$ y una seminorma del conjunto de seminormas Γ que definen la topología de F, llamada ***Topología de la Convergencia Simple*** sobre F^I. Si F es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $T\subset\mathbb{K}^n$, se dice que una aplicación $t\mapsto f_t$ de T en F^I es diferenciable n-veces (respectivamente: indefinidamente diferenciable, respectivamente analítico) para la topología de la ***convergencia simple***, si cualquiera que sea $k\in\Lambda$, la aplicación $t\mapsto f_t(k)$ de T en F tiene la propiedad correspondiente.

Ahora considerando de manera especial cuando F es el cuerpo de los escalares $\mathbb{K}$, es un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$, y así estudiamos los subespacios de $\mathbb{K}^E$ cuyos elementos son formas bilineales sobre *E*; la topología de la convergencia simple sobre un tal espacio $\mathbb{V}$ se denomina entonces ***Topología Débil***, la cual está definida por las seminormas $f \mapsto \left| f(x) \right|$, donde *x*- recorre *E*.

Para todo $x \in E$ la aplicación $f \to f(x)$ es una forma lineal continua sobre $\mathbb{V}$ para la ***Topología Débil*** es decir $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ se también débilmente convergente.

Recordando que dada una función $u : \Omega \to \mathbb{K}$ con derivadas parciales continua hasta el orden "*m*" y $E \subset \Omega$, considerados: $\|u\|_{t,m} = \max\limits_{|a| \leq m} \sup\limits_{x \in E} \left| D^{\alpha} u(x) \right| \leq +\infty$ entonces $\|\bullet\|_{K,m}$ es una norma sobre $C_K^{\infty}(\Omega)$, donde *K* es compacto de Ω.

Escribamos: $\Gamma_K(\Omega) = \left\{ \|\bullet\|_{K,m} : m \in \mathbb{N} \right\}$ el espacio localmente convexo respectivo es denotado por el mismo $D_K(\Omega)$.

Ahora sea $\mathfrak{C}_{\Omega}$ la familia de todas las partes de Ω con inferior no vacío, se tiene $C_0^{\infty}(\Omega) \bigcup\limits_{K \in \mathfrak{C}_{\Omega}} C_K^{\infty}(\Omega)$, donde $C_K^{\infty}(\Omega) = \left\{ u \in C_0^{\infty}(\Omega) :\ spp(u) \subset K \right\}$.

En $C_0^{\infty}(\Omega)$ consideramos la familia de todas las seminormas admisibles obteniéndose así el ***espacio localmente convexo*** $D(\Omega)$ que no es otra cosa que el límite inductivo de la familia de espacios localmente convexos $\left\{ D_K(\Omega) \right\}_{K \in \mathfrak{C}_{\Omega}}$.

Esto es $D(\Omega) = \lim\limits_{\to} D_K(\Omega)$.

Definición (Distribución) (2.3.26)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Los funcionales lineales $T : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ son denominados ***distribuciones*** (o funciones generalizadas) en Ω.

Proposición (2.3.12)

Sea $T : C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal, son equivalentes:

(1) $T \in D(\Omega)'$.

(2) Para todo compacto $K \subset \Omega$, existen $c > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, que depende de K tal que:

$\left|\langle T, u\rangle\right| \leq c\|u\|_{K,m}$ con $u \in C_K^{\infty}(\Omega)$.

(3) Para toda parte limitada $B \subset D(\Omega)$; $\sup\limits_{u \in B}\left|\langle T, u\rangle\right| < +\infty$..

(4) T es secuencialmente continua en cero.

Demostración: (Ver $[1]$: Página 93)

Ejemplos: (La distribución de Dirac) **(2.3.4)**

Dado $p \in \Omega$, sea δ_p el funcional lineal definida en $C_0^{\infty}(\Omega)$ por $\langle \delta_p, u\rangle = u(p)$; $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Si $\lim\limits_{j \to \infty} u_j = 0$ en $D(\Omega)$ en particular: $\lim\limits_{j \to \infty}\langle \delta_p, u_j\rangle = \lim\limits_{j \to \infty} u_j(p) = 0$ por tanto $\delta_p \in D(\Omega)'$.

La distribución δ_p es llamada la distribución de Dirac en el punto "*p*".

Definición (2.3.27)

Una distribución $T \in D(\Omega)$ es orden finito cuando existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T \in D^m(\Omega)'$ siendo T una distribución en Ω, de orden finito, el número entero $\mathbf{0}(T)$ para $\mathbf{0}(T) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : T \in D^m(\Omega)'\right\}$ lleva el número nombre de orden de *T*.

Dados $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ y $T \in D(\Omega)'$.

El funcional φ_T dado por: $\langle \varphi_T, u\rangle = \langle T, \varphi u\rangle$, $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ es llamado el <u>producto de φ por T</u>:

Si $T \in D(\mathbb{R}^n)'$ la ***distribución simétrica*** de T es el funcional T^{v} dado por:

$$\langle T^{v}, u\rangle = \langle T, u^{v}\rangle, \text{ con } u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Definición (2.3.28).

Una función $u \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ es llamada: ***rápidamente decreciente en el infinito*** cuando $\lim \left|x^{\alpha}\, D^{\beta} u(x)\right| = 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Usaremos el símbolo $S^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ para denotar el espacio vectorial de las funciones rápidamente decrecientes en el infinito.

Observación (2.3.3).

De la definición de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ se tiene $C_0\left(\mathbb{R}^n\right) \subset S\left(\mathbb{R}^n\right) \subset C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Definición (2.3.29).

Los funcionales lineales continuas definidas en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ son denominados ***distribuciones temperadas***.

Ejemplo (2.3.5)

Toda distribución temperada es de orden finito. Si $T = S\left(\mathbb{R}^n\right)$, existen k, m en $\mathbb{N}$ y $c > 0$ tales que: $\left|\langle T, u\rangle\right| \le c\,\rho_{K,m}(u) = c \sup_{|\alpha| \le m} \sup \left\{\left(1+|x|\right)^m \left|D^a u(x)\right|\right\}$ con $u \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, de donde se concluye que la restricción de T a $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$es un funcional continuo en la topología de $D^m\left(\mathbb{R}^n\right)$.

CAPITULO III
HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 HIPÓTESIS

3.1.1 Hipótesis General

La definición de una familia amplia de espacios nucleares de términos de funciones positivas sobre un monoide conmutativo que permitirá mostrar que estos espacios poseen la estructura de $\mathbb{C}-$álgebra topológicos, y a su vez será posible caracterizar a sus elementos inversibles.

3.1.2 Hipótesis Específicas

a) Las funciones positivas sobre un monoide conmutativo permitirá generar un espacio topológico con una estructura de algebra sobre los números complejos.

b) La expectación generalizada de una familia $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \ell_A}$ permitirá definir una operación y este a su vez una caracterización de los elementos inversibles en alguna $\mathbb{C}-$álgebras topológicas.

3.2 DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES

Las variables identificadas en la hipótesis general se pueden definir conceptualmente de la forma como se indica a continuación:

Variable independiente: La familia de espacios nucleares en términos de funciones positivas sobre un monoide conmutativo.

Variable dependiente: Los espacios de Våge; vistos como $\mathbb{C}-$álgebras topológicas.

3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE LA VARIABLE

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente: Familia de espacios nucleares en términos de funciones positivas sobre un monoide conmutativo.	Espacios de Schwartz y Kondratiev.	Distribuciones temperadas y estocásticas.	Espacios de Hilbert y normas decrecientes.	Analítico, Inductivo – Deductivo.	Constructiva.
Dependiente: Los espacios de "Våge"	$\mathbb{C}-$ álgebras topológicas.	Las álgebras y las topologías.	$\mathcal{H}_p^{'}$, $p \in \mathbb{N}$ $\lVert \bullet \rVert_p$	Analítico, Inductivo – Deductivo.	Constructiva.

CAPITULO IV
DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación (Estudio) es básica, según Alva Lucía María Villada (2008) "También, llamada Investigación Pura, teoría o dogmática. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, en incrementar los conocimiento científicos o filosóficos, pero sin contratarlos ningún aspecto práctico"

4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Dado que es un estudio básico teórico, previamente se buscará aportar conocimiento que permita mejorar algunos detalles del marco teórico, haciendo una recolección y revisión de material bibliográfico especializado.

El método utilizado en las pruebas de las proposiciones u otros resultados es INDUCTIVO – DEDUCTIVO, el cual consiste en hacer deducciones, basadas en las definiciones, lemas, teoremas, etc., relacionados al tema a investigar. Básica y fundamentalmente en temas de Análisis Funcional, Álgebra y topología.

4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

No aplica.

4.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Por ser un trabajo netamente "matemático" (Teoría – Abstracto); no se requiere de procedimiento especiales para la recolección de la información. Lo que se realiza es una búsqueda y revisión bibliográfica: (libros de especialidad, páginas web, papers, revistas especializadas, etc.)

4.5. ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

En el presente trabajo no hay un procedimiento de datos y mucho menos procesos estadísticos, en tanto que es un trabajo analítico. En este contexto luego de revisar algunos tópicos de análisis funcional, algebra y topología; ponemos particular y especial atención a una familia de espacio nucleares de funciones sobre un monoide. Empezamos dando alguna definiciones y resultados previos sobre funciones positivas. Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Escribamos el conjunto siguiente:

$$m_A = \mathbb{N}_0^{(A)} = \left\{ x \in \mathbb{N}_0^A : \operatorname{supp}(x) \text{ es finito} \right\} = \bigoplus_{n \in A} \mathbb{N}_0 e_n \quad ....(m_1)$$

donde $e_n = \left(0, 0, \ldots \underbrace{,1,}_{n-\text{lugar}} 0, \ldots \right), n \in \mathbb{N}$.

En m_A definamos la operación suma, como sigue sean $x = \sum_{n \in A} x_n e_n$; $y = \sum_{n \in A} y_n e_n$ dos elementos en m_A definimos $x + y = \sum_{n \in A} (x_n + y_n) e_n$, de aquí $(m_A, +, 0)$ es un monoide libre conmutativo, generado por el conjunto o a lo más numerable $\{e_n\}_{n \in A}$. De otro lado definamos la relación $"\leq"$ en m_A como: $x \leq y$ si y solamente si existe $z \in m_A$ tal que $x + z = y$.

Afirmación:

$(m_A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

En efecto

Claramente $x \leq x$; puesto que $x = 0 + x$, con $0 \in m_A$. Ahora si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces existe $z \in m_A$ tal que $x + z = y$ también existe $z' \in m_A$ tal que $y + z' = x$, de aquí $x = y$. Finalmente si $x \leq y$, $y \leq z$ entonces existen u, v en m_A tal que $x + u = y$; $y + v = z$ de aquí $x + u = z - v$ sí y solo sí $x + (u + v) = z$; llamando $\omega = u + v \in m_A$ se tiene $x \leq z$, por tanto la relación $"\leq"$ es transitiva y en consecuencia de orden.

$(*)$ Definimos una familia ***amplia*** de espacios nucleares, los cuales son uniones de (de duales) espacios de Hilbert $H_p^{'}$, $p \in \mathbb{N}$; con normas decrecientes en $\|\bullet\|_p$.

Definición: **(Funciones especiales en Espacios Nucleares) (4.5.1)**

(1) Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$, y sea m_A como en (m_1). Una función $g : m_A \to \mathbb{R}$ ***positiva*** si $g(x) > 0$ para cualquier $x \in m_A$.

(2) Una función positiva *g*, es llamada ***admisible*** si $g(0) = 1$ y $g(e_n) > 1$ para todo $n \in A$.

(3) Una función admisible *g*, es llamada ***d-regular*** (o simplemente regular) si

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{g(e_n)^d - 1} < \infty \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m_2)$$

esta función admisible es llamada ***super exponencial*** (respectivamente exponencial) si $g(x)g(y) \leq g(x+y)$ (respectivamente $g(x)g(y) = g(x+y)$), para todo: x, y en m_A ..... (m_3).

Ejemplos (4.5.1)

(1) Sea A el conjunto de cardinal uno, entonces $m_A = \mathbb{N}_0$. Ahora tomamos $g(n) = r^n$ con $r > 1$.

(2) Sea $A = \mathbb{N}$, entonces $m_A = \ell$, donde $\ell = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ para $\alpha_j \neq 0$, a lo más en un número finito de índices.

Los ejemplos (1) y (2) son ejemplos de funciones: positivas, admisibles, regular y exponencial.

Nota:

Los ejemplos arriba presentados, ocurren en la definición de espacios de distribución estocásticos.

Proposición (4.5.1)

Sea $g : m_A \to \mathbb{R}$ una función positiva, admisible, d-regular, entonces:

$$\sum_{x \in m_A} g(x)^{-d} < \infty$$

Además, si *g* es exponencial en lugar de super exponencial entonces d-regularidad es también necesario para la familia $\left[g(x)^{-d} \right]_{x \in m_A}$ es sumable.

Demostración:

Probaremos para el caso $d=1$, el cual se sigue de la relación (m_3), que para cada caso $x \in m_A$ se tiene: $\prod_{n\in A} g(e_n)^{\alpha_n} \le g(x)$ por consiguiente:

$$\sum_{x\in m_A} g(x)^{-1} \le \sum_{x\in m_A}\prod_{n\in A} g(e_n)^{-\alpha_n} = \prod_{n\in A}\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} g(e_n)^{-\alpha_n}$$

$$= \prod_{n\in A}\left(\frac{1}{1-g(e_n)^{-1}}\right) = \prod_{n\in A}\left(1+\frac{1}{g(e_n)\ -1}\right) < \infty$$

Si $g(x)g(y)=g(x+y)$, entonces para todo $x\in m_A$, se tiene $\prod_{n\in A} g(e_n)^{\alpha_n} = g(x)$, por consiguiente: $\sum_{x\in m_A} g(x)^{-1} = \prod_{n\in A}\left(1+\frac{1}{g(e_n)-1}\right)$ este último sí y sólo sí $\sum_{n\in A}\left(\frac{1}{g(e_n)\ -1}\right) < \infty$, en el caso $d>1$, tomamos g^d en lugar de g.

Proposición (4.5.2)

Sean $d\in\mathbb{N}$, $(2\mathbb{N})^{\alpha} = 2^{\alpha_1}4^{\alpha_2}6^{\alpha_3}\ldots$; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ con $\alpha_j \in\mathbb{N}$ y $\alpha_j \neq 0$, salvo un conjunto finito de índice j, $\sum_{\alpha\in\ell}(2\mathbb{N})^{-d\alpha} < \infty$ si y solo sí $d<1$.

Demostración:

En este caso tomemos $m_A=\ell$, entonces por la proposición inmediata anterior:

$$\sum_{\alpha\in m_A} g(\alpha)^{-d} < \infty \text{ y como } m_A=\ell, \text{ entonces:}$$

$$\sum_{\alpha\in\ell}(2\mathbb{N})^{-d\alpha} < \infty \text{ si y somamente si:}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{(2n)^d-1}\right) < 1;\ \text{lo cual se cumple si y solamente sí } d>1.$$

Recordando el espacio $\mathscr{L}'$ denota el espacio de Schwartz de distribuciones temperadas complejas, el cual puede ser visto como el espacio de sucesiones de números complejos $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, sujeto a $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)^{-2p}|f_n|^2 < \infty$ para algun $p\in\mathbb{N}$.

Ahora escribiendo: $\| f \|_p = \left[\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1)^{-2p} | f_n |^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$ podemos representar $\mathscr{L}'$ como la unión de una sucesión ***creciente*** de espacios de Hilbert : $H_1', H_2', \ldots$ de sucesiones complejas con normas decrecientes, es decir:

$$H_p' = \left\{ f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : \| f \|_p < \infty \right\}$$

De aquí la contrapartida de f' es el espacio S_{-1} de familias de números complejos $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \ell}$ indexada por ℓ, tal que $\sum_{\alpha \in \ell} | f_\alpha |^2 (2\mathbb{N})^{-\alpha p} < \infty$ para algun $p \in \mathbb{N}$.

Definición (Espacios Frechet) (4.5.2)

Un espacio vectorial topológico *X* es un ***espacio de Frechet*** sí y sólo satisface las tres condiciones siguientes:

(1) Es un espacio de Hausdorff.

(2) Su topología puede ser inducida por una familia numerable de seminormas $\| \bullet \|_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, es decir que un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto sí y sólo sí para cada $u \in U$ existe $k_0 \geq 0$ y r>0 tal que el conjunto $\{ x \in X : \| x - u \|_k < r$, para todo $k \geq k_0 \}$ está contenido en *U*.

(3) Es completo con respecto a la familia de seminormas.

Ejemplos (4.5.2)

El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es un espacio de Frechet. **En efecto**, sea $x, y \in \mathbb{R}$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $x < y$, de donde existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b < y < c$; de aquí tenemos los conjuntos abiertos: $Ux = \langle a, b \rangle; Uy = \langle b, c \rangle$ más aún $Ux \cap Uy = \phi$, y así el resultado. Los espacios: $\mathscr{L}'$ y S_{-1}, descritas y definidas líneas antes son doble dual espacios Frechet, a saber, f' es el doble dual del espacio $\mathscr{L}$ de Schwartz de series hermitianas $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n . z_n(x)$ donde $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ denota las funciones hermitianas, y los coeficientes φ_n son números complejos, y son tales que $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1)^{2p} |\varphi_n|^2 < \infty$ para algun $p \in \mathbb{N}$ y S_{-1} es el espacio dual, del experimento

Kondratiev S_1 de las funciones de prueba estocásticas, las cuales puede verse como familias de números complejos $\left(f_\alpha\right)_{\alpha\in\ell}$, es decir como familia indexada por ℓ, y son tales que: $\sum_{\alpha\in\ell}(\alpha!)^2\,(2\mathbb{N})^{\alpha p}|f_\alpha|^2<\infty$ para todo $p\in\mathbb{N}$, donde:

$$(2\mathbb{N})^{\alpha}=\prod_{j=1}^{\infty}(2k)^{\alpha_j} \qquad y \qquad \alpha!=\prod_{j=1}^{\infty}(\alpha_j!)$$

las tripletas: $\left(\mathscr{L},L_2(\mathbb{R},dx),\mathscr{L}'\right)$ y $\left(S_1,W,S_{-1}\right)$ donde W denota el espacio llamado ***ruido blanco*** son ***Tripletas de Gelfand***.

Ahora definimos una familia de amplia (ancha) de espacio vectoriales topológicos nucleares, los cuales incluye $\mathscr{L}'$ y S_{-1}, y el cual es cerrada bajo el producto tensorial, como dual de un cierto espacio de Frechet.

Sea $g:m_A\to\mathbb{R}$ una ***función positiva***, esto es $x\mapsto g(x)$ donde $g(x)>0$ para cualquier $\alpha\in m_A$. Denota ℓ el espacio ponderado de Hilbert respecto a g como:

$$\ell_p^2=\left\{(\varphi_x)_{x\in m_A}:\ \sum_{x\in m_A}|\varphi_x|^2\,g(x)<\infty\right\}$$

cuando g es la función constante 1, simplemente denotamos
$\ell^2=\ell_1^2\ \left(\text{es decir}:\ \ell^2=\ell^2(m_A)\right)$, así definimos el espacio normado numerable:

$$\mathscr{F}_g=\left\{(\varphi_x)_{x\in m_A}:\ \sum_{x\in m_A}|\varphi_x|^2\,g(x)^p<\infty\ \text{ para todo } p\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\mathscr{F}_g=\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\ell_{g^p}$$

Proposición (4.5.3)

Sea $g:m_A\to\mathbb{R}$ una función positiva:

(i) El espacio $\mathscr{F}_g$ dotada con la topología definida por las normas:

$$\|\varphi\|_p^2=\sum_{x\in m_A}|\varphi_x|^2\,g(x)^p; \qquad p=1,2,\ldots \text{ es un espacio de Frechet.}$$

(ii) Si $g>1$ (es decir, para cualquier $x\in m_A$, $g(x)>1$), entonces el espacio $\mathscr{F}_g$ es incluido en ℓ^2.

(iii) El espacio $\mathscr{F}_g$ es nuclear sí y solamente sí existe $d \in \mathbb{N}$ tal que: $\sum\limits_{x \in m_A} g(x)^{-d} < \infty$

Demostración:

(i) Por definición, $\mathscr{F}_g = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} \ell_{g^p}$, de donde claramente $\mathscr{F}_g$ es un espacio Frechet.

Notemos que las normas son no decrecientes y compatibles, es decir; cada sucesión la cual es una sucesión de Cauchy con respecto a las dos normas y converge a cero con respecto a una, entonces también converge a cero con respecto a la segunda.

(ii) Esto se obtiene directamente, pues:

$$\|\varphi\|_{\ell^2}^2 = \sum_{x \in m_A} |\varphi|^2 \leq \sum_{x \in m_A} |\varphi|^2 g(x)^p = \|\varphi\|_{\ell^2}^2$$

(iii) Definiendo $\delta_x = \left(\delta_{x,y}\right)_{y \in m_A}$ tal que $\delta_{x,y} = 0$ si $x \neq y$ y $\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$, claramente

$\left(\delta_x g(x)^{-p/2}.b_x\right)_{x \in m_A}$ es una base ortonormal del espacio ℓ_{g^p}.

Ahora, $\mathscr{F}_g = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} \ell_{g^p}$ es nuclear sí y solamente sí para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $q > p$ tal que la inclusión natural $\ell : \ell_{g^q} c \to \ell_{g^p}$ es Hilbert-Schmidt, la igualdad siguiente:

$$Trz\left(\ell^* \ell\right) = \sum_{x \in m_A} \left\langle \ell^* \ell\left(\delta_x\, g(x)^{-q/2}.b_x\right), \left(\delta_x\, g(x)^{-q/2}.b_x\right)\right\rangle_q$$

$$= \sum_{x \in m_A} \left\| \ell\left(\delta_x\, g(x)^{-q/2}.b_x\right)\right\|_p^2$$

$$= \sum_{x \in m_A} g(x)^{-(q-p)} \left\| \ell\left(\delta_x\, g(x)^{-p/2}.b_x\right)\right\|_p^2$$

$$= \sum_{x \in m_A} g(x)^{-(q-p)}$$

Da lugar a que $\mathscr{F}_g$ es nuclear sí y sólo sí para cualquier p existe $q > p$ tal que:

$$\sum_{x \in m_A} g(x)^{-(q-p)} < \infty$$

Si $\sum\limits_{x \in m_A} g(x)^{-d} < \infty$ (es cierto) para algún $d \in \mathbb{N}$, entonces al considerar $q = p + d$, se obtiene el resultado requerido.

Recíprocamente, si $\mathscr{F}_g$ es nuclear, entonces para $p = 1$ existe $q > 0$ tal que $\sum_{x \in m_A} g(x)^{-(q-p)} < \infty$ se cumple, entonces considerando $d = q - p = q - 1$ se obtiene el resultado requerido.

Definición (4.5.3)

Sea "g" una función positiva d-regular admisible. El espacio $\mathscr{F}_g$ es llamado un espacio d-regular admisible. El espacio es llamado ***regular admisible*** si este es d-regular admisible para algún $d \in \mathbb{N}_0$.

Denotamos por $\left(\ell^2_{g^p}\right)'$ el dual de $\ell^2_{g^p}$. Entonces

$$\left(\ell^2_{g^1}\right)' \subseteq \left(\ell^2_{g^2}\right)' \subseteq \left(\ell^2_{g^3}\right)' \subseteq \;.\;.\;.\; \subseteq \left(\ell_{g^p}\right)' \subseteq \;.\;.\;. \subseteq \mathscr{F}_g'$$

y así el espacio dual $\mathscr{F}_p'$ es la unión de la sucesión creciente de los espacios $\left(\ell^2_{g^p}\right)'$ es decir: $\mathscr{F}_g' = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\ell^2_{g^p}\right)'$ como un espacio de Frechet es nuclear sí y sólo sí su doble dual es nuclear $\mathscr{F}_g'$ también es nuclear.

Proposición (4.5.4)

Es espacio $\mathscr{F}_g'$ puede ser visto como:

$$\left\{ (f_x)_{x \in m_A} : \sum_{x \in m_A} |f(x)|^2 g(x)^{-p} < \infty \text{ , para todo } p \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostración:

Sea $f \in \left(\ell^2_{g^p}\right)'$. Del teorema de representación de Ries'z, existe $\Psi = (\Psi_\alpha) \in \ell^2_{g^p}$ con $\| \Psi \|_{\ell^2_{g^p}} = \| f \|_{\left(\ell^2_{g^p}\right)'}$ tal que $f(\bullet) = \langle \bullet , \Psi \rangle_{\ell^2_{g^p}}$ así para cualquier $\varphi = (\varphi_\alpha) \in \ell^2_{g^p}$, entonces $f(\varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle_{\ell^2_{g^p}} = \sum_{x \in m_A} \varphi_x \; \bar{\Psi}_x \, g(x)^p$

Escribamos $f_x = \Psi_x \, g(x)^p$, así tenemos:

$$\sum_{x \in m_A} |f_x|^2 g(x)^{-p} = \sum_{x \in m_A} |\Psi_x|^2 g(x)^p = \|\Psi\|^2_{\ell^2_{g^p}}$$
$$= \| f \|^2_{\left(\ell^2_{g^p}\right)'}$$

Además, para cualquier sucesión (f_x) sujeto a: $\sum_{x\in m_A} |f_x|^2\, p(x)^{-p} < \infty$ obtenemos: $(f_x) \mapsto \left((\varphi_x) \mapsto \sum_{x\in m_A} \varphi_x . \bar{\rho}_x \right)$ aplica (f_x) a funcionales lineales continuas sobre $\ell^2_{g^p}$ y cualquier composición de esta aplicación con $f \mapsto (f_x)$, lo cual fue descrito anteriormente, produce la identidad apropiada:

$$\left(\ell^2_{g^p}\right)' \cong \ell^2_{g^{-p}} = \left\{ (f_x)_{x\in m_A} : \sum_{x\in m_A} |f_x|^2\, g(x)^{-p} < \infty \right\}$$

así, $\mathscr{F}_p'$ puede ser visto como:

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \ell^2_{g^{-p}} = \left\{ (f_x)_{x\in m_A} : \sum_{x\in m_A} |f_x|^2\, g(x)^{-p} < \infty \text{ para algún } p\in\mathbb{N} \right\}$$

Nótese que el producto interno $\langle \bullet,\bullet\rangle_{\ell^2}$ coincide con la dualidad anterior $\langle \bullet,\bullet\rangle_{\mathscr{F}_g',\mathscr{F}_g}$ siempre que tenga sentido. Considerando la inclusión de espacios dual $\left(\ell^2\right)'$ en $\mathscr{F}_g'$, usando el Teorema de Ries'z nosotros tenemos que: $\mathscr{F}_g \subseteq \ell^2 \subseteq \mathscr{F}_g'$.

Claramente la segunda inclusión es también continua, desde que:

$$\|f\|^2_{\left(\ell^2_{g^p}\right)'} = \sum_{x\in m_A} |f_x|^2\, g(x)^{-p} \le \sum_{x\in m_A} |f_x|^2 = \|f\|^2_{\ell^2}$$

De este modo podemos concluir también que $\left(\mathscr{F}_g,\ \ell^2(\ell_A),\ \mathscr{F}_g'\right)$ es una tripleta de Gelfand.

(1) FAMILIA DE $\mathbb{C}$-ALGEBRAS TOPOLÓGICAS Y ESPACIOS DE VAGE

Recordando: El conjunto $\ell_A = \mathbb{N}_0^{(A)}$ donde $A \subset \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}_0^{(A)} = \left\{ Q \in \mathbb{N}_0^A : \operatorname{supp}(Q) \text{ es finito} \right\} = \bigoplus_{n\in A} \mathbb{N}_0 e_n$ el cual tiene la siguiente propiedad: para cualquier $c \in \ell_A$ tenemos el conjunto finito: $\left\{ (a,b) \in \ell_A^2 : a+b=c \right\}$.

De este modo obtenemos el $\mathbb{C}-$álgebra total de el monoide ℓ_A, a saber $\left(\mathbb{C}^{\ell_A}, +, *\right)$ donde la operación "$*$" denota la multiplicación convolución la cual está definido como:

$$f * g = \left(\sum_{a+b=c} f_c\, g_c \right)_{c\in\ell_A} \quad \text{para todo } f, g \in \mathbb{C}^{\ell_A} .$$

Nota: La expresión $f * g$ simplemente será denotado como fg.

Observación (4.5.1)

(i) El álgebra $\left(\mathbb{C}^{\ell_A}, +, *\right)$ es un dominio entero, mas no aún es un anillo topológico con respecto a la topología producto de $\mathbb{C}^{\ell}_{A}$.

(ii) Escribamos $x_n = (\delta e_n, b)_{b \in \ell_A} \in \mathbb{C}^{\ell_A}$, $x = (x_n)_{n \in A}$ y $x^{\alpha} = \prod_{n \in A} x_n^{\alpha_n}$ obteniéndose $x^a = \left(d_{a,b}\right)_{b \in \ell_A} = d_a$ por consiguiente: $(f_a)_{a \in \ell_A} = \sum_{a \in \ell_A} f_a x^q$.

(iii) De las observaciones anteriores obtenemos que $\mathbb{C}^{\ell_A} = \mathbb{C}\left[(x)\right]$ y operación "*" puede ser considerado simplemente como multiplicación se series formales.

Proposición: Propiedades básica de el álgebra $\left(\mathbb{C}^{\ell_A}, +, *\right)$ (4.5.5)

Sean f, g y h tres elementos en $\mathbb{C}^{\ell_A}$, entonces se tiene las siguientes igualdades:

(i) $fg = gf$

(ii) $f(gh) = (fg)h$

(iii) $f(g+h) = fg + fh$

Prueba:

Es rutinario, aplicando la identificación de convolución en el algebra $\mathbb{C}^{\ell_A}$.

Nota:

Considerando la definición de espacio admisible regular, la norma en dicho espacio será denotada simplemente por $\|\bullet\|_p$, en reemplazo de: $\|\bullet\|_{\left(\ell^2_{k^p}\right)^r} = \|\bullet\|_{\ell^2_{k^{-p}}}$.

Definición (Espacio Vage) (4.5.4).

Un espacio admisible regular $\mathbb{F}^r_k = \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell^2_{k^{-p}}$ es denominado un espacio Våge si existe un elemento $e \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}$ y para cada $q \geq p+e$, se tiene:

$$\|fg\|_p \leq M(p-q)\|f\|_q \|g\|_p$$

Para todo $f \in \ell^2_{k^{-p}}$ y $g \in \ell^2_{k^{-p}}$, donde además: $0 < M(p-q) < \infty$. Ahora si $\mathbb{F}^{'}_k$ es un espacio Vage, llamaremos el mínimal "e" con esta propiedad el índice de el espacio.

Observación (4.5.2).

De la definición inmediata anterior podemos ver que, un espacio Våge $\mathbb{F}_k^r$ es un subálgebra de $\left(\mathbb{C}^{\ell_A}, +, *\right)$ es decir es cerrado para las operaciones de adición $(+)$ y convolución $(*)$.

Proposición (4.5.6).

Sean $a, b \in \ell_A$ elementos cualesquiera entonces un espacio admisible *d*-regular $\mathbb{F}_k^r$ es un espacio Våge si y solo sí: $k_a k_b \leq k_{a+b}$ en otras palabras la función $k: \ell_A \to R$ es super exponencial. Su índice es entonces menor o igual a "d".

Demostración

$(\leftarrow)$ Por hipótesis tenemos que $K_a K_b \leq K_{a+b}$ para todo $a, b \in \ell_A$, como $\mathbb{F}_k^{'}$ es un espacio admisible *d*-regular, entonces $k_o = 1, k_{e_n} > 1$, para todo $n \in A$, y $\displaystyle\sum_{n \in A}^{K} \frac{1}{k_{e_n}^r - 1} < \infty$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Ahora recordando el siguiente "$\mathbb{R}_*$: si $k: \ell_A \to \mathbb{R}$ es una función super exponencial *d*-regular admisible positiva entonces $\displaystyle\sum_{a \in \ell_A} k_a^{-r} < \infty$" luego haciendo uso de "R_*" obtenemos para cualquier $p - q \geq r$ la desigualdad siguiente: $\displaystyle\sum_{a \in \ell_A} k_a^{-(p-q)} \leq \sum_{a \in \ell_A} k_a^{-r} < \infty$ escribamos:

$$M\left(p-q\right) = \left[\sum_{a \in \ell_A} k_a^{-(p-q)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora, supongamos que $f \in \ell_{k^{-q}}^2$ y $g \in \ell_{k^{-p}}^2$, para algún $p \geq q + r$; de donde se tiene:

$$\| f\, g\|_p^2 = \sum_{c \in \ell_A} \left| \sum f_a\, g_{c-a} K_c^{-\frac{p}{2}} \right|^2$$

$$\| f\, g\|_p^2 \leq \sum_{c \in \ell_A} \left[\sum_{c \geq a} \left| f_a \right| K_a^{-\frac{p}{2}} \left| g_{c-a} \right| K_{c-a}^{-\frac{p}{2}} \right]^2$$

$$\leq \sum_{c \in \ell_A} \left[\sum_{c \geq ga'} |f_a| k_a^{-\frac{p}{2}} |f_{a'}| k_{a'}^{-\frac{p}{2}} |g_{c-a}| k_{c-a}^{-\frac{p}{2}} |g_{c-a'}| k_{c-a'}^{-\frac{p}{2}} \right]^2$$

$$\leq \sum_{a, a' \in \ell_A} \left[|f_a| k_a^{-\frac{p}{2}} |f_{a'}| k_{a'}^{-\frac{p}{2}} \sum_{a, a' \leq c} |g_{c-a}| k_{c-a}^{-\frac{p}{2}} |g_{c-a'}| k_{c-a'}^{-\frac{p}{2}} \right]$$

$$\leq \left[\sum_{b \in \ell_A} |f_b| k_b^{-\frac{p}{2}} \right]^2 \left[\sum |g_b|^2 k_b^{-p} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{b \in \ell_A} |g_b|^2 k_b^{-p} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\sum_{b \in \ell_A} k_b^{q-p} \right] \left[\sum_{b \in \ell_A} |f_b|^2 k_b^{-q} \right] \left[\sum_{b \in \ell_A} |g_b|^2 k_b^{-p} \right]$$

$$\leq \left[M(p-q) \right]^2 \|f\|_q^2 \|g\|_p^2$$

Entonces $\|f\,g\|_p^2 \leq \left[M(p-q) \right]^2 \|f\|_q \|g\|_p$; de este modo podemos decir que, $\mathbb{F}_k$ es espacio Vage de índice, el cual es menor o igual de $"r"$.

$(\rightarrow)$ Para este sentido tenemos por hipótesis que $\mathbb{F}_k^r$ es un espacio Vage de inde e. Sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q + e$, entonces:

$$\|x^{a+b}\|_p = \|x^a \cdot x^b\|_p \leq M(p-q) \|x^a\|_q \|x^b\|_p$$

Por consiguiente, $k_{a+b}^{-p} \leq M(e) k_a^{-p} k_b^{-q}$, de aquí $M(e)^{-\frac{1}{p}} \cdot k_a \cdot k_b^{\frac{q}{p}} \leq k_{a+b}$ y por lo tanto obtenemos que $k_a k_b \leq k_{a+b}$ cuando p tiene a infinito.

Afirmación: Un espacio Vage, es un espacio nuclear.

En efecto:

Si $\mathbb{F}_k^r$ es un espacio Vage entonces $\sum_{a \in \ell_A} k_a^{-r} < \infty$. Ahora recordemos el resultado siguiente: “R^*: sea $k : \ell_A \rightarrow R$ una función positiva, entonces: El espacio $\mathbb{F}_k$ es un espacio nuclear si y solamente si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{a \in \ell_A} k_a^{-r} < \infty$”, entonces aplicando el resultado R^*, se tiene que $\mathbb{F}_k$ es nuclear. Sin embargo, dado que es un espacio Frechet, se deduce que, $\mathbb{F}_k^r$ es también un espacio nuclear.

Definición (4.5.5).

Un espacio de Frechet, es un espacio real topológico, completo en el sentido los espacios uniformes que satisface una de las condiciones siguientes:

(i) El espacio es localmente convexo y matizable por una distancia invariante por traslaciones.

(ii) Existe una familia numerable de funciones continuas que engendra la topología del espacio.

Proposición (4.5.7).

Sea $\mathbb{F}_k^r$ un espacio regular admisible y sea (f_j) una red en $\mathbb{F}_k^r$. Entonces $f_j \to f$ en la topología fuerte sí y sólo sí existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f_j, f \in \ell^2_{K^{-p}}$ y $f_j \to f$ en la topología fuerte de $\ell^2_{k^{-p}}$.

Demostración:

$(\to)$ Supongase que $f_j \to f$ en la topología fuerte de $\mathbb{F}_k^r$. En particular $\{f_j\}_{j\in\Lambda} \cup \{f\}$ es fuertemente acotada, por consiguiente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{f_j\}_{j\in\Lambda} \cup \{f\} \subseteq \ell^2_{k^{-p}}$$

Ahora sea E un conjunto acotado en $\ell^2_{k^p}$, entonces $E \cap \mathbb{F}_k$ es un subconjunto denso de E; por consiguiente:

$$\sup_{\gamma \in E} \left| f_j(\gamma) - f(\gamma) \right| = \sup_{\gamma \in E \cap \mathbb{F}_k} \left| f_j(\gamma) - f(\gamma) \right| \to 0$$

De donde, $f_j \to f$ en la topología fuerte de $\ell^2_{k^{-p}}$. El reciproco es inmediato.

Proposición (4.5.8).

Sea $\mathbb{F}_k^r$ un espacio Våge, entonces la convolución es una función continua $\mathbb{F}_k^{'} \times \mathbb{F}_k^{'} \to \mathbb{F}_k^{'}$ en la topología fuerte, y así $(\mathbb{F}_k^{'}, +, *)$ es un $\mathbb{C}-$álgebra topología.

Demostración:

Sea (f, g) el punto de convergencia de la red $(f_j, g_j)_{j\in\Lambda}$ en la topología fuerte de $\mathbb{F}_k^{'} \times \mathbb{F}_k^{'}$, entonces en particular, $f_j \to f$ y $g_j \to g$ en la topología fuerte de $\mathbb{F}_k^{'}$, por la proposición inmediata anterior, existe $p,q \in \mathbb{N}$ tal que $f_j, f \in \ell^2_{k^{-q}}$ y $g_j, g \to \ell^2_{k^{-p}}$ donde $f_j \to f$ en la topología fuerte de $\ell^2_{k^{-p}}$ y $g_j \to g$ en la topología fuerte de , $\ell^2_{k^{-p}}$ sin pérdida de generalidades podemos asumir que $p \geq q+r$, desde que $\mathbb{F}_k^{'}$ es un espacio de Vage, entonces $\int g_j = \int *g_j$, $\int g = \int *g \in \ell^2_{k^{-p}}$ y $*: \ell^2_{k^{-q}} \times \ell^2_{k^{-p}} \to \ell^2_{k^{-p}}$ es contina.

Desde que (f_j, g_j) converge a (f, g) en la topología fuerte de $\ell^2_{k^{-q}} \times \ell^2_{k^{-p}}$, se tiene que $f_j g_j \to fg$ en la topología fuerte de $\ell^2_{k^{-p}}$. Nuevamente usando la proposición anterior se tiene que: $f_j g_j \to fg$ en la topología fuerte de $\mathbb{F}_j^{'}$, de este modo la convolución es fuertemente continua.

Proposición (4.5.9).

Sea $(f_j)_{j \in \Lambda}$ una red en $\mathbb{F}_k^{'}$ entonces $f_j \to f$ en la topología débil si y solamente si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f_j, f \in \ell^2_{k^{-p}}$ y $f_j \to f$ en la topología débil de $\ell^2_{k^{-p}}$.

Demostración:

Supóngase que $f_j \to f$ en la topología débil. En particular, $\{f_j\} \cup \{f\}$ es débilmente acotado, y así es acotado fuertemente, por consiguiente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{f_j\} \cup \{f\} \in \ell^2_{k^{-p}}$. Más aún, $f_j \to f$ puntualmente sobre un subconjunto denso de $\ell^2_{k^{-p}}$, esto es $\mathbb{F}_k$, sea $\varepsilon > 0$ y $\gamma \in \ell^2_{k^p}$. Nosotros podemos elegir $\alpha \in \mathbb{F}_k$ tal que $\|\gamma - \alpha\|_p < \dfrac{\varepsilon}{z\left[\|f\| + \sup_j \|f_j\|\right]}$ y $j_0 \in \Lambda$ tal que para todo $j \geq j_0$, se tiene $|f_j(\alpha) - f(\alpha)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, por consiguiente:

$$\begin{aligned}
|f_j(\gamma) - f(\gamma)| &\leq |f_j(\gamma) - f_j(\alpha)| + |f_j(\alpha) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(\gamma)| \\
&\leq \left[\|f_j\| + \|f\|\right]\|\gamma - \alpha\| + |f_j(\alpha) - f(\alpha)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

De esta manera $f_j \to f$ en la topología débil de $\ell^2_{k^{-p}}$. El recíproco se obtiene directamente.

CAPITULO V

RESULTADOS

5.1. RESULTADOS DESCRIPTIVOS

En este trabajo estamos interesados en establecer una caracterización de elementos inversibles en algunas $\mathbb{C}-$algebras topológicas; lo cual lo realizaremos mediante una función denominada expectativa generalizada de una familia de funciones.

En este contexto consideramos un anillo R con identidad, el mismo que es simbolizado de la $\mathbb{C}-$álgebra$\left(\mathbb{F}_k^{'}, +, *\right)$.

Definición (5.1.1).

Sea $f = \left(f_j\right)_{j \in \ell_A} \subset R$ entonces $f_0 \in \mathbb{C}$ es llamado la ***expectativa generalizada*** de f y es denotado por $\varepsilon\left[f\right]$.

Observación (5.1.1).

(1) La definición ***"expectativa generalizada"*** induce la operación producto siguiente: $\varepsilon\left[f\,g\right] = \varepsilon\left[f\right] \cdot \varepsilon\left[g\right]$ para todo $f, g \in R$.

(2) La operación ***"expectativa generalizada"*** puede ser visto como un homomorfismo $\varepsilon : R \to \mathbb{C}$, que llena identidad en identidad, esto es: $\varepsilon\left(1_R\right) = 1_{\mathbb{C}}$.

Proposición (5.1.1).

Sea $M > 0$, entonces para cualquier $f \in R$ tal que $\varepsilon\left[f\right] = 0$ existe $q \in \mathbb{N}$ que verifica $\|f\|_q < M$.

Demostración:

Sea $f = \left(f_k\right) \in \ell^2_{k^{-p}}$ con $f_0 = 0$, como $k_{e_n} > 1$ para $n = 1, 2, \ldots..$ tenemos

$$k_a = \prod_{n \in A} k_{e_n}^{a_n} > 1 \text{ para todo } a \neq \left(0, 0, \ldots\right)$$

Por consiguiente, para todo $a \in \ell_A$, $\lim_{q \to \infty} |f_a|^2 k_a^{-q} = 0$ y para todo $q > p$, $|f_a|^2 k_a^{-q} \le |f_a|^2 k_a^{-p}$, mientras que $\sum_{a \in \ell_A} |f_a|^2 k_a^{-p} = \|f\|_p^2 < \infty$; de este modo el Teorema de la Convergencia dominada implica que:

$$\lim_{q \to \infty} \|f\|_q^2 = \lim_{q \to \infty} \sum_{a \in \ell_A} |f_a|^2 k_a^{-q} = \sum_{a \in \ell_A} \lim_{q \to \infty} |f_a|^2 k_a^{-q} = 0$$

Definición: (*n*-ésima potencia de convolución) (5.1.2).

La *n*-ésima potencia de convolución denotada por $f^n = (f\,*)^n$ es definida inductivamente como sigue: $f^0 = 1,\ f^n = f \cdot f^{n-1},\ n > 0$.

Proposición (5.1.2).

Sea R un espacio de Våge de índice *r* y sea *f* un elemento en $\ell^2_{k^{-p}}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N},\ f^n \in \ell^2_{k^{-(p+r)}}$; además se tiene: $\|f^n\|_{p+r} \le M(d)^n \cdot \|f\|_p^n$.

Demostración:

Claramente $f^0 = 1 \in \ell^2_{k^{-(p+r)}}$, y $\|f^0\|_{p+r} = M(r)^0 \cdot \|f\|_p^0$. Por inducción asumimos que $f^n \in R$; y pongamos $f^{(n+1)} = f \cdot f^n \in R$ y

$$\begin{aligned} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{p+r} &= \left\|f\ f^n\right\|_{p+r} \\ &\le M(r) \|f\|_p \left\|f^n\right\|_{p+r} \\ &\le M(r)^n\ \|f\|_p^{n+1} < \infty \end{aligned}$$

Observación (5.1.2).

(1) Dado un polinomio $p(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n z^n$, con $p_n \in \mathbb{C}$, definimos su versión convolución $p\colon R \to R$ como sigue:

$$p(f) = \sum_{n=0}^{N} p_n f^n$$

(2) De la proposición inmediata anterior, tenemos que $p(f) \in R$ para $f \in R$, de esta manera la siguiente proposición corresponde convolución al caso de series de potencia.

Proposición (Serie de Potencia convergente) (5.1.3).

Sea $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n z^n$ una serie de potencia con coeficientes complejas, la cual converge absolutamente en el disco abierto con radio R, entonces para cualquier $f \in R$ tal que $|\varepsilon[f]| < \dfrac{R}{M(r)}$ se preserva que: $F(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n f^n \in R.$

Demostración:

Previamente recordemos el resultado siguiente: " $R_0 \equiv$ sea $M > 0$, entonces para cualquier $f \in R$ tal que $\varepsilon[f] = 0$ existe $q \in \mathbb{N}$ con la condición: $\|f\|_q < M$ "

Ahora al aplicar el resultado "R_0" existe q tal que $\|f - \varepsilon(f)\|_q < \dfrac{R}{M(r)} - |\varepsilon[f]|$, por consiguiente $\|f\|_q \le \|f - \varepsilon(f) \cdot 1_R\|_q + |\varepsilon(f)| < \dfrac{R}{M(r)}$, entonces por la proposición inmediata anterior, para todo $p \ge q + r$, se tiene:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |F_n| - \|f^n\|_p \le \sum_{n \in \mathbb{N}} |F_n| \, M(r)^n \, \|f\|_q^n$$

$$\le \sum_{n \in \mathbb{N}} |F_n| \left[M(r) \|f\|_q \right]^n < \infty$$

Como $\ell^2_{k^{-p}}$ es un espacio Hilbertiano, entonces $F(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n \cdot q^n \in \ell^2_{k^{-p}}$ Así, $F(f) \in R$

.

Proposición: (Elementos invertibles) (5.1.4).

El elemento $f \in R$ es invertible, sí y solamente sí $\varepsilon[f]$ es invertible.

Demostración:

$(\leftarrow)$ Si $\varepsilon[f]\neq 0$, podemos asumir que $\varepsilon[f]=1$ y por la llamada ***"proposición: serie de potencias convergente"*** tenemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-f)^n \in R$, además

$$f\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-f)^n\right)=1$$

Y así se tiene el resultado.

$(\rightarrow)$ Asumamos que $f\in R$ es invertible, entonces existe $f^{-1}\in\mathbb{R}$ tal que $f\cdot f^{-1}\in R$ y como la aplicación función expectativa es un homomorfismo entonces tenemos $\varepsilon[f]\cdot\varepsilon\left[f^{-1}\right]=\varepsilon\left[f\cdot f^{-1}\right]=\varepsilon[1]=1$ y por tanto el resultado.

Proposición (5.1.5).

Sea R un espacio de Våge, entonces las siguientes propiedades se cumplen:

(i) $GL(R)$ es un conjunto abierto.

(ii) El espectro de $f\in R$, $\sigma(f)=\{\lambda\in\mathbb{C}:(f-\lambda 1_R)\text{ es no invertible}\}$ es el único $\{\varepsilon[f]\}$.

(iii) ε es único como un homomorfismo $R\rightarrow\mathbb{C}$ llevando identidad en identidad.

Demostración:

(i) Claramente el conjunto denotado por $G=\{f\in R:\varepsilon[f]\neq 0\}$ es el conjunto de todos los elementos invertible en R. En otras palabras, $GL(R)=\varepsilon^{-1}(GL(\mathbb{C}))$ en particular, como ε es continuo, $GL(R)$ es abierto, para lo cual bastará observa la proposición inmediata anterior.

(ii) Es importante ver que, el elemento $(f-\lambda 1_R)$ no es inversible sí y sólo sí $\lambda=\varepsilon[f]$.

(iii) Sea $\varphi:R\rightarrow\mathbb{C}$ un homomorfismo, que lleva 1_R en $1_{\mathbb{C}}$, y sea $f\in R$, como $\varphi(f-\varphi(f))1_R=0,\ \varphi(f)\in\sigma(f)$ esto es: $\varphi(f)=\varepsilon[f]$.

Definición: (Función Racional) (5.1.3).

Una función racional con coeficientes en $R^{n\times m}$ es una expresión de la forma $R(z) = p(z)(q(z))^{-1}$ donde $p \in (R(z))^{n\times m}$ y q es elemento de $R(z)$ no nulo.

Observación (5.1.3).

Para cualquier elemento $f \in R$ tal que $\varepsilon(q(f)) \neq 0$, se tiene que $R(f)$ está bien definido como un elemento de $R^{n\times m}$.

Ejemplos (5.1.1).

Consideremos los pares de puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ en R^2 para $m \in \mathbb{N}$ un elemento dado. Encontramos todas las series de potencias "*F*" tal que:

$$F(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Y tal que, además la función $z \mapsto \varepsilon(F(z))$ es analítica y contráctible en el disco unitario abierto.

5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

El resultado descriptivo, que no es otra cosa que la caracterización de elementos inversibles en $\mathbb{C}-$álgebras Topológicas, nos permite inferir algunos resultados que relaciona el Producto Tensorial $E \hat{\otimes} F$ con *B (E, F),* para lo cual consideramos E, F dos espacios de Hausdorff, localmente convexo, y consideremos el producto tensorial de dichos espacios: $E \otimes F$, entonces alguna topología "natural" puede ser considerado en dicho producto tensorial.

Definición: (Producto Tensorial Topológico) (5.2.1).

(a) Sean E y F dos espacios de Banach. Si existe su producto tensorial $E \otimes F$, una norma $u \mapsto \|u\|_L$ y solo uno para todo espacio de Banach, G, las aplicaciones bilineales continuas de $E \times F$ en G corresponden exactamente a las aplicaciones lineales continua de $E \otimes F$ en G, conservando normas.

Para un elemento $u \in E \otimes F$, $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ entonces $\|u\|_1 = \inf_{(x_i), (y_i)} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\|$.

(b) La completitud de $E\otimes F$ para ciertas normas denominada ***producto tensorial norma compleja*** de E y F denotada por $E\otimes F$. El dual de $E\otimes F$ se identificará con la norma del espacio $B(E,F)$ (espacio de las formas bilineales separadamente continuas)

Observación (5.2.1)

(1) Consideremos el producto tensorial $E\otimes F$ la norma inducida para el espacio $B(E',F')$ de las formas bilineales continuas aseguran un $E'\times F'$, la norma estándar mas pequeña y por lo tanto la topología mas fina; la completitud para esta norma será denotada por $E\otimes F$. Toda topología localmente convexa compatible sobre $E\otimes F$ será incluida entre las dos topologías precedentes.

(2) Sean E,F dos espacios localmente convexos, existe su producto tensorial $\boldsymbol{E\otimes F}$, la topología localmente convexa única $\boldsymbol{\tau}$ semejante a que para todo espacio localmente convexo G, las aplicaciones bilineales continuas de $E\times F$ en G corresponder exactamente a las aplicaciones lineales continuas de $\boldsymbol{E\otimes F}$ en G. Ahora el conjunto de aplicaciones bilineales equicontinuas corresponden al conjunto de aplicaciones lineales equicontinuas.

(3) Si (U_i) (respectivamente (V_j)) es un sistema fundamental de vecindades de cero "0" en E (respectivamente en F), los conjuntos $\Gamma(U_i\otimes V_j)$ (sobre círculos convexos de elemento de la forma $x\otimes y$, con $x\in U_i$, $y\in V_j$) forma un sistema fundamental de vecindades del cero “0” en $E\otimes F$.

(4) La topología τ es llamado el producto tensorial descriptivo de las topologías sobre E,F; y la completitud de $E\otimes F$ para τ denotado por $E\otimes F$, será denominado el ***producto tensorial topológico descriptivo completo de E y de F***. El dual de $E\otimes F$ en espacio $B(E,F)$.

Definición (5.2.2).

Sean E, F dos espacios localmente convexos, una ***aplicación de Fredholm*** de E en F, es una aplicación lineal definida por un elemento de un espacio $E'_A \otimes F_B$. Si E y F son espacios de Banach, las aplicaciones de Fredholm de E en F están definidas por los elementos de $E' \otimes F$.

Nota:

Los espacios vectoriales topológicos considerados, son localmente convexos y separables. Si E es un tal espacio entonces E_s (respectivamente E_s') denota E (respectivamente E') dotado de la topología débil, E' denota el dual fuerte de E. Ahora si A es parte bornológica convexa cerrada de E, entonces E_A denota el espacio engendrado por A, dotado de la norma $\|x\| = \inf_{x \in \lambda A} |\lambda|$.

En el contexto tensorial descrito anteriormente presentamos la definición de espacios nucleares.

Definición (5.2.3).

Un espacio localmente convexo E, se dice ***Nuclear*** si para todo espacio localmente convexo se tiene $E \otimes F = E \otimes F$ (isomorfismo topológico).

Observación (5.2.2).

(i) Sean E, F dos espacios de Hausdorff localmente convexos y sea $E \otimes F$ su producto tensorial, considerando alguna topología en cada espacio E y F; tales topologías podrían ser la <u>**π – TOPOLOGÍA**</u> y la <u>**ε – TOPOLOGÍA**</u>, descritos en la definición de producto tensorial topológico entonces dichos productos serán denotados por $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\varepsilon F$, y las completamente serán denotadas por $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\varepsilon F$ respectivamente.

(ii) Sea E un espacio de Hausdorff localmente convexo; entonces E es nuclear sí y sólo sí para cada espacio de Hausdorff localmente convexo F, se tiene $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$.

En efecto

por definición $E \otimes F = E \otimes_\pi F$ de aquí como E y F son espacios nucleares $E \otimes F = E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$.

Proposición (5.2.1).

Sea E un espacio localmente convexo completo definidas en un conjunto **T**, tal que su topología es más fina que la topología convergencia puntual, y asúmase que E es nuclear. Entonces para cada espacio localmente completo F, el producto tensorial $E \otimes F$ puede ser interpretada como el espacio de todas las $f : \mathrm{T} \to F$ tal que para todo $y' \in F',\ t \mapsto \langle y',\ f(t) \rangle_{F',F}$ es una función de E.

Demostración:

Es rutinario siguiendo la definición de espacio nuclear y convergencia puntual.

Observación (5.2.3).

Para $A, B \subseteq \mathbb{N}$, sea $k : \ell_A \to R$ y $j : \ell_B \to R$ dos funciones positivas tal que los espacios de Hilbert contable asociado $F_k = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} \ell^2_{k^p}$ y $F_j = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} \ell^2_{p^j}$ son nucleares.

Como F_k es un espacio localmente convexo completo de funciones definido sobre el monoide libre conmutativo ℓ_A, y como su topología es más fina que la topología puntual, se define que

$$\left| \varphi_{a_i} - \varphi_a \right| k_a^p \leq \sum_{i \in \ell_A} \left| \varphi_{a_i} - \varphi_a \right|^2 k_i^p$$

De este modo $F_k \otimes F_j$ puede ser interpretado como el espacio de todos los elementos de la forma $\psi_{b,a}$ tal que para todo $f = (f_b)_{b \in \ell_B}$ en $F_j{}'$, y $\left(\left\langle f, \psi_{b,a} \right\rangle_{F_j{}',\, F_j} \right)_{a \in \ell_A} \in F_k$.

Proposición (5.2.2)

Sean F_k y F_j como líneas arriba $F_k \otimes F_j = \bigcap\limits_{p,\, q} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q}$.

Demostración:

Sea $\psi=\left(\psi_{b,a}\right)$ un elemento en $F_k\otimes F_j$ con $\psi_{b,a}>0$ para cualquier $a\in\ell_A, b\in\ell_B$.

Entonces para todo $f=(f_b)_{b\in\ell_B}\in F_j\,',\left(\left\langle f,\psi_{b,a}\right\rangle_{F_j',F_j}\right)_{a\in\ell_A}$. En particular, podemos elegir

$f_b=j_b^{\frac{q}{2}}$ para cualquier $q\in\mathbb{N}$ por consiguiente:

$$\sum_{k\in\ell_A}\sum_{j\in\ell_B}\left|\psi_{b,a}\right|^2 j_b^q k_i^p \le \sum_{a\in\ell_A}\left|\sum_{j\in\ell_B} j_b^{\frac{q}{2}}\psi_{b,a}\right|^2 k_a^p$$

$$=\sum_{a\in\ell_A}\left|\left\langle\left(j_b^{\frac{q}{2}}\right),\left(\psi_{b,a}\right)\right\rangle F_j\,',F_j\right|^2 k_a^p$$

$$<\infty$$

Así: $\left(\psi_{b,a}\right)\in\bigcap_{p,q}\ell^2_{k^p}\otimes\ell^2_{j^q}$. En caso que $\left(\psi_{b,a}\right)\in F_k\otimes F_j$ es un elemento arbitrario, entonces aplicando la última desigualdad a su parte real positiva, parte real negativa, parte imaginaria positiva y parte imaginaria negativa produce la inclusión requerida, es decir:

$$F_k\otimes F_j\subset\bigcap_{p,q}\ell^2_{k^p}\otimes\ell^2_{j^q} \qquad (I_0)$$

Ahora para el otro contenido, tomemos $\left(\psi_{b,a}\right)\in\bigcap_{p,q}\ell^2_{k^p}\otimes\ell^2_{j^q}$, entonces para todo $f=(f_b)_{b\in\ell_B}\in F_j\,'$ existe "q" tal que $f\in\ell^2_{j^{-q}}$. Así se tiene:

$$\left|\left\langle f,\left(\psi_{b,a}\right)\right\rangle_{F_j',F_j}\right|^2=\left|\sum_{b\in\ell_B}\bar{f}_b\psi_{b,a}\right|^2$$

$$=\left|\sum_{b\in\ell_B}\bar{f}_b\, j_b^{-\frac{q}{2}}\psi_{b,a}\, j^{\frac{q}{2}}\right|^2$$

$$\le\left[\sum_{b\in\ell_B}|f_b|^2{}_b\, j_b^{-q}\right]\left[\sum_{b\in\ell_B}\left|\psi_{b,a}\right|^2 j_b^q\right]$$

$$=\|f\|^2_{\ell^2_{j^{-q}}}\sum_{b\in\ell_B}\left|\psi_{b,a}\right|^2 j_b^q$$

De aquí para todo $p\in\mathbb{N}$, tenemos:

$$\sum_{a\in\ell_A}\left|\left\langle f,\left(\psi_{b,a}\right)\right\rangle_{F_j',F_j}\right|^2 k_i^p\le\|f\|^2_{\ell^2_{j^{-q}}}\sum_{a\in\ell_A}\sum_{b\in\ell_B}\left|\psi_{b,a}\right|^2 j_b^q k_a^p$$

$$\le\infty$$

y así: $\left(\psi_{b,a}\right) \in F_k \otimes F_j$; luego:

$$\bigcap_{p,q} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} \subset F_k \otimes F_j \qquad (I_1)$$

De (I_0) e (I_1) se tiene la igualdad:

Corolario (5.2.1).

Del Teorema anterior se obtiene:

$$\bigcap_{p,q} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} = \bigcap_{p} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q}$$

Demostración.

Del Teorema inmediato anterior se tiene elementos que:

$$\bigcap_{p} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} \subseteq \bigcap_{p,q} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} \qquad (H_0)$$

El otro contenido se sigue de la inclusión:

$$\ell^2_{k^{\max\{p,q\}}} \otimes \ell^2_{j^{\max\{p,q\}}} \subseteq \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q}$$

entonces:

$$\bigcap_{p,q} \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} \subseteq \bigcap \ell^2_{k^p} \otimes \ell^2_{j^q} \qquad (H_L)$$

De (H_0) e (H_1) se tiene la igualdad:

Observación (5.2.4).

Del Teorema y Corolario inmediato anterior, se obtiene:

$$F_k \otimes F_j = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\psi_{a,b}\right) : \sum_{(a,b)\in\ell_A\times\ell_B} \left|\psi_{b,a}\right|^2 \left(j_b K_a\right)^p < \infty \right\}$$

Ahora, podemos concatenar los índices en camino claro. Nosotros definimos $C = 2B\bigcup^{D}(2A-1)$, $p_B : C \to B$, $p_A : C \to A$ la proyección apropiada:

$$C_r = j_{p_B(r)} k_{p_A(r)}, \text{ y } \psi_r = \psi_{p_B(r),\, p_A(r)}$$

Por consiguiente, podemos escribir:

$$F_k \otimes F_j = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\psi_r\right)_{r\in\ell_C} : \sum_{r\in\ell_C} \left|\psi_r\right|^2 C_r^2 < \infty \right\}, \text{ y}$$

$$\left(F_k \otimes F_j\right)' = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left\{ (\psi_r)_{r \in \ell_C} : \sum_{r \in \ell_C} |\psi_r|^2 C_r^{-p} < \infty \right\}$$

Proposición (5.2.3).

Sean $k : \ell_A \to \mathbb{R}$ y $j : \ell_B \to \mathbb{R}$ dos funciones admisibles positivas, entonces:

(i) $\ell : C \to \mathbb{R} \left[\text{donde } C = 2B \bigcup^{D} (2A-1) \text{ y } \ell_r = \ell_{p_B(r)} K_{p_A(r)} \right]$ es admisible.

(ii) Si k y j son ambas $d-$regular, entonces lo es ℓ.

(iii) Si k y j son ambas super exponencial, entonces lo es ℓ.

Demostración.

La función "ℓ" es admisible, pues $\ell_0 = k_0 j_0 = 1$ y $\ell_{e_n} > 1$, para todo $n \in C$.

Además: $$\sum_{n \in C} \frac{1}{\ell_{e_n}^d - 1} = \sum_{n \in A} \frac{1}{k_{e_n}^d - 1} + \sum_{n \in B} \frac{1}{j_{e_n}^d - 1}$$

De aquí, y de la d-regularidad de k y j (ambas) producen la d-regularidad de ℓ. Además, si k y j (ambas) son super exponenciales entonces claramente ℓ, también lo es.

Finalmente presentamos como resultados de aplicación un isomorfismo canónico de producto tensorial, así como también producto de dos espacios Vage. Esto es:

Aplicación (1)

Sean E, F dos espacios de Frechet. Si E es un espacio nuclear, entonces los espacios $\left(E \otimes F\right)'$ y $E' \otimes F'$ son canónicamente isomorfos. En efecto: bastará observar la completitud y dualidad de los espacios tonsurados.

Aplicación (2)

El producto tensorial de dos espacios Vage; es un espacio Vage. En efecto: "Si E es un espacio de Hausdorff localmente convexo, entonces E es nuclear sí y sólo sí para cada espacio de Hausdorff localmente convexo F, se cumple: $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$"

De donde; aplicando tal resultado; así como la proposición inmediata anterior y tenido en cuenta la desigualdad:

" $k_a k_b \leq k_{a,b}$, para todo $a,b \in \ell_A$ siempre que el espacio F_k' sea d-regular admisible, Vage, y recíprocamente".

Se obtiene que $\left(F_k \otimes F_j\right)$ es un espacio Vage y de aquí haciendo uso de la Aplicación (1) se obtiene lo requerido.

5.3. OTRO TIPO DE RESULTADO

Por la naturaleza del trabajo, los otros resultados que presentamos están basados en la extensión de funciones temperadas que permite relacionar un espacio de Våge con un espacio de Schwartz.

Iniciamos esta sección recordando el espacio normado contable

$$\mathscr{F}_a = \left\{(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\ell_A} : \sum|\varphi_\alpha|^2 a_\alpha^p < \infty, \textit{para todo } \mathrm{p} \in \mathbb{N}\right\} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \ell_{a^p}$$

$$\textit{donde } \ell_a^{\,2} = \left\{(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\ell_A} : \sum_{\alpha\in\ell_A} |\varphi_\alpha|^2 a_\alpha < \infty\right\},\ a{:}\ell_A \to \mathbb{R} \text{ es una función positiva}$$

(i.e. $\alpha \to a_\alpha$ con $a_\alpha > 0$ para cualquier $\alpha \in \ell_A$). En esta ocasión consideramos el caso especial $\ell_A = \mathbb{N}_o(\textit{i.e. } \mathrm{A}=\{1\})$ y $a_n = (n+1)^2$, así el espacio $\mathscr{F}_a$ es identificado con "el espacio de Schwartz $\mathscr{S}$" de funciones diferenciables rápidamente decrecientes y su correspondiente espacio dual $\mathscr{S}'$ de distribuciones temperadas.

De otro lado recordemos también la definición de polinomios Hermite; los cuales se denotan y definen como:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),\ \text{n=0,1,2,.......}$$

En este mismo contexto también tenemos las funciones Hermite $\xi_n(x)$, las cuales están dados por:

$$\xi_n(x) = \pi^{-1/4}\left(2^n.n!\right)e^{-x^2/2} h_n(x),\ n = 0,1,2,....$$

Afirmación:

El conjunto $B=\{\xi_n:\xi_n \text{ es una función de hermite}\}$ forma una base ortonormal para el espacio $L_2(\mathbb{R},dx)$.

Ahora escribamos el espacio de las funciones rápidamente decrecientes en

$\mathbb{R}$ como $\mathscr{S}=\left\{f=\sum_{n\in\mathbb{N}_o} f_n\xi_n : \sum|f_n|^2(n+1)^{2p}<\infty,\ \text{para todo p}\in\mathbb{N}\right\}$

Identificando $\sum_{n\in\mathbb{N}_o} f_n\xi_n$ con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$, esto nos permite identificar el espacio

$L_2(\mathbb{R},dx)$ con $\ell^2(\mathbb{N}_o)$ y $\mathscr{S}$ *con* $\mathscr{F}_a$.

Proposición (5.4.1): $\mathscr{S}'$ es un espacio admisible regular, el cual es nuclear, pero no es un espacio Våge.

Demostración:

En primer lugar nótese que la función $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ \mathrm{n}\to a(n)=a_n$ es una función Admisible 1-regular siempre que se tiene definido $a_n=(n+1)^2$.

Esto es verdaderamente admisible puesto que $a_o=1,\ a_1=4,\ a_2=9$ y así $a_k>1$, para $k=1,2,3,.......;$ y así es 1-regular puesto que la suma $\sum_{n\in A}\frac{1}{a_{e_n}^d-1}<\infty$ sobre el conjunto finito $A=\{1\}$ y en particular converge. Por consiguiente $\mathscr{S}'$ es un espacio 1-regular. Como $\sum_{n\in\mathbb{N}_o}\left((n+1)^2\right)^{-1}<\infty$, $\mathscr{S}$ es nuclear y de aquí $\mathscr{S}'$ es también nuclear. Ahora como la función "a" no es superexponencial; es decir:

$(n+1)^2(m+1)^2$ no es menor o igual que $(n+m+1)^2$ entonces $\mathscr{S}'$ no es de Vage.

A continuación, denotemos el siguiente subespacio g de $\mathscr{S}$ como:

$$g=\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n\xi_n : \sum_{n\in\mathbb{N}_o}|f_n|^2 2^{np}<\infty, \text{para todo } p\in\mathbb{N}\right\}$$

Proposición (5.4.2). El espacio g' es un espacio Våge conteniendo al espacio de Schwartz $\mathscr{S}'$ de distribuciones temperadas.

Demostración:

Por la identificación de $\sum_{n\in \mathbb{N}_o} f_n\xi_n \; con \; \left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y al definir $a_n = 2^n$ tenemos que g es el correspondiente espacio de Hilbert $\mathscr{F}_a$ asociado a "a" (y como lo anterior $L_2\left(\mathbb{R}, dx\right)$ es identificado con $\ell^2\left(\mathbb{N}_o\right)$). De este modo es claro ver que, "a" es una función admisible puesto que $a_o = 1$ y $a_1 = 2 < 1;$ y es 1-regular puesto que la suma $\sum_{n\in A} \frac{1}{a_{e_n}^d - 1} < \infty$ esta sobre el conjunto finito $A = \{1\}$ y en particular converge. Por consiguiente, g' es un espacio Våge y es en particular nuclear. Además, las inclusiones(incrustaciones) naturales $\mathscr{L}' \subset g'$ y $g \subset \mathscr{L}$ son claramente continuas. De aquí g es un subespacio cerrado de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ es un subespacio cerrado de g'

Proposición (5.4.3). g es el espacio de todas las funciones enteras f(z) tal que

$$\iint_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 . e^{\frac{1-2^{-p}}{1+2^{-p}}x^2 - \frac{1+2^{-p}}{1-2^{-p}}x^2} dxdy < \infty, \text{ para todo } p \in \mathbb{N}$$

Demostración (Ver : [14] Pág. 439)

Proposición (5.4.4). El dominio de la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\xi_n\left(z\right)$ es el conjunto

$$S_r\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\mathrm{Im}(z)\right| < r\right\}, \text{ donde } r = \text{-}\lim_{n\to\infty} \text{ Sup}\left(2n+1\right)^{-1/2} \log|f_n|$$

Demostración (Ver :[15] Pág. 82)

Proposición (5.4.5). La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n\left(u\right)\xi_n(v)s^n$ converge ara valores complejos arbitrarios de u y v cuando

$$|s| < 1 \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n\left(u\right)\xi_n(v)s^n = \pi^{-1/2}(1\text{-s})^{-1/2} \text{ . e}^{-\frac{(1+s^2)(u^2+v^2)-4svu}{2(1-s^2)}}$$

Demostración (Ver [14]: Pág. 440)

Proposición (5.4.6). Para todo $\alpha \in \langle 0,1]$ el conjunto

$$\Gamma_\alpha = \left\{ \text{f función entera:} \frac{\alpha}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 . e^{-\alpha|z|^2} dxdy < \infty \right\}$$ es un espacio Hilbertiano con un núcleo reproduciendo $Ker\left(K_\alpha(z,w)\right) = e^{\alpha\bar{w}z}$

Demostración

Por el teorema (1), sea $p \in \mathbb{N}$. Para cada f $\in$ g , $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n$ siempre que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 2^n < \infty$, para todo p $\in \mathbb{N}$. En particular, $\lim_{n\to\infty} |f_n|^2 2^n = 0$. Por consiguiente para cada n suficientemente grande, $\log|f_n| < -n \log\sqrt{2}$. Así con las notaciones del teorema (2) se tiene:

$$r = -\lim_{n\to\infty} \text{Sup}(2n+1)^{-1/2} \log|f_n| \geq \lim_{n\to\infty} \inf (2n+1)^{-1/2} n \log\sqrt{2} = \infty$$

Por consiguiente, denotando por g_p al espacio de todas las funciones $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n$ sujeto a $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 2^{np} < \infty$ (i.e. $g_p \cong \ell^2_{a^p}$), este es un espacio de Hilbert de funciones enteras, y en particular, $g = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} g_p$ es un espacio de Hilbert contable de funciones enteras.

Ahora como $B = \left\{ \xi_n . 2^{-\frac{np}{2}} \right\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ es una base ortonormal para g_p y denotando $S = 2^{-p}$ entonces el núcleo obtenido del espacio de Hilbert g_p esta dado por:

$$G(z,w) = \sum_{n\geq 0} \xi_n(z)\overline{\xi_n(w)} 2^{-np} = \sum_{n\geq 0} \xi_n(z)\xi_n(\overline{w}) s^n$$

Aplicando el teorema (3) se tiene que:

$G(z,w) = \pi^{-\frac{1}{2}} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(1+s^2)(z^2+\overline{w}^2)-4sz\overline{w}}{2(1-s^2)}}$, denotando $r_z = \pi^{-\frac{1}{4}} (1-s^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(1+s^2)z^2}{2(1-s^2)}}$,

considerando el núcleo $K_\alpha(z,w) = e^{\alpha\overline{w}z}$ con su espacio asociado Hilbert Γ_α para $\alpha = \dfrac{2s}{1-s^2}$, por la proposición inmediata anterior tenemos que $G(z,w) = r(z) K_\alpha(z,w).r(\overline{w})$, por consiguiente, el espacio g_p es igual al espacio de funciones de la forma $f = rg$, con g $\in \Gamma_\alpha$ y norma $\|f\|_{g_p} = \|g\|_{\Gamma_\alpha}$. Ahora para $z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$2\frac{(1+s^2)}{(1-s^2)} \text{Re}(z^2) - 2\frac{s}{(1-s^2)} |z|^2 = \frac{(1+s^2)(x^2-y^2)}{(1-s^2)} - \frac{2s(x^2+y^2)}{(1-s^2)} = \frac{(1-s)x^2}{(1+s)} - \frac{(1+s)y^2}{(1-s)}$$

De esta manera

$$|r(z)|^{-2}=\sqrt{\pi(1-s^2)}.e^{-\frac{(1-s)x^2}{(1+s)}-\frac{(1+s)y^2}{(1-s)}} \text{ y con } K_p=\frac{2^{1-p}}{\sqrt{\pi(1-2^{-2}p)}};$$

$$g_p=\left\{\text{f función es entera:}\|f\|_{g_p}^2=k_p\iint_{\mathbb{C}}|f(z)|^2\cdot e^{\left(\frac{1-2^{-p}}{1+2^{-p}}\right)x^2-\left(\frac{1+2^{-p}}{1-2^{-p}}\right)y^2}dxdy<\infty\right\}$$ y en particular

$g=\bigcap_{P\in\mathbb{N}} g_p$ es el espacio de todas las funciones enteras sujeta a:

$$\iint|f(z)|^2\cdot e^{\left(\frac{1-2^{-p}}{1+2^{-p}}\right)x^2-\left(\frac{1+2^{-p}}{1-2^{-p}}\right)y^2}dxdy<\infty \text{ para todo } P\in\mathbb{N}.$$

ALGUNAS APLICACIONES

Como aplicaciones; presentaremos el estudio de los espacios : El Espacio de Kondratiev y la Teoría de El Espacio Estado y el Espacio de Våge.

A) EL ESPACIO KONDRATIEV

Para estudiar el espacio Kondratiev, consideremos el caso especial $\ell_A=\ell$ (es decir: A=ℕ) y $a_\alpha=(2\mathbb{N})^\alpha$ entonces el espacio correspondiente $F_a=\left\{(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\ell_A}:\sum_{\alpha\in\ell_A}|\varphi_\alpha|^2 a_\alpha^p<\infty \text{ para todo } p\in\mathbb{N}\right\}$

es identificado con el espacio Kondratiev de las funciones Prueba Gaussianas S_1, y su dual es el espacio Kondratiev de distribuciones estocásticas Gaussianas

S_{-1}; así mostraremos que S_{-1} es un espacio $V\overset{o}{a}ge$. Para lo cual se requiere recordar ciertas definiciones; pertenecientes a ciertos espacios.

La función $s\to e^{-\frac{1}{2}\|S\|^2_{L_2(\mathbb{R}_1 dx)}}$ es definida positiva sobre el espacio Schwartz de funciones real-valuadas $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ tal que $e^{-\frac{1}{2}\|S\|^2_{L_2(\mathbb{R}_1 dx)}}=\int_{\mathscr{L}_{\mathbb{R}}'} e^{i<s',s>}d\mu(s')$ para todo $s\in\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ donde la simbología “<s’,s>” denota la dualidad entre $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ y $\mathscr{L}_{\mathbb{R}'}$; esto igualmente induce una aplicación isométrica.

$s \to Q_s$, tal que: $Q_s(s')$ = <s',s> donde $s \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$, $s' \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}'$ de $\mathscr{L}_{\mathbb{R}} \subset L_2(\mathbb{R}, dx)$ sobre $L_2(\mathscr{L}_{\mathbb{R}'}, B, \mu)$. De este todo definimos el espacio GAUSSIANO BLANCO como $W = L_2(\mathscr{L}_{\mathbb{R}'}, B, \mu)$

Recordemos que las funciones polinomiales Hermite $(H_\alpha(s'))_{\alpha\in\ell} \subseteq W$, los cuales so definidos por: $H_\alpha(s') = \pi_{k=1}^{\infty} h_{\alpha_k}(Q_{\xi_\alpha}(s'))$ $\quad (s' \in \mathscr{L}'(\mathbb{R}))$ forma una base ortonormal de W donde (h_α) y (ξ_α) denotan respectivamente los polinomiales Hermitianos y las funciones Hermitianas.

Mas precisamente, $W = \left\{ \sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha : \sum |f_\alpha|^2 \alpha! < \infty \right\}$ donde $\alpha! = \prod_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)! < \infty$.

El espacio Kondratiev de las funciones Gaussianas S_1 es definido por

$$S_1 = \left\{ \sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha : \sum |f_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{\alpha p} (\alpha!)^2 < \infty, \text{ para todo } p \in \mathbb{N} \right\}$$

Claramente W puede ser identificado con ℓ^2 usando la isometría

$$\sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha \to \left(f_\alpha (\alpha!)^{\frac{1}{2}} \right)_{\alpha\in\ell_A}$$

En un camino similar definimos

$$S_{1,p} = \left\{ \sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha : \sum_{\alpha\in\ell} |f_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{\alpha p} (\alpha!)^2 < \infty \right\}$$

Esto puede ser identificado con $\ell^2(a_p)$ para $a_\alpha = (2\mathbb{N})^\alpha$

Aquí $\mathscr{F}_a = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \ell^2(a_p) \cong \bigcap_{p\in\mathbb{N}} S_{1,p} = S_1$

Ahora definimos el llamado producto Wick.

Sean $f = \sum_{\alpha\in\ell_A} f_\alpha H_\alpha$, $g = \sum_{\alpha\in\ell_A} g_\alpha H_\alpha$. El producto Wick de f y g se denota y define como

$$f \lozenge g = \sum_{\gamma\in\ell} f_\alpha \left(\sum_{\alpha\in\ell_A} f_\alpha g_\beta \right) H_\gamma$$

El espacio Kondratiev de distribuciones Estocásticas Gaussianas $S_{-1} = S_1'$ puede ser definido por

$$S_{-1}=\left\{\sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha : \sum_{\alpha\in\ell}|f_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{-\alpha p}<\infty, \text{para un p}\in\mathbb{N}\right\}\cong\mathscr{F}_a{}'$$

Aplicación.

El espacio Kondratiev de distribuciones Estocásticas Gaussianas $S_{-1}=S_1{}'$ es un espacio $V\overset{o}{a}ge$.

Demostración

Nótese que $a:\alpha\to(2\mathbb{N})^\alpha$ es una función positiva admisible 2-regular. Este es admisible, puesto que $a_o=(2\mathbb{N})^0=1$ y $a_{e_n}=2n>1;$ y es 2-regular puesto que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n)^2-1}<\infty.$ Por consiguiente $S_{-1}\cong\mathscr{F}_\alpha{}'$es un espacio admisible 2-regular, y como $"a"$ es una función exponencial, entonces S_{-1} es un espacio $V\overset{o}{a}ge$.

Observación:

La teoría de Hida's puede ser aplicado al proceso de Poisson. Para esto se considera la función

$\exp\left[\int_{\mathbb{R}}\left(e^{is(x)}-1\right)dx\right]$ $s\in\mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ y continua en el origen. Aquí también el teorema de Bochner-Minlos garantiza la existencia de una probabilidad π en $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}{}'$ y tal que

$$\exp\left[\int_{\mathbb{R}}\left(e^{is(x)}-1\right)dx\right]= d$$

El espacio Poissoniano Blanco es $W^\pi=L_2(\mathscr{L}_{\mathbb{R}}{}';B;\pi)$ y admite una representación de la forma

$W=\left\{\sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha H_\alpha : \sum|f_\alpha|^2\alpha!<\infty\right\}$ reemplazando las funcionales polinomiales Hermitianas $(H_\alpha)_{\alpha\in\ell}$ con las funcionales polinomiales de Charlier $(C_\alpha)_{\alpha\in\ell}$, es calculada en términos de las polinomiales de Poisson-Charlier. Mas precisamente

$$w^\pi=\left\{\sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha C_\alpha : \sum_{\alpha\in\ell}|f_\alpha|^2\alpha!<\infty\right\}$$

El espacio Kondratiev de funciones de prueba Poissonianos S_1^π es definido por

$S_1^{\pi} = \left\{ \sum_{\alpha\in\ell} f_\alpha C_\alpha : \sum_{\alpha\in\ell} |f_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{\alpha p} (\alpha!)^2 < \infty, \text{para todo } p \in \mathbb{N} \right\}$ entonces de esta última observación tenemos el siguiente resultado.

Proposición: El espacio Kondratiev de distribuciones estocásticas Poissonianos, es un espacio Vage.

B) LA TEORÍA DE EL ESPACIO ESTADO Y ESPACIOS VAGE

Empezamos esta "teoría" con una afirmación relacionado a una función matriz-valuada racional, esto es:

Afirmación. Una función matriz-valuada racional $R(z) = p(z).(q(z))^{-1}$ para lo cual $E(q_{(0)}) \neq 0$. Puede ser escrito como $R(z) = D + z\,C\,(I - zA)^{-1}.B$ (#) donde: A, B, C y D son matrices de dimensiones apropiada y adecuadas; y con entradas en el anillo R.

En efecto. Primero notemos que una función constante y la función trivial z, tienen o se pueden expresar fácilmente como (#). Además, si R_1 y R_2 satisfacen la forma (#) entonces $R_j(z) = D_j + C_j(I_{Nj} - zA_j)^{-1}.B_j$, j=1,2 de este modo se tiene:

$R_1(z)R_2(z) = D + C(zI_N - A)^{-1}.B$ donde $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 + \mathbb{N}_2$, D= $D_1 + D_2$; y C = [C_1 , C_2],

$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ y A $\begin{bmatrix} A_1 0 \\ 0 A_2 \end{bmatrix}$ para poder efectuar el producto y la suma.

Ahora si R es R^{pxp} valuada de la forma (#) y D es invertible en R^{pxp} entonces $R^{-1}(z) = D^{-1} - D^{-1}C(I_N - z(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1},$ lo cual es también de la forma (#). Para concluir esto verificamos que la operación (#) es una propiedad la cual permanece bajo concatenación y si R_1 y R_2 son de la forma (#); entonces lo son las funciones $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ y (R_1R_2). Considerando las dimensiones de la manera adecuada.

Ahora haciendo uso de la definición; tenemos la siguiente observación:

$R(z) = p(z).(q(z))^{-1}$, donde $p \in (R(z))^{nxm}$ y $0 \neq q \in R(z)$ se puede calcular el valor de una función racional de la forma. $E[fg] = E[f].E[g]$, para todo $f, g \in R$.

Donde $E : R \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo y siendo $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \ell_A} \in R$; tal que la expectación $\mathrm{E(q(p)} \neq 0$. Sea $q(z) \equiv \sum_{m=0}^{M} q_m z^m$. Entonces, esta última condición puede reescribirse como: $\sum_{m=0}^{M} E(q_m)(E(f))^m \neq 0$.

Similarmente, uno puede calcular (#) en cada $f \in R$ tal que $I - E(f(A))$ es invertible. Esto es conveniente para introducir los operadores D_n, n=1,2,…. Definido por:

$$D_n(x^\alpha) = \begin{cases} \alpha_n . x^{\alpha - e_n}, \text{ si } \alpha_n > 0 \\ 0, \text{ otro caso} \end{cases}$$

Y por una extensión lineal a cualquier combinación lineal finita de tales elementos. Nosotros tenemos en particular: D_n (xy) = D_n (x).y + x D_n (y); de este modo, dado un espacio $\mathrm{V}\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{a}}\mathrm{ge}$ R, nosotros definimos una función racional para ser una expresión de la forma $\mathrm{D + z\,C\,(I - zA)^{-1}.B}$, donde: A, B, C y D son matrices de dimensiones adecuadas y con entradas en R.

Ahora recordando, que un par $\mathrm{(C, A)} \in \mathrm{R}^{PxN} \mathrm{\ x\ R}^{NxN}$ es llamado observable si la aplicación $f \to (Cf.CAf.CA^2 f...)$ es inyectiva de $\mathrm{R^N}$ en $(\mathrm{R}^P)^{\mathbb{N}}$ y así tenemos la siguiente:

Afirmación: Sea $\hat{h}$ una función racional con realización (operación).

$\hat{h}(z) = \mathrm{D + z\,C\,(I - zA)^{-1}}.B$ $\quad (\#_0)$

Si la realización $E[\hat{h}](z) = \mathrm{E[D] + z\,E[C](I - zE[A])^{-1}}.E[B]$ es observable, entonces la realización ($\#_0$) es también observable.

En efecto:

Asumamos que $\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{NxN}$. Sea $f \in \mathrm{R}^N$ tal que $\mathrm{C(I - zA)^{-1}} \;.\; f \equiv 0$.

Nosotros mostraremos que $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \ell_A$ como:

$E[\hat{h}](z) = \mathrm{E[D] + z\,E[C](I - zE[A])^{-1}}.E[B]$, es una realización observable, tenemos que $E[c](\mathrm{I - zE[A]})^{-1}.E[f] \equiv 0$ implica que $E[f]=0$, y así $f_0 = 0$. Ahora, como $\mathrm{D}_n(\mathrm{C\ (I - zA)}^{-1} f) = \mathrm{D}_n(\mathrm{C})\ (\mathrm{I - zA})^{-1} f + \mathrm{CD}_n\ (\mathrm{I - zA})^{-1} f + \mathrm{C}\ (\mathrm{I - zA})^{-1}\mathrm{D}_{n(f)} = 0$ y como $E[f]=0$, entonces tenemos que: $\mathrm{E[C](I - zA)}^{-1}E[\mathrm{D}_{n(f)}]=0$ y así $f_{e_n} = 0$.

Además, por una simple inducción, y como $\mathrm{D}_n^m(\mathrm{C(I - zA)}^{-1}.f) = \sum_{k<m} \mu_k D_n^k(f) + \mathrm{C(I\text{-}zA)}^{-1}\mathrm{D}_n^m(f)$ para algún μ_k, y como $\mathrm{D}_n^m(\mathrm{C(I - zA)}^{-1}.f)=0$ tenemos que: $E[c](\mathrm{I - zE[A]})^{-1}.E[D_n^m(f)]=0$ y por consiguiente $f_{m.e_n} = 0$. Asi $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \ell_A$ tal que $\alpha = (0,...,0,\alpha_n,0,...)$ y por tanto el resultado.

CAPITULO VI
DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. DISCUSIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON OTROS RESULTADOS

En el proyecto de investigación se formuló la hipótesis general, lo cual establecía, que, la definición de una familia de espacios nucleares de Términos de funciones positivas sobre un monoide conmutativo, permitirá mostrar que estos espacios poseen la estructura de $\mathbb{C}$ - algebra topológica; y a su vez será posible caracterizar a sus elementos inversibles, lo que permitió formular las siguientes hipótesis específicas.

1. Las funciones positivas sobre un monoide conmutativo permitirá generar un espacio topológico con una estructura de álgebra sobre los números complejos.

2. La expectación generalizada de una familia $f=\left(f_\alpha\right)_{\alpha\in\ell_A}$ permitirá definir una operación y este a su vez una caracterización de los elementos inversibles en algunas $\mathbb{C}$ - algebras topológicas.

6.2. CONTRASTACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON ESTUDIOS SIMILARES

Como es de vuestro conocimiento, este trabajo está enmarcado en el análisis funcional y en la topología, más específicamente, la caracterización de elementos inversibles no es tarea fácil desde el contexto matemático del análisis, es el caso que algunos autores entre ellos: Gerald J. Murphy, en su obra “C* - Algebras and operator theory”, estudian dicha inversión basado en la teoría de Gelfand, lo realizamos vía espacios nucleares en términos de funciones sobre un monoide conmutativo.

Establecemos tal caracterización basada o sostenida en la desigualdad.

$\|f \lozenge g\|_p \leq E\left(p-q\right)\|f\|_p\|g\|_q$, para todo $p \geq q+2$ donde “ $\lozenge$” denota la operación llamada producto media, cuya relación fue mostrada por Våge, obteniéndose de este modo los llamados “ESPACIOS DE VAGE”, los cuales muestran que son C – Algebras Topológicas, y para luego mostrar la caracterización de sus elementos inversibles.

6.3. RESPONSABILIDAD ÉTICA

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación, el reglamento de propiedad intelectual y el reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobados por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.

CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados obtenidos, que consiste en estudiar la Caracterización de Elementos Inversibles en algunas $\mathbb{C}$ – algebras topológicas, se puede establecer las siguientes conclusiones.

1. El producto Tensorial $E \otimes F$, de dos espacios de Hausdorff se puede dotar de dos topologías comparables, la π - topología y la ε-topología.

2. El espacio nuclear $\mathscr{F}_g$ puede ser identificado con el espacio Schwartz $\mathscr{S}$ de funciones diferenciables rápidamente decreciente.

3. El espacio nuclear $\mathscr{F}_g$ es identificado con el espacio Kondratiev S_1 de funciones de prueba Gaussianas.

RECOMENDACIONES

- Estudiar resultados similares sobre la caracterización de elementos inversibles en diversas K – algebras.
- Estudiar detalladamente la estructura topológica de los espacios de Kondratiev y los espacios de Våge.
- Impulsar y motivar la investigación de la matemática en el Análisis Funcional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Rivera Rodríguez, Pedro Humberto. Introducción a la Teoría de Distribución – Rio de Janeiro, 1974.

[2] J. Dieudonne. Elementos de Análisis, Tomo II. Editorial Reverte, S.A. España. 1977.

[3] Horváth John. Topoligical vector spaces and distributons – Canadá. 1966.

[4] Cabrera García, Miguel and Rodríguez Palacios Angel. Nor – Associative Normal álgebras – New York – USA. 2018.

[5] Felzenszwalb Bernard. Álgebras de división finita. Rio de Janeiro. 1979.

[6] Dugundji; J., Topology, Allyn & Bacon, Boston, 1966.

[7] Munkres, J.R. Elements of Algebraic Topology. Addison – Wesley, Menlo Park, A. 1984.

[8] A. Grothendiech. Produicts Tensoriels Topologiques et espaces nucleares. Vokmen 16. Mem. Amer. Math. Soc., 1955.

[9] Gerald J. Murphy. C* - Algebras and operator Theory (Studies – in Avanced Mathematics) CRC Press, Florida – 1993.

[10] Rϕrdam M, Larsen F, Lanstren N. An introduction to K-theory for C*-algebras. United Kingdom. 2000.

[11] G. H. Elliott, on the clasification of inductive limits of secquences of semi simple finite – dimensional algebras. J. Algebras. 1976.

[12] Cuntz J. Murray – Von Neumann equivalence of proyections in fininite simple C*-algebra Rev. Roum Math. Pures at Appl. 1978.

[13] S. Saitoh. Integral transforms, reproducing Kernels and their applications, vol 369 of pitman Research Notes in Matematics Series. Longman – Hor low. 1997.

[14] Einar Hille. A class of reciprocas functions. Ann. Of Math. 1926.

[15] Einar Hille. Contributions to the theory of Hermitians series. Duke Math J. 1939.

ANEXOS

ANEXOS NECESARIOS SEGÚN LA NATURALEZA DEL PROBLEMA

La estructura de álgebra asociativa, juega un rol preponderante en el desarrollo del Trabajo y por ende algunas definiciones, proposiciones y otras propiedades relacionadas a dicha estructuras. En este contexto presentamos a continuación algunos anexos.

Definición.- Un álgebra de Banach, es un espacio de Banach complejo A junto con una multiplicación asociativa y distributiva tal que:

$\lambda(ab)=(\lambda a)b$ y $\|ab\|\leq\|a\|\|b\|$

Para todo: $a,b\in A,\ \lambda\in\mathbb{C}.$ Esta operación de multiplicación es continua.

(•) El álgebra A es abeliana si $ab=ba,$ para todo $a,b\in A.$ Se dice que A es unital si posee unidad (llamado también identidad) la cual se denota con 1_A o simplemente por 1.

Definición.- Sean A, B dos algebras con identidad un homomorfismo $\varphi:A\longrightarrow B$ es una aplicación lineal satisfaciendo $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a,b\in A$ y $\varphi(1_A)=1_B.$

Unitización de un algebra

Si A es un álgebra que no posee unidad, entonces se puede proporcionar identidad del modo siguiente.

Lema.- Un álgebra de Banach A sin unidad puede ser inmerso en un álgebra de Banach con unidad $\tilde{A}$ como un ideal de codimensión uno.

Prueba.- Basta considerar o definir $\tilde{A}=A\oplus\mathbb{C}$ como espacio lineal, y en $\tilde{A}$ definir la operación : $(a,\lambda)(b,u)=(ab+ua+\lambda b,\lambda u)$; de este modo se tiene que $\tilde{A}$ es un álgebra con identidad $1_{\tilde{A}}=(0,1).$

Teoría Espectral

Sea A un álgebra de Banach unital, un elemento $a \in A$ es invertible en A (no singular) si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1.$ Observe si tal "b" existe, esto es único y es llamado inverso de *a*, el cual se denota por a^{-1}.

El conjunto de elementos inversibles es denotado como inv(A).

Definición.- Sea A un álgebra unital y sea $a \in A.$ El espectro de A se denota y define como:

$$\sigma_A(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left(a - \lambda 1_A\right) \notin inv(A)\right\}$$

Proposición.- Sea A un algebra de Banach, $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$ entonces (1 – *a*) es inversible, más aún $\left(1-a\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Prueba.- Como $\sum_{n\geq 0} \left\|a^n\right\| \leq \sum_{n\geq 0} \|a\|^n = (1-\|a\|)^{-1} < \infty$ así la serie $\sum_{n\geq 0} a^n$ es convergente en A, digamos que converge a "b" y como : $\left(1-a\right)\left(1+....+a^n\right) = 1 - a^{n+1}$ converge a $\left(1-a\right)b = b(1-a)$ y *a* 1 cuando $n \to \infty$ entonces $b = (1-a)^{-1}$.

Proposición.- El conjunto inv(A) de elementos inversibles en un álgebra A es abierto en A y la aplicación inversa $a \mapsto a^{-1}$ es continua.

Definición.- Sea A un álgebra de Banach. Un homomorfismo $f : A \to \mathbb{C},\ f \neq 0$ es llamado un carácter (o funcional lineal multiplicativo).

Definición.- El conjunto de caracteres de un álgebra de Banach conmutativa con unidad A es llamada el Espectro de A y es denotado por $SpA.$

Proposición.- Sea A un álgebra de Banach con unidad conmutativa, entonces el espectro $SpA.$ es un subconjunto cerrado según W* de la bola unitaria de A y por lo tanto es compacto.

Demostración [Ver [5], pág. 25]

Teorema.- Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Para $x \in A$ y $\ell \in SpA$, definamos $\hat{X} : SpA \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\hat{X}(\ell) = \ell(x)$. Entonces el rango de la función $\hat{X}$ en SpA satisface $rang(\hat{x}) = \sigma_A(x)$.

Además la aplicación $\wedge$ es un homomorfismo $\wedge : A \longrightarrow \mathcal{C}(SpA)$ y $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ para $x \in A$.

Nota.- La aplicación $\wedge$ es llamada la transformación de Gelfand.

Bibliografía de los Anexos

[1] G. Corach E. Andruchow, notas de análisis funcional. Primera Edición, UBA – ARGENTINA (1997).

[2] Rainer Matthes Wojciech Szymanski, lectura notes on the *K*- theory of operator algebras. Primera Edición. VARSOVIA – Polonia (2005).

[3] John B. Conway, a course in functional análisis. Springer – Verlag, segunda edición. New York (1990).

[4] James Dugundji, topology. Allyn and Bacon, séptima edición. Boston – USA (1972).

[5] J.A. Erdos, C*-algebras. King's College – London. Departamento of Mathematics. Englend. 2003.

[6] Cuntz J. Murray – Von Neumann equivalence of proyections in infinite simple C*-algebra Rev. Roum Math. Pures at Appl. N° 23 (1978) 1011 – 1014.

[7] A. Connes Nom Commutative Geometry. Academic. Press San Diego, (1994).

[8] G.H. Elliott, on the clasification of inductive limits of sequences of semi simple finite – dimensional algebras. J-Algebras 38 (1976) 29-44.