UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR:

CEDRIC GREGORIO BARDALEZ HALL

ASESOR:

Mg. WILFREDO MENDOZA QUISPE

Callao, 2019

PERÚ

Ouriginal by Turnitin

Document Information

Analyzed document	TESIS - BARDALEZ HALL, CEDRIC.pdf (D176971381)
Submitted	2023-10-26 17:34:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

W	URL: https://math.stackexchange.com/questions/2269267/determinant-of-large-matrices-theres-gotta-be-... **Fetched: 2020-12-02 01:25:34**	1
W	URL: https://mathsolver.microsoft.com/en/solve-problem/%60frac%20% **Fetched: 2020-10-20 12:29:54**	1
W	URL: https://physics.stackexchange.com/questions/602856/on-elastic-collisions-and-calculating-velocities **Fetched: 2021-05-29 14:36:27**	1
W	URL: https://www.math10.com/en/algebra/parametric-equations.html **Fetched: 2021-05-02 23:40:43**	1

Entire Document

“EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS”

DEDICATORIA Dedico este trabajo principalmente a Dios, por permitirme haber llegado a este momento tan importante de mi formación profesional, creyendo fielmente en el cumplimiento del propósito que él tiene para mi vida, y sabiendo que este logro solo es el principio de lo que aún está por

venir; a mi padre, por ser el pilar más importante a lo largo de mi carrera, por demostrarme siempre su amor, apoyo y fortaleza incondicional; a mi madre, a pesar de nuestra distancia física, sé que este momento es tan especial para ti como lo es para mí; a mi hermano, quien admiro por su persistencia

y admirable capacidad para los idiomas, por compartir momentos significativos conmigo y ayudarme en cualquier instante; a Gianella, mi amor, quien me acompaña y alienta a no claudicar. Sin el apoyo de ellos, lograr esta meta hubiera significado un esfuerzo casi insostenible

AGRADECIMIENTO En estas líneas quiero agradecer primeramente a Dios, por darme la sabiduría y fortaleza para poder entender y desarrollar estos conceptos, sin él nada hubiera sido posible, y todas las personas que hicieron posible esta investigación y que de alguna manera forman parte

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROF.: MATEMÁTICA

TÍTULO: “EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS”

AUTOR:

NOMBRE: CEDRIC GREGORIO BARDALEZ HALL
DNI: 47702484
ORCID: 0000-0002-8681-5205

ASESOR:

NOMBRE: Mg. WILFREDO MENDOZA QUISPE
DNI: O7407715

LUGAR DE EJECUCIÓN: FAC. DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

TIPO DE INVESTIGACIÓN: BÁSICA,
EXPLICATIVA,
NO-EXPERIMENTAL

UNIDAD DE ANÁLISIS: OPERADORES LINEALES ENTRE ESPACIOS NORMADOS

TEMA OCDE: 1.01.01 - MATEMÁTICAS PURAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TESIS
II CICLO DE TESIS

JURADO EVALUADOR PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL EN EL SEGUNDO CICLO DE TESIS

RESOLUCIÓN DECANAL N°147-2018-D-FCNM

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, sito Av. Juan Pablo II N° 306, Bellavista – Callao, siendo las 17:25 hrs. del día viernes 18 de enero de 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador del II Ciclo de Tesis para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

- Dr. Walter Flores Vega : Presidente
- Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana : Vocal
- Lic. Elmer Alberto León Zárate : Secretario

Designados por Resolución N° 147-2018-D-FCNM de fecha 28 de diciembre de 2018 a fin de proceder al acto de evaluación de la Tesis titulada: ***"EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS"***, presentada por el señor Bachiller ***BARDALEZ HALL CEDRIC GREGORIO***.

Contando con la presencia del Supervisor General, Decano de la Facultad de Ciencias Económicas Dr. Pablo Mario Coronado Arrilucea, Supervisor de la FCNM, Mg. Roel Mario Vidal Guzmán, el representante de la Comisión de Grados y Títulos Dr. Richard Saúl Toribio Saavedra y el Coordinador del II Ciclo de Tesis Lic. Absalón Castillo Valdivieso.

A continuación, se dio inicio a la sustentación de la Tesis de acuerdo a lo normado en los numerales del 10.1 al 10.4 del capítulo X de la Directiva para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis en la Universidad Nacional del Callao, aprobada por Resolución Rectoral N° 754-2013-R del 21 de agosto de 2013, modificada por la Resolución Rectoral N° 777-2013-R de fecha 29 de agosto de 2013 y la Resolución Rectoral N° 281-2014-R del 14 de abril de 2014 con la que se modifica el Art. 4.5 del capítulo IV de la organización del Ciclo de Tesis, así como lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado, aprobado por Resolución de Consejo Universitario N° 135-2017-CU de fecha 22 de junio de 2017 y también lo establecido en el Reglamento de Grados y Títulos de la UNAC aprobado por Resolución N° 309-2017-CU de fecha 24 de octubre de 2017.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador procedieron a formular las preguntas al indicado bachiller, las mismas que fueron absueltas satisfactoriamente.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado respecto a la evaluación de la Tesis, se acordó calificar la Tesis sustentada por el señor bachiller ***BARDALEZ HALL CEDRIC GREGORIO***, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

CALIFICACIÓN CUANTITATIVA	CALIFICACIÓN CUALITATIVA
17 (DIECISIETE)	MUY BUENO

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de la sustentación realizada.

Siendo las 18:10 hrs. del día viernes dieciocho de enero del dos mil diecinueve, el señor Presidente del Jurado Evaluador dio por concluido el acto de sustentación de Tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta.

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Secretario

INFORME DE SUSTENTACIÓN N°05-2019-JETP-FCNM

El Presidente del Jurado Evaluador para la Titulación Profesional Con Ciclo de Tesis del Taller del Segundo Ciclo de Tesis de la Escuela Profesional de Matemática emite el siguiente informe:

Con fecha **18 de enero de 2019 a horas 17:25 p.m**. en el auditorio de la FCNM, el señor Bachiller **BARDALEZ HALL, CEDRIC GREGORIO**, inscrito en el Segundo Ciclo de Tesis, ha levantado las observaciones realizadas por el Jurado en la Tesis intitulada **"EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS"**; asimismo ha llevado a cabo la sustentación en forma cabal y satisfactoriamente, absolviendo las preguntas planteadas por cada uno de los miembros del Jurado; por lo cual formula una opinión FAVORABLE al trabajo realizado de Tesis y presentado por el citado Bachiller.

Bellavista, febrero 28 de 2019

Dr. Walter Flores Vega
Presidente del Jurado Evaluador del
Segundo Ciclo de Tesis 2018

“EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS”

DEDICATORIA

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por permitirme haber llegado a este momento tan importante de mi formación profesional, creyendo fielmente en el cumplimiento del propósito que él tiene para mi vida, y sabiendo que este logro solo es el principio de lo que aún está por venir; a mi padre, por ser el pilar más importante a lo largo de mi carrera, por demostrarme siempre su amor, apoyo y fortaleza incondicional; a mi madre, a pesar de nuestra distancia física, sé que este momento es tan especial para ti como lo es para mí; a mi hermano, quien admiro por su persistencia y admirable capacidad para los idiomas, por compartir momentos significativos conmigo y ayudarme en cualquier instante; a Gianella, mi amor, quien me acompaña y alienta a no claudicar. Sin el apoyo de ellos, lograr esta meta hubiera significado un esfuerzo casi insostenible.

AGRADECIMIENTO

En estas líneas quiero agradecer primeramente a Dios, por darme la sabiduría y fortaleza para poder entender y desarrollar estos conceptos, sin él nada hubiera sido posible, y todas las personas que hicieron posible esta investigación y que de alguna manera forman parte fundamental de éstos resultados, dentro de ellos, al profesor Orlando Moreno Vega, por haberme dado la confianza suficiente para, por primera vez, hacer una pregunta sobre algo explicado en clase, fue él quien me impulsó a comenzar a investigar estos temas que dieron origen a esta tesis. Al profesor Wilfredo Mendoza Quispe quien aceptó ser mi asesor y me brindó gran apoyo para formular el proyecto e impulsó a que se concluyera de manera satisfactoria, a la profesora Mirna Manco Caycho quien me ayudó a “pulir” los detalles necesarios para terminar de consolidar el proyecto ya formulado, y a muchos otros profesores que fueron de gran ayuda dándome pautas para avanzar en el desarrollo de esta investigación, a todos ellos muchas gracias por su labor académica y humanística, cumpliendo con honores la difícil tarea de formar futuros profesionales que representaran el país.

Índice general

RESUMEN

El teorema de Banach-Steinhaus es considerado como uno de los poderosos pilares del análisis funcional. Este teorema es conocido también como el Principio de Acotación Uniforme, el cual nos proporciona un criterio para determinar cuándo una familia de operadores lineales y acotados entre espacios normados está acotada uniformemente, es decir, permite pasar de una acotación de tipo "puntual" a una acotación de tipo "uniforme".

Este teorema, y algunas de sus aplicaciones los estudiaremos sobre grupos topológicos reemplazando los operadores lineales por homomorfismo equicontinuos; de esta manera, buscamos mostrar las fuertes propiedades que acompañan el concepto de grupo topológico, las cuales se deben a la combinación de la estructura algebraica de un grupo con la de espacio topológico. La demostración se realiza desde una perspectiva meramente teórica basándonos en fundamentos lógicos debidamente probados y utilizando el método deductivo para alcanzar los objetivos. Nuestra investigación permitirá mostrar la "riqueza" de la estructura de grupo topológico, permitiendo un mayor conocimiento para este campo que no había sido muy ahondado, así como también abrirá un sin número de corolarios y aplicaciones que pueden desprenderse debido a la generalización de este teorema.

Asimismo, consideramos impórtate señalar que el tema no está para nada cerrado y este teorema podría extenderse sobre muchas más variedades de estructuras algebraicas y topológicas.

ABSTRACT

The Banach-Steinhaus theorem is regarded as one of the fundamental theorems of functional analysis. This theorem is also known as the Uniform Boundedness Principle, which provides us with criteria for determining when a family of linear and bounded operators between normed spaces is uniformly bounded, i.e., it allows us to move from a "point" type boundedness to a "uniform" type boundedness.

This theorem, and some of its applications, will be studied on topological groups replacing linear operators by equicontinuous homomorphism; in this way, we seek to show the strong properties that accompany the concept of topological group, which are due to the combination of the algebraic structure of a group with the structure of topological space. The demonstration is carried out from a merely theoretical perspective based on duly tested logical foundations and using the deductive method to achieve the objectives. Our research will allow us to show the "richness" of the structure of the topological group, allowing a greater knowledge for this field that had not been very deepened, as well as it will also open a number of corollaries and applications that can be detached due to the generalization of this theorem.

Also, we consider important to point out that the topic is not closed at all and this theorem could extend over many more varieties of algebraic and topological structures.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación muestra el estudio del teorema de Banach-Steinhaus sobre grupos topológicos, la demostración del mismo se realiza cuando el espacio base es un grupo topológico y el espacio de llegada es un espacio normado, esto debido a un teorema demostrado en el capítulo V el cual nos permite llegar a esta nueva versión del teorema el cual es totalmente equivalente al originalmente planteado en la formulación del problema; todas las pruebas realizadas durante el desarrollo de la tesis se hacen desde una perspectiva meramente teórica basándonos en razonamientos lógicos.

Esta investigación mostrara además una ligera pero sustancial comparación con el tema clásico de Banach-Steinhaus sobre espacios vectoriales topológicos, dicha demostración es extraída del libro de (Rudin, 1991), el cual nos permitirá ver con más luces la extensión que se ha logrado, para poder llegar a ello primero se hace hincapié en conceptos teóricos básicos, tales como, definición de espacio normado, grupo algebráico, grupo topológico, equicontinuidad, la demostración del teorema de Baire, entre otros resultados ligados al concepto de grupo topológico los cuales son extraídos del libro de (Hewitt & Ross, 1963), luego se prueba el teorema en su forma clásica y finalmente sobre este teorema cambiamos el espacio base por un grupo topológico, el espacio de llegada por un espacio normado y los operadores lineales por homomorfismo equicontinuos para combinando ciertos teoremas mostrados a detalle lograr hábilmente la demostración del mismo.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En el presente trabajo de tesis exponemos la demostración del teorema de Banach-Steinhaus para grupos topológicos. Si $T_\lambda : G \to G^{'}$ es un homomorfismo continuo para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup_\lambda \|T_\lambda(x)\| < \infty$ para todo $x \in G$, entonces la familia $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es equicontinua, donde

- G es un grupo topológico de segunda categoría de Baire.
- $G^{'}$ es un espacio normado.

Nótese que, si G y $G^{'}$ son grupos topologicos la familia de homomorfismos $T_\lambda : G \to G^{'}$, $\lambda \in \Lambda$ es llamado equicontinuos; si para cada vecindad abierta W del elementos identidad en $G^{'}$, existe una vecindad abierta V del elemento identidad en G tal que $T_\lambda(V) \subset W$, para todo $\lambda \in \Lambda$

1.2. Formulación del problema

Se requiere resolver las siguientes interrogantes:

Problema general

¿Acotación puntual implicará acotación uniforme en grupos topológicos?

Problema específico

¿Qué corolarios tendrá el teorema de Banach-Steinhaus para grupostopológicos?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Determinar la equicontinuidad de una familia de homomorfismos continuos definidos de un grupo topológico sobre un espacio normado.

1.3.2. Objetivos específicos

Mostrar 2 corolarios del teorema de Banach-Steinhaus aplicado a grupos topológicos.

1.4. Limitantes de la investigación

Durante el proceso de la investigación se presentaron diversos impedimentos en diferentes aspectos del entorno, tales como:

Teórico

La limitación teórica suele presentarse cuando la investigación requiere de múltiples fuentes teóricas, muy variadas e incluso de diversos campos de estudio dificilmente compatibles los unos con los otros; la obtención de estos desarrollos teóricos, investigaciones previas, suele tornarse sumamente pesado y en algunas ocasiones insostenible, además, una vez obtenidas dichas fuentes la integración de las mismas implica una disgregación profunda de los procesos inmersos en cada una de ellas, lo cual ralentiza el desarrollo y tiende a generar una desviación de la hoja de ruta, planteada al inicio del trabajo, para apuntar hacia los objetivos formulados. En la presente investigación la limitación teórica se ha visto debilitada al mínimo, esto debido a que fueron bien cimentados los límites en la etapa de formulación del problema y se plantaron los objetivos de forma clara, precisa y concisa, lo cual permitió tener la certeza de las teorías que se necesitaban para el desarrollo las cuales fueron reunidas, analizadas e integradas de manera meticulosa.

Temporal

Como en todo proceso de desarrollo investigativo el tiempo se convierte en uno de los factores primordiales, este factor juega un papel muy importante en esta investigación, ya que se encuentra enmarcada dentro de un espacio temporal corto pero suficiente para lograr los objetivos claves que nos habíamos planteado al formular el problema.

Espacial

El tema espacial suele tornarse sumamente importante en investigaciones cuyo campo de estudio se encuentra disuadido en diversas localizaciones geográficas, en algunos casos estas localizaciones se encuentras muy distantes unas de otras. En la presente investigación no se realiza trabajo de campo quedando como fuente primaria de obtención de datos las referencias bibliográficas, las cuales son rápidamente obtenidas debido a las facilidades tecnológicas de conectividad remota y bibliotecas virtuales que hoy en día poseemos y forman parte de las herramientas empleadas por el investigador.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.2. Antecedentes de la investigación

2.2.1. A nivel internacional

A inicios del siglo XX, se realizaba con mucha frecuencia el denominado método de condensación de singularidades; razonamientos que hoy en día son considerados como precedentes del teorema de Banach-Steinhaus. Paralelamente habían empezado a usarse los llamados métodos de categoría, que básicamente permitía discernir en un espacio topológico subconjuntos grandes de pequeños; al parecer estos métodos tienen su origen en un trabajo de Osgood (1897) donde prueba que la intersección de una secuencia de abiertos densos en $\mathbb{R}$ también es denso en $\mathbb{R}$.

Baire (1899) observa que el mismo resultado es válido para $\mathbb{R}^n$, aprovechando en su estudio de las funciones que se obtienen como limites puntuales de secuencias de funciones continuas. Banach (1930) observó que el mencionado estudio realizado por Osgood y Baire no solo es válido para $\mathbb{R}^n$ si no también en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico localmente compacto; dando de esta manera origen al conocido actualmente como "EL LEMA DE CATEGORÍA DE BAIRE". Al mismo tiempo Banach observó que usando este lema se podía simplificar y clasificar resultados basados en el método de condensación de singularidades, estableciendo así la utilidad de los resultados de categoría en análisis funcional.

Lewandowska (2003) en su artículo científico titulado, "Banach-Steinhaus theorems for bounded linear operators with values in generalized 2-normed space" mostró de una manera sumamente interesante, del cual rescatamos algunas ideas, el teorema de Banach-Steinhaus para una familia de operadores lineales acotados de un espacio normado a un espacio generalizado 2-normado.

Del trabajo de Lewandowska obtuvimos la definición precisa sobre operadores lineales acotados de un espacio normado y también en la demostración del teorema de Banach-Steinhaus para dicha familia de operadores lineales.

Litvinov (2005) en su artículo científico titulado, "The Banach Principle for Topological Groups" mostró que el principio clásico de Banach puede ser extendido a sucesiones de homomorfismos continuos sobre grupos topológicos los cuales sean de segunda categoría de Baire.

Del trabajo de Litvinov extraímos la definición de grupo topológico, la cual será ampliamente usada en nuestro trabajo.

Salgado (2016) en su tesis de licenciatura titulada, "Aplicaciones del Teorema de categoría de Baire" dío claras definiciones sobre el Teorema de categoría de Baire para espacios métricos y topológicos, así como también mostró aplicaciones muy interesantes sobre espacios euclideanos, conjuntos de cantor y espacios polacos.

Del trabajo de Salgado extraímos la definición de la versión del teorema de Baire para espacios topológicos (pág. 31)

Pombo (2013) en su artículo científico titulado "On the Banach-Steinhaus Theorem" realizó la demostración del teorema de Banach-Steinhaus para conjuntos de aplicaciones lineales continuas sobre módulos topológicos, que son espacios de Baire, y se derivan algunas de sus consecuencias.

Del trabajo de Pombo examinamos detallada la demostración realizada ya que se trata del mismo teorema pero sobre otra estructua algebraica, cabe recordar además que un módulo algebraico está basado en la estructura de un grupo

2.2.2. A nivel nacional

Rivas Mamani (2017) en su tesis de licenciatura titulada "Los resultados fundamentales del análisis funcional como consecuencia del teorema de la categoría de Baire" presenta una demostración más detallada del teorema de la Categoria de Baire y muestra algunas de sus aplicaciones como el Teorema de Banach- Steinhaus, también llamado el Principio de la Acotación Uniforme, el estudio de la continuidad conjunta de las aplicaciones bilineales, el Teorema de la Aplicación Abierta entre otros resultados

De la Tesis de Rivas extraímos algunas ideas de su demostración detallada del Teorema de Categoria de Baire y las presentamos en nuestro trabajo, así también de su demostración del Teorema de Banach-Steinhaus la cual sirvió de comparación para el Teorema de Banach-Steinhaus extendido o sobre grupos topológicos el cual es tema de ésta tesis.

2.2.3. A nivel regional

Al revisar los archivos de tesis e informes de investigación existentes en la biblioteca e la Universidad Nacional del Callao y en la de nuestra escuela profesional no se encontró trabajos realizados referentes al tema de investigación.

2.3. Marco Teórico

2.3.1. Introducción

En la actualidad matemática hablar de grupo topológico resulta algo confuso, ya que estas teorías, a pesar de su gran antigüedad, no han sido muy desarrolladas y menos aún estudiadas en el ámbito del pregrado, naturalmente hablar del tema resulta aún más extraño en el ámbito en la facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, es por ellos que para entender a plenitud nuestra resolución detallaremos uno a uno los conceptos implicados en cada fase de la prueba de este teorema.

2.3.2. Conceptos básicos

Se hace una revisión de la estructura algebraica de grupo, para ello citamos la definición y algunos resultados interesantes del libro de (Herstein, 1983) el cual nos dice:

Definición 2.1. Definición de grupo
Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un grupo si en G esta definida una operacion binaria, llamada producto y denotada por $(*)$ tal que:

1. $a,b \in G$ implica que $a*b \in G$ (Cierre o clausura)
2. $a,b,c \in G$ implica que $a*(b*c) = (a*b)*c$ (Ley asociativa)
3. Existe un elemento $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$ para todo $a \in G$ (Existencia de un elemento identidad en G)
4. Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (Existencia de inversos en G)

Definición 2.2. Grupo abeliano

Un grupo G se dice que es abeliano (o conmutativo) si para cualesquiera $a,b \in G$ se tiene $a*b = b*a$

Ejemplo 2.3. Grupo abeliano

Supongamos que G esta constituido por el conjunto de los enteros $0, \pm 1, \pm 2, ...$ con $a*b$, para $a,b \in G$, definida como la suma usual entre enteros, es decir, con $a*b = a+b$, vemos que cumple las 4 condiciones de la definición de grupo, además se trata de un grupo abeliano, en el cual 0 juega el papel de e y $-a$ el de a^{-1}.

Observación 2.4. Orden de un elemento

Para tener la notacion más clara, definamos para cualquiera

$$a \in G,\, a^0 = e,\, a^1 = a,\, a^2 = a*a,\, a^3 = a*a^2, ..., a^k = a*a^{k-1}$$

y

$$a^{-2} = (a^{-1})^2,\, a^{-3} = (a^{-1})^3$$

Ademas las reglas habituales de exponentes siguen teniendo validez, es decir, que para dos enteros cualesquiera (positivos, negativos o nulos) m,n , se tiene:

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

(Vale la pena hacer notar que, en esta notacion, si G es un grupo aditivo, como en el ejemplo anterior, a^n representa al entero $na = a+a+....+a$ (n-veces))

Lema 2.5. *Si G es un grupo, entonces*

1. *El elemento identidad de G es único.*

2. *Todo $a \in G$ tiene un inverso único en G*

3. *Para todo $a \in G, \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$*

4. *Para $a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$*

Demostración. Para probar (1), consideremos lo siguiente,

Sean e, f dos elementos identidad, como $e * a = a$ para todo $a \in G$, tenemos en particular que $e * f = f$.

Pero por otra parte $b * f = b$ para todo $b \in G$, luego debemos tener $e * f = e$ y juntanto estas dos partes tenemos $f = e * f = e$ y por lo tanto $f = e$

En lugar de probar (2), probaremos algo más fuerte que nos dará como implicancia (2), supongamos que para $a \in G$, $a * x = e$ y $a * y = e$, entonces $a * x = a * y$.

Hagamos de este nuestro punto de partida, es decir, supongamos que $a * x = a * y$ con $a, x, y \in G$.

Hay un elemento $b \in G$ tal que $b * a = e$ (por lo que hasta ahora sabemos, puede que hayara varios de estos b), por tanto $b * (a * x) = b * (a * y)$, usando la ley asociativa nos lleva a que:

$$x = e * x = (b * a) * x = b * (a * x) = b * (a * y) = (b * a) * y = e * y = y$$

Hemos probado en realidad que en un grupo G, $a * x = a * y$ implica que $x = y$, muy analogamente podemos probar que $x * a = y * a$ implica $x = y$.

Esto implica que en los grupos podemos «cancelar» siempre que sea del mismo lado en las ecuaciones.

Para demostrar la parte (3) observamos que $a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e = a^{-1} * a$, multiplicando a la izquierda por a, a ambos miembros de la desigualdad tenemos $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

Para demostrar la parte (4) multipliquemos $a*b*(b^{-1}*a^{-1}) = a*(b*b^{-1})*a^{-1} = a*(e)*a^{-1} = a*a^{-1} = e$, luego de la definición de inverso tenemos $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$ $\square$

Definición 2.6. Homomorfimos

Una aplicacion ϕ de un grupo $(G,*)$ en un grupo $\left(\overline{G},\widehat{*}\right)$, se dice que es un homomorfismo, si para $a,b \in G$ cualesquiera siempre se tiene

$$\phi(a*b) = \phi(a)\widehat{*}\phi(b)$$

Proposición 2.7. *Propiedades básicas de los Homormofimos*

Si ϕ es un homomorfimos de G en $\overline{G}$, entonces

1. $\phi(e) = \bar{e}$, el elemento unidad de $\overline{G}$

2. $\phi\left(x^{-1}\right) = \phi\left(x\right)^{-1}$ para todo $x \in G$

Demostración. Para probar (1), simplemente hacemos el siguiente calculo

$$\phi(x)\widehat{*}\bar{e} = \phi(x) = \phi(x*e) = \phi(x)\widehat{*}\phi(e)$$

de donde se obtiene que $\phi(e) = \bar{e}$, cancelando $\phi(x)$ a ambos lados.

Para probar (2) observamos que $\bar{e} = \phi(e) = \phi(x*x^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1})$, de donde, segun la definicion de $\phi(x)^{-1}$en $\overline{G}$, obtenemos el resultado $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ $\square$

Observación 2.8. A partir de este momento evitaremos colocar el simbolo $*$ que denota la operacion del grupo, para evitar recargar la notación, se utilizará directamente ab en lugar de $a*b$ como lo veniamos haciendo hasta ahora, salvo existiera confunsión ante lo cual se pondrá el símbolo de manera explícita.

Observación 2.9. Es pertinente que tengamos presente las siguientes consideraciones:

- V^m, $m \in \mathbb{N}$ denota el conjunto $V^m = \{x^m : x \in G\}$ donde G es un grupo algebraico
- V^{-1}denota el conjunto $V^{-1} = \{x^{-1} : x \in G\}$ donde G es un grupo algebraico
- $\overline{V}$ denota la clausura o cerradura de V

Además definiremos el concepto de topología sobre un conjunto y estudiamos los espacios topológicos conjuntamente con ciertos resultados de los mismos, los cuales son tomados del libro de (Munkres, 2002), el cual nos dice:

Definición 2.10. Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X son elementos de τ
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ esta en τ
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ esta en τ

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topologico y se denota (X, τ)

Definición 2.11. Topologías Comparables

Supongamos que τ' y τ son dos topologías sobre un conjunto X, si $\tau' \supseteq \tau$, diremos que τ' es más fina que τ

si τ' contiene propiamente a τ , diremos que τ' es estrictamente más fina que τ.

Diremos que τ es comparable con τ' si $\tau' \supset \tau$ *ó* $\tau \supset \tau'$, en el caso que $\tau \subset \tau'$ y $\tau' \subset \tau$ diremos que son topologías equivalentes.

Definición 2.12. Base de una Topología

Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico $B \in \beta$ que contiene a x,

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1y B_2 entonces, existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$,

Si β satisface estas dos condiciones, se define la topología τ generada por β como sigue: Un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, un elemento de τ), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \beta$, tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Definición 2.13. Base local para una Topología

Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Una subcolección β de τ es llamada base local en el punto x, si para cada U abierto conteniendo a x, existe un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Lema 2.14. *Sean X un conjunto y β una base para una topología τ sobre X, entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de β*

Demostración. Dada una colección de elementos β, tambien son elementos de τ. Puesto que τ es una topologia, la unión de ellos, pertenece a τ. Reciprocamente dado $U \in \tau$, elijamos para cada $x \in U$ un elemento $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces

$$U = \cup_{x \in U} B_x$$

Por lo que U es igual a la unión de los elementos de β. $\square$

Lema 2.15. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que ζ es una colección de conjunto abiertos de X tal que, para cada conjunto abierto U de X y cada $x \in U$, existe un elemento $C \in \zeta$ tal que $x \in C \subset U$,entonces ζ es una base para la topología de X.*

Demostración. Debemos probar que ζ es una base. La primera condición para una base es fácil, dado $x \in X$, puesto que X es un conjunto abierto, existe, por hipótesis, un elemento $C \in \zeta$ tal que $x \in C \subset X$.

Para comprobar la segunda condición, sea x un elemento de $C_1 \cap C_2$, donde C_1 y C_2 son elementos de ζ. Puesto que C_1 y C_2 son abiertos, tambien lo es $C_1 \cap C_2$. Luego existe, por hipótesis, un elemento C_3 en ζ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Sea τ la colección de conjuntos abiertos de X; debemos probar que la topología τ' generada por ζ coincide con la topología τ, es decir que son equivalentes. En primer lugar, notese que si U pertenece a τ y si $x \in U$, entonces existe, por hipótesis, un elemento $C \in \zeta$ tal que $x \in C \subset U$. Se sigue que U pertenece a la topología τ' por definición. Reciprocamente, si W pertenece a la topología τ', entonces W es igual a la unión de elementos de ζ, por el Lema anterior. Ya que cada elemento de ζ pertenece a τ y τ es una topología, W también pertenece a τ. $\square$

Lema 2.16. *Sean β y β' bases para la topologías τ y τ', respectivamente, sobre X entonces son equivalentes:*

1. τ' es más fina que τ
2. Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \beta$ que contiene a x, existe un elemento básico $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$

Demostración. $(2) \Rightarrow (1)$. Dado un elemento U de τ, queremos probar que $U \in \tau'$.

Sea $x \in U$, puesto que β genera a τ, existe un elemento $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$. La condición (2) nos dice que existe un elemento $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, por lo que $U \in \tau'$, por definición.

$(1) \Rightarrow (2)$. Tenemos $x \in X$ y $B \in \beta$, con $x \in B$. Ahora bien B pertenece a τ por definicion, y $\tau \subset \tau'$ por la condición (1), luego $B \in \tau'$. Puesto que τ' esta generada por β', existe un elemento $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B$. $\square$

Definición 2.17. Definición de subbase

Sea X un espacio topológico y S una familia de abiertos. Diremos que ξ es subbase de la topología sobre X, si la familia

$$\beta(\xi) = \{\cap \{S_i \| i \in I\}, I conjunto finito y S_i \in \xi\}$$

Es una base de abiertos para la topologia de X (Se admite por convenio que la intersección de la familia vacía es X)

Observación 2.18. Subbase

1. Si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia finita de abiertos, entonces $\cap \{S_i\}_{i \in I}$ es también abierto, por lo tanto sí ξ es una familia de abiertos, $\beta(\xi)$ es también una familia de abiertos.

2. Para $I = \emptyset$ se tiene que $X \in \beta(\xi)$.

3. Para $\# I = 1$ se tiene que $\xi \subset \beta(\xi)$ (es decir, los abiertos de una subbase son elementos de la base que generan).

También se exponen algunos conceptos claves como la definición de espacio T_0, T_1, etc, que seran muy útiles para realizar las desmostraciones siguientes.

Definición 2.19. Espacio T_0

Un espacio topológico X será llamado espacio T_0 si para cada par de puntos distintos x e y de X, existe un subconjunto abierto U tal que U contiene a uno de los puntos x o y pero no al otro, esto es, para cada par de puntos $x, y \in X$ tal que $x \neq y$ existe un abierto U tal que $U \cap \{x, y\} = c$, donde $c = x$ ó $c = y$

Definición 2.20. Espacio T_1

Diremos que un espacio topologico (X, τ) es un espacio T_1, si para cualesquier par de puntos distintos $x, y \in X$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

Es claro de la definicion que todo espacio T_1 es un espacio T_0.

Definición 2.21. Espacio T_2 o de Haussdorf

Un espacio topológico X es un espacio de Haussdorf o T_2 si X satisface la siguiente condición: para cualquier par de puntos $x, y \in X$ distintos, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$

Se verifica de inmediato que todo espacio T_2 es un espacio T_1.

Definición 2.22. Espacio T_3 Regular

Un espacio topológico X es regular o T_3 si satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio T_1
2. Para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abierto U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$

Se verifica de inmediato que todo espacio T_3 es un espacio T_2.

Proposición 2.23. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico* T_0*, las siguientes condiciones son equivalentes*

1. El espacio X es regular,
2. Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$. Si X es regular y $x \in U$, donde U es abierto, entonces $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado que no contiene a x. Como X es regular, existen abierto disjuntos V_1 y V_2 tales que $x \in V_1$ y $X \setminus U \subseteq V_2$. De esta forma tenemos que $X \setminus V_2$ es un subconjunto cerrado de X tal que $X \setminus V_2 \subseteq U$.

Definamos $V = V_1$. Es claro que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus V_2 \subseteq U$

(pues dado $x \in V_1 = V \to x \notin X \setminus U \subseteq V_2 \to x \notin V_2 \to x \in X \setminus V_2$) como se queria demostar.

□

Luego se expone algunos tópicos básicos del análisis, importante para el desarrollo de nuestra investigación, tales como espacio vectorial, espacio métrico, espacio vectorial topológico, los cuales son extraídos del libro de (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Definición 2.24. Espacio Vectorial

Las letras $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre denotaran el campo de los números reales y el campo de los números complejos, respectivamente. Por el momento, establecemos el simbolo Φ

para denotar tanto $\mathbb{R}$ como a $\mathbb{C}$. Un escalar es un miembro de el cuerpo de escalares Φ. Un espacio vectorial sobre Φ, es un conjunto X, cuyos elementos son llamados vectores, y en el cual dos operaciones, adición y multiplicación por escalar son definidas, con la siguiente familia de propiedades algebráicas:

1. Para todo par de vectores x e y coresponde un vector $x+y \in X$, de tal manera que

   $$x+y=y+x, \qquad x+(y+z)=(x+y)+z,$$

   X contiene un único vector 0 (el vector 0 ó origen de X) tal que $x+0=x$ para cada $x \in X$; y para cada $x \in X$ corresponde un único vector $-x$ tal que $x+(-x)=0$.

2. Para cada par (α, x) con $\alpha \in \Phi$ y $x \in X$ corresponde un vector $\alpha x \in X$, de tal manera que

   $$1x=x, \qquad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

   y tal que las dos propiedades distributivas siguientes se cumplen

   $$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \qquad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$$

El simbolo 0 será por supuesto también usado para el elemento cero del campo escalar.

Si $\Phi=\mathbb{R}$, será llamado un espacio vectorial real, y si $\Phi=\mathbb{C}$ será llamado un espacio vectorial complejo.

Definición 2.25. Espacio Métrico

Llamamos espacio métrico al par (X,d), donde X es un conjunto no vacío, y d es una funcion real definida en $X \times X$, llamada distancia o métrica, que satisface los siguientes axiomas:

1. $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in X$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \forall x,y,z \in G$

Definición 2.26. Espacio Normado

Un espacio vectorial X es llamado un espacio normado, si para cada $x \in X$ hay asociado un número real no negativo $\|x\|$,llamado la normal de x, de tal manera que:

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x,y \in X$,
2. $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|x\|$ si $x \in X$ y α es un escalar,
3. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$

La palabra norma es tambien usado para denotar la funcion que aplica x en $\|x\|$

Cada espacio normado, puede considerarse como un espacio métrico, en el cual la distancia $d(x,y)$ con $x,y \in X$ es dada por $\|x-y\|$.

Definición 2.27. Espacio vectorial topológico

Supongamos que τ es una topología en un espacio vectorial X tal que:

1. Cada punto de X es un conjunto cerrado,
2. Las operaciones del espacio vectorial son continuas con respecto a la topología τ.

Bajo estas condiciones, τ es llamada topología vectorial en X, y X es un espacio vectorial topológico.

Por tanto es más preciso establecer como sigue (1). Para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ que tiene x como único elemento es un conjunto cerrado.

Para decir que la adición es continua, mediante la definición tenemos que la aplicación

$$(x,y) \to x+y$$

de el producto cartesiano $X \times X$ en X es continuo: Si $x_i \in X$ para $i = 1,2$ y si V es una vecindad de $x_1 + x_2$, existirá vecindades V_i de x_i tal que

$$V_1 + V_2 \subset V$$

Similarmente, para decir que la multiplicación por escalar es continua, mediante la definición tenemos que la aplicación

$$(\alpha,x) \to \alpha x$$

de $\Phi \times X$ en X es continuo: Si $x \in X$, α es un escalar, y V una vecindad de αx, etonces para algun $r > 0$ y alguna vecindad W de x tenemos $\beta W \subset V$ siempre que

$|\beta - \alpha| < r$.

Se toman algunas definiciones importanes para el desarrollo de la tesis, las cuales son extraidas del libro de (Rudin, 1991) estas definiciones son:

Definición 2.28. Vecindad acotada

Un subconjunto E de un espacio vectorial topológico es dicho acotado si para cada vecindad V de 0 en X corresponde un número $s > 0$ tal que $E \subset tV$ para cada $t > s$.

Definición 2.29. Conjunto Balanceado

Un conjunto $B \subset X$ es dicho balanceado si $\alpha B \subset B$ para cada $\alpha \in \Phi$ con $|\alpha| \leq 1$.

Proposición 2.30. *Sea X un espacio vectorial topológico. Asociamos a cada $a \in X$ y a cada escalar $\lambda \neq 0$, el operador traslación T_a y el operador multiplicación M_λ, son definidos mediante las formulas:*

$$T_a(x) = a + x, \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \qquad (x \in X)$$

Proposición 2.31. *Sea X un espacio vectorial topológico T_a y M_λ son homeomorfísmos de X en X.*

Demostración. Primero probaremos que la traslación, es un homeomorfísmo.

Sea $a \in G$ (fijo) y $T_a(x) = a + x$ que va de G en G , luego existe $T_a^{-1} = T_{-a}$ la inversa de T_a, mediante la cual, $T_a \circ T_{-a} = I$ y $T_{-a} \circ T_a = I$ con lo cual se prueba que T_a es biyectiva.

La continuidad de T_a se obtiene de la definición de espacio vectorial topológico(2) pues nos dice que la apliacion $+$ es contínua, para $a, x \in G$, de igual manera concluímos que T_{-a} es contínua y por lo tanto T_a es un homeomorfísmo.

Para probar que la multimplicación por escalar es homeomorfísmo, vemos que existe $M_{1/\lambda}$, la inversa de M_λ, mediante la cual $M_\lambda \circ M_{1/\lambda} = I$ y $M_{1/\lambda} \circ M_\lambda = I$, con lo cual se prueba que M_λ es biyectiva.

La continuidad de M_λ se obtiene de la definición de espacio vectorial topologico (2), pues nos dice que la apliación de composicion interna $*$ (multiplicación) es contínua para λ en el cuerpo de escalares y $x \in G$; de igual manera concluímos que $M_{1/\lambda}$ es contínua, pues $1/\lambda$ pertenece al cuerpo escalar, y $x \in G$, y por lo tanto M_λ es un homeomorfísmo.

$\square$

Proposición 2.32. *Sea X un espacio vectorial topológico, si W es una vecindad de 0 en X, entonces existe una vecindad U de 0 que es simétrica (en el sentido que $-U = U$) y que satisface $U + U \subset W$*

Demostración. Sabemos que $0 + 0 = 0$ y como la adición es contínua, existen vecindades V_1, V_2 de 0 tal que $V_1 + V_2 \subset W$.

Si consideramos $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$, entonces U tiene las propiedades requeridas.

$\square$

Proposición 2.33. *En un espacio vectorial topológico X, cada vecindad de 0 contiene una vecindad balanceada de 0*

Demostración. Supongamos que U es una vecindad de 0 en X. Ya que la multiplicación por escalar es contínua, existe un $\delta > 0$ y una vecindad V de 0 en X tal que $\alpha V \subset U$ siempre que $|\alpha| < \delta$.

Sea W la union de todos estos conjuntos αV, entonces W es una vecindad de 0,W es balanceada y $W \subset U$. $\square$

Definición 2.34. Espacio Completo

Diremos que un espacio métrico X es completo, sí sólo sí, toda sucesión de cauchy definida en el, es convergente.

2.3.3. Definición de Grupo Topológico

Se indaga profundamente en la definición e implicancias de grupo topológico, que riquezas y propiedades características adquiere esta nueva estructura que combina la ya conocida parte algebraica con una estructura topológica, para ello se toman los resultados del libro de (Hewitt & Ross, 1963) el cual nos da la siguiente definición:

Definición 2.35. Grupo Topológico

Sea G un conjunto que es un grupo algebráico y también un espacio topológico, supongase que:

1. La aplicación $(x,y) \to xy$ de $G \times G$ en G es una aplicación continua de el producto cartesiano $G \times G$ en G,
2. La aplicación $x \to x^{-1}$ de G en G es contínua.

entonces, G es llamado grupo topológico.

En terminos de conjuntos abiertos, la condición (1) indica que para cada vencindad U de xy existen vencindades V y W de x e y repectivamente tal que $VW \subset U$, donde:

$$VW = \{vw : v \in V, w \in W\}$$

La condición (2) afirma que para cada vecindad U de x^{-1}exite una vecindad V de$x$ tal que $V^{-1} \subset U$, donde:

$$V^{-1} = \left\{v^{-1} : v \in V\right\}$$

2.4. Marco conceptual

2.4.1. Teorema clásico de Banach-Steinhaus

A manera de comparación, para notar de una manera más evidente la extensión que se logra presentamos el teorema de Banach-Steinhaus sobre espacios normados, esto es:

- "Sea $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de elementos de $\mathscr{L}(M,N)$ donde M es un espacio de Banach. Si está acotada, para todo $x \in M$, entonces la familia de operadores $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es equicontinua". Así mismo el teorema de Banach-Steinhaus también es presentado para espacios vectoriales topológicos, como sigue:
- Sean X e Y espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de aplicaciones lineales continuas de X en Y, y B es el conjunto de todos los $x \in X$, cuyas orbitas $\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$ son acotadas en Y. Si B es de segunda-categoria en X, entonces $B = X$ y Γ es equicontinuo.

Estos resultados son extraídos del libro de (Rudin, 1991) y son expuestos con el único fin de “comparar” su generalización sobre un grupo topológico.

Además, con el fin de poder visualizar las múltiples extensiones que se pueden lograr del teorema de Banach-Steinhaus, observamos la prueba realizada por (Rosell, 2006) en su tesis de maestría, en la cual, además de realizar la demostración del teorema clásico sobre espacios normados presenta la demostración del citado teorema sobre espacios de Hilbert.

2.4.2. Definición de conceptos adicionales

Además de los conceptos antes mencionados, haremos uso de la siguiente definición de espacio vectorial topológico, supongamos que τ es una topología en un espacio vectorial X tal que, cada punto de X es un conjunto cerrado y además las operaciones del espacio vectoral son continuas con respecto a la topología τ, así X es llamado espacio vectorial topológico.

También diremos que siendo X un espacio topológico, los subconjuntos de X que son la unión numerable de conjuntos nunca densos son llamados de primera-categoría en X, aquellos que no son de primera-categoría es llamado de segunda-categoría en X (Rudin, 1991).

Profundizamos también en la demostración del teorema de Cateogoría de Baire, ya que se trata de un concepto fundamental el cual debemos tener bien claro, dichas demostraciones son extraidas de la Tesis de (Salgado, 2016)

Además damos una clara definición del concepto de equicontinuidad, el cual es muy importante para la demostración final, decimos entonces que, dada una familia de operadores $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{L}(M,N)$ se dice equicontinua cuando

$$\sup_{\lambda} \|T_\lambda\| < \infty$$

Donde M y N son espacios normados.

2.4.3. Teorema Banach-Steinhaus para Grupos Topológicos

En la última parte de este trabajo; efectuamos la demostración del teorema de Banach-Steinhaus generalizado a grupos topológicos, así mismo concluimos dando algunas aplicaciones a dicho teorema.

2.5. Marco teórico-conceptual

El teorema de Banach-Steinhaus para grupos topológicos permitirá pasar de una acotación puntual a una acotación uniforme cuando el espacio base es un grupo topológico de segunda categoría de Baire y el espacio de llegada es un espacio normado, para los homomorfismos equicontinuos definidos.

Para lograr esta demostración primero precisamos la definición de equicontinuidad la cual nosotros usaremos:

Sea X e Y grupos topológicos. La familia de homomorfismos $a_\lambda : X \to Y, \lambda \in \Lambda$ son llamados equicontinuos, si para cada vecindad abierta W de el elemento identidad en Y, existe una vecindad abierta V de el elemento identidad en X tal que $a_\lambda(V) \subset W$ para todo $\lambda \in \Lambda$ (Litvinov, 2011).

Luego de ellos demostramos el siguiente teorema:

Sea X un espacio de Banach y $(Y, \|.\|)$ un espacio normado. Si $a_\lambda : X \to Y$, es una aplicación lineal continua para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda(x)\| < \infty$ para todo $x \in X$ entonces la familia $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es equicontinua (Litvinov, 2011). Y combinando estos dos resultados de una manera muy hábil la cual será mostrada a lo largo de la exposición de esta tesis se logra la demostración del resultado deseado.

2.6. Definiciones de términos básicos

- La definición de equicontinuidad para homomorfimos que usaremos en el presente trabajo es la siguiente, dada la familia de homomorfismos $\{\varphi_\lambda : X \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ donde X e Y son grupos topológicos, es llamada equicontinua si para cada vecindad abierta W del elemento identidad en Y, existe una vecindad abierta V del elemento identidad en X, tal que $\varphi_\lambda(V) \subset W$, la cual constituye la definición más genérica de las múltiples existentes.

- A lo largo del presente trabajo se hace mención del término familia y colección de manera indistinta, asignándole a estos dos términos el mismo significado, el cual hace referencia a un conjunto infinito de elementos no necesariamente ordenados.

- A lo largo del presente trabajo no hacemos distincion entre vecindad y entorno, ambas palabras aparecen de manera indistinta y son usadas como sinonimos absolutos.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

Si los operadores lineales continuos son reemplazados por homomorfismos continuos de un grupo topológico en un espacio normado, es posible demostrar la equicontinuidad de estos.

3.1.2. Hipótesis específica

Es posible obtener corolarios para el teorema de Banach-Steinhuas generalizado sobre grupos topológicos.

3.2. Variables de la investigación

La variable de investigación es la familia $\{T_k : X \to Y\}_{k\in\Lambda}$; de homomorfismos continuos de grupos topológicos.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo y diseño de la investigación

De acuerdo a la naturaleza del problema, el presente trabajo se trata de una investigación no experimental transversal, debido a que la recolección de datos se realiza en un único momento, además, de acorde al nivel de la investigación se trata de una investigación explicativa pues busca explicar el por qué y en qué condiciones ocurre un determinado fenómeno; de acuerdo a la finalidad perseguida se encuentra inmerso en un tipo de investigación básica porque está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos a la rama matemática del Análisis Funcional, y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata.

4.2. Población y muestra

Tenemos como población los homomorfismos continuos entre grupos topológicos; tomando como muestra los operadores lineales entre espacios normados.

4.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de la tesis se utilizará fuentes primarias a través de la revisión bibliografía especializada y bases de datos bibliográficas como Scielo, ALICIA a través de medios electrónicos; así mismo se recopilará información sobre artículos científicos obtenidos a partir de la página web de JSTOR y de libros, tesis relacionados con topología y geometría diferencial, se utilizará procedimientos lógicos, análisis, síntesis, deducción, realizando de forma ordenada y con objetivos.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Para la plena comprensión de los resultados finales de esta tesis se recopiló ciertas deficiones y se realizaron algunas demostraciones previas, que serviran de fundamento para un mayor entendimiento de los teoremas a tratar más adelante

5.1. Resultados previos

Los siguientes resultados son extraídos del libro de (Hewitt & Ross, 1963)

Teorema 5.36. *Sea G un grupo topologico. Para $a \in G$, la traslación a izquierda y a derecha por a son homeomorfísmos de G. La inversión es también un homeomorfísmo de G.*

Demostración. Primero probaremos que cada una de las traslaciones, tanto a izquierda como a derecha, son homeomorfismos.

Sea $a \in G$ (fijo) y $T_a(x) = ax$ que va de G en G la traslación a derecha, luego existe $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ la inversa de T_a, mediante la cual, $T_a \circ T_{a^{-1}} = I$ y $T_{a^{-1}} \circ T_a = I$ con lo cual se prueba que T_a es biyectiva.

La continuidad de T_a se obtiene de la definición de Grupo Topologico (Definición 2.34 - (1)) colocando $x = a$, de igual manera la continuidad de $T_{a^{-1}}$ se obtiene haciendo $x = a^{-1} \in G$, por lo tanto T_a es un homeomorfísmo.

Para el caso de la traslación a izquierda $T_a = xa$ que va de G en G el proceso es completamente análogo.

Para que la aplicación inversa, definida por $f(x) = x^{-1}$ que va de G en G es un homeomorfísmo, notamos que existe $g(x^{-1}) = x$ la inversa de f, de tal manera que $f \circ g(x^{-1}) = I$ y $g \circ f(x) = I$ con lo cual f es biyectiva. La continuidad de f y g se obtiene de la definición de Grupo Topológico (2), con lo cual f es un homeomorfísmo. $\square$

Teorema 5.37. *Sea G un grupo topológico y sea $\mathscr{H}$ una base de abiertos en e. Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x corre a través de todos los elementos de G y U corre a través de todos los elementos de $\mathscr{H}$, son bases abiertas para la topología de G.*

Demostración. Sea W un abierto de G, no vacío, y sea a algún elemento de W, sea la aplicación $x \to a^{-1}x$ de W en $a^{-1}W$, [notar que $a^{-1}W$ es abierto, pues es la traslación a izquierda de W mediante $a^{-1} \in G$, y por el Teorema 5.36, es un homeomorfísmo, por tanto, lleva abiertos en abiertos].

Ademas $a^{-1}W$ contiene a e , [Pues $a \in W$], ya que $\mathscr{H}$ es una base de abiertos de e, existe $U \in \mathscr{H}$ tal que $e \in U \subset a^{-1}W$ y por tanto $a \in aU \subset W$. Asi W es una union de conjuntos aU, es decir por el Lema 2.14 $\{xU\}$ es una base de abiertos de τ_G.

De igual manera podemos definir $W \to Wa^{-1}$[Wa^{-1}es abierto, y contiene a e (traslación a derecha)], entonces $\exists U \in \mathscr{H}$ tal que $e \in U \subset Wa^{-1} \to a \in Ua \subset W$. $\square$

Teorema 5.38. *Sea G un grupo topológico y $\mathscr{H}$ una base de abiertos de e (indentidad del grupo), entonces:*

1. *Para cada $U \in \mathscr{H}$ existe un $V \in \mathscr{H}$ tal que $V^2 \subset U$.*

2. *Para cada $U \in \mathscr{H}$ existe un $V \in \mathscr{H}$ tal que $V^{-1} \subset U$.*

3. *Para cada $U \in \mathscr{H}$ y cada $x \in U$ existe un $V \in \mathscr{H}$ tal que $xV \subset U$.*

4. *Para cada $U \in \mathscr{H}$ y $x \in G$ existe un $V \in \mathscr{H}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$. Inversamente, sea G un grupo, y sea $\mathscr{H}$ una familia de subconjuntos de G con la propiedad de intersección finita y cumple con (1),(2),(3) y (4). La familia de conjuntos $\{xU\}$, donde U corre a través de $\mathscr{H}$ y x corre a través de G, es una subbase para la topología en G, con esta topología inducida por esa subbase G es un grupo topológico. [La familia de conjuntos $\{Ux\}$ es una subbase para la misma topología].*

5. *Si la familia $\mathscr{H}$ también satisface, para $U,V \in \mathscr{H}$, existe un $W \in \mathscr{H}$ tal que $W \subset U \cap V$, entonces $\{xU\}$ y $\{Ux\}$ son bases para la topología de G*

Demostración. Para probar (1), de la definición de Grupo Topológico (Definición 2.34-(1)), $(x,y) \to xy$, que va de $G \times G$ en G es contínua, entonces $\forall U$ vecindad de xy, existen M vecindad de x y W vecindad de y tal que $MW \subset U$.

Sea $(x,x) \to xx = x^2$, entonces $\forall U$ de x^2 $\exists n$ M y W de x tal que $MW \subset U$, luego podemos considerar $V = M \cap W$, $V \subset M$ y $V \subset W$, entonces $V^2 \subset U$.

Para probar (2), de la definición de Grupo Topológico (2) $x \to x^{-1}$, que va de G en G es contínua, entonces $\forall U$ vecindad de x^{-1}, existe V vecindad de x tal que $V^{-1} \subset U$.

Para probar (3), solo hay que notar que decir que $xV \subset U$, para cada $x \in U$, es decir que U es abierto, y xV es un entorno de x pues la traslación es un homeomorfísmos, es decir para cada $x \in U$ existe un entorno que esta contenido en U.

Para probar (4), vemos que $x \to ax \to axa^{-1}$ es un homeomorfísmo, pues es composición de homeomorfísmos, entonces $\forall U \in \mathscr{H}$ y $x \in G$ existe $V \in \mathscr{H}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.

La prueba inversa, sea $\mathscr{H}$ que satisface las condiciones (1),(2),(3) y (4) en el grupo G y tiene la propiedad de intersección finita, entonces para $U \in \mathscr{H}$ existen V,W $\in \mathscr{H}$ tal que $V^2 \subset U$ y $W^{-1} \subset V$. Ya que $V \cap W \neq \emptyset$ tenemos que $e \in VW^{-1} \subset V^2 \subset U$, así todos los elementos de $\mathscr{H}$ contienen a e.

Sea $\widetilde{\mathscr{H}}$ la familia de todos los conjuntos $\cap_{k=1}^{n} U_k$, donde $U_1, ..., U_n \in \mathscr{H}$. Para $U_1, ..., U_n \in \mathscr{H}$ existe $V_1, ..., V_n \in \mathscr{H}$ tal que $V_k^2 \subset U_k$ $k = 1, ..., n$ entonces tenemos:

$$(\cap_{k=1}^{n} V_k)^2 \subset \cap_{k=1}^{n} V_k^2 \subset \cap_{k=1}^{n} U_k$$

Así $\widetilde{\mathscr{H}}$ cumple la propiedad (1), ya que:

$$(\cap_{k=1}^{n} V_k)^{-1} = \cap_{k=1}^{n} V_k^{-1}$$

se cumple la propiedad (3), y ya que:

$$x(\cap_{k=1}^{n} V_k) = \cap_{k=1}^{n} (xV_k)$$

y

$$x(\cap_{k=1}^{n} V_k)x^{-1} = \cap_{k=1}^{n} (xV_k x^{-1})$$

Así $\widetilde{\mathscr{H}}$ cumple (3) y (4).

De la definición de subbase, los conjuntos no vacíos $\cap_{k=1}^{n} (x_k U_k)$, donde $x_k \in G$ y $U_k \in \mathscr{H}$ forman una base de abiertos por la topología de G. Sea y algún elemento de $\cap_{k=1}^{n} (x_k U_k)$, y sea $V_k \in \mathscr{H}$ tiene la propiedad que $x_k^{-1} y V_k \subset U_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$[Ver (12)]. Entonces

$$y \in y(\cap_{k=1}^{n} V_k) = \cap_{k=1}^{n} (yV_k) \subset \cap_{k=1}^{n} (x_k U_k)$$

Así los conjuntos $y\widetilde{U}$, cuando $\widetilde{U}$ corre a través $\widetilde{\mathscr{H}}$ forma una base de abiertos en y, para cada $y \in G$, por el Lema 2.14

La prueba que G es un grupo topológico, dados cualquier a, b de G y $\widetilde{U}$ algún conjunto en $\widetilde{\mathscr{H}}$, por (1) y (4), para $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathscr{H}}$ existen conjuntos $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ en $\widetilde{\mathscr{H}}$ tal que $(b^{-1}\widetilde{W}b)\widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Así $(a\widetilde{W})(b\widetilde{V}) \subset ab\widetilde{U}$ de modo que la primera condición de grupo topológico es verificada.

Para probar la segunda condición, de (2) y (4) tenemos, para $a \in G$ sea $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathscr{H}}$ existen $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \widetilde{\mathscr{H}}$ tales que $\widetilde{V}^{-1} \subset \widetilde{W}$ y $x\widetilde{W}x^{-1} \subset \widetilde{U}$ luego $\widetilde{V}a^{-1} \subset \widetilde{W}a^{-1} \subset a^{-1}U$ entonces $(a\widetilde{V})^{-1} \subset a^{-1}\widetilde{U}$.

La equivalencia de las topologías generadas por $\{xU\}$ y $\{Ux\}$ se sigue de (4), debido a que para $x \in G$ y $U, V \in \mathscr{H}$, tenemos $xVx^{-1} \subset U \Rightarrow xV \subset Ux$ y por el Lema 2.15 la topología generada por $\{Ux\}$ es más fina que la topología generada por $\{xU\}$.

De igual forma tenemos $Vx^{-1} \subset x^{-1}U$, para $a = x^{-1} \in G$, entonces por el Lema 2.14 la topología generada por $\{xU\}$ es más fina que la topología generada por $\{Ux\}$. Luego tenemos que ambas topologias son equivalentes.

La última afirmación del teorema es ahora obvio, pues de la definición de base, $\mathscr{H}$ forma una base de abiertos en e, y como se probó en el Teorema 5.36 $\{xU\}$ y $\{Ux\}$ forman una base de abiertos para $x \in G$. $\square$

Corolario 5.39. *Sea G un grupo topológico que tiene una base de abiertos de e, puede considerarse vecindades U de e tal que $U = U^{-1}$es decir vecindades simétricas.*

Demostración. Para una vecindad arbitraria V de e, sea $U = V \cap V^{-1} \Rightarrow U = U^{-1}$ es una vecindad de e y $V \subset U$. $\square$

Corolario 5.40. *Sea G un grupo topológico. Para cada vecindad U de e, existe una vecindad V de e tal que $\overline{V} \subset U$*

Demostración. Por el Teorema 5.37 $\forall U$ vecindad de e, existe W vecindad de e tal que $W^2 \subset U$, luego tomando $V = W \cap W^{-1}$se tiene una vecindad simétrica tal que $V^2 \subset W^2 \subset U$, entonces, si $x \in \overline{V}$, tenemos $(xV) \cap V \neq \emptyset$. por lo tanto $xv_1 = v_2$ para algún $v_1, v_2 \in V$ y así $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. □

Teorema 5.41. *Sea G un grupo topológico T_0, entonces G es regular y por lo tanto Haussdorf.*

Demostración. Por el Corolario 5.39 $\forall U$ vecindad de e, existe V vecindad de e tal que $\overline{V} \subset U$, luego ya que la traslación es un homeomorfísmo se tiene que $\forall x \in G$ $x\overline{V} \subset xU$. Luego aplicando la proposición 2.22 G es regular y por tanto es de Haussdorf. □

Definición 5.42. Estructura Uniforme

Sea G un grupo topológico. Para cada vecindad U de e en G, sea L_U el conjunto de todos los pares $(x,y) \in G \times G$ tal que $x^{-1}y \in U$, y sea R_U el conjunto de todos los pares $(x,y) \in G \times G$ tal que $yx^{-1} \in U$. La familia de todos los conjuntos $L_U[R_U]$, cuando U corre a traves de todas las vecindades de e en G, escribimos $\mathscr{L}_l(G)[\mathscr{L}_r(G)]$, y es llamado la estructura uniforme a izquiera [derecha] en G.

Definición 5.43. Sea G y H grupos topologicos y sea φ una aplicación de G en H. Sea $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ bases de abiertos en las identidades de G y H respectivamente. Supongase que para cada $V \in \mathscr{V}$, existe un $U \in \mathscr{U}$ tal que $(\varphi(x), \varphi(y)) \in L_V$ para todo $(x,y) \in L_U$. Entonces φ es llamado una aplicación uniformemente contínua para el par de estructuras uniformes $(\mathscr{L}_l(G), \mathscr{L}_r(H))$ [es evidente que la continuidad uniforme de φ es independiente de la elección de las bases abiertas $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$]. La continuidad uniforme para el par de estructuras uniformes $(\mathscr{L}_l(G), \mathscr{L}_r(H))$,$(\mathscr{L}_r(G), \mathscr{L}_l(H))$ y $(\mathscr{L}_r(G), \mathscr{L}_r(H))$ es definido similarmente.

Definición. Una métrica o pseudo-métrica d en un grupo G es llamada invariante a izquierda si $d(ax,ay) = d(x,y)$ para todo $a,x,y \in G$. Si $d(xa,ya) = d(x,y)$ para todo $a,x,y \in G$ entonces d es llamada invariante a derecha.

Si d es invariante a izquierda y a derecha, se dice que es invariante a ambos lados o simplemente invariante.

Similarmente, si H es un subgrupo cualquiera de G, entonces una métrica o pseudo-métrica d en G/H se dice invariante a izquierda si $d(axH,ayH) = d(xH,yH)$ para todo $a,x,y \in G$.

Definición 5.44. Número Racional Diádico

Se dice que un número es diádico, si se puede expresar como una fracción, cuyo denominador es una potencia de 2, es decir un numero de la siguiente forma

$\frac{a}{2^b}$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$

Notar que la suma de dos números diádicos, sigue siendo un número diádico.

Además el conjunto de los números diádicos es denso en $\mathbb{R}$, es decir para cada número real x siempre es posible tomar dos sucesiones de números diádicos $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente y decreciente, respectivamente, de tal manera que:

$$\lim_n \rho_n = x = \lim_n \beta_n$$

Esta definición fue extraída de la página 167 del libro de (Badiou, 2008)

Teorema 5.45. *Sea $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ una secuencia de vecindades simétricas de e en un grupo topológico G tal que $U_{k+1}^2 \subset U_k$ para $k = 1,2...$ Sea $H = \cap_{k=1}^{\infty} U_k$ entonces existe una pseudo-métrica invariante por izquierda σ en G tal que: $(i)\sigma$ es uniformemente contínua para la estructura uniforme de $G \times G$ a izquierda,*

$(ii)\sigma(x,y) = 0$ *sí solo sí $y^{-1}x \in H$,* *(iii)*$\sigma(x,y) \leq 2^{-k+2}$ *siempre que* $y^{-1}x \in U_k$*,*

(iv) $2^{-k} \leq \sigma(x,y)$ *siempre que* $y^{-1}x \notin U_k$*,*

Si además $xU_kx^{-1} = U_k$ *para todo* $x \in G$ *y* $k = 1,2,...$ *entonces* σ *es también invariante por derecha y*

(v)$\sigma(x^{-1},y^{-1}) = \sigma(x,y)$ *para* $x,y \in G$*.*

Demostración. Es conveniente renombrar los conjuntos U_k ,

Sea $V_{2^{-k}} = U_k$ para $k = 1,2,...$ Definimos ahora conjuntos V_r para todo número diádico racional r , $0 < r < 1$ como sigue, para:

$$r = 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + ... + 2^{-l_n}, \quad 0 < l_1 < ... < l_n, \qquad (1)$$

Sea

$$V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} ... V_{2^{-l_n}} \qquad (2)$$

También definimos $V_r = G$ para todo número diádico racional $r \geq 1$, mostraremos primero que

$$r < s \quad implica \quad V_r \subset V_s$$

Podemos suponer que $s < 1$ ya que la inclusión es obvia para $s \geq 1$, Sea r dado en (1) y

$$s = 2^{-m_1} + ... + 2^{-m_p},\ 0 < m_1 < ... < m_p$$

Ahí existe un único entrero k tal que $l_j = m_j$ para $j < k$ y $l_k > m_k$.

Observando que ya que $U_{k+1}^2 \subset U_k$, entonces $V_{2^{-k-1}}^2 \subset V_{2^{-k}}$

Tomando $W = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} ... V_{2^{-l_n}}$, nosotros entonces, tenemos

$V = W V_{2^{-l_k}} V_{2^{-l_k+1}} V_{2^{-l_k+2}} ... V_{2^{-l_n}}$

$\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}}...V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_n}}V_{2^{-l_n}}$ (debido a la obsersación $V_{2^{-l_n}}V_{2^{-l_n}} \subset V_{2^{-l_{n+1}}}$)

$\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}}...V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_{n+1}}} \subset ...$

$\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k}} \subset WV_{2^{-l_k+1}} = WV_{2^{-l_{k-1}}} = WV_{2^{-m_{k-1}}} \subset WV_{2^{m_{k-1}}}V_{2^{m_{k-1}}} \subset WV_{2^{-m_k}} = V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}}...V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-m_k}}$

$\subset V_{2^{-m_1}}V_{2^{-m_2}}...V_{2^{-m_k-1}}V_{2^{-m_k}}V_{2^{-m_k+1}}...V_{2^{-m_p}} = V_s$

Ahora mostramos que para cada r de la forma (1) y cada entero positivo l, tenemos:

$$V_rV_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}} \qquad (4)$$

ya que (4) es obvio si $r+2^{-l+2} \geq 1$, suponemos que $r+2^{-l+2} < 1$, si $l > l_n$, entonces:

$$V_rV_{2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \qquad (5)$$

y (4) es ahora obvio. Si $l \leq l_n$, sea k un entero positivo tal que $l_{k-1} < l \leq l_k$ [definimos $l_0 = 0$].

Sea $r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_k} - 2^{-l_{k+1}} - 2^{-l_n}$ y $r_2 = r + r_1$, entonces es evidente que $r < r_2 < r + 2^{-l+1}$ aplicando (5) y (3) a r_2 , obtenemos:

$$V_rV_{2^{-l}} \subset V_{r_2}V_{2^{-l}} = V_{r_2+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$$

[pues $r+2^{-l}+2^{-l+1} < r+2^{-l+2}$] esto prueba (4).

Para $x \in G$ sea $\varphi(x) = \text{ínf}\{r : x \in V_r\}$, es claro que $\varphi(x) = 0$ sí y solo sí $x \in H$.

Finalmente, definimos la función σ en $G \times G$ mediante la siguiente regla

$$\sigma(x,y) = \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)| : z \in G\}$$

Es obvio que $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ y que $\sigma(x,x) = 0$ para $x,y \in G$, se verifica con facilidad que $\sigma(x,z) \leq \sigma(x,y) + \sigma(y,z)$ para $x,y,z \in G$ pues

$$|\varphi(wx) - \varphi(wz) + \varphi(wy) - \varphi(wy)| \leq |\varphi(wx) - \varphi(wy)| + |\varphi(wy) - \varphi(wz)| \quad w \in G$$

y aplicando supremo se obtine el resultado.

También es fácil verificar que $\sigma(ax,ay) = \sigma(x,y)$ para $a,x,y \in G$. Pues

$$\sigma(ax,ay) = \sup\{|\varphi(zax) - \varphi(zay)| : z \in G\} = \sup\{|\varphi(wx) - \varphi(wy)| : w \in G\} = \sigma(x,y)$$

Donde $w = za \in G$

Por lo tanto σ es una pseudo-métrica invariante por izquierda en G.

Para demostrar (iii), supóngase que l es algún entero positivo, que $u \in V_{2^{-l}}$, y que $z \in G$. Si $z \in V_r$, entonces por (4), tenemos $zu \in V_{r+2^{-l+2}}$, por lo tanto $\varphi(zu) \leq \varphi(z) + 2^{-l+2}$. Similarmente si $zu \in V_r$, entonces $z \in V_r V_{2^{-l}}^{-1} \subset V_{r+2^{-l+2}}$ y por lo tanto $\varphi(z) = \varphi(zu) + 2^{-l+2}$.

Así $|\varphi(z) - \varphi(zu)| \leq 2^{-l+2}$ para $u \in V_{2^{-l}}$ y $z \in G$. Consecuentemente nosotros tenemos que $\sigma(u,e) \leq 2^{-l+2}$ para $u \in V_{2^{-l}}$, ya que σ es invariante por izquierda, multiplicando a izquiera por y concluímos que $\sigma(x,y) \leq 2^{-l+2}$siempre que $y^{-1}x \in V_{2^{-l}} = U_l$

Ahora probamos (i). Supóngase que x,y,x_1 y $y_1$son puntos de G para los cuales $y^{-1}x \in V_{2^{-l-1}}$ y $y_1^{-1}x_1 \in V_{2^{-l-1}}$, entonces $x_1^{-1}y_1y^{-1}x \in V_{2^{-l}}$ y

$$|\sigma(x,y) - \sigma(x_1,y_1)| = \left|\sigma(y^{-1}x,e) - \sigma(y_1^{-1}x_1,e)\right| \leq \sigma(y^{-1}x, y_1^{-1}x_1) = \sigma(x_1^{-1}y_1y^{-1}x,e) \leq 2^{-l+2}$$

esto prueba (i)

Ahora probaremos (iv). Supóngase que $y^{-1}x \notin U_l = V_{2^{-l}}$. Entonces $\varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}$ y también $\sigma(x,y) = \sigma(y^{-1}x,e) \geq \left|\varphi(ey^{-1}x) - \varphi(ee)\right| = \varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}$. Esto prueba (iv)

La afirmacion (ii) se sigue inmediatamente de (iii) y (iv) ya que si $y^{-1}x \in H = \cap_k U_k$, entonces por (iii) $\sigma(x,y) \leq 2^{-k+2}$para todo $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, supongase que $xU_kx^{-1} = U_k$ para $x \in G$ y $k = 1,2,...$ entonces $xV_rx^{-1} = V_r$ pues

$$V_r = V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}}...V_{2^{-l_n}} = U_{l_1}U_{l_2}...U_{l_n} = xU_{l_1}x^{-1}xU_{l_2}x^{-1}...xU_{l_n}x^{-1}$$

$$= xU_{l_1}U_{l_2}...U_{l_n}x^{-1} = xV_rx^{-1}$$

para todo número racional diádico $r > 0$, y por tanto $\varphi(xyx^{-1}) = \varphi(y)$ para todo $x,y \in G$. Asi para $a,x,y \in G$, tenemos

$$\sigma(xa,ya) = \sup\{|\varphi(zxa) - \varphi(zya)| : z \in G\}$$

$$\sup\{|\varphi(azx) - \varphi(azy)| : z \in G\}$$

$$\sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)| : z \in G\} = \sigma(x,y);$$

y asi σ es invariante por derecha. También para $x,y \in G$, tenemos,

$$\sigma(x^{-1},y^{-1}) = \sigma(e,y^{-1}x) = \sigma(y,x) = \sigma(x,y)$$

□

Teorema 5.46. *Sea G un grupo topológico T_0. Entonces G es metrizable sí solo sí, existe una base numerable de abiertos básicos en e.*

Demostración. Si G es metrizable, facilmente vemos que existe una base numerable de abiertos en e, pues podemos considerar la métrica d, y las bolas $B(e,r) =$

$\{x \in G : d(x,e) < r\}$, donde $r \in \mathbb{Q}$.

Supongamos ahora que $\{V_k\}$ es una base numerable de abiertos básicos de e. Sea $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$.Si $U_1, ..., U_{k-1}$ han sido definidos, sea U_k la vecindad simétrica de e tal que:

$$U_k \subset U_1 \cap \ldots \cap U_{k-1} \cap V_k \quad y \quad U_k^2 \subset U_{k-1}$$

Tales conjuntos existen por el Teorema 5.37

Asi la familia $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$satisface las hipótesis del Teorema 5.37 y $H = \cap_{k=1}^{\infty} U_k = \{e\}$ pues, probando por doble inclusion, tenemos $\{e\} \subset H$ de manera trivial y la otra inclusion $H \subset \{e\}$ procede de la siguiente manera.

Supongamos $x \in H$ tal que $x \neq e$ entonces por ser un espacio de Husdorff (Teorema 5.40) existen vecindades W_1y W_2 de x y e respectivamente tales que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, como W_2 es un entorno de e puede escribirse como unión de elementos de la base numerable $\{V_k\}$, es decir $W_2 = \cup_j V_j$, donde $j \in \Lambda$ familia numerable.

Por el Teorema 5.36 $\{xV_k\}$ es una base numerable para $x \in G$, entonces W_1 puede expresarse como union numerable de elementos de esta base, es decir $W_1 = \cup_i xV_i$, $i \in \Gamma$ familia numerable, entonces

$$W_1 \cap W_2 = (\cup_i xV_i) \cap \left(\cup_j V_j\right) = x \cup_{i,j} (V_i \cap V_j) \neq \emptyset$$

Pues $e \in V_i \cap V_j$

Sea σ la psudo-metrica invariante a izquierda como en el Teorema 5.44 para esta familia $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Claramente σ es una metrica, que es $\sigma(x,y) = 0$ si solo si $y^{-1}x \in H = \{e\}$, entonces $y^{-1}x = e \Rightarrow x = y$.

Luego del Teorema 5.44 (iii) y (iv) se sigue que

$$\left\{x \in G : \sigma(x,e) < 2^{-k}\right\} \subset U_k \subset \left\{x \in G : \sigma(x,e) \leq 2^{-k+2}\right\}$$

para $k = 1,2,...$

Esto implica inmeditamente por el Lema 2.15 que la topología definida mediante σ coincide con la topología dada de G. Ya que de la primera inclusión tenemos que dado un abierto U_k de la topología del grupo topologico G existe un abierto

$$A = \left\{x \in G : \sigma(x,e) < 2^{-k}\right\}$$

de la topolgía inducida por la métrica, incluido en U_k. De igual manera de la segunda inclusión notamos que dado un abierto de la topología inducida por la métrica, encontramos un abierto de la topología de G contenido. $\square$

Las siguientes definiciones y teoremas son extraídas del libro de Rudin (1991)

Definición 5.47. Espacio Localmente compacto
Un espacio topologico X se llama localmente compacto si para todo punto $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que su clausura $\overline{U}$ es un conjunto compacto.

Definición 5.48. Conjunto de Primera y Segunda Categoria de Baire
Sea X un espacio topológico, un conjunto $E \subset X$ es dicho nunca denso si su clausura $\overline{E}$ tiene interior vacio, es decir $int(\overline{E}) = \emptyset$

Los conjuntos es de $primera-categoria$ en X son aquellos que son la unión nunerable de conjuntos nunca densos, algún subconjuto de X que no es de $primera-categoria$ es llamado de $segunda-categoria$ en X.

Proposición 5.49. *Propiedades Basicas de Conjuntos de Primera Categoria de Baire*

1. *Si $A \subset B$ y B es de $primera - categoria$ en X, entonces A tambien es de $primera - categoria$.*

2. *Cualquier unión numerable de conjuntos de $primera - categoria$ es de $primera - categoria$.*

3. *Cualquier conjunto cerrado $A \subset X$ cuyo interior es vacío es de $primera - categoria$ en X.*

4. *Si h es un homeomorfísmo de X en X y si $A \subset X$, entonces A y $h(A)$ tienen la misma categoria en X.*

Teorema 5.50. *Sea $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_m \supset ...$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos, la intersección $K = \cap_{i=1}^{+\infty} K_i$ es no vacía.*

Demostración. Como cada $K_m \neq \emptyset$, $\exists x_m \in K_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, luego como son encajados existe una sucesión $(x_m) \subset K_1$ y como K_1es compacto existe una subsucesión $(x_{k_m}) \subset (x_m)$ tal que $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = a \in K_1$.

Sea $u \in \mathbb{N}$, como $K_1 \supset ... \supset K_u \supset ...$ entonces $x_{k_m} \in K_u \ \forall k_m > u$

Sea $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m \to j(m) = m + u$, entonces $x_{k_{jm}} \in K_u$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y como $\left(x_{k_{jm}}\right) \subset (x_{k_m})$ y $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = a$, entonces $a \in \overline{K}_u = K_u$, y como $u \in \mathbb{N}$ (arbitrario),

entonces $a \in K_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, luego $a \in \cap_{j=1}^{\infty} K_j$ □

Teorema 5.51. *Teorema de Baire*

Si X es un espacio métrico completo, o X es un espacio Haussdorf localmente compacto, entonces la intersección de cada colección numerable de subconjuntos densos de X es denso en X

Esto es a menudo llamado el teorema de categoria, por la siguiente razón.

Si $\{E_i\}$ es una colección numerable de subconjuntos nunca densos de X, y si V_i es el complemento de $\overline{E_i}$, entonces cada V_i es denso,

(pues $V_i = \left(\overline{E}_i\right)^c$, y $\overline{X - \overline{E_i}} = X \Longrightarrow \overline{X - \overline{E_i}} = \overline{X \cap (\overline{E}_i)^c} = \overline{X \cap V_i} = \overline{V_i} = X$)

y por el Teorema de Baire se tiene que $\cap V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto $X \neq \cup E_i$, pues:

$\exists x \in \cap V_i \Longrightarrow x \in V_i$ para cada i, entonces $x \in \left(\overline{E}_i\right)^c$, es decir $x \notin \overline{E}_i \Longrightarrow x \notin E_i$, luego $\exists x \in X$ tal que $x \notin E_i$

Por lo tanto, el espacio métrico completo, como también el espacio Haussdorf localmente compacto, son de $segunda - categoria$ en ellos mismos.

Demostración. Supongase $V_1, V_2, V_3, ...$son subconjuntos abiertos densos de X. Sea B_0 un conjunto en X abierto, no vacío arbitrario. Si $n \geq 1$ y un abierto $B_{n-1} \neq \emptyset$ ha sido escogido, entonces existe un abierto $B_n \neq \emptyset$, [pues, V_n y B_{n-1} son abiertos, entonces $V_n \cap B_{n-1}$es abierto] [ya que V_n es denso, entonces $V_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$] con:

$$\overline{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}$$

En el caso de X espacio meérico completo, B_n puede ser tomado como una bola de radio $< 1/n$; en el caso de X espacio de Haussdorf localmente compacto, B_n puede escogerse de manera que $\overline{B_n}$ es compacto. Colocamos:

$$K = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

En el caso de X espacio métrico completo, los centros $x_n$de las bolas anidadas B_n forman una sucesión de cauchy [ya que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_n$, $n \geq N$] , que converge a algún punto de K,[pues es un espacio completo, toda sucesión de cauchy es convergente] y asi $K \neq \emptyset$

En el caso de X espacio de Haussdorf localmente compacto, $K \neq \emptyset$ (por Teorema 5.49). Nuestra construcción muestra que $K \subset B_0$ y $K \subset V_n$ para cada n. Por lo tanto B_0intersecta a $\cap V_n$ [pues $\emptyset \neq K \cap (\cap V_n) \subset B_0 \cap (\cap V_n)$] $\square$

Definición 5.52. Equicontinuidad en Espacios Vectoriales Topológicos

Supongase que X e Y son espacios vectoriales topológicos, y $-$ es una colección de aplicaciones lineales de X en Y. Diremos que Γ es *equicontinuo*, si para cada vecindad W de 0 en Y, existe una vecindad V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.

Teorema 5.53. *Supongase que X,Y son espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de aplicaciones lineales de X en Y equicontinua, y E es un subconjunto acotado de X. Entonces Y tiene un subconjuto acotado F tal que $\Lambda(E) \subset F$ para cada $\Lambda \in \Gamma$.*

Demostración. Sea F la unión de los conjuntos $\Lambda(E)$, para $\Lambda \in \Gamma$. Sea W una vecindad de 0 en Y . Ya que Γ es equicontinuo, existe una vecindad V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para todo $\Lambda \in \Gamma$. Ya que E es acotado, $E \subset tV$ para todo t suficientemente grande, para ese t

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW,$$

[$\Lambda(tV) = t\Lambda(V)$ por linealidad]. Así se tiene que $F \subset tW$, por lo tanto F es acotado. $\square$

Teorema 5.54. *Teorema de Banach-Steinhaus*

Sea X e Y espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de aplicaciones lineales contínuas de X en Y, y B es el conjunto de todos los $x \in X$, cuyas orbitas

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

son acotadas en Y

Si B es de $segunda - categoria$ en X, entonces $B = X$ y Γ es equicontinuo.

Demostración. Tomemos una vecindad balanceada W y U de 0 en Y tal que, $\overline{U}+\overline{U}\subset W$. [lo cual es posible mediante la proposición 2.31 y 2.32]. Colocamos

$$E=\cap_{\Lambda\in\Gamma}\Lambda^{-1}(\overline{U})$$

Si $x\in B$, entonces $\Gamma(x)\subset nU$ para algún n, de manera que $x\in nE$. [pues $\Lambda(x)\subset nU\ \forall\Lambda\in\Gamma\Rightarrow x\in\Lambda^{-1}(nU)\Rightarrow x\in n\Lambda(U)$] .Consecuentemente

$$B\subset\cup_{n=1}^{\infty}nE$$

Al menos un nE es de $segunda-categoria$ en X, pues B lo es, [ya que $B\subset nE$ y supongamos que nE es de $primera-categoria$, entonces por 5.48-(1) B sería de $primera-categoria$, lo cual es una contradicción].

ya que $x\to nx$ es un homeomorfísmo de X en X, E es de $segunda-categoria$ en X [Por 5.38-(iv)] Pero E es cerrado [pues es intersección de cerrados] por que Λ es contínuo, por lo tanto E tiene un punto interior x. [Pues si $int(E)=\emptyset$, entonces seria de $primera-categoria$].

Entonces $x-E$ contine una vecindadad V de 0 de X, y

$$\Lambda(V)\subset\Lambda x-\Lambda(E)\subset\overline{U}-\overline{U}\subset W$$

para cada $\Lambda\in\Gamma$

Esto prueba que Γ es equicontinuo, mediante el Teorema 5.51, Γ es uniformemente acotado, en particular, cada $\Gamma(x)$ es acotado en Y, por lo tanto $B=X$. □

La siguiente definición es estraída del trabajo de investigación de (Litvinov, 2011)

Teorema 5.55. *Equicontinuidad para Grupos topologicos*

Sea X e Y grupos topológicos. La familia de homomorfísmos $a_\lambda : X \to Y$, $\lambda \in \Lambda$, es llamado equicontinuos, si para cada vecindad abierta W de el elemento identidad en Y, existe una vecindad abierta V del elemento identidad en X tal que $a_\lambda(V) \subset W$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

5.2. Teorema de Banach-Steinhaus para Grupos Topológicos

La siguiente desmostración generaliza el teorema de Banach-Steinhaus en el caso en el que el espacio base es un grupo topologico.

Sea $(X, *, \tau)$ un grupo topológico de $segunda-categoria$ de baire, y sea $(Y, \|.\|)$ un espacio normado. Si $a_\lambda : X \to Y$ es un homomorfísmo contínuo para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x)\| < \infty$ para todo $x \in X$, entonces la familia $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$es equicontinua.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$, para $L \in \mathbb{N}$, sea $B_L = \{y \in Y : \|y\| \leq L\}$ y colocamos

$$X_L = \cap_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda^{-1}(B_L)$$

Entonces X_L es cerrado para cada L. [Pues B_L es cerrado (bola cerrada de centro 0), y a_λ es continua, luego X_L es intersección arbitraria de cerrados]. También tenemos que

$$X = \cup_L X_L$$

[Probando por doble inclusión, la inclusión $\cup_L X_L \subset X$ es trivial, (pues $X_L \subset X$),

para probar la inclusión $X \subset \cup_L X_L$, sea $x \in X$, entonces $a_\lambda(x) = y_\lambda \in Y$, además $y_\lambda \in B_L$ para algún L. Luego $a_\lambda^{-1}(y_\lambda) \in X_L$ para algún L, y por tanto $x \in \cup_L X_L$]

Usando la hipótesis que X es de $segunda-categoria$ de baire, al menos existe un X_{L_0} de $segunda-categoria$, pues si todos los X_L fueran de $primera-categoria$, entonces por 5.48 -(2) X sería de $primera-categoria$

lo cual es una contradicción, entonces sabemos que existe un L_0 tal que X_{L_0} contiene un conjunto abierto, no vacío.

Por lo tanto, $a_\lambda(U) \subset B_{L_0}$, $\lambda \in \Lambda$, para algún abierto no vacío $U \subset X_{L_0} \subset X$. Así concluimos que

$$\widehat{a}(x) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x)\| \leq L_0 \qquad para\,cada\,x \in U$$

Note que, mediante la desigualdad triangular y el hecho de que cada a_λ es un homomorfísmos, tenemos

$$\widehat{a}(x*z) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x*z)\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x)+a_\lambda(z)\| \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x)\| + \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(z)\| = \widehat{a}(x)+\widehat{a}(z)$$

$$\widehat{a}(x*z) \leq \widehat{a}(x)+\widehat{a}(z) \qquad para\,todo\,x,z \in X \quad (1)$$

elegimos $x_0 \in U$, y sea V una vecindad abierta de e, tal que $x_0 * V \subset U$, lo cual es posible ya que U es abierto. Si $x \in V$, entonces $x_0 * x \in U$, que junto con el hecho que,

$$\widehat{a}(x_0^{-1}) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \left\|a_\lambda(x_0^{-1})\right\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \left\|a_\lambda(x_0)^{-1}\right\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|-a_\lambda(x_0)\| = \widehat{a}(x_0)$$

y de (1), tenemos,

$$\widehat{a}(x) \leq \widehat{a}(x_0^{-1}) + \widehat{a}(x_0 * x) \leq 2L_0$$

Ahora sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2L_0}{m} < \varepsilon$, lo cual es posible debido a la propiedad arquimediana y sea $\mathscr{O}$ una vecindad abierta de e para la cual $\mathscr{O}^m \subset V$.

Tal vecindad existe, ya que existe al menos un $x \in V$ tal que existe $a \in G$ de tal manera que $x = a^m \in V \subset G$ por ser un grupo. Entonces si $x \in \mathscr{O}$, entonces $x^m \in V$, y obtenemos

$$m\widehat{a}(x) = \widehat{a}(x^m) \leq 2L_0$$

que implica que $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda(x)\| = \widehat{a}(x) < \varepsilon$. Asi, para un $\varepsilon > 0$ dado, podemos encontrar una vecindad abierta $\mathscr{O}$ de e tal que $\|a_\lambda(x)\| < \varepsilon$ para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo cual la familia $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es equicontinua. □

5.3. Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus

Teorema 5.56. *Sea $(X, *, \tau)$ un grupo topológico de segunda $-$ categoria de Baire, y sea $(Y, \|.\|)$un espacio de Banach. Para la sucesión $a_n : X \to Y$ de homomorfísmos contínuos, considere las siguientes condiciones*

1. *La sucesion $\{a_n(x)\}$converge para cada $x \in X$;*

2. $\widehat{a}(x) = \sup_n \|a_n(x)\| < \infty$ *para cada $x \in X$;*

3. *El operador $\widehat{a} : X \to \mathbb{R}$ es contínuo en e;*

4. *El conjunto $C = \{x \in X : \{a_n(x)\}\, convergente\}$ es cerrado en X;*

Entonces se dan las implicaciones $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$. *Si en además, la sucesión $\{a_n(x)\}$ converge para cada x en un subconjunto denso de X, entonces las condiciones* $(1) - (2)$ *son equivalentes.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$, como $\{a_n(x)\}$ converge para cada $x \in X$, entonces es acotada para cada $x \in X$, es decir $\|a_n(x)\| < k$, $k < \infty$, entonces $\sup\limits_n \|a_n(x)\| < k$ para cada $x \in X$

$(2) \Rightarrow (3)$, usando el Teorema 5.2.1, la familia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, es decir para cada W vecindad de e en Y, existe V, vecindad de e en X tal que $a_n(V) \subset W$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $\widehat{a} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\widehat{a}(x) = \sup\limits_n \|a_n(x)\|$, como cada a_n es contínua en e, la aplicación $\|.\|$ es contínua, y el supremo de funciones continuas es contínua, entonces $\widehat{a}$ es contínua en e.

$(3) \Rightarrow (4)$ Sea $\overline{x} \in \overline{C}$ y sea $\varepsilon > 0$ (fijo). Usando la continuidad de $\widehat{a}$ en e, podemos encontrar una vecindad abierta $\mathscr{O}$ de e tal que

$$\widehat{a}(x) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad paratodo x \in \mathscr{O}$$

seguimos que existe una vecindad V de $\overline{x}$ satisfaciendo la condicion $\overline{x}^{-1} * V \subset \mathscr{O}$. En este caso, es posible econtrar $z_0 \in C$, [pues $V \cap C \neq \emptyset$] para el cual $x_0 = \overline{x}^{-1} * z_0 \in \mathscr{O}$, asi tenemos

$$\sup_n \|a_n(x_0)\| = \widehat{a}(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ademas, ya que $\overline{x} * x_0 = z_0 \in C$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_m(\overline{x} * x_0) - a_n(\overline{x} * x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad m,n \geq N$$

Ahora, para $m,n \geq N$, y debido al homomorfísmo, tenemos

$$a_m(\overline{x} * x_0) = a_m(\overline{x}) + a_m(x_0)$$

$$a_n(\overline{x} * x_0) = a_n(\overline{x}) + a_n(x_0)$$

Entonces,

$$\|a_m(\overline{x}) - a_n(\overline{x})\| \leq \|a_m(\overline{x} * x_0) - a_n(\overline{x} * x_0)\| + \|a_m(x_0)\| + \|a_n(x_0)\| < \varepsilon$$

Que implica que la sucesión $\{a_n(\overline{x})\}$ es convergente, pues Y es un espacio de Banach. Asi $\overline{C} = C$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Teorema 5.57. *Sea* $(Y, \|.\|)$*es un espacio normado, y* X *y* $\{a_n\}$ *como en el teorema anterior. Si para cada* $x \in X$*, existe* $y_x \in Y$ *satisfaciendo* $\lim_{n\to\infty} \|a_n(x) - y_x\| = 0$*, entonces el operador* $a : X \to Y$ *dado de la siguiente manera* $a(x) = y_x$*,* $x \in X$*, es un homomorfísmo contínuo.*

Demostración. Ya que la sucesión $\{a_n(x)\}$ converge para cada $x \in X$, la condicion (1) del Teorema 5.55 es satisfecha, lo cual implica que el operador a es contínuo en e.

Por lo tanto, ya que $a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)$ y, consecuentemente

$$\|a(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\| \leq \sup_n \|a_n(x)\| = \widehat{a}(x)$$

En consecuencia $\lim\limits_{x\to e_X} \|a(x)\| = 0 \Rightarrow \left\| \lim\limits_{x\to e_X} a(x) \right\| = 0$, pues $\|.\|$ es una aplicación contínua y por la definición de norma, implica que,

$$\lim_{x\to e_X} a(x) = e_Y = a(e_X)$$

y por tanto a es continua en e, y por tanto en X, [Pues la traslación es un homeomorfísmo] $\square$

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

El teorema de Banach-Steinhaus clásico, definido sobre espacios vectoriales topologicos, el cual es extraido del libro de Rudin (1991) nos dice lo siguiente:

Sea X e Y espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de aplicaciones lineales contínuas de X en Y, y B es el conjunto de todos los $x \in X$, cuyas orbitas

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

son acotadas en Y

Si B es de $segunda-categoria$ en X, entonces $B = X$ y Γ es equicontinuo.

Si decidimos cambiar el espacio vectorial X por un grupo topologico, y el espacio vectorial Y por un espacio normado, esto tiene mucho sentido ya que anteriormente ha sido probado el teorema de Banach-Steinhaus para espacios normados, el cual es ampliamente conocido y su demostración se encuentra presente en cualquier literatura matemática sobre temas de análisis funcional, y reemplazamos las aplicaciones lineales continuas de X en Y por homomorfimos equicontinuos obtenemos el siguiente teorema el cual fue planteado como hipotesis y demostrado en el capítulo anterior

Sea $(X,*,\tau)$ un grupo topológico de $segunda-categoria$ de baire, y sea $(Y,\|.\|)$ un espacio normado. Si $a_\lambda : X \to Y$ es un homomorfísmo contínuo para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup_{\lambda\in\Lambda}\|a_\lambda(x)\| < \infty$ para todo $x \in X$, entonces la familia $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$es equicontinua.

Otra forma de presentar el teorema clásico de Banach-Steinhaus, que nos ayuda a notar más la diferencia entre el resultado para grupos topologicos es el siguiente

"Supóngase que E y F son espacios vectoriales topológicos, sea $F = \{E \to F : f\, una\, aplicacion\, lineal\, continua\}$ y sea B el conjunto de todo los elementos $x \in E$ tal que el conjunto $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ es acotado en F

6.2. Contrastación de los resultados con estudios similares

En esta sección del desarrollo de este trabajo, es oportuno precisar que la presente tesis esta basada en el artículo titulado "ON THE BANACH-STEINHAUS THEOREM FOR TOPOLOGICAL GROUPS"desarrollador por Semyon N. Litvinov.

Tomando como marco referencial el trabajo de Litvinov (2011) el desarrollo de la presente tesis radica en garantizar y desmenuzar de forma clara y precisa la equicontinuidad de la familia de homomorfísmos $\{a_\lambda : X \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$; donde X es un grupo topológico e Y es un espacio normado, para lo cual se ha utilizado conjuntos de segunda categoria de Baire.

En Julio del 2004, el mismo autor en uno de sus artículos presenta un resultado con cierta analogía sobre la maximilidad y continuidad de un operador $a^* : X \to M$, donde

$$a^*(x)(w) = \sup_n |a_n(x)(w)| < \infty\, y\ \{a_n : X \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Con X grupo topológico y M espacio medible.

De otro lado y en este mismo contexto, el Teorema de la acotacion Uniforme, que tiene estrecha relación con el Teorema de Banach-Steinhaus; fue el propio Hugo Steinhaus quien demostró en el caso general, y en particular fue Toeplitz quien demostró el principio de acotación uniforme, al considerar los funcionales como matrices.

Podemos contrastar nuestros resultados también con lo obtenido por Pombo (2013) quien probó el mismo teorema, pero cuando el espacio base es un módulo topologico, cabe recordar que un módulo algebraico esta basado en la estructura de un grupo, de ahi la inferencia algebraica ocurre rápidamente, por otro lado, la topología sobre el modulo se define de manera muy análoga, estableciendo que un módulo topológico es un módulo bajo un anillo topológico tal que las operaciones de multiplicación por un escalar y la adición son continuas.

Además se puede tomar como referencia de comparación el trabajo de Rivas (2017) en el cual se realiza la desmotración del teorema de Baire y se hace un estudio profundo de todas sus implicancias, dentro de ellas, el teorema clásico de Banach-Steinhaus donde el espacio de partida es un espacio de Banach y el espacio de llegada es un espacio normado (Pág 50-52)

6.3. Responsabilidad ética

Para garantizar la calidad ética del presente proyecto se destacan como aspecto fundamentales a tomar en cuenta en el desarrollo de la investigación los siguientes componentes, los cuales contribuyen a que exista un cuidado riguroso de la calidad y el estándar científico.

Transparencia del investigador

La responsabilidad ética del presente trabajo de tesis recae en haber seguido fielmente las bases estipuladas por la universidad para la presentación de un proyecto de investigación, sin ánimo de obtener provecho del mismo, ni buscando algún vacío legal del cual pudiera concretarse alguna ventaja, si no por el contrario, intentando brindar un aporte de conocimientos que puedan ser de utilidad para la Universidad Nacional del Callao y en particular para nuestra amada facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Valor científico o social

Para ser ética una investigación debe tener valor, lo que representa un juicio sobre la importancia social y/o científica. La investigación debe plantear una intervención que conduzca a mejoras en las condiciones de vida o el bienestar de la población, o en el caso de ciencias puras como esta, que produzca conocimiento que pueda abrir oportunidades de superación o solución a problemas, aunque no sea en forma inmediata, tal y como lo realiza la presente investigación

Validez científica

Una investigación valiosa puede ser mal diseñada y consecuentemente mal realizada, por lo cual los resultados son poco confiables o inválidos, la mala ciencia no es ética. La búsqueda de la validez científica plantea los siguientes puntos a seguir:

- Un método de investigación coherente con el problema y de acorde al área de estudio en concreto, seleccionar correctamente los instrumentos y herramientas de análisis y recolección de datos así como plantear los objetivos claros y precisos, tal como se hizo en la presente investigación

- Un marco teórico basto, basado en fuentes bien documentadas, de validez reconocida, las cuales puedan dar una sólida base de conocimientos que permitan inferir en la solución del problema, en este proyecto la recolección de datos fue obtenida de bibliografía confiable o trabajos de investigación.

- Un lenguaje cuidadoso empleado para comunicar de manera certera y sin vaguedad en el desarrollo del informe; además este debe ser capaz de reflejar el proceso de la investigación y debe cultivar los valores científicos.

Evaluación independiente

Los investigadores, como todo ser humano, en ocasiones desatan conflictos internos de interés, ya sean estos sociales, económicos, o de muchas otras índoles, ello puede distorsionar y sesgar sus juicios de valor en lo referente al diseño y la realización de la investigación, o al análisis de la información recabada en el trabajo de campo, para aquellas investigaciones que lo requieran.

Una manera de reducir al mínimo el impacto potencial de estos intereses es la revisión de la investigación por personas conocedoras, que no están unidas al proyectos y las cuales tienen autoridad científica y moral para aprobar, corregir o incluso rechazar la investigación, es por ello que la presente tesis fue sometida a un proceso de análisis y corrección durante todo su desarrollo, además de la sustentación por parte del tesista y la evolución meticulosa de un jurado experto.

CONCLUSIONES

(a) En este trabajo: El Teorema de Banach-Steinhaus sobre grupos topológicos, establece la equicontinuidad de una familia de homomorfísmos $\{a_k\}_{k\in\Lambda}$ actuando sobre un grupo topológico con valores en un espacio normado.

(b) El teorema estudiado y detallado en el presente trabajo permite que la convergencia: $a_n(x) \to y_x = a(x)$ implique que el operador $a : X \to Y$ sea continuo.

(c) En este trabajo presentamos una cierta generalización del teorema de Banach-Steinhaus, expresado de la siguiente manera:

Sea $(X, *, \tau)$ un grupo topológico de $segunda - categoria$ de baire, y sea $(Y, \|.\|)$ un espacio normado. Si $a_\lambda : X \to Y$ es un homomorfísmo contínuo para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda(x)\| < \infty$ para todo $x \in X$, entonces la familia $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$es equicontinua.

detallando en forma clara y precisa su demostración

RECOMENDACIONES

La demostracion del teorema de Banach-Steinhaus trae consigo muchas implicancias además de un sinnumero de corolarios y aplicaciones, podría incluso tentarse la demostracion del teorma de la apliacion abierta y la grafica cerrada, las cuales son derivados directamente del teorema clasico de Banach-Steinhaus sobre espacios normados; de todos estos posibles corolarios nosotros solo hemos cogido dos, dejando la posibilidad de explotar este trabajo a futuro y encontrar muchas más implicancias, tomando como base los resultados de esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] *Baire, R. (1899). Sur les fonctions de variables reelles. Milan: Faculté Des Sciences.*

[2] *Badiou, A. (2008). Number and Numbers. Malden, USA: Polity Press.*

[3] *Banach, S. (1930). Théorème sur les ensembles de première catégorie. Fundamenta Mathematicae, 395-398.*

[4] *Herstein, I. N. (1983). Álgebra Moderna. México D.F.: Editorial Trillas, Sexta impresión.*

[5] *Hewitt, E., & Ross, K. (1963). Abstract Harmonic Analysis. Berlin: Springer-Verlag, vol. I.*

[6] *Lewandowska, Z. (2003). Banach-Steinhaus theorems for bounded linear operators with values in generalized 2-normed space. Glasnik Matematicki, 331 – 342.*

[7] *Litvinov, S. (2005). The Banach Principle for Topological Groups. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio, 323–330.*

[8] *Litvinov, S. (2011). On the Banach-Steinhaus Theorem for Topological Groups. The American Mathematical Monthly, 118, 836-839.*

[9] *Munkres, J. (2002). Topología. Madrid: Pearson Educación S.A, 2nd ed.*

[10] *Pombo, D. (2013). On the Banach-Steinhaus Theorem. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 229 - 235.*

[11] *Rivas Mamani, M. A. (2017). Los resultados fundamentales del Análisis Funcional como consecuencia del teorema de la Categoría de Baire. Puno: Universidad Nacional del Altiplano.*

[12] *Rosell Escobar, j. (2006). El Teorema de la Acotación Uniforme. Murcia: Universidad de Murcia.*

[13] *Royden, H., & Fitzpatrick, P. (2010). Real Analysis. Boston: Prentice Hall, 4ta ed.*

[14] *Rudin, W. (1991). Functional Analysis. New York: McGraw Hill, 2da ed.*

[15] *Salgado Matias, E. (2016). Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire. México, Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.*