

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA DE POSGRADO

**UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE
INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO
INTERACTIVO A PARTIR DEL MÉTODO MEJORADO DE NEWTON Y LA
MEJORA DEL PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS SISTEMAS DE
INFORMACIÓN, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2023”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

AUTOR:

MG. ROCHA FERNÁNDEZ, VÍCTOR EDGARDO

ASESOR:

DR. FERNANDO MENDOZA APAZA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Callao, 2024

PERÚ

TESIS_ROCHA_FERNADEZ_VE

4%
Textos sospechosos



4% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas
< 1% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: TESIS_ROCHA_FERNADEZ_VE.pdf
ID del documento: 9b41c7ba123c8ee8a5e1468877c926969475bba7
Tamaño del documento original: 1,33 MB

Depositante: FIEE PREGRADO UNIDAD DE INVESTIGACION
Fecha de depósito: 14/6/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 14/6/2024

Número de palabras: 35.689
Número de caracteres: 188.421

Ubicación de las similitudes en el documento:



Fuentes de similitudes

Fuentes principales detectadas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	PT CHAVEZ FERNANDEZ RAMOS.pdf PT CHAVEZ FERNANDEZ RAMOS #c8f76a El documento proviene de mi biblioteca de referencias 2 fuentes similares	1%		Palabras idénticas: 1% (324 palabras)
2	Tesis final ORTIZ ROJAS YOVERA.pdf Tesis final ORTIZ ROJAS YOVERA #21a6be El documento proviene de mi biblioteca de referencias	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (282 palabras)
3	PT AGUERO_NAVARRO_POMA.pdf PT AGUERO_NAVARRO_POMA #dfb508 El documento proviene de mi biblioteca de referencias	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (259 palabras)
4	repositorio.unac.edu.pe http://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/20.500.12952/7399/1/TM_FIS-QUINTANA QUIspe SONIA Y ... 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (104 palabras)
5	burjcdigital.urjc.es https://burjcdigital.urjc.es/bitstream/10115/20112/5/ApuntesTeoriaMetMatIng.pdf.txt 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (115 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	repositorio.cientifica.edu.pe https://repositorio.cientifica.edu.pe/bitstream/20.500.12805/2694/1/TL-Tarrillo J-Ext.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (14 palabras)
2	unac.edu.pe https://unac.edu.pe/wp-content/uploads/documentos/transparencia/articulo-11/11-2/transparencia-...	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (22 palabras)
3	unac.edu.pe https://unac.edu.pe/wp-content/uploads/documentos/transparencia/articulo-11/11-2/transparencia-...	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)
4	www.em-consulte.com Novel information and communication technology syste... https://www.em-consulte.com/article/1271049/novel-information-and-communication-technology-sys	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (20 palabras)
5	dspace.unach.edu.ec http://dspace.unach.edu.ec/bitstream/51000/9967/1/2_341_final.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (16 palabras)

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD	FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA.
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN	DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA.
TÍTULO	MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO INTERATIVO A PARTIR DEL MÉTODO MEJORADO DE NEWTON Y LA MEJORA DEL PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2023
AUTOR(ES)	ROCHA FERNÁNDEZ, Víctor Edgardo CÓDIGO ORCID: 0000-0002-5381-7730
ASESOR	DR. MENDOZA APAZA, Fernando CÓDIGO ORCID: 0000-0001-7981-8291
LUGAR DE EJECUCIÓN	UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
TIPO DE INVESTIGACIÓN	TIPO APLICADA, CUANTITATIVO, NIVEL DESCRIPTIVO - CORRELACIONAL CAUSAL.
UNIDADES DE ANÁLISIS	LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD DEL CALLAO, PERÚ 2023
DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	PRE EXPERIMENTAL
TEMA OCDE	INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

MIEMBROS DE LJURADO EVALUADOR

- DR. JACOB ASTOCONDOR VILLAR PRESIDENTE
- DR. ADAN ALMIRCAR TEJADA CABANILLAS SECRETARIO
- DR. SANTIAGO LINDER RUBIÑOS JIMENEZ MIEMBRO
- DR. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS MIEMBRO

ASESOR

DR. FERNANDO MENDOZA APAZA

Nº de Libro: 001

Nº de Folio: 144

Nº de Acta 08-2024 UPFIEE

Fecha de Sustentación: 10 de Julio del 2024

DEDICATORIA

Dedico esta Tesis a mi Madre, por haberme enseñado con el ejemplo, la perseverancia en el logro de nuestros objetivos, respetando a todas las personas mostrando prudencia e inteligencia, a quien mis hermanos y yo honramos por las muestras de amor que seguimos recibiendo.

A mi padre, que Dios lo tiene en su Gloria.

AGRADECIMIENTO

Mi sincero agradecimiento a mi Asesor Dr. Fernando Mendoza Apaza por su apoyo, críticas y sugerencias; asimismo mi agradecimiento al Dr. Santiago Linder Rubiños Jiménez por su apoyo desinteresado en el logro de la presente Tesis.

Un grandísimo agradecimiento a la Sra. Silvia Martínez Gamarra por su gran apoyo laboral, moral y material en la realización de esta Tesis desde el inicio hasta el final.

Dios los bendiga.

ÍNDICE

ÍNDICE	1
ÍNDICE DE TABLAS	3
ÍNDICE DE FIGURAS.....	4
ÍNDICE DE ESQUEMAS.....	5
RESUMEN.....	6
RIEPILOGO	7
RESUMO	8
INTRODUCCIÓN	9
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	11
1.1. Descripción de la realidad problemática.....	11
1.2. Formulación del Problema	14
1.3. Objetivos.....	14
1.4. Justificación	15
1.5. Limitantes de la Investigación	17
II. MARCO TEÓRICO.....	19
2.1. Antecedentes: Internacionales y Nacionales.....	19
2.2. Bases Teóricas	25
2.3. Marco Conceptual.....	53
2.4. Definición de Términos básicos	56
III. HIPÓTESIS Y VARIABLES	58
3.1. Hipótesis	58
3.2. Definición Conceptual de Variables	59
3.2.1. Operacionalización de Variables	60
Fuente propia.....	60
IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO	61
4.1. Tipo y diseño de Investigación	61
4.2. Método de Investigación	61
4.3. Población y muestra	62
4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado	63
4.5. Técnicas e Instrumentos para la recolección de la información.....	63
4.6. Análisis y procesamiento de datos	64
4.7. Aspectos Éticos	66

V. RESULTADOS	67
5.1. Resultados descriptivos	67
5.2. Resultados inferenciales	71
VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	77
6.1. Contrastación y demostración de las hipótesis con los resultados	77
6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares	79
6.3. Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes.....	81
VII. CONCLUSIONES.....	82
VIII.RECOMENDACIONES	83
IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84
ANEXOS.....	90
Matriz de Consistencia.	90
Instrumento de recolección de datos	93
CUESTIONARIO DEL PROCESAMIENTO DE DATOS.....	95
FICHA DE EVALUACIÓN	97
Validación de instrumentos	98
Validación de instrumentos.....	100
Base de datos.....	101
APÉNDICE	102
1. EL OPERADOR DIFERENCIAL.....	102
2. DERIVADA DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.....	105
3. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES 2×2	106
4. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES 3×3	113
5. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES $n \times n$	119
6. NORMAS EN \mathbb{R}^n	121
7. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES 2×2 ES DE ORDEN TRES 122	
8. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEALDE ECUACIONES 3×3 ES DE ORDEN TRES128	
9. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES $n \times n$ ES DE ORDEN TRES 142	

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Matriz de operacionalización de las variables	60
Tabla 2. Validación del instrumento de recolección de datos por juicio de expertos.....	64
Tabla 3 <i>Descriptivos del Procesamiento de datos de los sistemas de información - Pre Test vs Post Test</i>	67
Tabla 4 <i>Descriptivos del nivel de rapidez - Pre Test vs Post Test</i>	68
Tabla 5 <i>Descriptivos del Nivel de capacidad de respuesta - Pre Test vs Post Test</i>	69
Tabla 6 <i>Descriptivos del nivel de reducción de tiempo - Pre Test vs Post Test</i>	70
Tabla 7 <i>Prueba de Normalidad de Shapiro Wilks</i>	71
Tabla 8 <i>Prueba de Homogeneidad de Bartlett</i>	72
Tabla 9 <i>Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Procesamiento de datos - Pre vs Post</i>	73
Tabla 10 <i>Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de rapidez - Pre vs Post</i>	74
Tabla 11 <i>Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de capacidad de respuesta - Pre vs Post</i>	75
Tabla 12 <i>Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de reducción de tiempo - Pre vs Post</i>	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 <i>Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Procesamiento de datos</i>	68
Figura 2 <i>Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Rapidez</i>	69
Figura 3 <i>Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Capacidad de respuesta</i>	70
Figura 4 <i>Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Reducción de tiempo</i>	71

ÍNDICE DE ESQUEMAS

ESQUEMA N° 01: ESQUEMA DEL ALGORITMO DE NEWTON.....	12
ESQUEMA N° 02: ESQUEMA DE UNA PROPUESTA DEL ALGORITMO DE NEWTON MEJORADO Y GENERALIZADO.....	13
ESQUEMA N° 03: DEL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES	141

RESUMEN

El objetivo de la investigación fue Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información. La metodología utilizada fue de enfoque cuantitativo, de nivel descriptivo correlacional, de tipo aplicada. Los resultados mostraron una significancia de ($\text{sig.} = 0,00$), situándose por debajo del umbral de 0.05. Este hallazgo proporciona evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, lo que confirma que la implementación de un modelo matemático generalizado influye en la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información. Específicamente, se observó que el tiempo promedio de procesamiento de datos disminuyó de 121.38 ms a 84.75 ms tras la implementación del modelo. Se concluyó que estos resultados sólidos confirman la influencia positiva y efectiva del modelo en la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información, destacando su relevancia para optimizar la eficiencia operativa y competitividad organizacional.

Palabras claves: *modelamiento matemático, algoritmo, procesamiento de datos.*

RIEPILOGO

L'obiettivo della ricerca era determinare l'influenza dell'implementazione di un modello matematico di un algoritmo generalizzato, costruito a partire dal metodo migliorato di Newton, per risolvere iterativamente sistemi di equazioni non lineari, nel migliorare l'elaborazione dei dati dei sistemi informativi. La metodologia utilizzata è stata di tipo quantitativo, di livello descrittivo correlazionale, di tipo applicato. I risultati hanno mostrato una significatività inferiore alla soglia di 0,05. Questo risultato fornisce prove statistiche per rifiutare l'ipotesi nulla, confermando che l'implementazione di un modello matematico generalizzato influenza il miglioramento dell'elaborazione dei dati nei sistemi informativi. Nello specifico, è stato osservato che il tempo medio di elaborazione dei dati è diminuito da 121,38 ms a 84,75 ms dopo l'implementazione del modello. Si è concluso che questi solidi risultati confermano l'influenza positiva ed efficace del modello nel migliorare l'elaborazione dei dati nei sistemi informativi, evidenziandone l'importanza per ottimizzare l'efficienza operativa e la competitività organizzativa.

Parole chiave: modellazione matematica, algoritmo, elaborazione dati.

RESUMO

O objetivo da pesquisa foi determinar a influência da implementação de um modelo matemático de um algoritmo generalizado, construído a partir do método aprimorado de Newton, para resolver iterativamente sistemas de equações não lineares, na melhoria dos sistemas de processamento de dados de informação. A metodologia utilizada foi uma abordagem quantitativa, nível descritivo correlacional, tipo aplicado. Os resultados mostraram uma significância de ($\text{sig.} = 0,00$), estando abaixo do limite de 0,05. Essa descoberta fornece evidência estatística para rejeitar a hipótese nula, que confirma que a implementação de um modelo matemático generalizado influencia na melhoria do processamento de dados em sistemas de informação. Especificamente, observou-se que o tempo médio de processamento de dados diminuiu de 121,38 ms para 84,75 ms após a implementação do modelo. Concluiu-se que esses resultados sólidos confirmam a influência positiva e eficaz do modelo na melhoria do processamento de dados em sistemas de informação, destacando sua relevância para otimizar a eficiência operacional e competitividade organizacional.

Palavras-chave: modelagem matemática, algoritmo, processamento de dados.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, los progresos tecnológicos y científicos se están dando sin precedentes, por lo que la optimización de algoritmos y el procesamiento eficiente de datos han adquirido una relevancia determinante. Así mismo, la demanda respecto a la necesidad de soluciones prácticas y eficaces en la mejora de las bases de datos, subrayan la urgencia de realizar investigaciones que enfoquen de manera integral estos desafíos. La optimización del software en entidades requiere la implementación de métodos mejorados en los algoritmos que forman parte de los sistemas de datos. Esta mejora se logra mediante la evaluación comparativa de enfoques más avanzados, excluyendo aquellos métodos obsoletos o que no satisfacen los requisitos y necesidades actuales [1]. En una entidad es fundamental implementar un software de manera efectiva para garantizar la recopilación adecuada de datos, lo que deriva en una prestación mejorada en los servicios y en la satisfacción de los requisitos de los usuarios [2]. Cabe destacar que el denominado método de Newton es un algoritmo repetitivo fundamental en análisis numérico para encontrar raíces de funciones no lineales proporcionando soluciones rápidas y precisas, siendo ampliamente utilizado en diversas disciplinas [3].

A nivel internacional, en EE. UU. Bertsekas [4] el Método de Newton mejora la manera de procesar los datos en sistemas informáticos al proporcionar una herramienta eficaz para resolver ecuaciones no lineales que describen relaciones complejas en el sistema. Al lograr soluciones precisas, este método facilita la optimización de procesos, pues, lo respalda en relación a la toma de decisiones establecida en datos, así, contribuye significativamente a mejorar el

rendimiento general del sistema. Esto es especialmente crucial en entornos donde las relaciones entre variables son intrincadas y no lineales.

A nivel nacional, para Preciado et al. [5] la optimización de los sistemas de información contribuye a los procedimientos de automatización en entidades permitiendo agilizar el proceso en gestión de la base de datos de diversos usuarios, permitiendo así la contribución a una correcta comunicación y simplificación procedimientos sistemáticos minimizando demoras, reduciendo costo y tiempo, lo que garantiza mejoras en la atención al usuario.

A nivel local, la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao evidencia en ella un entorno académico y tecnológico que demanda soluciones específicas y adaptadas a las necesidades locales, evidenciándose limitaciones en el empleo de las computadoras de la institución como lentitud en su sistema, ello debido a deficiencias en sus algoritmos, lo que imposibilita el acceso a oportunidades, genera mayores inconformidades.

De acuerdo con lo expuesto, la investigación asume que su propósito primordial es determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información. Se diserta estrategias prácticas para la agilización de los procedimientos sistemáticos.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Con el transcurso de los años, ha sido observada una marcada lentitud en el rendimiento de las computadoras en el Centro de Cómputo de la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad Nacional del Callao. Específicamente, se ha detectado una demora en los sistemas de información al procesar datos para generar nuevas secuencias de respuesta en diversos algoritmos que resuelven problemas de sistemas no lineales de ecuaciones. Si estos algoritmos pudieran ser mejorados, se podrían reducir las horas de trabajo humano, disminuir el consumo de energía y, por ende, optimizar el uso de recursos financieros asociados al funcionamiento de las computadoras.

Específicamente, el algoritmo de Newton destaca como uno de los más eficientes, aunque su rendimiento disminuye significativamente a medida que se incrementa las interrogantes en el sistema.

El objetivo de este estudio es agilizar el desempeño de los sistemas de información, optimizando y agilizando dicho algoritmo mediante mejoras en su estructura.

Un objetivo futuro y ambicioso implica la implementación de este algoritmo mejorado en computadoras, buscando competir con otros algoritmos disponibles en el mercado.



ESQUEMA N° 01: ESQUEMA DEL ALGORITMO DE NEWTON

Fuente propia



ESQUEMA N° 02: ESQUEMA DE UNA PROPUESTA DEL ALGORITMO DE NEWTON MEJORADO Y GENERALIZADO.

Fuente propia

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

P.G. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información?

1.2.2. Problemas Específicos

P.E.1. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el **nivel de rapidez** en el procesamiento de datos de los sistemas de información?

P.E.2. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el **nivel de capacidad de respuesta** en el procesamiento de datos de los sistemas de información?

P.E.3. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el **nivel de reducción de tiempo** en el procesamiento de datos de los sistemas de información?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

O.G. Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de

ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.

1.3.2. **Objetivos Específicos**

O.E.1. Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, constituido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el **nivel de rapidez** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

O.E.2. Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el **nivel de capacidad de respuesta** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

O.E.3. Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el **nivel de reducción de tiempo** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

1.4. **Justificación**

1.4.1. **Justificación Filosófica**

Conforme a Fernández [6] busca enriquecer la comprensión de conceptos fundamentales o explorar cuestiones de relevancia filosófica, fomentando la reflexión crítica y el diálogo intelectual.

En línea con la corriente de pensamiento de diversos personajes históricos que han contribuido a resaltar el valor de este algoritmo, se percibe como un tema filosófico de discusión continuo, manteniendo su relevancia a lo largo del tiempo. De hecho, parece haber prevalecido sobre muchos otros algoritmos existentes.

1.4.2. Justificación Teórica

Para Fernández [6] implica describir de qué manera el trabajo se vincula con las teorías, modelos o enfoques ya establecidos en la disciplina o campo de estudio, por lo que el propósito es evidenciar que la investigación o proyecto se fundamenta en un marco teórico robusto, destacando la importancia y pertinencia de abordar la problemática desde esta perspectiva.

De acuerdo con ello, la indagación presenta un sustento puesto que recaba una fundamentación teórica respecto al método Newton y su aplicación en los procedimientos de datos de los sistemas de información, lo cuales permitirán contrastarlo con otros estudios.

1.4.3. Justificación Científica

Para Fernández [6] establece de manera lógica y empírica, la relevancia del estudio, demostrando cómo sus resultados contribuirán al conocimiento existente y resaltando la importancia del proyecto en el contexto científico.

Si se cumple según lo esperado, este trabajo se justifica por su contribución al conocimiento actual en diversas áreas, como métodos numéricos, desarrollo de algoritmos, matemáticas básicas y sistemas de información. Además, su uso adecuado puede, en algunos casos, convertir a los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales en sistemas de ecuaciones no lineales, siendo temas más conocidos y más sencillo de resolver.

1.4.4. Justificación Práctica

Acorde a Rosario et al. [7] la investigación puede aportar a la solución de una problemática o, al menos, proponer acciones que faciliten su resolución, pues, en un principio, es lo que se trata de evidenciar.

En ese sentido, permite la posibilidad de implementarse a dispositivos electrónicos que empleen una base de datos obsoleto para optimizar los procedimientos de datos de una entidad.

1.4.5. Justificación Metodológica

Para Vilela [8] implica presentar un método o estrategia innovadora que posibilite la generación de conocimiento preciso y confiable.

Por lo anterior, la metodología de enfoque cuantitativo aportará a próximas investigaciones, proporcionando una base lógica y argumentativa para la selección de métodos específicos utilizados en el estudio, estableciendo la autenticidad y la relevancia de las elecciones metodológicas.

1.4.6. Justificación Tecnológica

Es justificable porque se analiza de manera concreta que parte de la tecnología actual no es adecuada para resolver este problema, tal como lo demanda el algoritmo, especialmente cuando las ecuaciones no lineales tienen una complejidad significativa. Se evidencia la necesidad imperante de una gran capacidad de memoria, un desafío que reside por completo en el ámbito tecnológico.

1.4.7. Justificación Económica

Es razonable dado que, una vez se confirme su eficacia y su sencillez de uso, este algoritmo podría ser implementado como una aplicación en cualquier dispositivo electrónico como computadoras, laptops, tabletas o celulares, siempre y cuando cuenten con la capacidad de memoria necesaria para su funcionamiento.

1.5. Limitantes de la Investigación

1.5.1. Límites de la Investigación

Para Solíz [9] la restricción de un estudio implica la exclusión de un elemento del problema por algún motivo, ello sugiere que cada restricción debe contar con una explicación adecuada.

Siguiendo las afirmaciones del autor, la presente investigación se restringe a causa de la significativa disminución del rendimiento del algoritmo de Newton, provocada por el aumento de incógnitas en el sistema.

1.5.2. Delimitaciones de las investigaciones

De acuerdo con Fernández [6] las restricciones y limitaciones con el fin de acotar y enfocar de manera precisa el alcance del estudio.

Delimitación Geográfica: Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao, excluyendo cualquier otro territorio que no esté dentro de esta área, esto se debe a las diversas condiciones presentes en cada ubicación.

Delimitación Temporal: Restricción al año 2023.

Delimitación Metodológica: Enfoque específico en el método mejorado de Newton y su aplicación en algoritmos generalizados iterativos.

Delimitación Social: Se enfocó en el mejoramiento de los procesamientos de datos en los sistemas de información, cuyo propósito es optimizar el rendimiento de dichos sistemas en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacionales y Nacionales

Modelamiento matemático sobre un algoritmo generalizado iterativo a partir del método mejorado de Newton y la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información

ANTECEDENTES INTERNACIONALES

Ruiz [10] en su indagación titulada "POTENCIALES BENEFICIOS DEL DISEÑO DE UN SISTEMA DE RUTAS DE TRANSPORTE PÚBLICO COLECTIVO URBANO FORMULADO A PARTIR DE UN MODELO MATEMÁTICO MULTIOBJETIVO APLICANDO ALGORITMOS GENÉTICOS. CASO DE ESTUDIO: NEIVA, HUILA". Utilizó un enfoque cuantitativo. Los resultados revelaron que, respecto a los servicios del sistema, aproximadamente un 80% de ellos conforme al modelo matemático con múltiples objetivos, tenían intervalos de paso de 5 minutos o menos, con un 30% de ellos incluso de 3 minutos o menos. Esto indica un diseño exitoso que goza de elevados modelos para la atención de usuarios, equiparable a un nivel A. Concluyeron de ello que, aplicar un modelo matemático con múltiples objetivos, apoyado por algoritmos genéticos, puede conducir al diseño más eficiente de rutas para el transporte urbano público, optimizándolo significativamente, reduciendo gradualmente cierto número de rutas, ampliando lo máximo posible su cobertura espacial y mejorando la eficiencia.

De lo demostrado por los autores, es importante destacar que se requiere implementar un sistema algorítmico a fin de optimizar los sistemas internos en una empresa, ello, hacia el perfeccionamiento de su gestión y ofrecimiento de servicios, este particular aportará para la variable "Modelo matemático de un algoritmo generalizado".

Romero et al. [11] en su investigación titulada "LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN GERENCIAL EN PEQUEÑAS Y MEDIANAS EMPRESAS DEL SECTOR TURÍSTICO DE LA PROVINCIA LOS RÍOS, ECUADOR". Utilizó un enfoque cuantitativo de naturaleza descriptiva, abordando una muestra de 35

empresas y empleando como método que permite la obtención de datos una encuesta. Con los resultados derivados, fue posible notar que solo el 57.14% de directivos de las empresas destinaba recursos a tecnologías y sistemas de información, lo que, al no hacerlo, conlleva al cierre prematuro y al estancamiento del crecimiento. Además, los encuestados indicaron que su necesidad principal con respecto a los sistemas de información es obtener de manera rápida y eficiente registros de ventas, costos, márgenes de utilidad, deudas y niveles de stock. Se llegó a la conclusión de que tanto las empresas medianas como las pequeñas muestran una baja adopción de software que optimice los sistemas de información, ello restringe la facultad que tiene para establecer decisiones que sean efectivas y las deja en una posición menos competitiva en el mercado aumentando sus ingresos, por lo que es necesario implementar un software actualizado y que este adaptado a los requerimientos de los empresarios.

A partir de lo mencionado los directivos no daban inversión necesaria a los sistemas de información y evidenció la necesidad de capacitar en la actualización del software para su gestión. Esta información resultará valiosa para la variable " Eficiencia en el procesamiento de datos".

Linares [12] en su estudio titulado "EL CONTROL INTERNO EN LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN DE LA EMPRESA CONTRATISTAS INTEGRALES EL CHONTA SRL". Empleó metodología con corte transversal, descriptiva y cuantitativa. Estableció 58 colaboradores como población. En los resultados obtenidos, respecto a la pregunta que indicaba si para los sistemas de información, existía consideración de políticas y de procedimientos, el 40% indicó su ausencia, mientras que el 60% señaló su insuficiencia. Además, el 40% mencionó la carencia de una provisión adecuada de información para llevar a cabo sus funciones y responsabilidades, y el 20% indicó que se lleva a cabo de manera aceptable pero poco efectiva. Se llegó a la conclusión de que las empresas muestran deficiencias significativas en cuanto al control interno de sistemas de información, lo que compromete la confiabilidad de la empresa, así como su integridad, afectando su rendimiento y su capacidad competitiva.

Enfocándose en lo expuesto por el autor es relevante garantizar un óptimo servicio de una empresa puesto que lo posicionará en un mercado competitivo siempre y cuando se implemente un software moderno y de fácil uso. Ello contribuirá a la variable " Modelo matemático de un algoritmo generalizado".

Moghaddasi et al. [13] en su indagación titulada "EVALUATION OF NUTRITION INFORMATION SYSTEM: A NATIONAL STUDY REPORT". Realizó su investigación cuyo enfoque de metodología se efectuó cualitativamente, con tipo descriptivo, así como, con corte transversal, asimismo, se utilizó la encuesta, la cual es una técnica para recolectar datos. Los resultados evidenciaron que los sistemas de información nutricional (SIN) en las empresas estudiadas no cumplían con el 80% respecto a los criterios de capacidad de conectarse a la historia clínica electrónica, contar con un sistema de apoyo para las tomas de decisiones, una base de datos de interacciones y un lenguaje estándar para el usuario. Concluyeron la relevancia fundamental de que las empresas consideren los criterios del SIN para la implementación y diseño de los sistemas de información debido a su capacidad de alertar sobre las interacciones de los productos y diversificación de acuerdo a las demandas del mercado garantizando el cumplimiento normativo e impulsando el bienestar de los usuarios.

De lo expuesto por los autores, para una adecuada integración y efectividad de los logros de la empresa es necesaria la incorporación de un sistema actualizado que optimice la operacionalización de su base de datos. Por lo tanto, este estudio aportará a la variable " Procesamiento de datos de los sistemas de información".

Milán et al. [14] en su indagación titulada "ESTRATEGIA DE ENTRENAMIENTO Y ACOMPAÑAMIENTO A USUARIOS PARA EL SISTEMA DE INFORMACIÓN HOSPITALARIA XAVIA HIS". Consideró una metodología con enfoque cuantitativa mediante el análisis documental tomando como técnica la encuesta e instrumentos la entrevista. En los resultados obtenidos se propusieron cuatro etapas, como la planificación estratégica y la ejecución, para efectuar la implementación de sistemas de información, lo que resultó en una reducción del 76% y en un aumento de la efectividad de los servicios ofrecidos. Se concluyó

que la estrategia planteada, fundamentada en criterios analíticos y diagnósticos relacionados con los sistemas de información de salud, estuvo bien recibida por personas especializadas y demostró ser efectiva en un proyecto real de implementación del sistema XAVIA HIS, mejorando los indicadores de capacitación y apoyo a los usuarios.

A partir de lo indicado por los autores, los clientes estarán más satisfechos a medida de la practicidad que brinde una empresa y será superior si se toma en cuenta sistemas actuales. Esta indagación sirve de referencia para la variable "Procesamiento de datos de los sistemas de información".

Norouzi et al. [15] en su indagación titulada "IDENTIFICATION AND CLASSIFICATION OF INDICATORS FOR EVALUATING HEALTH INFORMATION SYSTEMS". Empleó una metodología de enfoque cuantitativo. En sus resultados se demostró que los sistemas de información que se dan en los centros médicos el 25.5% consideraron el multimétodo, el 16.5% la evaluación de usabilidad, así mismo se identificó cuatro las dimensiones desempeño del sistema, organización, diseño del sistema y tecnología. Los autores concluyeron que la implementación y creación de una herramienta útil, puede ayudar en la selección de indicadores adecuados durante la evaluación de sistemas de información para la salud, así como el diseño del mismo, permitiendo la satisfacción del usuario y la efectividad de los objetivos corporativos.

De acuerdo con lo mencionado por los autores, que una empresa debe tomar en cuenta el diseño sistemático y evaluación de los datos internos que maneja. Este estudio sirve para la variable "Modelo matemático de un algoritmo generalizado".

ANTECEDENTES NACIONALES

Para Escobedo [16] en su investigación titulada "INTEGRACIÓN DE LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN EN SALUD PARA LA TOMA DE DECISIONES CON BUSINESS INTELLIGENCE PARA LA GERENCIA REGIONAL DE SALUD LA LIBERTAD". Empleó metodología cuyo enfoque fue cuantitativo, de diseño experimental y tipo aplicada. Los resultados revelaron una notable reducción en

el tiempo de generación de informes en la administración de la entidad de salud, como evidenciado por la prueba estadística Z con un valor de $Z=3,469$ y una significancia del 5%. Antes de la implementación, el porcentaje era del 11%, aumentando significativamente al 100% después de la implementación, lo que representa un incremento del 89%. En cuanto al tiempo de entrega de los informes, se obtuvo un valor de $Z=3,9219$ con una significancia del 5%, experimentando un aumento del 37% al 100% después de la implementación, lo que representa un incremento del 62.5%. Concluyeron que, la implementación mejoró exponencialmente la toma de decisiones al reducir tiempos en entregas y agilizar la indagación de datos, logrando así, el incremento en la satisfacción de sus consumidores.

Según lo expuesto por el autor, existió una mejora en la aptitud que permite tomar decisiones debido al software aplicado, ello, resulta crucial para la gestión empresarial. Por ende, contribuirá al aspecto denominado "Procesamiento de información en los sistemas de información".

Conforme a Tejada [17] en su estudio titulada "EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN LA MODERNIZACIÓN DEL SISTEMA DE ADMINISTRACIÓN DE JUSTICIA EN EL PERÚ". Utilizó una metodología cuantitativa no experimental cuyo tipo fue transversal. Ante lo expuesto, los resultados revelaron presencia de una correlación reveladora entre una variable y la otra, cuyo coeficiente de correlación de Spearman (Rho) fue de 0.785, con un valor de $p < 0.01$. Del mismo modo, según las notificaciones electrónicas, se obtuvo un valor de 0.715, lo que indica una relación considerablemente alta. Concluyeron que implementar sistemas de información, como las notificaciones electrónicas y los lectores biométricos, se aporta de significativamente a la disminución de costos de una entidad y a la optimización de la eficiencia, lo cual resulta en una mayor satisfacción del usuario.

Lo dicho por el autor, es importante reforzar los servicios de respuesta a los usuarios mediante la incorporación de sistemas de información. Esta información será de utilidad para la variable "Procesamiento de datos de los sistemas de información".

Para Diaz [18] conforme a su investigación titulada "IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA INFORMÁTICO WEBSIEDU EN LA GESTIÓN ADMINISTRATIVA EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PARTICULAR - VILLA MARÍA DISTRITO BARRANCA - LIMA, PERÚ-2018". Consideró un enfoque cuantitativo, descriptiva y experimental. En sus resultados demostró que los familiares que son parte de los encuestados dan un 76.7% como una decisión buena la implementación de un sistema informático y el 19.5% como poco acertado, mientras que el personal administrativo da un valor de 73.3% como un gran acierto y el 8.3% cree que no influyo en nada, así mismo, el 80% considero que de importante su implementación y aplicación debido a que posibilita la accesibilidad a la información del área administrativa de la institución. Concluyeron que la ejecución de un sistema informático ha optimizado la efectividad y excelencia de los servicios administrativos, simplificando la comunicación con los usuarios y aumentando la solicitud de servicios académicos.

A partir de la investigación desarrollada por el autor, es relevante incorporar un sistema informático para garantizar la efectividad de una entidad. Esta indagación aportará a la variable "Procesamiento de datos de los sistemas de información".

Para Quintana y Quintana [19] en su estudio titulado "APLICACIÓN DE LA GESTIÓN LOGÍSTICA BASADO EN UN SISTEMA DE INFORMACIÓN PARA MEJORAR LA PRODUCTIVIDAD DE LA EMPRESA MGM INGENIERÍA Y PROYECTOS S.A.C., SAN JUAN DE LURIGANCHO 2020". Empleo una metodología cuantitativa, tipo aplicada y descriptiva. En sus resultados se evidencia que la media de productividad previa es de 37,1667, siendo más baja que la media de productividad posterior de 78,5000, así mismo, la productividad representaba un 37% y luego de implementación se logró un 79%. Concluyeron que, el acogimiento de un sistema de información para la gestión logística conlleva un perfeccionamiento de la productividad de una empresa.

A partir de lo indicado por los autores, es importante optimizar la capacidad de respuesta y de tiempo mediante un sistema de información enfocado en la

gestión logística. Esta indagación contribuirá a la variable "Procesamiento de datos de los sistemas de información".

Finalmente, con Nascimento y Cáceres [20] en su investigación titulada "APLICACIÓN DE UN SISTEMA INTEGRADO DE INFORMACIÓN DE IDENTIFICACIÓN BALÍSTICA PARA MEJORAR LA PRODUCTIVIDAD EN LA POLICÍA NACIONAL DEL PERÚ – 2021". Consideró el uso de metodología cuantitativa, cuyo tipo es aplicada, así como, explicativa y también es longitudinal. Sus resultados demostraron que, la productividad era del 62.91%, y tras la aplicación de esta gestión, se logró alcanzar una productividad del 95.94%, representando un aumento del 33.03%, así mismo, se observaron incrementos del 28.22% en eficiencia y del 32.54% en eficacia. Concluyeron que la incorporación de un sistema de información optimizó la productividad en la entidad dando mejoras significativas en la gestión del departamento por lo que sugieren contar con un software actualización y capacitación constante.

Basándose en lo sentenciado por los autores, es importante aumentar la productividad mediante un sistema informativo efectivo. Este estudio será relevante para la variable "Procesamiento de datos de los sistemas de información".

2.2. Bases Teóricas

Un modelo matemático simboliza de manera simplificada un fenómeno o sistema del mundo real mediante ecuaciones y conceptos matemáticos, así mismo, su objetivo es capturar y entender las relaciones clave para realizar análisis y predicciones en diversas disciplinas [21].

2.2.1. MODELO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO

Respecto a la variable modelo matemático de un algoritmo generalizado, acorde a Xiao [22] implica la representación formal y simbólica del algoritmo. Describe la entrada del algoritmo, identificando qué tipo de datos o información se espera como entrada, así como explica claramente qué se espera como resultado del algoritmo, siendo la salida. Además, detalla las operaciones aritméticas básicas que realiza el algoritmo, como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Igualmente, explica las decisiones condicionales que puede tomar el algoritmo utilizando palabras clave como "si", "sino", "mientras" o "para". Por ello, permite que se identifique los parámetros del algoritmo que pueden ajustarse y explica su influencia en el resultado.

De la misma forma, Stepanov et al. [23] determinan que los modelos matemáticos describen el manejo de las iteraciones o repeticiones, indicando explícitamente los pasos que se repiten y las condiciones de finalización. Asimismo, describe los pasos involucrados en algoritmos de búsqueda u ordenamiento, utilizando un lenguaje que indique claramente cómo se organizan o buscan los datos, tomando en cuenta que detalla y analiza las variables utilizadas en el algoritmo, así como cualquier estructura de datos clave, como matrices o listas; por lo que resulta relevante la inclusión de ecuaciones específicas que describan las relaciones matemáticas dentro del algoritmo.

Dentro de ello, Bertsekas [24] expone la importancia del algoritmo de Newton, resaltando que es ampliamente utilizado para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones no lineales, puesto que proporciona rápidamente estimaciones precisas de las raíces de funciones no lineales. Asimismo, desempeña un papel crucial en situaciones de optimización, donde se pretende disminuir o aumentar una función, permitiendo su aplicación para descubrir los puntos críticos de una función al igualar su derivada a cero. También, realiza una aportación importante al ámbito del análisis numérico, ofreciendo un instrumento efectivo para el acercamiento numérico de raíces y soluciones de ecuaciones diferenciales.

Bykasov et al. [25] expresan el algoritmo de Newton es aplicado en la resolución numérica de ecuaciones que modelan fenómenos físicos complejos, como el desplazamiento de partículas afectadas por fuerzas que no son lineales. Además, en el ámbito del aprendizaje automático y la mejora, se emplea el método de Newton en la mejora de funciones objetivo dentro de algoritmos de capacitación de modelos.

El método del Punto fijo (o de aproximaciones sucesivas)

Seguidamente se ofrecen algunas explicaciones, características y teoremas esenciales que son fundamentales para facilitar la comprensión del método del punto fijo. Para ello se cuenta con Zaragoza y Baeza [26] es una técnica numérica que utiliza iteraciones para encontrar soluciones de ecuaciones, transformando la ecuación original para hallar un punto fijo.

a) Definición 1 (Punto fijo): Para Chapra y Canale [27] coexistiendo una aplicación determinada como lo es g , en un espacio métrico como lo es (E, d) y con valores en el mismo espacio métrico, se le designa como punto fijo de la aplicación g en ese espacio x^* de E tal que $x^* = g(x^*)$.

b) Definición 2 (Función lipschitciana): Para Anil et al. [28] (E, d) y (V, d') como dos espacios métricos, así como, $g : E \rightarrow V$ configuren una aplicación específica en E y con valores en V . Se indica que g es una aplicación lipschitciana de razón k cuando existe una constante real $k > 0$ tal que:

$$d'(g(x), g(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in E$$

A la menor constante k , que especifica la situación anterior, es denominado constante de Lipschitz de la aplicación.

Nota 1. En el caso de que se esté trabajando sobre los espacios vectoriales normados $(E, \|\cdot\|)$ y $(V, \|\cdot\|')$ toda aplicación $g : E \rightarrow V$ que sea lipschitciana de razón k verificará:

$$\|g(x) - g(y)\|' \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Propiedad 1: Toda aplicación lipschitciana definida en (E, d) y con valores en (V, d') es una aplicación continua en todo E .

c) Definición 3 (contracción): A toda aplicación lipschitciana que verifique las dos condiciones siguientes:

1. Estar determinada en un espacio métrico (E, d) sobre sí mismo:

$$g : E \rightarrow E$$

2. Tener una constante de Lipschitz estrictamente menor a 1.

Se le denomina contracción sobre E .

La garantía de que las contracciones aseguran la convergencia de la secuencia producida por el método de cálculo.

$$x_0 \text{ dado } x_{i+1} = g(x_i) \text{ , } i = 0, 1, 2, \dots$$

Se debe al teorema que se menciona a continuación.

Teorema 1 (Del Punto fijo): Cualquier reducción establecida en un espacio métrico completo proporciona un único punto fijo.

El método del punto fijo para determinar una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ se enfoca en el teorema del punto fijo. Por ende, el primer paso que se realiza en este método consiste en reescribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.

En todo caso, una vez reescrita la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$ el método de aproximaciones sucesivas busca un punto fijo de la aplicación g mediante el esquema de cálculo siguiente: Dado un valor x_0 se genera la sucesión $\{x_{i+1} = g(x_i)\}_{i=0}^{+\infty}$. Según lo visto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2: Si g es una contracción definida sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el método de aproximaciones sucesivas que se acaba de describir genera, a partir de cualquier valor $x_0 \in [a, b]$, una sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ que converge hacia la única solución de la ecuación $x = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Nota 2: Puesto que la ecuación $f(x)=0$ es equivalente a $x=g(x)$, en las condiciones del teorema anterior, x^* será solución en $[a,b]$ de la ecuación equivalente $f(x)=0$.

Teorema 3: Si g es una aplicación de clase $C^1([a,b])$ y que toma valores en $[a,b]$ verificando la condición:

$$\exists k < 1 / |g'(x)| < k \quad \forall x \in [a,b]$$

Entonces la sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ generada, a partir de cualquier $x_0 \in [a,b]$, converge hacia la única solución de la ecuación $x=g(x)$ en $[a,b]$.

Teorema 4: Si existe una solución x^* de la ecuación $x=g(x)$ en un intervalo $[a,b]$ en el que g es de clase $C^1([a,b])$ y $|g'(x^*)| < 1$ entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que si $|x^* - x_0| < \delta$ la sucesión $\{x_{i+1} = g(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$ cumple que:

a) $|x^* - x_i| < \delta \quad \forall x_i$

b) $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = x^*$

Teorema 5: Siendo g una contracción definida en el intervalo $[a,b]$, la distancia entre la única solución x^* de la ecuación $x=g(x)$ y cualquier elemento de la sucesión $\{x_{n+1} = g(x_n)\}_{n=0}^{+\infty}$, generada a partir de cualquier valor $x_0 \in [a,b]$, está acotada mediante la expresión:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

donde k es la constante de **Lipschitz** de la contracción.

Teorema 6: De convergencia para resolver iterativamente un sistema no lineal de orden $n \times n$.

Supóngase que p es una solución de $G(x) = x$ para alguna función $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$, que manda a \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Si existe un número $\delta > 0$ con la propiedad de que:

(1) $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ es continua en $N_\delta = \{x / \|x - p\| < \delta\}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

(2) $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}$ es continua y $\left| \frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq M$ para alguna constante M , siempre que

$x \in N_\delta$ para cada $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$.

(3) $\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_j} = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$.

Entonces existe un número $\eta \leq \delta$ tal que la sucesión generada por $x^{(k)} = G(x^{(k-1)})$ converge cuadráticamente a p para cualquier $x^{(0)}$ siempre que $\|x^{(0)} - p\| < \eta$.

Además $\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - p\|_\infty^2$ para cada $k \geq 1$.

Es claro que: $G(x) = x - \frac{F(x)}{J(x)}$

El método de Newton

A continuación, se ofrecen ciertas definiciones, propiedades y teoremas esenciales que son requeridos para comprender adecuadamente el método de Newton. Para Zaragoza y Baeza [26] consiste en una técnica iterativa para encontrar raíces de funciones reales comenzando con una suposición inicial y

ajusta sucesivamente la aproximación utilizando la tangente en ese punto hasta converger hacia la raíz de la función, así mismo, es eficaz y ampliamente utilizado en análisis numérico, especialmente cuando se pueden calcular derivadas.

La ecuación dada es $f(x) = 0$ la cual se supondrá que f es una función de clase $C^2([a, b])$. Además de ello hay que suponer que la ecuación anterior acepta una solución x^* en el intervalo $[a, b]$.

Para cualquier valor diferente $x_0 \in [a, b]$, denotando por h al valor tal que $x^* = x_0 + h$, la expresión del desarrollo en **serie de Taylor** para f posibilita exponer que:

$$0 = f(x^*) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_0 + \theta h), \theta \in [0, 1]$$

Si conocido x_0 fuese posible determinar h resolviendo la ecuación:

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_0 + \theta h) = 0$$

Podríamos establecer x^* como $x^* = x_0 + h$. Sin embargo, a fin de completar dicha ecuación es necesario tener conocimiento previo del valor de θ (lo cual no es evidente). Una vez que se conoce, se procedería a solucionar una ecuación, que en general, no lineal, dado que h está involucrado en la expresión.

$$f''(x_0 + \theta h)$$

Por ello, a menos que se encuentren circunstancias muy específicas, no se obtendría una mejora significativa al sustituir la tarea de solucionar $f(x) = 0$ con la que solventar.

$$F(h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_0 + \theta h) = 0$$

El método de Newton, también conocido como método de linealización de Newton, consiste en facilitar o simplificar la expresión previa mediante su

linealización. En este proceso, se asume que si nos encontramos lo bastante cerca al resultado (es decir, si h es suficientemente pequeño) entonces el término $\frac{h^2}{2} \cdot f''(x_0 + \theta h)$ puede ser despreciado en comparación con los otros términos de la ecuación.

Por esta razón, se procede a resolver la ecuación lineal: $f(x_0) + H \cdot f'(x_0) = 0$ de la cual se deduce que:

$$H = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Evidentemente, por tratarse de la ecuación linealizada, esta difiere de aquella generada por la expansión de Taylor, resulta que $H \neq h$ y por lo tanto $x^* = x_0 + h x_1 = x_0 + H$. De manera instintiva (aunque posteriormente se precisará cuándo es válida esta afirmación), se puede considerar que aunque x_1 sea distinto a x^* será un valor más cercano a x^* que x_0 ya que se ha logrado "aproximando" el valor h que nos llevaba de x_0 a x^* . Esto, por lo menos, será válido cuando h sea adecuadamente pequeño, es decir, cuando x_0 sea lo bastante cercano a x^* .

Ante ello, el método de Newton plantea volver a realizar dicho proceso de manera recursiva hasta quedar lo competentemente colindantes a la solución averiguada. Más concretamente el método de Newton consiste en generar la

sucesión $\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ a partir de un valor x_0 dado.

Respecto a este método, en un principio, es evidente que si representamos mediante:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Nos encontramos ante una instancia específica del método de aproximaciones sucesivas mencionado anteriormente. En otras palabras, se presentan las siguientes características:

Propiedad 2: Si la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ es una contracción establecida en

$[a, b]$ la sucesión determinada por $\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ generada desde

cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ converge hacia la única solución de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Propiedad 3: Si la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ establecida en $[a, b]$ toma valores en $[a, b]$, es de clase $C^1([a, b])$ y, además:

$$|g'(x)| = \left| \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1, \forall x \in [a, b]$$

Entonces la sucesión dada por $\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ obtenida a partir de

cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ converge hacia la única solución de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

Teorema 7: Si $f \in C^2[a, b]$ y x^* es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en la que $f'(x^*) \neq 0$ entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que la sucesión

$\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ generada a partir de cualquier punto $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$

converge a x^* .

Velocidad de convergencia de los métodos iterativos

Diferentes métodos iterativos pueden aplicarse para resolver una misma ecuación no lineal. La elección entre ellos dependerá de cuál proporciona una convergencia más rápida hacia la solución de la ecuación. Este criterio se evalúa mediante el concepto de "orden de convergencia", cuya definición se presenta a continuación:

Definición 4: Si $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión convergente a x^* en la que $x_i \neq x^*$ para todo valor del índice i , decimos que la sucesión converge hacia x^* con orden p y con una invariable de error asintótico β , cuando existen dos números reales positivos p y β tales que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^p} = \beta$$

Generalmente, una sucesión $\{x_i\}$ que converja hacia x^* con orden de convergencia p y otra sucesión $\{x'_i\}$ que converja hacia x^* con orden de convergencia $q < p$ se verifica que los elementos de $\{x'_i\}$ se aproximan más velozmente hacia x^* (al menos desde determinado índice) que los elementos de la sucesión $\{x_i\}$. Una forma cómoda de conocer el orden de un método iterativo, cuando este está dado por un número natural, nos la proporciona el siguiente teorema:

Teorema 8: Siendo g una función de clase $C^{p+1}([a, b])$ y tal que en $[a, b]$ admite un único punto fijo x^* que cumple las condiciones siguientes:

1. $g^k(x^*) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, (p-1)$
2. $g^p(x^*) \neq 0$

Por lo tanto, se confirma que la sucesión obtenida a partir de un valor inicial $x_0 \in [a, b]$ mediante $\{x_{i+1} = g(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$ si converge hacia x^* lo hace con un orden de convergencia p .

Propiedad 4: Si g es una contracción en $[a, b]$, el método de aproximaciones es, como mínimo, de convergencia lineal.

Propiedad 5: Bajo las condiciones de convergencia del método de Newton, si x^* es la solución única de la ecuación $f(x) = 0$, y f pertenece a la clase $C^2([a, b])$, entonces este método es, como mínimo, de convergencia cuadrática.

Variantes del método de Newton para sistemas: *Método de Newton modificado y métodos de cuasi Newton*

La etapa más exigente en la implementación del método de Newton implica calcular, en cada iteración, la matriz jacobiana $[J_f(x^{(x_i)})]$ (requiriendo n^2 evaluaciones de las derivadas parciales primeras, con un número total de operaciones elementales dependiendo de la complejidad de estas derivadas).

Además, se debe invertir $[J_f(x^{(x_i)})]^{-1}$ o de manera equivalente, resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas $J_f(x^{(x_i)}) \cdot \delta x^{(x_i)} = f(x^{(x_i)})$, lo cual implica realizar aproximadamente n^3 operaciones del orden de $O(\lambda n^3)$, siendo n el número de incógnitas y ecuaciones del sistema y λ un parámetro menor o igual a $\left(\frac{2}{3}\right)$ dependiendo de la estructura de la matriz jacobiana.

Esto posibilita calcular el número de operaciones elementales en cada iteración como un valor proporcional a n^3 , lo cual, en casos donde n es considerablemente grande, puede traducirse en un costo computacional significativo.

Para abordar el desafío en la implementación práctica del método de Newton, se han creado varios métodos que, con resultados variables dependiendo del sistema, intentan aproximarse a $\left[J_f \left(x^{(x_i)} \right) \right]$ o su inversa $\left[J_f \left(x^{(x_i)} \right) \right]^{-1}$.

Algunos de estos métodos incluyen:

Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas

Para esta modificación del procedimiento, las derivadas contenidas en la matriz jacobiana son estimadas utilizando expresiones de diferencias finitas.

El método anterior proporciona una valoración cercana de la matriz jacobiana, sin embargo, no descarta el requerimiento de su inversión (o descomposición), lo que implica que la cantidad de operaciones por iteración aún continúa estando directamente relacionada a n^3 .

Método de Newton modificado

En dicha versión, se emplea, durante las primeras k iteraciones (siendo k un número determinado por el usuario del método) la matriz $\left[Jf \left(x^{(0)} \right) \right]$ como una aproximación de la matriz tangente. Para estas k iteraciones, se realiza el cálculo de la matriz jacobiana y su inversa una vez (y si se opta por la resolución del sistema $\left[Jf \left(x^{(0)} \right) \right] \cdot \delta x^{(x_i)} = f \left(x^{(x_i)} \right)$, será necesario factorizar una vez la matriz $\left[Jf \left(x^{(0)} \right) \right]$ en la primera iteración y conservar las matrices de la factorización).

Método de Jacobi

Para tal enfoque, se reemplaza la matriz tangente utilizada en cada iteración $\left[Jf \left(x^{(i)} \right) \right]$ por otra que mantiene su diagonal, pero tiene todos sus demás elementos nulos. Esta estrategia reduce significativamente el número de operaciones (se requiere evaluar sólo n funciones derivadas en lugar de n^2 , y la inversión de una matriz diagonal implica solo n operaciones). Sin embargo,

esta aproximación es válida únicamente si los elementos no diagonales de la matriz jacobiana son "pequeños" en comparación con los términos diagonales.

Métodos de cuasi Newton: Método de Broyden

Estos, son extensiones del método de la secante, originalmente diseñado para resolver ecuaciones individuales, y se aplican al caso de sistemas de ecuaciones. Vale mencionar que, el método de Broyden es el más reconocido dentro de esta categoría.

Para una comprensión completa de los algoritmos de Newton y su versión generalizada, es esencial familiarizarse con los siguientes elementos: Operadores diferenciales, procedente de un determinante de funciones, Derivadas Parciales de orden superior, Jacobiano de Funciones en varias variables, Norma de un vector, Normas equivalentes, Orden de convergencia, Sistemas Lineales de Ecuaciones, Algoritmo de Newton para sistemas, Teorema de Punto Fijo, Polinomio de Taylor con resto, Desarrollo de Taylor, Teorema de convergencia.

A continuación, se realizará una breve referencia al conocido algoritmo de Newton que fue utilizado a fin de ejecutar la resolución de diversos sistemas de ecuaciones no lineales, abordando casos en dimensión dos, dimensión tres y dimensión n .

Algoritmo de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineal 2×2

El procedimiento se construye de acuerdo con las indicaciones que se presentan a continuación, y se demuestra que posee una "Orden de Convergencia dos".

Sea el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = E(x, y) \\ y = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Luego, si se define iterativamente que:

$$\begin{cases} x_{n+1} = E(x_n, y_n) = x_n - \frac{F^{(1)}}{J} \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = y_n - \frac{F^{(2)}}{J} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (2)$$

Se demuestra que la iteración (2) converge hacia el Punto Fijo de (1). En consecuencia, (2) converge hacia la solución del sistema.

Donde: $F^{(1)} = \begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$, $F^{(2)} = \begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$, $J = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$

El desarrollo de Taylor respecto de $w^* = (x^*, y^*)$ para las funciones E y G son logradas por:

$$E(x, y) = E(w^*) + \frac{\partial E(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial E(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 E(\alpha)$$

$$G(x, y) = G(w^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 G(\beta)$$

Entonces el desarrollo de Taylor de las funciones E y G alrededor de w^* quedan reducidas como:

$$E(x, y) = x^* + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 E(\alpha)$$

$$G(x, y) = y^* + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 G(\beta)$$

Luego, al ser evaluadas en (x_n, y_n) se consigue:

$$E(x_n, y_n) = x_{n+1} = x^* + \frac{1}{2!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 E(\alpha)$$

$$G(x_n, y_n) = y_{n+1} = y^* + \frac{1}{2!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 G(\beta)$$

Después, desde que: $w_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$; $w_n = (x_n, y_n)$; $w^* = (x^*, y^*)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - w^*\|_s &= \|(x_{n+1} - x^*, y_{n+1} - y^*)\|_s = |x_{n+1} - x^*| + |y_{n+1} - y^*| \leq \frac{1}{2!} (|x_n - x^*|^2 K_1 + 2|x_n - x^*||y_n - y^*| K_2 + |y_n - y^*|^2 K_3) \\ &\leq \frac{K_4}{2!} (|x_n - x^*| + |y_n - y^*|)^2; \text{ si } K_4 = \max\{K_1, K_2, K_3\} \\ &= K \|(x_n - x^*, y_n - y^*)\|_s^2; \text{ donde } K = \frac{K_4}{2!} \\ &= K \|w_n - w^*\|_s^2 \end{aligned}$$

Por tanto: $\|w_{n+1} - w^*\|_s \leq K \|w_n - w^*\|_s^2$. Donde $K > 0$.

Entonces, el algoritmo bajo estas condiciones tiene “Orden de Convergencia dos”.

Algoritmo de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineal 3×3

El algoritmo se construye como se indica a continuación y se prueba que es de “Orden de Convergencia dos”.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = F(x, y, z) \\ y = G(x, y, z) \\ z = H(x, y, z) \end{cases} \quad (3)$$

Luego, si se define iterativamente que:

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n, z_n) = x_n - \frac{F^{(1)}}{J} \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n, z_n) = y_n - \frac{F^{(2)}}{J} \\ z_{n+1} = H(x_n, y_n, z_n) = z_n - \frac{F^{(3)}}{J} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (4)$$

Se prueba que (4) converge al Punto Fijo de (3). Por tanto (4) converge a la solución del sistema no lineal 3×3 dado en (3).

Donde:

$$F^{(1)} = \begin{vmatrix} f & f_2 & f_3 \\ g & g_2 & g_3 \\ h & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}, F^{(2)} = \begin{vmatrix} f_1 & f & f_3 \\ g_1 & g & g_3 \\ h_1 & h & h_3 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}, F^{(3)} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f \\ g_1 & g_2 & g \\ h_1 & h_2 & h \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}, J = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

El desarrollo de Taylor alrededor de w^* para las funciones F, G, H son dadas por:

$$F(x, y, z) = F(w^*) + \frac{\partial F(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial F(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial F(w^*)}{\partial z}(z - z^*) + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 F(\alpha)$$

$$G(x, y, z) = G(w^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial z}(z - z^*) + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 G(\beta)$$

$$H(x, y, z) = H(w^*) + \frac{\partial H(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial H(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial H(w^*)}{\partial z}(z - z^*) + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 H(\gamma)$$

El desarrollo de Taylor de las funciones F, G, H alrededor de w^* se expresa como:

$$F(x, y, z) = x^* + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 F(\alpha)$$

$$G(x, y, z) = y^* + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 G(\beta)$$

$$H(x, y, z) = z^* + \frac{1}{2!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 H(\gamma)$$

Después, al ser evaluadas en (x_n, y_n, z_n) se consigue:

$$F(x_n, y_n, z_n) = x_{n+1} = x^* + \frac{1}{2!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 F(\alpha)$$

$$G(x_n, y_n, z_n) = y_{n+1} = y^* + \frac{1}{2!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 G(\beta)$$

$$H(x_n, y_n, z_n) = z_{n+1} = z^* + \frac{1}{2!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 H(\gamma)$$

Luego, desde que: $w_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$; $w_n = (x_n, y_n, z_n)$; $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - w^*\|_s &= \|(x_{n+1} - x^*, y_{n+1} - y^*, z_{n+1} - z^*)\|_s = |x_{n+1} - x^*| + |y_{n+1} - y^*| + |z_{n+1} - z^*| \leq \\ &\leq \frac{1}{2!} (|x_n - x^*|^2 K_1 + |y_n - y^*|^2 K_2 + |z_n - z^*|^2 K_3 + 2(|x_n - x^*||y_n - y^*| + |x_n - x^*||z_n - z^*| + |y_n - y^*||z_n - z^*|) K_4) \\ &\leq \frac{K_4}{2!} (|x_n - x^*| + |y_n - y^*| + |z_n - z^*|)^2 \quad ; \text{ donde } K_4 = \max\{K_1, K_2, K_3\} \\ &= K \|(x_n - x^*, y_n - y^*, z_n - z^*)\|_s^2 = K \|w_n - w^*\|_s^2 \quad ; \text{ donde } K = \frac{K_4}{2!} \end{aligned}$$

En ese sentido: $\|w_{n+1} - w^*\|_s \leq K \|w_n - w^*\|_s^2$. Donde $K > 0$.

Por lo tanto, el algoritmo bajo estas condiciones es de "Orden de Convergencia dos".

Algoritmo de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineal $n \times n$

El algoritmo se construye como se indica a continuación y se prueba que es de "Orden de Convergencia dos".

Sea el sistema:

$$f_i(w) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad w = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_i = F_i(w) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Luego, si definimos iterativamente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,m+1} = F_1(w_m) = x_{1,m} - \frac{F^{(1)}}{J} \\ x_{2,m+1} = F_2(w_m) = x_{2,m} - \frac{F^{(2)}}{J} \\ x_{3,m+1} = F_3(w_m) = x_{3,m} - \frac{F^{(3)}}{J} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n,m+1} = F_n(w_m) = x_{n,m} - \frac{F^{(n)}}{J} \end{array} \right. \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (6)$$

Donde $w_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{n,m})$

Se prueba que (6) converge al Punto Fijo de (5). Por tanto (6) converge a la solución del sistema (5). Donde:

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{w=w_m}, \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & f_1 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & f_2 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & f_n & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{w=w_m}, \quad F^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & f_1 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & f_2 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & f_n & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{w=w_m}$$

$$\dots \quad F^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & f_n \end{pmatrix}_{w=w_m}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{w=w_m}$$

El desarrollo de Taylor alrededor de $w^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ para cada una de las funciones $F_k; \forall k = 1, 2, \dots, n$ es dado por:

$$F_k(w) = F_k(w^*) + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] F_k(w^*) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 F_k(\Omega_k)$$

Donde $\Omega_k \in \square^n; \forall k = 1, 2, \dots, n$; y Ω_k es un punto del segmento de recta entre los puntos w y w^* .

De manera análoga a lo discutido en las páginas previas, las "n" funciones cumplen con:

$$F_k(w^*) = x_k^*; \forall k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \frac{\partial F_k(w^*)}{\partial x_j} = 0; \forall k = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial^2 F_k(w^*)}{\partial x_i \partial x_j} = 0; \forall k = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n; \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Note que hay $\frac{n}{2}(n+1)(n+2)$ verificaciones que hacer.

El desarrollo de Taylor de cada una de las funciones $F_k; \forall k = 1, 2, \dots, n$ alrededor de w^* quedan reducidas como:

$$F_k(w) = x_k^* + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 F_k(\Omega_k) \quad ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Luego, al ser evaluadas en $w = w_m$ se consigue:

$$F_k(w_m) = x_{k,m+1} = x_k^* + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n (x_{i,m} - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 F_k(\Omega_k) \quad ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Desde que:

$$w_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m})$$

$$w_{m+1} = (x_{1,m+1}, x_{2,m+1}, \dots, x_{n,m+1})$$

$$w^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Se tiene:

$$\|w_{m+1} - w^*\|_s = \|(x_{1,m+1} - x_1^*, x_{2,m+1} - x_2^*, x_{3,m+1} - x_3^*, \dots, x_{n,m+1} - x_n^*)\|_s$$

$$= \sum_{k=1}^n |x_{k,m+1} - x_k^*|; \text{ acotando cada sumando, como antes}$$

$$\leq \frac{1}{2!} \left(\sum_{k=1}^n |x_{k,m} - x_k^*| \right)^2 C_0 = C \left(\sum_{k=1}^n |x_{k,m} - x_k^*| \right)^2 \quad ; \text{ Donde}$$

$$= C \left(\left\| (x_{1,m} - x_1^*, x_{2,m} - x_2^*, x_{3,m} - x_3^*, \dots, x_{n,m} - x_n^*) \right\|_s \right)^2 = C \left\| w_m - w^* \right\|_s^2$$

Entonces: $\left\| w_{m+1} - w^* \right\|_s \leq C \left\| w_m - w^* \right\|_s^2$; $C > 0$

Por lo tanto, el algoritmo bajo estas condiciones es de “Orden de Convergencia dos”.

En este sentido, a continuación, se expone la propuesta e implementación del algoritmo mejorado y generalizado de Newton en dimensiones 2×2 , 3×3 y $n \times n$, destinado a la solución iterativa de sistemas de ecuaciones no lineales.

Algoritmo propuesto para resolver un sistema no lineal de ecuaciones

2×2 Para el sistema de ecuaciones no lineal 2×2 dado por:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Donde las funciones f y g cumplen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6** (pág. 30) previamente visto y las siguientes condiciones adicionales:

(4) $f, g \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon)$.

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de f y g son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$.

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$.

El algoritmo dado por:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{m+1} = y_m - \frac{F^{(2)}}{R} \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (8)$$

Converge a la solución $w^* = (x^*, y^*)$ del sistema (7).

Donde $w_0 = (x_0, y_0) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño. Además:

$$F^{(1)} = \begin{vmatrix} f + \frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ g + \frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} ; F^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & f + \frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & g + \frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

Donde $\Delta^{(1)}; \Delta^{(2)}; J$ son definidos como en el algoritmo de Newton del orden respectivo. Así:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} ; \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} ; J = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

Se prueba que este algoritmo es de "Orden de Convergencia Tres".

Algoritmo propuesto para resolver un sistema no lineal de ecuaciones 3×3

Para el sistema de ecuaciones no-lineal 3×3 dado por:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Donde las funciones f, g, h cumplen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6**

(pág. 30) previamente visto y las siguientes condiciones adicionales:

(4) $f, g, h \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon)$.

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de f , g y h son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$.

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$.

El algoritmo dado por:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{m+1} = y_m - \frac{F^{(2)}}{R} \\ z_{m+1} = z_m - \frac{F^{(3)}}{R} \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (10)$$

Converge a la solución $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ del sistema (9).

Donde $w_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño. Además:

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} f + \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ g + \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ h + \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{pmatrix}_{(x_m, y_m, z_m)}$$

$$F^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{pmatrix}_{(x_m, y_m, z_m)}$$

$$F^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \end{pmatrix}_{(x_m, y_m, z_m)}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{pmatrix}_{(x_m, y_m, z_m)}$$

Donde $\Delta^{(1)}; \Delta^{(2)}; \Delta^{(3)}; J$ son establecidos como en el algoritmo de Newton respectivo. Se prueba que este algoritmo es de "Orden de Convergencia Tres".

Algoritmo propuesto para resolver un sistema no lineal de ecuaciones $n \times n$

Para el sistema de ecuaciones no lineal $n \times n$ dado por:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Donde las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$ satisfacen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6** (pág. 30) previamente visto y las siguientes condiciones adicionales:

(4) $f_i \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon) \forall i = 1, 2, \dots, n$.

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de $f_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$.

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$.

Entonces el Algoritmo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,m+1} = x_{1,m} - \frac{F^{(1)}}{R} \\ x_{2,m+1} = x_{2,m} - \frac{F^{(2)}}{R} \\ x_{3,m+1} = x_{3,m} - \frac{F^{(3)}}{R} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n,m+1} = x_{n,m} - \frac{F^{(n)}}{R} \end{array} \right. \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (12)$$

Converge a la solución $w^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ del sistema (11).

Donde $w_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño.

Además:

$$F^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc} f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{array} \right]_{w=w_m}$$

$$F^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}_{w=w_n}$$

$$F^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \cdots & f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \cdots & f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \cdots & f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \end{vmatrix}_{w=w_n}$$

Donde la notación $\sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i < j}}^{n-1; n}$ es de la forma

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}_{w=w_n}$$

Donde los $\Delta^{(k)}$; $\forall k = 1, 2, \dots, n$ y J son como en el Algoritmo de Newton respectivo.

Se prueba que este Algoritmo es de “Orden de Convergencia tres”.

2.2.2. Procesamiento de datos de los sistemas de información

Respecto a la variable procesamiento de datos de los sistemas de información, conforme a So-Eun et al. [29] el procesamiento de datos se refiere a la aplicación de algoritmos y técnicas para adquirir, transformar y analizar información, así mismo, este proceso involucra la manipulación eficiente de datos crudos, utilizando herramientas y sistemas específicos, por lo que busca optimar la gestión de la información, desde su recolección y finalmente en su presentación, con el objetivo de obtener insights significativos y proporcionar una fácil toma de decisiones.

De la misma, Torres [30] la clasifica esa variable como si se tratara de un conjunto de componentes que se interrelacionan, diseñados para procesar, capturar, distribuir y almacenar información con el objetivo de respaldar la toma de decisiones, así mismo, este sistema puede tener subsistemas específicos, como el sistema de información contable, que consta de unidades conectadas con el objetivo común de generar información confiable y útil.

Vidal-Silva et al. [31] manifiestan que es la manipulación y transformación de la información recopilada para producir resultados útiles y significativos, ello implica la entrada de datos desde diversas fuentes, su procesamiento mediante algoritmos y reglas predefinidas, y la generación de resultados, así mismo tiene la capacidad de convertir datos brutos en información procesable, contribuyendo así a la eficiencia y efectividad de las operaciones organizativas.

Importancia

Para Perez-Garcia et al. [32] se identifican como herramientas competentes para manejar la vasta cantidad de datos disponibles y proporcionar información de manera integral, integrando de forma eficaz tanto el hardware como el software, es por ello que este proceso facilita la adquisición, manipulación, análisis, gestión y representación de datos de manera fluida y funcional.

Mientras que para Huerta-Riveros et al. [33] es un sistema versátil sistema flexible que se adapta a los requisitos de diferentes entidades con una estrategia de planificación en sus metas simplificando la obtención de datos de manera eficiente y precisa, lo que demostró ser beneficioso al introducir un seguimiento al usuario, mejorando de este modo el servicio y elevando los niveles de satisfacción.

Por último, para Arevalo-Cordovilla et al. [34] es relevante considerar el factor seguridad para sistemas de información, ello, con el propósito de resguardar objetivos comerciales frente a los riesgos tecnológicos, así mismo, a pesar de las medidas de seguridad, los hackers persisten como amenazas, utilizando conexiones inalámbricas o malware para acceder a la información, esto resalta su importancia en subrayar la necesidad continua de ajustes y fortalecimiento en las medidas de protección.

Teoría general de los sistemas

Es un es un enfoque interdisciplinario que busca identificar principios comunes en sistemas biológicos, sociales y mecánicos, así mismo comparten características clave, como la interdependencia y la autorregulación, destacando la importancia de abordar fenómenos complejos desde una perspectiva holística y promueve un enfoque transdisciplinario para comprender la realidad de manera integrada [35].

Para Bohórquez [36] aborda la interrelación y la interdependencia entre componentes o elementos en sistemas complejos utilizándose para analizar, diseñar y optimizar sistemas, considerando sus entradas, procesos y salidas, así como las interacciones con su entorno, así mismo, presenta principios como la jerarquía, la retroalimentación y la adaptabilidad, son esenciales para la ingeniería de sistemas, permitiendo el desarrollo eficiente y efectivo de soluciones integrales en una variedad de contextos tecnológicos.

Teoría de la información

Para Heredia [37] se centra en el estudio de cómo se transmiten y reciben mensajes entre individuos o entidades, por lo que esta disciplina analiza los procesos de codificación, transmisión, y decodificación de la información. Comunicación efectiva en estos sistemas implica una estructuración adecuada de los canales y una presentación clara de datos, contribuyendo así a perfeccionar la toma correcta y adecuada de múltiples decisiones.

Se enfoca en cuantificar aquella cantidad de información o datos en un mensaje y mejorar la eficiencia en su transmisión utilizando conceptos como bits y entropía para medir la incertidumbre y la sorpresa en la información, siendo fundamental para diseñar sistemas de comunicación y almacenamiento de datos eficiente [38].

Características

De acuerdo con León et al. [39] los sistemas de información están compuestos por tres características elementales, las cuales son:

Entrada: establece la forma en que los datos serán adquiridos por el sistema, por lo que este proceso inicial implica la captura de información desde diversas fuentes, ya sea a través de dispositivos periféricos, sensores u otros medios, configurando así la base en la que desenvolverá el resto del sistema.

Procesamiento: es una etapa intermedia donde las entradas experimentan una metamorfosis, siendo que en este paso los datos recopilados son sometidos a diversas operaciones y manipulaciones, esto, con intención de convertirlos en información, tanto significativa como provechosa, así mismo, abarca desde simples cálculos matemáticos hasta complejas operaciones lógicas, todo diseñado con miras a obtener resultados precisos y relevantes.

Salida: en este punto la salida puede adoptar diversas formas, desde informes y visualizaciones gráficas hasta comandos que activan acciones específicas, por lo que en esta etapa se trata de hacer que la información procesada esté disponible y accesible para el usuario final o cualquier otro sistema conectado.

Por otro lado, para Lapiedra et al. [40] el sistema de información es una herramienta compleja, exhibe diferentes niveles jerárquicos:

Nivel operacional: se gestionan los procedimientos cotidianos vinculados con las diversas actividades que conforman la estructura organizativa.

Nivel táctico: Se realizan elecciones específicas a corto plazo, basadas en datos procesados de transacciones o provenientes de fuentes externas normalizadas.

Nivel estratégico: Se toman decisiones de mayor alcance y perspectiva a largo plazo, fundamentadas menos en datos transaccionales formales y más en fuentes externas de información.

2.3. Marco Conceptual

VARIABLE INDEPENDIENTE: **MODELO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO**

Según Millán & Vargas [41] es una representación abstracta y formal que describe las operaciones y pasos lógicos de un algoritmo de manera precisa mediante el uso de expresiones matemáticas y proporcionando una estructura conceptual que permite analizar y entender el comportamiento del algoritmo, así como realizar predicciones sobre su rendimiento y eficiencia en diversas situaciones, así mismo ayuda en la implementación de métodos de examen y perfeccionamiento, aportando de esta forma al entendimiento teórico y práctico del algoritmo en consideración.

Según Báquiro-Guerrero [42] utiliza ecuaciones y estructuras matemáticas para describir de manera precisa las operaciones y procesos algorítmicos permitiendo un análisis teórico riguroso de propiedades y complejidad, facilitando la comprensión y aplicación más amplia de sus principios fundamentales.

DIMENSIONES

D1: Desempeño global del modelo: Según Millán y Vargas [41] es la evaluación integral de su efectividad y eficiencia en la resolución de problemas específicos, así mismo, implica medir la precisión, velocidad y uso eficiente de recursos, proporcionando una indicación general de la capacidad del algoritmo para cumplir con sus objetivos de manera efectiva.

I1: Nivel de precisión de la estructura del algoritmo: De acuerdo con Santos et al [43] se refiere a qué tan fielmente el modelo representa las operaciones y pasos del algoritmo, por lo tanto, un alto nivel de precisión indica una correspondencia cercana entre la formulación matemática y la implementación real del algoritmo, facilitando un análisis confiable de su comportamiento y propiedades.

I2: Nivel de precisión del sistema lineal de ecuaciones: Para Leyva y Smarandache [44] consiste en la exactitud con la que las ecuaciones matemáticas representan las relaciones lineales entre las variables del sistema, lo cual implica que el modelo captura de manera fiel las interacciones lineales, lo que es esencial para una representación precisa del comportamiento del algoritmo.

I3: Nivel de precisión del teorema de punto fijo: Para Taleb & Borkar [45] indica cuán cerca las iteraciones del método convergen hacia la solución deseada, por lo que el teorema funda limitaciones para la convergencia hacia un punto fijo único.

I4: Nivel de orden de convergencia: Para Madrid [46] consiste en cuantificar la velocidad con la que una sucesión numérica se acerca a su límite, así mismo, indica qué tan rápido disminuye el error entre términos sucesivos a medida que la secuencia progresa hacia el valor final.

VARIABLE DEPENDIENTE: **PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN**

Según So-Eun et al. [29] implica la aplicación estratégica de algoritmos para adquirir, transformar y analizar información de manera eficiente, así mismo, este proceso busca optimizar la gestión de datos, garantizando una manipulación efectiva desde la recolección hasta la presentación, con el propósito de obtener insights valiosos y facilitar la toma de decisiones informadas.

Según Báez-Vázquez y Abrego-Almazán [47] son conjuntos organizados de elementos que interactúan para recolectar, procesar, guardar y distribuir información con el propósito de respaldar las actividades, sin dejar de mencionar,

el respaldo a la toma correcta y oportuna de decisiones internas de una empresa, conjuntamente, estos sistemas emplean tecnología informática para administrar y convertir datos en información relevante, lo que facilita la comunicación y la coordinación entre distintos sectores de una organización.

DIMENSIONES

D1: Eficiencia en el procesamiento de datos

Según Hong et al. [48] consiste en la capacidad de un sistema para realizar operaciones de manera rápida, precisa y económica, así mismo busca optimizar el uso de recursos, como tiempo y hardware, para obtener resultados precisos y útiles en el menor tiempo posible, por lo tanto, un sistema eficiente en el procesamiento de datos logra maximizar la productividad y disminuir los costos relacionados a la manipulación y transformación de la información, contribuyendo así a una toma de decisiones más ágil y efectiva.

I1: Nivel de rapidez: Para Chen et al. [49] consiste en la velocidad con la que un sistema puede realizar operaciones de recopilación, manipulación y generación de información, así mismo se evalúa en términos del tiempo necesario para completar tareas específicas, como la ejecución de algoritmos, la recuperación de datos o la generación de informes.

I2: Nivel de capacidad de respuesta: Para Yamada et al. [50] refiere a la agilidad y prontitud con la que un sistema puede gestionar y responder a las solicitudes de información, adaptándose a las demandas, proporcionando resultados rápidos y oportunos, así mismo, una alta capacidad de respuesta es esencial para entornos en los que la rapidez de acceso a la información resulta crítica, permitiendo una interacción eficaz, así como, una toma de decisiones más fácil en tiempo real.

I3: Nivel de reducción de tiempo: De acuerdo con Preciado et al. [5] consiste a la medida en que un sistema logra disminuir el tiempo necesario para ejecutar tareas específicas o procesar información, ello se da evaluando la eficiencia y velocidad con la que un sistema de información puede realizar operaciones como el almacenamiento, el procesamiento, la entrada y la salida de dato.

2.4. Definición de Términos básicos

Método Newton-Raphson: Relata soluciones numéricas de ecuaciones no lineales y en problemas de optimización al identificar puntos críticos, así mismo, contribuye de manera significativa al análisis numérico, siendo eficaz en la aproximación de raíces y soluciones de ecuaciones diferenciales [24].

Teorema de convergencia: Es un principio matemático que establece las condiciones bajo las cuales una sucesión o serie de valores tiende a un límite específico a medida que avanza en el tiempo o en iteraciones [51].

Teorema de Punto Fijo: establece que, bajo ciertas condiciones, en un intervalo cerrado y acotado, una función definida continuamente, siempre tiene al menos un punto fijo, es decir, el punto en el que la función toma el mismo valor que su entrada [52].

Modelo matemático: Implica la representación formal del algoritmo, describiendo la entrada necesaria y especificando claramente los resultados esperados como salida [22].

Algoritmo: Conjunto de pasos o reglas definidas y finitas que resuelven un problema o ejecutan una tarea específica, generalmente utilizado en computación y matemáticas [53].

Sistemas de ecuaciones lineales: Conjuntos de ecuaciones matemáticas en las que todas las variables involucradas tienen exponentes de uno y están relacionadas de manera lineal entre sí, así mismo, estos sistemas se caracterizan por poseer dos o más ecuaciones que comparten un conjunto común de variables [54].

Procesamiento de datos: Refiere a operaciones que incluyen la entrada, almacenamiento, transformación y salida de datos, con el propósito de obtener información significativa y útil [5].

Eficiencia: Medida de cómo un sistema o proceso utiliza sus recursos de manera óptima para lograr sus objetivos, minimizando pérdidas y maximizando resultados [33].

Optimización: Proceso de mejorar o hacer más eficiente un sistema, proceso o función, buscando alcanzar el rendimiento óptimo y satisfacer los objetivos establecidos. [55].

Toma de decisiones: Es un procedimiento cognitivo que implica la selección de una opción entre varias alternativas, basada en la evaluación de información disponible y consideraciones relevantes para alcanzar un objetivo específico [56].

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.2. Hipótesis General

H.G. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.

H0. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, no influye significativamente en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.

3.1.3. Hipótesis Específica

H.E.1. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el **nivel de rapidez** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

H.E.2 La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el **nivel de capacidad de respuesta** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

H.E.3 La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el **nivel de reducción de tiempo** en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

3.2. Definición Conceptual de Variables

Variable independiente: Modelo matemático de un algoritmo generalizado

Implica la representación formal y simbólica del algoritmo. Describe la entrada del algoritmo, identificando qué tipo de datos o información se espera como entrada, así como explica claramente qué se espera como resultado del algoritmo, siendo la salida.

Variable dependiente: Procesamiento de datos en los sistemas de información

Implica la utilización de algoritmos y metodologías para adquirir, modificar y examinar información, por lo que este procedimiento abarca la eficiente manipulación de datos en estado bruto mediante el empleo de herramientas y sistemas especializados, así mismo, su finalidad radica en optimizar la gestión de la información en todas las etapas, desde la recolección hasta la presentación, con el propósito de obtener percepciones significativas y facilitar el proceso de toma de decisiones.

3.2.1. Operacionalización de Variables

Tabla 1: Matriz de operacionalización de las variables

Variable	Tipo de Variable	Operacionalización	Dimensiones	Indicadores
Modelo matemático de un algoritmo generalizado	Variable independiente	Xiao [22] implica la representación formal y simbólica del algoritmo. Describe la entrada del algoritmo, identificando qué tipo de datos o información se espera como entrada, así como explica claramente qué se espera como resultado del algoritmo, siendo la salida.	Desempeño global del modelo	<p>Nivel de precisión de la estructura del algoritmo</p> <p>Nivel de precisión del sistema lineal de ecuaciones</p> <p>Nivel de precisión del teorema de punto fijo</p> <p>Nivel de orden de convergencia</p>
Procesamiento de datos en los sistemas de información	Variable dependiente	So-Eun et al. [29] el procesamiento de datos se refiere a la aplicación de algoritmos y técnicas para adquirir, transformar y analizar información, así mismo, este proceso involucra la manipulación eficiente de datos crudos, utilizando herramientas y sistemas específicos, por lo que busca optimizar la gestión de la información, desde su recolección hasta su presentación, con el objetivo de obtener insights significativos y facilitar la toma de decisiones.	Eficacia del procesamiento de datos	<p>Nivel de rapidez</p> <p>Nivel de capacidad de respuesta</p> <p>Nivel de reducción de tiempo</p>

Fuente propia

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Tipo y diseño de Investigación

TIPO DE INVESTIGACIÓN: Investigación Aplicada

La investigación fue de tipo aplicada. Según lo expuesto por Delgado [57] se aspira que los resultados conciban conocimiento práctico que pueda ser empleado en contextos reales, lo cual considera la gestión energética según la norma ISO 50001 como referencia para mejorar la eficiencia energética en el entorno de estudio.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN:

Para [58] Pruebas preliminares. En el diseño post-test, la información se recopila antes y después de la implementación de una intervención a un grupo de individuos o participantes. Un diseño pretest-postest es un enfoque experimental en el que se realiza una evaluación o medición antes (pretest) y después (postest) de la aplicación de una intervención o tratamiento a un grupo de sujetos. El objetivo principal es determinar si el tratamiento tuvo un efecto significativo sobre la variable de interés. Al comparar las mediciones antes y después de una intervención, se pueden analizar los cambios y evaluar la eficacia del tratamiento.

NIVEL DE INVESTIGACIÓN: DESCRIPTIVO-CORRELACIONAL CAUSAL

El nivel de estudio se trató de uno descriptivo – correlacional causal. Ramos [59] señala que se hace una descripción minuciosa de las variables en análisis. Posteriormente, se detectan relaciones de correlaciones entre estas variables. Si se encuentran relaciones significativas, se puede explorar la causalidad a través de experimentos controlados u otros métodos de investigación causal.

4.2. Método de Investigación

Para Artigas & Robles [60] el enfoque manipula recopilación y examen de información a fin de responder cuestiones de estudio y validar supuestos previamente formulados. Además, se basa en la cuantificación, el recuento y, a menudo, el uso de técnicas estadísticas para determinar con

precisión los patrones de comportamiento de las mediciones del sistema eléctrico.

En ese sentido, el enfoque que sigue este estudio es hipotético-deductivo, ya que la validación de hipótesis se realiza a través del estudio estadístico de los resultados, lo que permite derivar la relación entre las dos variables estudiadas y así determinar su autenticidad o inexactitud.

4.3. Población y muestra

Población

Primero, Guliz [61] aludió que se designará un conjunto limitado de personas o elementos diversos, claramente identificables sin ninguna confusión.

Según Artigas & Robles [60] Una población se define como la agrupación de los ejemplares que cumplen con ciertas características específicas.

En base a los puntos de vista mencionados, la población para este estudio es de tipo finita, pues, se determina como población todas las mediciones de los indicadores del procesamiento de datos de los sistemas de información.

Muestra

Para Artigas & Robles [60] "La muestra considerada constó de 16 mediciones de los indicadores del procesamiento de datos de los sistemas de información, donde 8 serán del pre test y 8 del post test".

Muestreo

Artigas & Robles [60] indican que la muestra representa un conjunto específico de componentes de una población seleccionada que va a colaborar con su participación en un estudio. También puede denominarse representación seleccionada de una población, ya que no es práctico conocer los intereses y necesidades de todos los individuos.

Esto posibilita la obtención de una considerable cantidad de respuestas en base a las interrogaciones enunciadas.

Según los escritores, la técnica de muestreo trata de un método de conveniencia, lo que significa que los participantes o sujetos del estudio se seleccionan simplemente en función de su disponibilidad y conveniencia para el investigador, en lugar de utilizar métodos de muestreo más estrictos y aleatorios.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

La Universidad Nacional del Callao, ubicada en la Av. Juan Pablo II 306, Bellavista 07011.

4.5. Técnicas e Instrumentos para la recolección de la información

4.5.1. Técnicas

Como Arias [62] mencionó, los métodos de investigación cubren diversas estrategias, métodos y procesos manipulados por el investigador a fin de conseguir los datos o información requerida.

Observación

En base a Artigas & Robles [60] “Es una técnica de estudio en la cual el investigador observa y documenta de manera directa los comportamientos, sucesos, contextos o fenómenos relevantes, sin interferir en ellos”.

Instrumentación

Según [58] ostenta que es un mecanismo de adquisición de datos, en esencia, trata de una herramienta cualquiera que pueda utilizar el investigador para aproximarse a los sucesos y obtener sus datos pertinentes.

El presente estudio, utilizó la ficha de evaluación como instrumento. Según [58] es un documento estructurado que se utiliza para recopilar y registrar información relevante durante el proceso de evaluación de un

proyecto, actividad o programa. Estas fichas suelen contener secciones donde se especifican los criterios de evaluación, los indicadores de desempeño, los métodos de evaluación utilizados, los resultados obtenidos y las recomendaciones para futuras acciones. La ficha de evaluación proporciona una guía sistemática para recopilar datos objetivos y subjetivos que ayudan a evaluar el grado de cumplimiento y desempeño de los objetivos determinados, así como, la eficacia del proyecto o actividad evaluada.

4.5.2. Validez

Tabla 2. *Validación del instrumento de recolección de datos por juicio de expertos*

Experto	Apellidos y nombres	Grado académico	Resultado
Experto 01	Aguilar Loyaga Santiago Rodolfo	Doctor	Aplicable
Experto 02	Salazar Llerena, Silvia Liliana	Metodóloga	Aplicable
Experto 03	Contreras Rivera Robert Julio	Doctor	Aplicable

Fuente propia

4.5.3. Confiabilidad

Según [63], un instrumento de evaluación se considera plenamente confiable si logramos obtener resultados idénticos al repetir la evaluación en múltiples ocasiones bajo circunstancias equivalentes. A medida que aumenta la disparidad en los resultados, disminuye la confiabilidad del dispositivo de evaluación.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

4.6.1. Método de Análisis de Datos

La fase de procesamiento de datos se constituía como una etapa crítica en la realización de este estudio, implicando una serie de pasos sistemáticos para garantizar la validez y confiabilidad de la información recopilada.

Se inició con la cosecha de datos mediante la aplicación de encuestas como lo son los cuestionarios, el cual tuvo una estructura diseñada específicamente para este estudio. Durante este proceso, se buscaba la participación activa de los estudiantes y profesores de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao durante el año 2023.

Consecutivamente, se ejecutó una exhaustiva validación y limpieza de los datos recopilados. Esto implicó una revisión minuciosa de los cuestionarios para identificar posibles errores o respuestas inconsistentes. Se aplicaron técnicas de validación para verificar la coherencia lógica y se eliminaron datos incompletos o ambiguos, documentando cualquier modificación realizada.

Luego se procedió a la codificación de datos, asignando códigos numéricos o etiquetas a la respuesta para facilitar el análisis posterior. Los datos codificados fueron introducidos en un software estadístico, como SPSS, para facilitar el análisis cuantitativo. Durante esta fase, se verificó la precisión de la entrada de datos y se aseguró que su estructura fuera coherente con los objetivos de investigación.

El análisis estadístico abarcó desde procedimientos descriptivos hasta técnicas más avanzadas, como pruebas de correlación. Los resultados obtenidos se interpretaron en el contexto de los objetivos y preguntas de investigación. Se identificaron patrones, tendencias o relaciones significativas emergentes del análisis de datos, y se presentaron de manera clara a través de tablas, gráficos y visualizaciones en el informe final del estudio.

La validación de resultados implicó una verificación de la consistencia y sensibilidad de resultados, comparándolos con literatura y considerados posibles limitaciones del estudio que podrían influir en la interpretación de los hallazgos. Todo este proceso se documentó de manera detallada en

el informe final, incluyendo referencias a apéndices que contenían la base de datos y detalles específicos del análisis.

4.7. Aspectos Éticos

La elaboración de este estudio se fundó en importantes principios éticos que buscan proteger los derechos de los participantes involucrados, así como su bienestar. Se mantiene como pilar fundamental el respeto a la confidencialidad, garantizando la reserva de la información personal brindada por estudiantes y profesores de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao. Las identidades de los participantes se mantuvieron mediante el uso de códigos numéricos o seudónimos en lugar de sus nombres reales en todos los documentos y resultados del estudio para avalar la información confidencial.

El consentimiento informado se convirtió en otro principio ético ineludible. Antes de participar en el estudio, se ofreció a los sujetos una explicación clara de los objetivos, procedimientos, posibles riesgos y beneficios esperados. A través de un documento de consentimiento informado, de acuerdo con las pautas de la American Psychological Association (APA) en su séptima edición, se aseguró que los participantes comprendieran completamente la naturaleza del estudio y otorgaran su consentimiento voluntario y libre para participar. Este proceso se enfocó en respetar la autonomía de los sujetos y reconocer su facultad para tomar decisiones de su participación.

La no maleficencia, como principio ético central, implicaba la obligación de evitar daños o perjuicios a los participantes. Se tomaron medidas estrictas para minimizar los riesgos potenciales que están asociados con la participación en el estudio. Los participantes recibieron información clara sobre los riesgos y beneficios potenciales, garantizando que su participación no tendría un impacto negativo en su bienestar.

La integridad y la ética del estudio se mantuvieron de acuerdo con las pautas de la APA en la séptima edición. Todas las prácticas de investigación y presentación de resultados se llevaron a cabo de manera transparente y justa, respetando los derechos fundamentales de los participantes y promoviendo el avance del conocimiento científico de manera ética y responsable.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

Tabla 3

Descriptivos del Procesamiento de datos de los sistemas de información - Pre Test vs Post Test

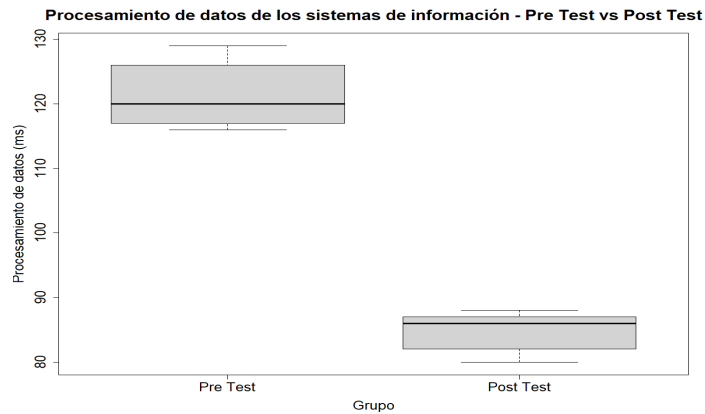
Estadísticos Descriptivos	Procesamiento de datos (ms) - Pre Test	Procesamiento de datos (ms) - Post Test
Media	121.38	84.75
Mediana	120	86
Desviación Estándar	5.04	3.06
Mínimo	116	80
Máximo	129	88

Fuente propia

La Tabla 4 indica que, previo a la aplicación del modelo matemático de un algoritmo generalizado, el procesamiento de datos requería un promedio de 121.38 ms, mientras que tras su implementación se redujo significativamente a un promedio de 84.75 ms. Esto evidencia de manera descriptiva que la implementación de dicho modelo, basado en el método mejorado de Newton, optimiza el procesamiento de datos en los sistemas de información. Además, la Figura 1 exhibe una diferencia considerable en los tiempos promedio de procesamiento de datos, tanto antes como después de la implementación.

Figura 1

Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Procesamiento de datos



Fuente propia

Tabla 4

Descriptivos del nivel de rapidez - Pre Test vs Post Test

Estadísticos Descriptivos	Rapidez (datos/seg) - Pre Test	Rapidez (datos/seg) - Post Test
Media	522.5	719.62
Mediana	519	722.5
Desviación Estándar	7.91	9.8
Mínimo	514	704
Máximo	535	730

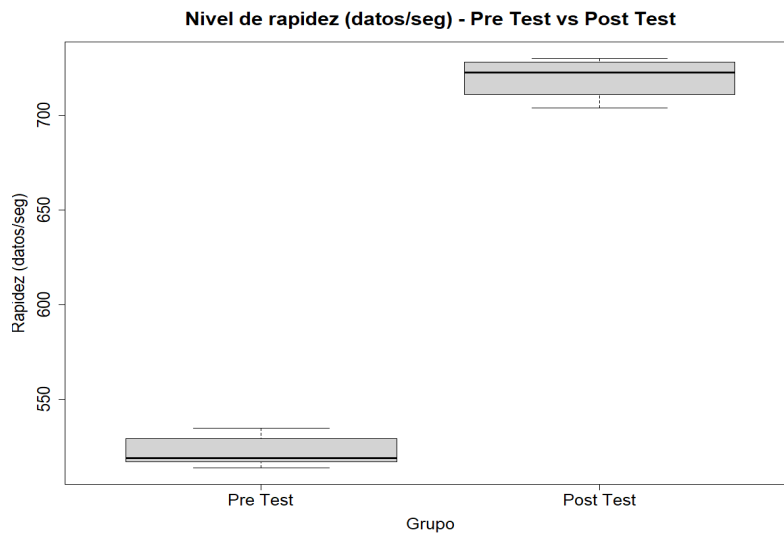
Fuente propia

La Tabla 5 indica que, previo a la aplicación del modelo matemático de un algoritmo generalizado, la velocidad de proceso de datos en los sistemas de información promediaba 522.5 datos por segundo, mientras que después de su implementación experimentó un aumento significativo hasta alcanzar un promedio de 719.62 datos por segundo. Esto demuestra de manera descriptiva que la implementación de dicho modelo, basado en el método mejorado de Newton, mejora notablemente la velocidad del mencionado proceso. Además, la

Figura 2 muestra un contraste respetable en la velocidad promedio de procesamiento de datos, tanto antes como después de la implementación.

Figura 2

Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Rapidez



Fuente propia

Tabla 5

Descriptivos del Nivel de capacidad de respuesta - Pre Test vs Post Test

Estadísticos Descriptivos	Capacidad de respuesta (bits/seg) - Pre Test	Capacidad de respuesta (bits/seg) - Post Test
Media	10016.12	15000.62
Mediana	10016.5	15008
Desviación Estándar	70.13	34.36
Mínimo	9935	14939
Máximo	10136	15057

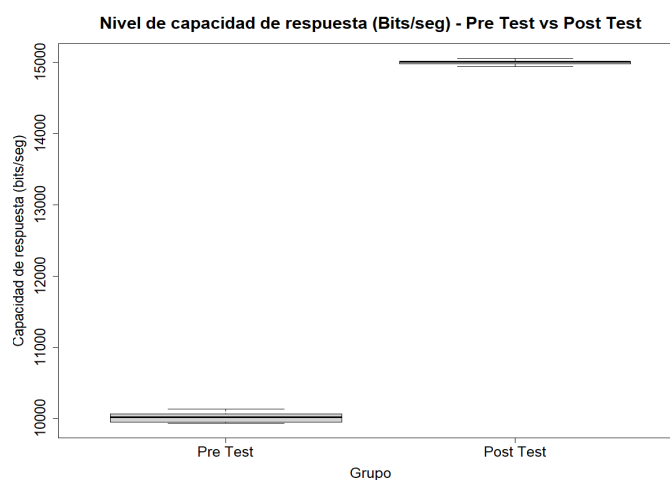
Fuente propia

La Tabla 6 revela que, antes de la aplicación del modelo matemático de un algoritmo generalizado, la capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información se situaba en un promedio de 10016.12 bits por segundo, mientras que después de su implementación experimentó un significativo aumento hasta alcanzar un promedio de 15000.62 bits por segundo.

Esto evidencia de manera descriptiva que dicha implementación, basada en el método mejorado de Newton, mejora notablemente la capacidad de respuesta en el procesamiento mencionado. Además, la Figura 3 muestra una diferencia considerable en la capacidad de respuesta promedio en el procesamiento de datos tanto antes como después de la implementación.

Figura 3

Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Capacidad de respuesta



Fuente propia

Tabla 6

Descriptivos del nivel de reducción de tiempo - Pre Test vs Post Test

Estadísticos Descriptivos	Reducción de tiempo (ms) - Pre Test	Reducción de tiempo (ms) - Post Test
Media	25.88	16.25
Mediana	26.5	17.5
Desviación Estándar	3.44	3.15
Mínimo	20	10
Máximo	31	20

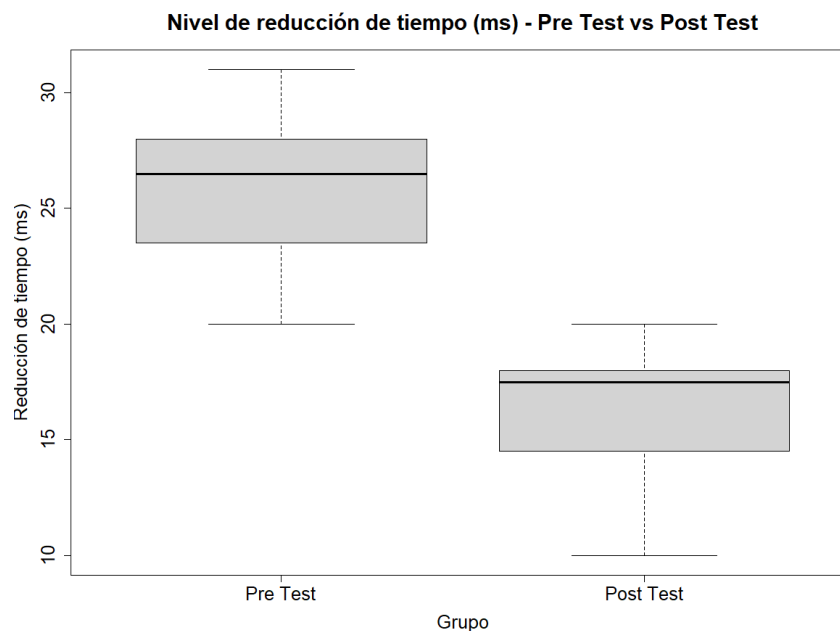
Fuente propia

La Tabla 7 muestra que, antes de la implementación del modelo matemático de un algoritmo generalizado, el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos promediaba 25.88 ms, mientras que tras su implementación se redujo significativamente a un promedio de 16.25 ms. Esto demuestra de manera

descriptiva que la implementación de dicho modelo, basado en el método mejorado de Newton, optimiza el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento mencionado. Además, la Figura 4 muestra una diferencia considerable en los niveles promedio de reducción de tiempo de procesamiento de datos tanto antes como después de la implementación.

Figura 4

Comparación de los Gráficos de Cajas por Grupos – Reducción de tiempo



Fuente propia

5.2. Resultados inferenciales

Tabla 7

Prueba de Normalidad de Shapiro Wilks

Variable	Estadístico	Sig.
Procesamiento de datos - Diferencia entre el Pre Test y Post Test	0.949	0.706
Nivel de rapidez - Diferencia entre el Pre Test y Post Test	0.905	0.317
Nivel de capacidad de respuesta - Diferencia entre el Pre Test y Post Test	0.982	0.973
Nivel de reducción de tiempo - Diferencia entre el Pre Test y Post Test	0.903	0.310

Fuente propia

Luego de realizar la prueba de normalidad se contempló que las discrepancias entre el pre test y post test del *Procesamiento de datos*, del *Nivel de rapidez*, del *Nivel de capacidad de respuesta* y del *Nivel de reducción de tiempo* exhibieron significancias mayores a 0.05, por lo que se concluye que mostraron distribución normal.

Tabla 8
Prueba de Homogeneidad de Bartlett

Variable	Estadístico	Sig.
Procesamiento de datos Pre Test vs Post Test	1.5666	0.2107
Nivel de rapidez Pre Test vs Post Test	0.2967	0.5859
Nivel de capacidad de respuesta Pre Test vs Post Test	3.0773	0.0794
Nivel de reducción de tiempo Pre-Test vs Post Test	0.0505	0.8221

Fuente propia

Se contempla que para la totalidad de los casos la significancia fue superior a 0.05, concluyéndose que las varianzas de los grupos pre test y post test del *Procesamiento de datos*, del *Nivel de rapidez*, del *Nivel de capacidad de respuesta* y del *Nivel de reducción de tiempo* fueron homogéneos y uniformes (varianzas iguales).

Luego de los resultados, se manejó la prueba T de Student para muestras relacionadas, con el fin de comprobar las hipótesis de investigación, que se explican a continuación:

Hipótesis General

H₁: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.

H₀: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera

iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, no influye significativamente en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.

Tabla 9

Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Procesamiento de datos - Pre vs Post

Media de la diferencia	Intervalo (95%)		t	Sig.
	Inferior	Superior		
36.625	32.063	41.187	17.568	0.00

Fuente propia

La tabla 10 presenta los resultados relacionados con la hipótesis general, donde se obtuvo una significancia de (sig. = 0.00), situándose por debajo del umbral de 0.05. Este hallazgo proporciona evidencia estadística que permite rechazar la hipótesis nula, lo cual, confirma que la implementación de un modelo matemático generalizado influye en la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información. Específicamente, se observó que el tiempo promedio de procesamiento de datos disminuyó de 121.38 ms a 84.75 ms tras la implementación del modelo.

Hipótesis Específica 1

H₁: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

H₀: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

Tabla 10

Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de rapidez - Pre vs Post

Media de la diferencia	Intervalo (95%)		t	Sig.
	Inferior	Superior		
-197.125	-206.713	-187.537	-44.279	0.00

Fuente propia

La tabla 11 presenta los resultados relacionados con la primera hipótesis específica, donde se obtuvo una significancia de (sig. = 0.00), situándose por debajo del umbral de 0.05. Este hallazgo proporciona evidencia estadística que puede refutar la hipótesis nula, lo cual, confirma que la implementación de un modelo matemático generalizado influye significativamente en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información. Específicamente, se observó que la velocidad de procesamiento de datos en los sistemas de información promediaba 522.5 datos por segundo, mientras que después de su implementación experimentó un aumento significativo hasta alcanzar un promedio de 719.62 datos por segundo.

Hipótesis Específica 2

H₁: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

H₀: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, no influye significativamente en el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

Tabla 11

Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de capacidad de respuesta - Pre vs Post

Media de la diferencia	Intervalo (95%)		t	Sig.
	Inferior	Superior		
-4984.5	-5045.878	-4923.122	-180.52	0.000

Fuente propia

La Tabla 12 presenta los resultados relacionados con la segunda hipótesis específica, donde se obtuvo una significancia de (sig. = 0.00), situándose por debajo del umbral de 0.05. Este hallazgo proporciona evidencia estadística para refutar la hipótesis nula, lo cual confirma que la implementación de un modelo matemático generalizado repercute significativamente en el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información. Específicamente, se observó que la capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información se situaba en un promedio de 10016.12 bits por segundo, mientras que después de su implementación experimentó un significativo aumento hasta alcanzar un promedio de 15000.62 bits por segundo.

Hipótesis Específica 3

H₁: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

H₀: La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, no influye significativamente en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información.

Tabla 12

Prueba T de Student para Muestras Relacionadas. Nivel de reducción de tiempo - Pre vs Post

Media de la diferencia	Intervalo (95%)		t	Sig.
	Inferior	Superior		
9.625	6.085	13.165	5.835	0.000

Fuente propia

La Tabla 13 presenta los resultados relacionados con la tercera hipótesis específica, donde se obtuvo una significancia de (sig. = 0.00), situándose por debajo del umbral de 0.05. Este hallazgo suministra prueba estadística para refutar la hipótesis nula, lo que confirma que la implementación de un modelo matemático generalizado influye significativamente en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información. Específicamente, se observó que el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos promediaba 25.88 ms, mientras que tras su implementación se redujo significativamente a un promedio de 16.25 ms.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de las hipótesis con los resultados

Para la presente investigación, se abordó la exhaustiva evaluación y validación de las hipótesis, centrándose específicamente en la hipótesis general. Esta afirmaba que la implementación de un modelo matemático fundamentado en un algoritmo generalizado, desarrollado a partir del método mejorado de Newton para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, impacta significativamente en el avance del procesamiento de datos en los sistemas de información. Los resultados obtenidos, detallados en la Tabla 10, revelaron una significancia estadística destacada ($\text{sig.} = 0.00$), posicionándose por debajo del umbral crítico de 0.05. Este hallazgo sustancial proporciona evidencia contundente para refutar la hipótesis nula, ratificando así que la implementación del modelo matemático generalizado incide de manera significativa en el perfeccionamiento del procesamiento de datos en los sistemas de información. De manera específica, se destacó una disminución notable en el tiempo promedio de procesamiento de datos, pasando de 121.38 ms a 84.75 ms tras la aplicación del modelo propuesto. Estos resultados substantian la validez de la hipótesis planteada, respaldando la noción de que la adopción de este modelo particular genera un impacto positivo y cuantificable en la eficiencia del procesamiento en cuestión.

La evaluación de la hipótesis específica 1, se plantea la influencia significativa de la implementación de un modelo matemático basado en un algoritmo generalizado, construido mediante el método mejorado de Newton, en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información, los resultados presentados en la Tabla 11 revelan una significancia estadística considerable ($\text{sig.} = 0.00$), situándose por debajo del umbral crítico de 0.05. Este hallazgo sólido respalda la decisión de rechazar la hipótesis nula, corroborando que la aplicación del modelo matemático genera un impacto significativo en la rapidez del procesamiento de datos. Específicamente, se observa un incremento notable en la velocidad de procesamiento, con un promedio que pasa de 522.5 datos por segundo a 719.62 datos por segundo después de la implementación del modelo, respaldando concluyentemente la validez de la hipótesis específica.

En la evaluación de la hipótesis específica 2, que sugiere la influencia significativa de la implementación de un modelo matemático basado en un algoritmo generalizado, construido mediante el método mejorado de Newton, en el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información, los resultados presentados en la Tabla 12 revelan una significancia estadística destacada ($\text{sig.} = 0.00$), situándose por debajo del umbral crítico de 0.05. Este hallazgo respalda de manera contundente el acuerdo de refutar la hipótesis nula, confirmando que la implementación del modelo matemático generalizado ejerce un impacto significativo en la capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información. Específicamente, se observó un aumento significativo en la capacidad de respuesta, con un promedio que se elevó de 10,016.12 bits por segundo a 15,000.62 bits por segundo después de la implementación del modelo. Estos resultados respaldan de manera concluyente la validez de la hipótesis específica, subrayando el impacto positivo y medible que el modelo propuesto tiene en la capacidad de respuesta del procesamiento.

El estudio de la hipótesis específica 3, que sostiene la influencia significativa de la implementación de un modelo matemático basado en un algoritmo generalizado, construido mediante el método mejorado de Newton, en la reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información, los resultados presentados en la Tabla 13 revelan una significancia estadística destacada ($\text{sig.} = 0.00$), situándose por debajo del umbral crítico de 0.05. Este hallazgo sustancial respalda la decisión de rechazar la hipótesis nula, confirmando que la implementación del modelo matemático generalizado tiene un impacto significativo en la reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información. Específicamente, se observó que el nivel de reducción de tiempo promediaba 25.88 ms antes de la implementación, experimentando una disminución significativa a un promedio de 16.25 ms posterior a su aplicación. Estos resultados respaldan de manera concluyente la validez de la hipótesis específica 3, evidenciando el impacto positivo y medible del modelo propuesto en la eficiencia temporal del procesamiento de datos.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

En cuanto a la hipótesis general el estudio que aborda la influencia positiva de la implementación de un modelo matemático generalizado en la mejora del procesamiento de datos en sistemas de información se encuentra interconectado con diversas investigaciones previas. En consonancia con la investigación de Ruiz [10], ambas indagaciones comparten la aplicación de modelos matemáticos para resolver problemáticas específicas, aunque en contextos distintos. También, se alinea con las conclusiones de Romero et al. [11], que resaltaron la falta de inversión en sistemas de información, tanto en pequeñas como en medianas empresas turísticas, proponiendo la implementación del modelo matemático generalizado como una estrategia esencial para mejorar la competitividad empresarial. Asimismo, se vincula con la importancia de implementar sistemas actualizados, como señalado por Moghaddasi et al. [13] en la evaluación de sistemas de información nutricional. Conjuntamente, dichos trabajos recalcan la importancia de eficiencia en el procesamiento de datos y el uso de enfoques matemáticos para optimizar sistemas de información en diversos ámbitos.

En base a la hipótesis específica 1, que sugiere que la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, basado en el método mejorado de Newton, influye significativamente en la velocidad de procesamiento de datos en los sistemas de información, se alinea de manera coherente con los antecedentes internacionales y nacionales revisados. Los estudios previos abordaron la importancia de optimizar los sistemas de información mediante enfoques matemáticos y algorítmicos. Por ejemplo, Ruiz [10] demostró que la aplicación de un modelo matemático multiobjetivo respaldado por algoritmos genéticos condujo a un diseño exitoso de rutas de transporte público, mejorando la eficiencia del sistema. Asimismo, Romero et al. [11] destacaron la necesidad de software actualizado para optimizar los sistemas de información tanto en pequeñas como en medianas empresas. En el ámbito internacional, Moghaddasi et al. [13] subrayaron la importancia de criterios específicos en los sistemas de información nutricional, resaltando la necesidad de considerarlos en el diseño para garantizar la efectividad del sistema. Estos descubrimientos protegen la idea de que la implementación de un modelo

matemático y algoritmo generalizado puede ser crucial para mejorar la eficacia y la operacionalización de bases de datos, como se menciona en el estudio.

Según el objetivo específico 2 que destaca el impacto de la implementación de un modelo matemático generalizado en la capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información, encuentra correlaciones con trabajos previos de diversos autores. Este hallazgo respalda la investigación de Milán et al. [14], quienes sugirieron que estrategias de acompañamiento y de entrenamiento a usuarios para que puedan mejorar la capacidad de respuesta de los sistemas de información hospitalaria. La implementación del modelo matemático generalizado, según el presente estudio, puede considerarse como una herramienta adicional para optimizar la capacidad de respuesta, mostrando su utilidad en distintos contextos organizacionales. También, la investigación se alinea con los resultados de Norouzi et al. [15], que identificaron indicadores clave para evaluar sistemas de información en centros médicos. El progreso en la facultad de contestación del procesamiento de datos, evidenciada en el estudio actual, podría ser vista como un componente crucial para la satisfacción del usuario en entornos de atención médica y sistemas de información de salud.

Finalmente, la corroboración del tercer objetivo específico, enfocado en la reducción del tiempo en el procesamiento de datos de sistemas de información mediante la implementación de un modelo matemático generalizado, presenta resultados estadísticamente significativos, con una significancia de ($\text{sig.} = 0.00$) por debajo del umbral crítico de 0.05. Este hallazgo robusto respalda la disposición de refutar la hipótesis nula, confirmando que la adopción del modelo matemático incide significativamente en la disminución del tiempo en el procesamiento de datos. Esta conclusión se alinea con la investigación de Escobedo [16], quien abordó la optimización del tiempo en la generación de informes en el ámbito de la salud por medio de la integración de sistemas de información eficientes. Asimismo, se vincula con Quintana y Quintana [19], quienes destacaron la mejora en la productividad empresarial a través de sistemas de información, sugiriendo que la reducción del tiempo en el procesamiento de datos puede ser un factor clave para alcanzar eficiencia operativa. Conjuntamente, dichas deducciones protegen la idea de que la implementación de modelos matemáticos influye positivamente en la eficiencia

temporal de los sistemas de información, beneficiando la operación y competitividad organizacional.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes

De manera interna, este estudio titulado “MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO ITERATIVO A PARTIR DEL MÉTODO MEJORADO DE NEWTON Y LA MEJORA DEL PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2023”, el autor se hace responsable de la información presentada en el documento, en cumplimiento con las normas establecidas estrictamente por la Universidad Nacional del Callao.

VII. CONCLUSIONES

Primera: la implementación del modelo matemático generó una reducción significativa del tiempo promedio de procesamiento de datos de 121.38 ms a 84.75 ms, con una significancia estadística de (sig. = 0.00). Estos resultados sólidos confirman la influencia positiva y efectiva del modelo en la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información, destacando su relevancia para optimizar la eficiencia operativa y competitividad organizacional.

Segunda: la implementación del modelo matemático generó una mejora significativa en la velocidad de procesamiento de datos de los sistemas de información, evidenciada por un aumento estadísticamente significativo de 522.5 a 719.62 datos por segundo (sig. = 0.00). Estos resultados respaldan de manera concluyente la influencia positiva del modelo en la rapidez operativa, destacando su importancia para potenciar la eficiencia y competitividad organizacional.

Tercera: la implementación del modelo matemático generó un aumento significativo en la capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información, respaldado por una significancia estadística de (sig. = 0.00). Específicamente, la capacidad de respuesta pasó de un promedio de 10016.12 bits por segundo a 15000.62 bits por segundo. Estos resultados confirman de manera contundente la influencia positiva del modelo en la eficiencia operativa y competitividad de los sistemas de información.

Cuarta: la implementación del modelo matemático generó una reducción significativa del tiempo de procesamiento de datos en los sistemas de información, respaldada por una significancia estadística de (sig. = 0.00). Específicamente, el tiempo promedio disminuyó de 25.88 ms a 16.25 ms. Estos resultados confirman de manera contundente la influencia positiva del modelo en la eficiencia operativa y destacan su relevancia para la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información, contribuyendo a la competitividad organizacional.

VIII. RECOMENDACIONES

Primera: Considerar la adopción de este modelo en otros entornos y sistemas de información. Esta medida no sólo contribuirá a optimizar la eficiencia operativa, sino que también fortalecerá la competitividad organizacional al mejorar la agilidad y capacidad de respuesta en el procesamiento de datos.

Segunda: Consideración de este modelo en implementaciones futuras. Estos resultados concluyentes respaldan de manera sólida la influencia positiva del modelo en la rapidez operativa, subrayando su importancia para potenciar la eficiencia y competitividad organizacional.

Tercera: Considerar la implementación extendida de este modelo matemático. El incremento notable de la capacidad de respuesta, pasando de un promedio de 10016.12 bits por segundo a 15000.62 bits por segundo, demuestra de manera concluyente la influencia positiva del modelo en la eficiencia operativa y competitividad de los sistemas de información. Esta recomendación sugiere una valiosa oportunidad para mejorar la respuesta y rendimiento de los sistemas de información en diversas aplicaciones y entornos organizacionales.

Cuarta: Adoptar la versión generalizada del modelo matemático. La disminución del tiempo promedio, de 25.88 ms a 16.25 ms, confirma de manera concluyente la influencia positiva del modelo en la eficiencia operativa. Esta recomendación destaca la relevancia del modelo para la mejora del procesamiento de datos en los sistemas de información, ofreciendo una valiosa contribución a la competitividad organizacional.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. Wanyou, L. Zhuanghan and L. Donghui, "An inexact quasi-Newton algorithm for large-scale ℓ_1 optimization with box constraints," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 193, pp. 179-195, 2023.
- [2] D. Sánchez y M. Mendoza, «SIG aplicado a la optimización del tiempo de diseño en redes de distribución de agua potable,» *Ingeniería Hidráulica y Ambiental*, vol. 42, nº 1, 2021.
- [3] U. Yeong, L. Jong, N.-J. Parque and A. Hyo-Sung, "Distributed Continuous-Time Newton Method via Blended Dynamics," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 13, pp. 234-239, 2022.
- [4] D. Bertsekas, «Newton's method for reinforcement learning and model predictive control,» *Results in Control and Optimization*, vol. 7, pp. 1-35, 2022.
- [5] A. Preciado, M. Valles and D. Lévano, "Importancia del uso de sistemas de información en la automatización de historiales clínicos, una revisión sistemática," *Revista Cubana de Informática Médica*, vol. 13, no. 1, 2021.
- [6] V. Fernández, Tipos de justificación en la investigación científica, vol. 4, 2020, pp. 65-76.
- [7] L. Rosario and L. Perozo, Ruta metodológica para avanzar en el periplo de la investigación educativa con variable compuesta o predicativa, 2019, pp. 60-74.
- [8] F. Vilela, «Reflexión sobre la justificación metodológica del uso de animales en investigación biomédica,» vol. 14, 2019, pp. 52-68.
- [9] D. Solíz, Cómo hacer un perfil proyecto de investigación científica, Palibrio, 2019.
- [10] J. Ruiz, Artist, *Potenciales beneficios del diseño de un sistema de rutas de transporte público colectivo urbano formulado a partir de un modelo matemático multiobjetivo aplicando algoritmos genéticos. Caso de estudio: Neiva, Huila*. [Art]. Repositorio. Universidad Nacional de Colombia, 2020.
- [11] A. Romero, F. Cañizares and J. Fernandez, "Los sistemas de información gerenciales en pequeñas y medianas empresas del sector turístico de la provincia de los Ríos Ecuador," *Revista UNIANDÉS Episteme*, vol. 6, no. 3, pp. 369-382, 2019.
- [12] M. Linares, Artist, *El control interno en los sistemas de información de la empresa contratistas integrales El Chonta SRL.* [Art]. Repositorio. Universidad Nacional de Cajamarca, 2020.
- [13] H. Moghaddasi, L. Akbarpour and R. Soltani, "Evaluation of nutrition information system: A national study report," *Clinical Nutrition Open Science*, vol. 52, pp. 172-178, 2023.

- [14] N. Milán, J. Ramírez y L. Vega, «Estrategia de entrenamiento y acompañamiento a usuarios para el Sistema de Información Hospitalaria XAVIA HIS,» *Revista Cubana de Informática Médica*, vol. 12, nº 1, pp. 76-91, 2020.
- [15] H. Norouzi, M. Hossein, S. Hajesmaeel-Gohari, L. Ahmadian, M. Mehdi, M. Mohammadi y R. Khajouei, «Identification and classification of indicators for evaluating health information systems,» *Health Policy and Technology*, nº 7, 2023.
- [16] L. Escobedo, Artist, *Integración de los sistemas de información en salud para la toma de decisiones con Business intelligence para la gerencia Regional de Salud La Libertad..* [Art]. [Repositorio Universidad César Vallejo], 2021.
- [17] A. Tejada, «El uso de las tecnologías de la información y la comunicación en la modernización del sistema de administración de justicia en el Perú,» *Lex: Revista de la Facultad de Derecho y Ciencia Política de la Universidad Alas Peruanas*, vol. 19, nº 27, pp. 331-346, 2021.
- [18] P. Diaz, Artist, *"Implementación del sistema informático WEBSIEDU en la gestión administrativa en la Institución Educativa Particular- Villa María distrito Barranca-Lima, Perú-2018"*. [Art]. Repositorio. Univerisdad Nacional del Callao, 2019.
- [19] S. Quintana y P. Quintana, Artists, *Aplicación de la gestión logística basado en un sistema de información para mejorar la productividad de la empresa MGM ingeniería y proyectos S.A.C., San Juan De Lurigancho 2020.* [Art]. Repositorio. Universidad del Callao, 2022.
- [20] J. Nacimiento y E. Cáceres, Artists, *Aplicación de un sistema integrado de información de identificación balística para mejorar la productividad en la Policía Nacional del Perú - 2021.* [Art]. Repositorio. Universidad del Callao, 2022.
- [21] j. Escobar, J. Marceles and D. Quevedo, "Modelo matemático para la programación de la producción en compañías fabricantes de alambres y cables para la construcción," *Revista Espacios*, vol. 41, no. 24, pp. 297-307, 2020.
- [22] Y. Xiao, «Construction of a mathematical model based on a genetic algorithm for an aptitude programa in high school student optimization,» *Rev Bras Med Esporte*, vol. 28, nº 5, 2022.
- [23] L. V. Stepanov, . A. S. Koltsov, A. V. Parinov y . A. S. Dubrovin , «Mathematical modeling method based on genetic algorithm and its applications,» *Journal of Physics: Conference Series*, 2019.
- [24] D. Bertsekas, «Newton's method for reinforcement learning and model predictive control,» vol. 7, 2022.
- [25] D. A. Bykasov, A. V. Zubov y M. G. Mustafin, «Application of Newton's method to solve optimization geodetic tasks,» *E3S Web of Conferences*, vol. 266, 2021.

- [26] N. Zaragoza and J. Baeza, "Determinación del diámetro de sistemas de tuberías mediante la utilización del Visual Basic para Aplicaciones y el Método de Aproximación de Punto Fijo," *Ingeniería*, vol. 7, no. 2, pp. 55-64, 2003.
- [27] S. Chapra y R. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, McGraw-Hill, 2007.
- [28] C. Anil, J. Lucas y R. Grosse, «Sorting Out Lipschitz Function Approximation,» de *Conferencia Internacional sobre Aprendizaje Automático*, 2019.
- [29] J. So-Eun, L. Sun-Jin and L. Il-Gu, "Hybrid in-network computing and distributed learning for large-scale data processing," *Computer Networks*, vol. 226, 2023.
- [30] A. Torres, «Elementos de un sistema de información contable efectivo,» *Quipukamayoc*, vol. 27, nº 53, pp. 73-79, 2019.
- [31] C. Vidal-Silva, A. Sánchez-Ortiz, J. Serrano y J. Rubio, «Experiencia académica en desarrollo rápido de sistemas de información web con Python y Django,» *Formación universitaria*, vol. 14, nº 5, 2021.
- [32] C. Perez-Garcia, J. Pérez-Atray, L. H. -Santana, R. Gustabello-Cogle and E. Becerra-de Armas, "Sistema de Información Geográfica para la agricultura cañera en la provincia de Villa Clara," *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*, vol. 13, no. 2, 2019.
- [33] P. Huerta-Riveros, H. Gaete-Feres and L. Pedraja-Rejas, "Dirección estratégica, sistema de información y calidad. El caso de una universidad estatal chilena," *Información tecnológica*, vol. 31, no. 2, 2020.
- [34] F. Arevalo-Cordovilla, A. Cortez-Lara, I. Ordoñez-Sigcho and J. Solís-Gaibor, "Importancia de la seguridad en los Sistemas de Información," *Revista Científica FIPCAEC*, vol. 5, no. 5, pp. 136-144, 2020.
- [35] L. Bertalanffy, *Teoría general de los sistemas*, Fondo de Cultura Económica, 1989.
- [36] J. Bohórquez, «La teoría general de sistemas,» *Cuadernos de Geografía: Revista Colombiana de Geografía*, vol. 4, nº 1-2, pp. 111-137, 1993.
- [37] J. Heredia, «Sobre la lectura y conceptualización simondoniana de la cibernética.,» *Tópicos*, nº 56, pp. 273-310, 2019.
- [38] E. Scozzina, «Teoría de la información y codificación: el significado de la entropía en la transmisión de información,» *Extensionismo, Innovación Y Transferencia Tecnológica*, vol. 6, p. 208–218, 2020.
- [39] A. León, J. Acosta and R. Díaz, "Aplicación de la metodología incremental en el desarrollo de sistemas de información," *Revista Universidad y Sociedad*, vol. 13, no. 5, 2021.

- [40] R. Lapiedra, B. Forés, A. Puig and L. Martínez, Introducción a la gestión de sistemas de información en las empresas, Universitat Jaume I, 2021.
- [41] G. Millán y M. Vargas, «Un algoritmo de control de flujo para redes de computadoras de alta velocidad,» *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, vol. 28, nº 1, 2020.
- [42] S. Báquiro-Guerrero, «Modelos matemáticos generales, objetividad y libre elección,» *Desde el Sur*, vol. 15, nº 2, 2023.
- [43] D. Santos, L. Dallos and P. Gaona-García, "Algoritmos de rastreo de movimiento utilizando técnicas de inteligencia artificial y machine learning," *Información tecnológica*, vol. 31, no. 3, 2020.
- [44] M. Leyva y F. Smarandache, «Resolucion de sistemas de ecuaciones lineales neutrosóficas mediante computación simbólica,» *Revista Asociación Latinoamericana De Ciencias Neutrosóficas*, vol. 15, pp. 41-46, 2021.
- [45] M. Taleb y V. Borkar, «Application of fixed point theorems in triple bipolar controlled metric space to solve cantilever beam problem,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 533, nº 1, 2023.
- [46] P. Madrid, «Acerca del Orden de Convergencia de las Reglas de Integración del Trapecio y Simpson para Cierta Clase de Funciones No Diferenciables,» *Revista De La Escuela De Física*, vol. 11, nº 1, p. 85–95, 2023.
- [47] B. Báez-Vázquez y D. Abrego-Almazán, «El papel de los factores de éxito en los sistemas de información académicos,» *Revista de Investigación Educativa*, vol. 13, 2022.
- [48] Y. Hong, M. Xiaokai, Z. Guangwei, W. Dawei, Xiaofei and Liu, "Network information data processing method based on artificial intelligence," *Procedia Computer Science*, vol. 228, pp. 568-573, 2023.
- [49] H. Chen, Y.-K. Liao and R. Lynn, "Development of processing speed in the United States and Taiwan: A brief report," *Personality and Individual Differences*, vol. 184, pp. 1-5, 2022.
- [50] M. Yamada, T.-a. Nakada, S. Nakao, E. Hira, K. Shinozaki, R. Kawaguchi, Y. Mizushima and T. Matsuoka, "Novel information and communication technology system to improve surge capacity and information management in the initial hospital response to major incidents," *The American Journal of Emergency Medicine*, vol. 37, no. 2, pp. 351-355, 2019.

- [51] M. de la Fuente y P. Terán, «Convergence theorems for random elements in convex combination spaces,» *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 458, pp. 69-93, 2022.
- [52] O. Rivas y W. Barrera, «Teorema de punto fijo común para funciones ocasionalmente débilmente compatibles satisfaciendo una condición contractiva con alteración de distancia,» *Revista Digital Novasinerгия*, vol. 5, nº 2, 2022.
- [53] M. Jiménez-Carrión, A. Jiménez-Panta and M. Coaquira-Velásquez, "Algoritmo evolutivo generador de rutas eficientes para el transporte público," *Información tecnológica*, vol. 34, no. 1, 2023.
- [54] A. Cárcamo, C. Fuentealba and F. Tauler, "Concepciones sobre sistemas de ecuaciones lineales de 3x2 con solución vacía: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios," *Formación universitaria*, vol. 14, no. 1, 2021.
- [55] J. León-Jácome, I. Herrera, L. Lorente and Y. Montero, "Optimización de la recolección de residuos sólidos urbanos bajo un enfoque de Sistemas de Información Geográfica, un estudio de caso," *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologías de Informação*, vol. 29, no. 5, pp. 479-493, 2020.
- [56] C. Barrera-Narváez, J. González-Sanabria and G. Cáceres-Castellanos, "Toma de decisiones en el sector turismo mediante el uso de Sistemas de Información Geográfica e inteligencia de negocios," *Revista científica*, vol. 38, no. 2, pp. 160-173, 2020.
- [57] J. Delgado, La investigación científica: su importancia en la formación de investigadores, vol. 5, 2021, pp. 2385-2386.
- [58] R. Hernandez, C. Fernandez and P. Baptista, Metodología de la investigación, McGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V., 2018, pp. 310-386.
- [59] C. Ramos, «Los alcances de una investigación,» *CienciAmérica*, vol. 9, nº 3, 2020.
- [60] W. Artigas and M. Robles, "“Metodología de la investigación: Una discusión necesaria en Universidades Zulianas”," *Rev. Digit. Univ*, vol. 11, no. 11, pp. 1-17, 2010.
- [61] N. Guliz Ugur, «Digitalization in Higher Education: A Qualitative Approach,» *International Journal of Technology in Education and Science*, vol. 4, nº 1, 2020.
- [62] F. Arias , "El proyecto de investigación," vol. 369, no. 1, 2013.

- [63] Y. Corral, "Validez y confiabilidad de los instrumentos para la recolección de datos," *Revista ciencias de la educación*, no. 33, 2009.
- [64] A. Cisneros, A. Guevara, J. Úrdanigo and J. Garcés, Técnicas e instrumentos para la recolección de datos que apoyan a la investigación científica en tiempo de Pandemia, vol. 8, *Revista Científica Dominio de las Ciencias*, 2022, pp. 1165-1185.
- [65] R. Granados, Revisión teórica de herramientas metodológicas aplicadas en la investigación criminológica, *Revista de Derecho y Cambio Social*, 2020, pp. 501-511.
- [66] A. Alvarez, *Clasificación de las Investigaciones*, 2021.

ANEXOS

Matriz de Consistencia.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES, DIMENSIONES E INDICADORES	TÉCNICAS E INSTRUMENTACIÓN	METODOLOGÍA
<p>Problema General:</p> <p>P.G.1 ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información?</p>	<p>Objetivo general</p> <p>O.G. Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.</p>	<p>Hipótesis General:</p> <p>H.G. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información.</p>	<p>Variable independiente</p> <p>Modelo matemático de un algoritmo generalizado.</p> <p>Dimensiones e Indicadores:</p> <p>D1: Desempeño global del modelo</p> <p>I1: Nivel de precisión de la estructura del algoritmo</p> <p>I2: Nivel de precisión del sistema lineal de ecuaciones</p> <p>I3: Nivel de precisión del teorema de punto fijo</p> <p>I4: Nivel de orden de convergencia</p>	<p>Técnicas:</p> <p>Observación</p> <p>Es un método de investigación en el que el investigador observa y registra directamente los comportamientos, eventos, situaciones o fenómenos de interés, sin intervenir en ellos.</p>	<p>Tipo y Diseño de la Investigación:</p> <p>Para el presente trabajo de investigación:</p> <p>Tipo de Investigación: Aplicada</p> <p>Diseño de la Investigación: Pre test – Post test</p> <p>Nivel de la Investigación: DESCRIPTIVO-CORRELACIONAL CAUSAL</p>
<p>Problemas Específicos</p>	<p>Objetivos Específicos:</p>	<p>Hipótesis Específicas:</p>	<p>Variable dependiente:</p>	<p>Instrumento:</p>	<p>Población y Muestra:</p>

<p>P.E.1. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información?</p> <p>P.E.2. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información?</p>	<p>O.E.1 Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>O.E.2 Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el nivel</p>	<p>H.E.1. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de rapidez en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>H.E.2. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en</p>	<p>Procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>Dimensiones e Indicadores:</p> <p>D1: Eficiencia en el procesamiento de datos</p> <p>I1: Nivel de rapidez</p> <p>I2: Nivel de capacidad de respuesta</p> <p>I3: Nivel de reducción de tiempo</p>	<p>Ficha de evaluación:</p> <p>Es un instrumento utilizado en investigaciones y evaluaciones para recopilar, organizar y registrar información relevante sobre un tema específico. Este instrumento toma la forma de un formulario estructurado que permite a los evaluadores recoger datos de manera sistemática y coherente.</p>	<p>Población:</p> <p>De lo expuesto por los autores, mi población es de tipo finita para el presente trabajo de investigación se identifica como población todas las mediciones de los indicadores del procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>Muestra:</p> <p>Se considera como muestra 16 mediciones de los indicadores del procesamiento de datos de los sistemas de información, donde 8 serán del pre test y 8 del post test.</p> <p>Muestreo:</p> <p>Por conveniencia</p>
--	---	--	--	---	--

<p>P.E.3. ¿En qué medida la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información?</p>	<p>de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>O.E.3 Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p>	<p>el nivel de capacidad de respuesta en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p> <p>H.E.3. La implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, influye significativamente en el nivel de reducción de tiempo en el procesamiento de datos de los sistemas de información.</p>			
---	---	--	--	--	--

Instrumento de recolección de datos
CUESTIONARIO DE MODELO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO

Título: “MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO GENERALIZADO ITERATIVO A PARTIR DEL MÉTODO MEJORADO DE NEWTON Y LA MEJORA DEL PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS SISTEMAS DE INFORMACIÓN, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2023”

La presente es una encuesta que tiene como objetivo Determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información, por tal motivo agradecemos su colaboración y tiempo brindado para responder cada una de las siguientes preguntas del cuestionario.

Indicaciones:

La presente encuesta es de carácter confidencial, agradecemos responder objetiva y verazmente. Lea detenidamente cada pregunta y marque la opción que considere correspondiente según la siguiente leyenda:

Totalmente de acuerdo 5	De acuerdo 4	Ni de acuerdo ni en desacuerdo 3	En desacuerdo 2	Totalmente en desacuerdo 1
----------------------------	-----------------	-------------------------------------	--------------------	-------------------------------

PREGUNTAS:	RESPUESTAS				
DIMENSIÓN “Desempeño global del modelo”					
INDICADOR “Nivel de precisión de la estructura del algoritmo”	1	2	3	4	5
1. La representación matemática del algoritmo generalizado es precisa y fiel a la realidad.					
2. El modelo matemático propuesto captura de manera efectiva la complejidad de la estructura del algoritmo.					
3. La precisión del modelo en la representación de la estructura es evidente en la comparación con datos experimentales o reales.					
4. El modelo matemático proporciona una base sólida para comprender la operación interna del algoritmo generalizado.					

INDICADOR “Nivel de precisión del sistema lineal de ecuaciones”					
5. El modelo matemático resuelve de manera precisa las ecuaciones lineales asociadas al algoritmo generalizado.					
6. La precisión en la resolución de ecuaciones lineales contribuye significativamente a la eficacia del algoritmo generalizado.					
7. El modelo proporciona una representación fiel de la dinámica del sistema lineal en situaciones diversas.					
8. La capacidad del modelo para manejar sistemas lineales complejos demuestra su nivel de precisión.					
INDICADOR “Nivel de precisión del teorema de punto fijo”					
9. La aplicación del teorema de punto fijo en el modelo matemático demuestra un alto grado de precisión.					
10. La interpretación y aplicación del teorema de punto fijo en el modelo son coherentes con los principios fundamentales de la teoría matemática.					
11. La utilización del teorema de punto fijo mejora significativamente la convergencia del algoritmo generalizado.					
12. La aplicación del teorema de punto fijo en el modelo matemático es esencial para lograr resultados precisos en la resolución de ecuaciones no lineales.					
INDICADOR “Nivel de orden de convergencia”					
13. El modelo matemático demuestra un orden de convergencia consistente y predecible en diversas situaciones.					
14. La velocidad de convergencia del algoritmo generalizado, según el modelo, es rápida y eficiente.					
15. La capacidad del modelo para predecir la velocidad de convergencia refleja fielmente el comportamiento real del algoritmo generalizado.					
16. La implementación del modelo permite ajustar y mejorar el orden de convergencia según las necesidades específicas de la aplicación.					

CUESTIONARIO DEL PROCESAMIENTO DE DATOS

**Título: “MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UN ALGORITMO
GENERALIZADO ITERATIVO A PARTIR DEL MÉTODO MEJORADO DE
NEWTON Y LA MEJORA DEL PROCESAMIENTO DE DATOS DE LOS
SISTEMAS DE INFORMACIÓN, EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL
CALLAO, 2023”**

La presente es una encuesta que tiene como propósito determinar la influencia de la implementación de un modelo matemático de un algoritmo generalizado, construido a partir del método mejorado de Newton, para resolver de manera iterativa sistemas de ecuaciones no lineales, en la mejora del procesamiento de datos de los sistemas de información, por tal motivo agradecemos su colaboración y tiempo brindado para responder cada una de las siguientes preguntas del cuestionario.

Indicaciones:




La presente encuesta es de carácter confidencial, agradecemos responder objetiva y verazmente. Lea detenidamente cada pregunta y marque la opción que considere correspondiente según la siguiente leyenda:

Totalmente de acuerdo 5	De acuerdo 4	Ni de acuerdo ni en desacuerdo 3	En desacuerdo 2	Totalmente en desacuerdo 1
----------------------------	-----------------	-------------------------------------	--------------------	-------------------------------

PREGUNTAS:	RESPUESTAS				
DIMENSIÓN “Eficiencia en el procesamiento de datos”					
INDICADOR “nivel de rapidez”	1	2	3	4	5
1. El procesamiento de datos mediante el modelo matemático del algoritmo generalizado se realiza de manera rápida y eficiente.					
2. La implementación del modelo de Newton mejora significativamente la velocidad en el procesamiento de datos en comparación con enfoques convencionales.					
3. La rapidez en el procesamiento de datos es una característica destacada del modelo matemático en situaciones prácticas.					
4. La eficiencia en la velocidad de procesamiento de datos proporcionada por el modelo tiene un impacto positivo en la toma de decisiones en tiempo real.					

5. El nivel de rapidez en el procesamiento de datos cumple con las expectativas y requisitos de tiempo establecidos para las aplicaciones de sistemas de información.					
INDICADOR “Nivel de capacidad de respuesta”					
6. El sistema de información responde de manera rápida a las consultas y solicitudes de datos.					
7. La capacidad de respuesta del sistema al procesar datos es adecuada para manejar cargas de trabajo variables.					
8. El modelo matemático del algoritmo generalizado mejora significativamente la capacidad de respuesta del sistema de información.					
9. La capacidad de respuesta del sistema es consistente incluso en situaciones de alta complejidad en el procesamiento de datos.					
10. La implementación del modelo de Newton influye positivamente en la capacidad del sistema para proporcionar respuestas rápidas y precisas.					
INDICADOR “Nivel de reducción de tiempo”					
11. La implementación del modelo matemático del algoritmo generalizado ha reducido significativamente el tiempo necesario para procesar datos en comparación con métodos convencionales.					
12. El tiempo requerido para realizar tareas específicas de procesamiento de datos se ha reducido de manera apreciable gracias al modelo de Newton.					
13. La eficiencia en la reducción del tiempo de procesamiento de datos es una característica destacada del modelo matemático en situaciones prácticas					
14. El modelo de Newton ha demostrado ser efectivo en acelerar procesos específicos dentro del sistema de información, reduciendo tiempos de ejecución					
15. La reducción de tiempo proporcionada por la implementación del modelo impacta positivamente en la eficacia general del sistema de información.					

FICHA DE EVALUACIÓN

 Procesamiento de datos de los sistemas de información 				
Periodo de evaluación: 2023				
Equipo/Sistema evaluado: Ssistemas de informacion				
Instrucciones de uso: •Completa cada sección con la información correspondiente para cada mes. •Utiliza porcentajes para la disponibilidad operacional y registra el número de fallos, el tiempo medio entre fallos y el tiempo medio para reparaciones regístralo en horas. •Añade cualquier observación o comentario relevante.				
Dia-Mes	Procesamiento de datos de los sistemas de información (ms)	Nivel de rapidez (datos/seg)	Nivel de capacidad de respuesta (bits/seg)	Nivel de reducción de tiempo (ms)
PRE TEST: Registre los 8 datos solicitados antes de la aplicación de la inspección termográfica en el mantenimiento predictivo				
Mar-22				
Abr-22				
May-22				
Jun-22				
Jul-22				
Ago-22				
Set-22				
Oct-22				
POST TEST: Registre los 8 datos solicitados después de la aplicación de la inspección termográfica en el mantenimiento predictivo				
Mar-23				
Abr-23				
May-23				
Jun-23				
Jul-23				
Ago-23				
Set-23				
Oct-23				
Observaciones y comentarios: <div style="float: right; text-align: right;">  </div>				

Validación de instrumentos

1. IDENTIFICACION DEL EXPERTO

NOMBRE DEL EXPERTO: SANTIAGO RODOLFO AGUILAR LOYAGA

NIVEL DE GRADO: Doctor

DNI: 08614040 PROFESIÓN: ECONOMISTA – CONTADOR PUBLICO

FECHA DE EVALUACIÓN: 15 de julio del 2024

FIRMA DEL EXPERTO:



Código ORCID No 0000-0003-4119-668X

2. PLANILLA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

CRITERIOS	APRECIACIÓN CUALITATIVA			
	EXCELENTE (4)	BUENO (3)	REGULAR (2)	DEFICIENTE (1)
Presentación del instrumento	✓			
Claridad en la redacción de los ítems	✓			
Pertinencia de las variables con los indicadores	✓			
Relevancia del contenido	✓			
Factibilidad de la aplicación	✓			

APRECIACIÓN CUALITATIVA:

OBSERVACIONES:

1. IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO

NOMBRE DEL EXPERTO: Dra. Silvia Liliana Salazar Llerena

NIVEL DE GRADO: Doctor

DNI: 10139161

PROFESIÓN: Metodóloga

FECHA DE EVALUACIÓN: 02 de agosto del 2023

FIRMA DEL EXPERTO:



2. PLANILLA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

CRITERIOS	APRECIACIÓN CUALITATIVA			
	EXCELENTE (4)	BUENO (3)	REGULAR (2)	DEFICIENTE (1)
Presentación del instrumento	✓			
Claridad en la redacción de los ítems	✓			
Pertinencia de las variables con los indicadores	✓			
Relevancia del contenido	✓			
Factibilidad de la aplicación	✓			

APRECIACIÓN CUALITATIVA:

OBSERVACIONES:

Validación de instrumentos

1. IDENTIFICACION DEL EXPERTO

NOMBRE DEL EXPERTO: ROBERT JULIO CONTRERAS RIVERA

NIVEL DE GRADO: Doctor

DNI:

PROFESIÓN: Ingeniero Industrial

FECHA DE EVALUACIÓN: 16 de julio del 2024

FIRMA DEL EXPERTO:



2. PLANILLA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

CRITERIOS	APRECIACIÓN CUALITATIVA			
	EXCELENTE (4)	BUENO (3)	REGULAR (2)	DEFICIENTE (1)
Presentación del instrumento	✓			
Claridad en la redacción de los ítems	✓			
Pertinencia de las variables con los indicadores	✓			
Relevancia del contenido	✓			
Factibilidad de la aplicación	✓			

APRECIACIÓN CUALITATIVA:

OBSERVACIONES:

Contreras Rivera Robert Julio

DNI: 09961475

Base de datos

Fecha	Procesamiento de datos de los sistemas de información (ms)	Nivel de rapidez (datos/seg)	Nivel de capacidad de respuesta (bits/seg)	Nivel de reducción de tiempo (ms)
Mar-22	127	528	9989	21
Abr-22	118	524	10088	26
May-22	123	531	9915	24
Jun-22	116	510	9938	24
Jul-22	128	513	9964	25
Ago-22	119	540	10041	26
Set-22	120	521	9911	34
Oct-22	119	512	9942	25
Mar-23	90	722	14994	15
Abril-23	81	722	14880	17
May-23	87	718	14947	12
Jun-23	86	717	15039	13
Jul-23	79	728	14900	17
Ago-23	76	721	15054	18
Set-23	91	721	15072	17
Oct-23	89	712	14966	15

APÉNDICE

1. EL OPERADOR DIFERENCIAL

A continuación, haremos mención de algunos resultados importantes sobre el Operador Diferencial y que han sido utilizados en la construcción y en las etapas de demostración.

Se debe tener en cuenta que f es una función de varias variables; h, k, l , etc. son números reales.

(1) El Operador Diferencial de Primer Orden para una función de dos variables.

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

(2) El Operador Diferencial de Segundo Orden para una función de dos variables.

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

(3) El Operador Diferencial de Tercer Orden para una función de dos variables.

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f = \left(h^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) f$$

(4) El Operador Diferencial de Orden n para una función de dos variables.

Es fácil notar la similitud del desarrollo de las potencias de un binomio con el Operador Diferencial del respectivo orden.

Por tanto, en general se tiene:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} h^{n-r} k^r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r} \partial y^r} = \left[\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r} \right] f$$

(5) El Operador Diferencial de Primer Orden para una función de tres variables.

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^1 f = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z}$$

(6) El Operador Diferencial de Segundo Orden para una función de tres variables.

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right) f \right] \\ &= \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \left[hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + hl \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + kl \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right] \right) \\ &= \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2}{\partial y^2} + l \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2hl \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2kl \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) f \end{aligned}$$

(7) El Operador Diferencial de Tercer Orden para una función de tres variables.

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 f &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right] \\ &= \left(h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + l^3 \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3h^2 l \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} + \right. \\ &\quad \left. + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + 3lk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} + 3hl^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} + 3kl^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} + 6hkl \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \right) \\ &= \left(h^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + k^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} + l^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3h^2 l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} + \right. \\ &\quad \left. + 3hk^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3lk^2 \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} + 3hl^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} + 3kl^2 \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + 6hkl \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \right) f \end{aligned}$$

Recordemos que, en el Desarrollo de Taylor de páginas anteriores, el Operador Diferencial necesario es hasta el tercer orden, inclusive para funciones de n variables. Así:

(8) El Operador Diferencial de Primer Orden para una función de n variables.

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^1 f = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f$$

(9) El Operador Diferencial de Segundo Orden para una función de n variables.

$$\begin{aligned} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f &= \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left[\left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \right] \\ &= \sum_{k=1}^n h_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + 2 \sum_{\substack{k=1; j=2 \\ k < j}}^{n-1; n} h_k h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n h_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + 2 \sum_{\substack{k=1; j=2 \\ k < j}}^{n-1; n} h_k h_j \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) f \end{aligned}$$

(10) El Operador diferencial de Tercer Orden para una función de n variables,

por su similitud con el “cubo de n sumandos”, viene dado por:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^3 f &= \sum_{i=1}^n h_i^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} + 3 \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n; n} h_j^2 h_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i} + 6 \sum_{\substack{i=1; j=2; k=3 \\ i < j < k}}^{n-2; n-1; n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n h_i^3 \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} + 3 \sum_{\substack{i=1; j=1 \\ i \neq j}}^{n; n} h_j^2 h_i \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} + 6 \sum_{\substack{i=1; j=2; k=3 \\ i < j < k}}^{n-2; n-1; n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right] f \end{aligned}$$

2. DERIVADA DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

(1) Para matrices 2×2 :

Sea $A(t) = (B(t), C(t))$ donde $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$; $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ son los vectores

columna de la matriz $A(t)$, cuyas componentes son funciones derivables en t .

Luego si: $\varphi(t) = \text{Det}(A(t)) = b_1(t)c_2(t) - b_2(t)c_1(t)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi^1(t) &= b_1^1(t)c_2(t) + b_1(t)c_2^1(t) - b_2^1(t)c_1(t) - b_2(t)c_1^1(t) = (b_1^1(t)c_2(t) - b_2^1(t)c_1(t)) + (b_1(t)c_2^1(t) - b_2(t)c_1^1(t)) \\ &= \text{Det}(B^1(t), C(t)) + \text{Det}(B(t), C^1(t)) \end{aligned}$$

Por tanto: $\varphi^1(t) = \text{Det}(B^1(t), C(t)) + \text{Det}(B(t), C^1(t))$

(2) Para matrices 3×3 :

Sea $A(t) = (B(t), C(t), D(t))$ donde: $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$; $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$; $D(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix}$

son los vectores columna de la matriz $A(t)$, cuyas componentes son funciones derivables en t . Luego si:

$$\varphi(t) = \text{Det}(A(t)) = b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_3c_2d_1 - b_2c_1d_3 - b_1c_3d_2 \quad ; \text{ "obviando a } t \text{ " ,}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi^1(t) &= b_1^1c_2d_3 + b_1c_2^1d_3 + b_1c_2d_3^1 + b_2^1c_3d_1 + b_2c_3^1d_1 + b_2c_3d_1^1 + \\ &+ b_3^1c_1d_2 + b_3c_1^1d_2 + b_3c_1d_2^1 - b_2^1c_1d_3 - b_2c_1^1d_3 - b_2c_1d_3^1 - \\ &- b_1^1c_3d_2 - b_1c_3^1d_2 - b_1c_3d_2^1 - b_3^1c_2d_1 - b_3c_2^1d_1 - b_3c_2d_1^1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varphi^1(t) = \text{Det}(B^1(t), C(t), D(t)) + \text{Det}(B(t), C^1(t), D(t)) + \text{Det}(B(t), C(t), D^1(t))$$

De manera similar se deduce la derivada para determinantes 4×4 ó mayor orden. Más aún si las funciones son de varias variables; entiéndase Derivada Parcial.

3. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES 2×2

En referencia a las derivadas parciales de f, g y las definiciones de los determinantes $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, J$ y de $F^{(1)}, F^{(2)}, R$ vistos antes, lo haremos con subíndices 1 ó 2, sea con respecto a "x" ó "y" respectivamente.

Así, tenemos algunos resultados:

$$\Delta^{(1)}(w^*) = \Delta^{(2)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{21} \\ g & g_{21} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1^{(1)}(w^*) = J(w^*)$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} f_2 & f_2 \\ g_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{22} \\ g & g_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2^{(1)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f \\ g_{11} & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1 \\ g_1 & g_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1^{(2)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{12} & f \\ g_{12} & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2^{(2)}(w^*) = J(w^*)$$

Note que es necesario para la validez de estos resultados que las funciones f, g sean de clase C^2 en w^* y sus segundas derivadas parciales acotadas en w^* .

Si hubiésemos definido: $P(x, y) = x - \frac{\Delta^{(1)}}{J}$, $Q(x, y) = y - \frac{\Delta^{(2)}}{J}$, obtenemos:

$$\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1 = \frac{\Delta_1^{(1)}J - \Delta^{(1)}J_1}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1(w^*) = 1 ; \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2 = \frac{\Delta_2^{(1)}J - \Delta^{(1)}J_2}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2(w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1 = \frac{\Delta_1^{(2)}J - \Delta^{(2)}J_1}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1(w^*) = 0 ; \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2 = \frac{\Delta_2^{(2)}J - \Delta^{(2)}J_2}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2(w^*) = 1$$

Luego, usando estos resultados se obtiene:

$$P_1 = 1 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1 \Rightarrow P_1(w^*) = 1 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1 (w^*) = 0 ; P_2 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2 \Rightarrow P_2(w^*) = - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2 (w^*) = 0$$

$$Q_1 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1 \Rightarrow Q_1(w^*) = - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1 (w^*) = 0 ; Q_2 = 1 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2 \Rightarrow Q_2(w^*) = 1 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2 (w^*) = 0$$

Estos últimos cuatro resultados, hacen posible probar que el algoritmo de Newton-Raphson para un sistema no lineal de ecuaciones 2×2 es de orden de convergencia dos.

Recordemos que fueron definidos $E, G, F^{(1)}, F^{(2)}, R$. Considerando subíndices para indicar las derivadas parciales y siguiendo la regla de derivación para Determinantes, se obtienen los siguientes resultados:

$$F^{(1)}(w^*) = 0 ; F^{(2)}(w^*) = 0 ; R(w^*) = J(w^*)$$

$$F_1^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right)_1 & f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \\ g_1 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right)_1 & g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right) & \left(f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right)_1 \\ g + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right) & \left(g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} \right)_1 \end{vmatrix}$$

Entonces: $F_1^{(1)}(w^*) = J(w^*)$. Recordar que: $\Delta_1^{(1)}(w^*) = J(w^*)$

$$F_2^{(1)} = \begin{vmatrix} f_2 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right)_2 & f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \\ g_2 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right)_2 & g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right) & \left(f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right)_2 \\ g + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right) & \left(g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} \right)_2 \end{vmatrix}$$

Entonces: $F_2^{(1)}(w^*) = 0$. Recordar que: $\Delta_2^{(1)}(w^*) = 0$

$$F_1^{(2)} = \left| \begin{array}{cc} \left(f_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{11}}{J} \right)_1 & f + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right) \\ \left(g_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right)_1 & g + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \left(f_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{11}}{J} \right) & f_1 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right)_1 \\ \left(g_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right) & g_1 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right)_1 \end{array} \right|$$

Entonces: $F_1^{(2)}(w^*) = 0$. Recordar que: $\Delta_1^{(2)}(w^*) = 0$

$$F_2^{(2)} = \left| \begin{array}{cc} \left(f_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{11}}{J} \right)_2 & f + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right) \\ \left(g_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right)_2 & g + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \left(f_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{11}}{J} \right) & f_2 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12}}{J^2} \right)_2 \\ \left(g_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right) & g_2 + \left(\frac{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12}}{J^2} \right)_2 \end{array} \right|$$

Entonces: $F_2^{(2)}(w^*) = J(w^*) = 0$. Recordar que: $\Delta_2^{(2)}(w^*) = J(w^*)$

$$R_1 = \left| \begin{array}{cc} f_{11} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} f_{11}}{J} \right)_1 & f_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right) \\ g_{11} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} g_{11}}{J} \right)_1 & g_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} f_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} f_{11}}{J} \right) & f_{21} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right)_1 \\ g_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} g_{11}}{J} \right) & g_{21} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right)_1 \end{array} \right|$$

$$\text{Entonces: } R_1(w^*) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} f_{11} & f_2 \\ g_{11} & g_2 \end{array} \right|_{w=w^*} + \left| \begin{array}{cc} f_1 & f_{21} \\ g_1 & g_{21} \end{array} \right|_{w=w^*}$$

$$R_2 = \left| \begin{array}{cc} f_{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} f_{11}}{J} \right)_2 & f_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right) \\ g_{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} g_{11}}{J} \right)_2 & g_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} f_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} f_{11}}{J} \right) & f_{22} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right)_2 \\ g_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(1)} g_{11}}{J} \right) & g_{22} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^{(2)} g_{11}}{J} \right)_2 \end{array} \right|$$

$$\text{Entonces: } R_2(w^*) = \left| \begin{array}{cc} f_{12} & f_2 \\ g_{12} & g_2 \end{array} \right|_{w=w^*} + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} f_1 & f_{22} \\ g_1 & g_{22} \end{array} \right|_{w=w^*}$$

Nótese hasta aquí la necesidad de al menos que $f, g \in C^3$ en w^* .

Además, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_1 &= \frac{F_1^{(1)}R - F^{(1)}R_1}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_1(w^*) = \frac{F_1^{(1)}(w^*)R(w^*) - F^{(1)}(w^*)R_1(w^*)}{R^2(w^*)} \\ &= \frac{J(w^*)J(w^*) - 0 \cdot R_1(w^*)}{J^2(w^*)} = 1 \end{aligned}$$

Entonces: $\left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_1(w^*) = 1$. Recordar que: $\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_1(w^*) = 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_2 &= \frac{F_2^{(1)}R - F^{(1)}R_2}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_2(w^*) = \frac{F_2^{(1)}(w^*)R(w^*) - F^{(1)}(w^*)R_2(w^*)}{R^2(w^*)} \\ &= \frac{0 \cdot J(w^*) - 0 \cdot R_2(w^*)}{J^2(w^*)} = 0 \end{aligned}$$

Entonces: $\left(\frac{F^{(1)}}{R}\right)_2(w^*) = 0$. Recordar que: $\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_2(w^*) = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_1 &= \frac{F_1^{(2)}R - F^{(2)}R_1}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_1(w^*) = \frac{F_1^{(2)}(w^*)R(w^*) - F^{(2)}(w^*)R_1(w^*)}{R^2(w^*)} \\ &= \frac{0 \cdot J(w^*) - 0 \cdot R_1(w^*)}{J^2(w^*)} = 1 \end{aligned}$$

Entonces: $\left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_1(w^*) = 0$. Recordar que: $\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_1(w^*) = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_2 &= \frac{F_2^{(2)}R - F^{(2)}R_2}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_2(w^*) = \frac{F_2^{(2)}(w^*)R(w^*) - F^{(2)}(w^*)R_2(w^*)}{R^2(w^*)} \\ &= \frac{J(w^*)J(w^*) - 0 \cdot R_2(w^*)}{J^2(w^*)} = 1 \end{aligned}$$

Entonces: $\left(\frac{F^{(2)}}{R}\right)_2(w^*) = 1$. Recordar que: $\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_2(w^*) = 1$

Por tanto:

$$E_1(w^*) = 1 - \left(\frac{F^{(1)}}{R} \right)_1 (w^*) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow E_1(w^*) = 0$$

$$E_2(w^*) = 0 - \left(\frac{F^{(1)}}{R} \right)_2 (w^*) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow E_1(w^*) = 0$$

$$G_1(w^*) = 0 - \left(\frac{F^{(2)}}{R} \right)_1 (w^*) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow G_1(w^*) = 0$$

$$G_2(w^*) = 1 - \left(\frac{F^{(2)}}{R} \right)_2 (w^*) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow G_2(w^*) = 0$$

Con estos cuatro últimos resultados, se garantiza que algoritmo propuesto es al menos de orden de convergencia dos; de manera similar a la conclusión respecto del algoritmo de Newton.

Pero, además se tiene:

$$E_{11} = (E_1)_1 = \left[1 - \left(\frac{F^{(1)}}{R} \right)_1 \right]_1 = - \frac{\left[(F_{11}^{(1)} R - F^{(1)} R_{11}) R - (F_1^{(1)} R - F^{(1)} R_1) 2R_1 \right]}{R^3}$$

$$E_{11}(w^*) = - \frac{\left[F_{11}^{(1)}(w^*) - 2R_1(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow E_{11}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{11}^{(1)}(w^*) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_2 \\ g_{11} & g_2 \end{vmatrix}_{w=w^*} + 2 \begin{vmatrix} f_1 & f_{21} \\ g_1 & g_{21} \end{vmatrix}_{w=w^*} ; R_1(w^*) = \frac{1}{2} F_{11}^{(1)}(w^*)$$

Nótese que, en la obtención de estos dos últimos resultados, es necesario la existencia de $f_{1122}; f_{1112}; g_{1122}; g_{1112}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

$$E_{22} = (E_2)_2 = \left[1 - \left(\frac{F^{(1)}}{R} \right)_2 \right]_2 = - \frac{\left[(F_{22}^{(1)} R - F^{(1)} R_{22}) R - (F_2^{(1)} R - F^{(1)} R_2) 2R_2 \right]}{R^3}$$

$$E_{22}(w^*) = - \frac{\left[F_{22}^{(1)}(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow E_{22}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{22}^{(1)}(w^*) = \begin{vmatrix} f_{22} & f_2 \\ g_{22} & g_2 \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} f_2 & f_{22} \\ g_2 & g_{22} \end{vmatrix}_{w=w^*}$$

Nótese que, en la obtención de este último resultado, es necesario la existencia de $f_{1222}; f_{2222}; g_{1222}; g_{2222}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

$$E_{12} = (E_1)_2 = \left[1 - \left(\frac{F^{(1)}}{R} \right)_{1,2} \right] = - \frac{\left[(F_{12}^{(1)}R + F_1^{(1)}R_2 - F_2^{(1)}R_1 - F^{(1)}R_{12})R^2 - (F_1^{(1)}R - F^{(1)}R_1)2RR_2 \right]}{R^4}$$

$$E_{12}(w^*) = - \frac{\left[F_{12}^{(1)}(w^*) - R_2(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow E_{12}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{12}^{(1)}(w^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_1 & f_{22} \\ g_1 & g_{22} \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} f_{12} & f_2 \\ g_{12} & g_2 \end{vmatrix}_{w=w^*} = R_2(w^*)$$

Nótese que, en la obtención de estos dos últimos resultados, es necesario la existencia de $f_{1122}; f_{1222}; g_{1122}; g_{1222}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

$$G_{11} = (G_1)_1 = \left[0 - \left(\frac{F^{(2)}}{R} \right)_{1,1} \right] = - \frac{\left[(F_{11}^{(2)}R - F^{(2)}R_{11})R - (F_1^{(2)}R - F^{(2)}R_1)2R_1 \right]}{R^3}$$

$$G_{11}(w^*) = - \frac{\left[F_{11}^{(2)}(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow G_{11}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{11}^{(2)}(w^*) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_1 \\ g_{11} & g_1 \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{11} \\ g_1 & g_{11} \end{vmatrix}_{w=w^*}$$

Nótese que, en la obtención de este último resultado, es necesario la existencia de $f_{1111}; f_{1112}; g_{1111}; g_{1112}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

$$G_{22} = (G_2)_2 = \left[1 - \left(\frac{F^{(2)}}{R} \right)_2 \right]_2 = - \frac{\left[(F_{22}^{(2)} R - F^{(2)} R_{22}) R - (F_2^{(2)} R - F^{(2)} R_2) 2R_2 \right]}{R^3}$$

$$G_{22}(w^*) = - \frac{\left[F_{22}^{(2)}(w^*) - 2R_2(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow G_{22}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{22}^{(2)}(w^*) = 2 \begin{vmatrix} f_{12} & f_2 \\ g_{12} & g_2 \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{22} \\ g_1 & g_{22} \end{vmatrix}_{w=w^*} ; R_2(w^*) = \frac{1}{2} F_{22}^{(2)}(w^*)$$

Nótese que, en la obtención de estos dos últimos resultados, es necesario la existencia de $f_{1122}; f_{1222}; g_{1122}; g_{1222}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

$$G_{12} = (G_1)_2 = \left[1 - \left(\frac{F^{(2)}}{R} \right)_1 \right]_2 = - \frac{\left[(F_{12}^{(2)} R + F_1^{(2)} R_2 - F_2^{(2)} R_1 - F^{(2)} R_{12}) R^2 - (F_1^{(2)} R - F^{(2)} R_1) 2RR_2 \right]}{R^4}$$

$$G_{12}(w^*) = - \frac{\left[F_{12}^{(2)}(w^*) - R_1(w^*) \right]}{J(w^*)} = 0 \Rightarrow G_{12}(w^*) = 0$$

$$\text{Ya que: } F_{12}^{(2)}(w^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_2 \\ g_{11} & g_2 \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{12} \\ g_1 & g_{12} \end{vmatrix}_{w=w^*} = R_1(w^*)$$

Nótese que, en la obtención de estos dos últimos resultados, es necesario la existencia de $f_{1112}; f_{1122}; g_{1112}; g_{1122}$ en w^* , que sean continuas y acotadas.

Desde que:

$$E_1(w^*) = E_2(w^*) = G_1(w^*) = G_2(w^*) = 0$$

$$E_{11}(w^*) = E_{22}(w^*) = E_{12}(w^*) = G_{11}(w^*) = G_{22}(w^*) = G_{12}(w^*) = 0$$

Hace posible probar que el algoritmo propuesto es de orden de convergencia tres, como se concluye respecto del algoritmo propuesto.

4. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES 3×3

En referencia a las derivadas parciales de f, g, h y las definiciones de $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, J$ y de $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, R$ vistos antes, lo haremos con subíndices 1, 2 ó 3, sea con respecto a "x", "y" ó "z" respectivamente.

Así tenemos algunos resultados:

$$\Delta^{(1)}(w^*) = \Delta^{(2)}(w^*) = \Delta^{(3)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{21} & f_3 \\ g & g_{21} & g_3 \\ h & h_{21} & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_2 & f_{31} \\ g & g_2 & g_{31} \\ h & h_2 & h_{31} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1^{(1)}(w^*) = J(w^*)$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} f_2 & f_2 & f_3 \\ g_2 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{22} & f_3 \\ g & g_{22} & g_3 \\ h & h_{22} & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_2 & f_{32} \\ g & g_2 & g_{32} \\ h & h_2 & h_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2^{(1)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} f_3 & f_2 & f_3 \\ g_3 & g_2 & g_3 \\ h_3 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{23} & f_3 \\ g & g_{23} & g_3 \\ h & h_{23} & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_2 & f_{33} \\ g & g_2 & g_{33} \\ h & h_2 & h_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_3^{(1)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f & f_3 \\ g_{11} & g & g_3 \\ h_{11} & h & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1 & f_3 \\ g_1 & g_1 & g_3 \\ h_1 & h_1 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f & f_{31} \\ g_1 & g & g_{31} \\ h_1 & h & h_{31} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1^{(2)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{12} & f & f_3 \\ g_{12} & g & g_3 \\ h_{12} & h & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f & f_{32} \\ g_1 & g & g_{32} \\ h_1 & h & h_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2^{(2)}(w^*) = J(w^*)$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} f_{13} & f & f_3 \\ g_{13} & g & g_3 \\ h_{13} & h & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_3 & f_3 \\ g_1 & g_3 & g_3 \\ h_1 & h_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f & f_{33} \\ g_1 & g & g_{33} \\ h_1 & h & h_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_3^{(2)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_1^{(3)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_2 & f \\ g_{11} & g_2 & g \\ h_{11} & h_2 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{21} & f \\ g_1 & g_{21} & g \\ h_1 & h_{21} & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_1 \\ g_1 & g_2 & g_1 \\ h_1 & h_2 & h_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1^{(3)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_2 & f \\ g_{12} & g_2 & g \\ h_{12} & h_2 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{22} & f \\ g_1 & g_{22} & g \\ h_1 & h_{22} & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_2 \\ g_1 & g_2 & g_2 \\ h_1 & h_2 & h_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2^{(3)}(w^*) = 0$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} f_{13} & f_2 & f \\ g_{13} & g_2 & g \\ h_{13} & h_2 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{23} & f \\ g_1 & g_{23} & g \\ h_1 & h_{23} & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_3^{(3)}(w^*) = J(w^*)$$

Note que es necesario para la validez de estos resultados que las funciones f, g, h sean de clase C^2 en w^* y sus segundas derivadas parciales acotadas en w^* .

Si hubiésemos definido:

$$P(x, y, z) = x - \frac{\Delta^{(1)}}{J} \quad ; \quad Q(x, y, z) = y - \frac{\Delta^{(2)}}{J} \quad ; \quad M(x, y, z) = z - \frac{\Delta^{(3)}}{J} \quad .$$

Obtenemos:

$$\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1 = \frac{\Delta_1^{(1)} J - \Delta^{(1)} J_1}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_1 (w^*) = 1$$

$$\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2 = \frac{\Delta_2^{(1)} J - \Delta^{(1)} J_2}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_2 (w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_3 = \frac{\Delta_3^{(1)} J - \Delta^{(1)} J_3}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J} \right)_3 (w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_1 = \frac{\Delta_1^{(2)}J - \Delta^{(2)}J_1}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_1(w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_2 = \frac{\Delta_2^{(2)}J - \Delta^{(2)}J_2}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_2(w^*) = 1$$

$$\left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_3 = \frac{\Delta_3^{(2)}J - \Delta^{(2)}J_3}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J}\right)_3(w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_1 = \frac{\Delta_1^{(3)}J - \Delta^{(3)}J_1}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_1(w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_2 = \frac{\Delta_2^{(3)}J - \Delta^{(3)}J_2}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_2(w^*) = 0$$

$$\left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}J - \Delta^{(3)}J_3}{J^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J}\right)_3(w^*) = 1$$

Luego usando estos resultados se obtiene:

$$P_1 = 1 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_1 \Rightarrow P_1(w^*) = 1 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_1(w^*) = 0$$

$$P_2 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_2 \Rightarrow P_2(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_2(w^*) = 0$$

$$P_3 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_3 \Rightarrow P_3(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(1)}}{J}\right)_3(w^*) = 0$$

$$Q_1 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1 \Rightarrow Q_1(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_1 (w^*) = 0$$

$$Q_2 = 1 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2 \Rightarrow Q_2(w^*) = 1 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_2 (w^*) = 0$$

$$Q_3 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_3 \Rightarrow Q_3(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(2)}}{J} \right)_3 (w^*) = 0$$

$$M_1 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_1 \Rightarrow M_1(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_1 (w^*) = 0$$

$$M_2 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_2 \Rightarrow M_2(w^*) = 0 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_2 (w^*) = 0$$

$$M_3 = 0 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_3 \Rightarrow M_3(w^*) = 1 - \left(\frac{\Delta^{(3)}}{J} \right)_3 (w^*) = 0$$

Estos últimos nueve resultados, hacen posible probar que el algoritmo de Newton para un sistema no lineal de ecuaciones 3×3 es de orden de convergencia dos.

Recordemos que fueron definidos $F, G, H, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, R$. Considerando subíndices para indicar las derivadas parciales y siguiendo la regla de derivación para determinantes, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
F_1^{(1)} &= \begin{vmatrix} f_1 + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} f_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} f_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right]_1 & f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} & f_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} f_{33}}{J} \\ g_1 + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} g_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} g_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right]_1 & g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} & g_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} g_{33}}{J} \\ h_1 + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} h_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} h_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} h_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right]_1 & h_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} h_{22}}{J} & h_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} h_{33}}{J} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} f + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} f_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} f_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & \left(f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} \right)_1 & f_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} f_{33}}{J} \\ g + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} g_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} g_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & \left(g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} \right)_1 & g_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} g_{33}}{J} \\ h + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} h_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} h_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} h_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & \left(h_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} h_{22}}{J} \right)_1 & h_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} h_{33}}{J} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} f + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} f_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} f_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} f_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & f_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} f_{22}}{J} & \left(f_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} f_{33}}{J} \right)_1 \\ g + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} g_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} g_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} g_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & g_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} g_{22}}{J} & \left(g_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} g_{33}}{J} \right)_1 \\ h + \left[\left(\Delta^{(1)} \Delta^{(2)} h_{12} + \Delta^{(1)} \Delta^{(3)} h_{13} + \Delta^{(2)} \Delta^{(3)} h_{23} \right) \frac{1}{J^2} \right] & h_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)} h_{22}}{J} & \left(h_3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)} h_{33}}{J} \right)_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces: $F_1^{(1)}(w^*) = J(w^*)$

En forma similar se verifica que:

$$F_2^{(1)}(w^*) = F_3^{(1)}(w^*) = F_1^{(2)}(w^*) = F_3^{(2)}(w^*) = F_1^{(3)}(w^*) = F_2^{(3)}(w^*) = 0; F_2^{(2)}(w^*) = F_3^{(3)}(w^*) = J(w^*)$$

Además:

$$R_1(w^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_2 & f_3 \\ g_{11} & g_2 & g_3 \\ h_{11} & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{21} & f_3 \\ g_1 & g_{21} & g_3 \\ h_1 & h_{21} & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_{31} \\ g_1 & g_2 & g_{31} \\ h_1 & h_2 & h_{31} \end{vmatrix}_{w^*}$$

$$R_2(w^*) = \begin{vmatrix} f_{12} & f_2 & f_3 \\ g_{12} & g_2 & g_3 \\ h_{12} & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_1 & f_{22} & f_3 \\ g_1 & g_{22} & g_3 \\ h_1 & h_{22} & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_{32} \\ g_1 & g_2 & g_{32} \\ h_1 & h_2 & h_{32} \end{vmatrix}_{w^*}$$

$$R_2(w^*) = \begin{vmatrix} f_{12} & f_2 & f_3 \\ g_{12} & g_2 & g_3 \\ h_{12} & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_1 & f_{22} & f_3 \\ g_1 & g_{22} & g_3 \\ h_1 & h_{22} & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_{32} \\ g_1 & g_2 & g_{32} \\ h_1 & h_2 & h_{32} \end{vmatrix}_{w^*}$$

$$R_3(w^*) = \begin{vmatrix} f_{13} & f_2 & f_3 \\ g_{13} & g_2 & g_3 \\ h_{13} & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{23} & f_3 \\ g_1 & g_{23} & g_3 \\ h_1 & h_{23} & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_{33} \\ g_1 & g_2 & g_{33} \\ h_1 & h_2 & h_{33} \end{vmatrix}_{w^*}$$

Nótese que para obtener estos últimos doce resultados es necesario al menos que $f, g, h \in C^3$ en w^* . Luego, es fácil deducir que:

$$\left(\frac{F^{(k)}}{R} \right)_j (w^*) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases} \text{ donde } j, k = 1; 2; 3 \Rightarrow F_i(w^*) = G_i(w^*) = H_i(w^*) = 0 \quad ; \forall i = 1; 2; 3$$

Con estos últimos nueve resultados, se garantiza que el algoritmo propuesto es al menos de orden de convergencia dos, de manera similar a la conclusión respecto del algoritmo de Newton, para sistemas 3×3 .

Pero, además se deduce, por ejemplo:
$$F_{11}(w^*) = - \frac{[F_1^{(1)}(w^*) - 2R_1(w^*)]}{J(w^*)} = 0$$

Ya que verifica:

$$\frac{1}{2} F_{11}^{(1)}(w^*) = R_1(w^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_2 & f_3 \\ g_{11} & g_2 & g_3 \\ h_{11} & h_2 & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_{21} & f_3 \\ g_1 & g_{21} & g_3 \\ h_1 & h_{21} & h_3 \end{vmatrix}_{w^*} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_{31} \\ g_1 & g_2 & g_{31} \\ h_1 & h_2 & h_{31} \end{vmatrix}_{w^*}$$

Análogamente se deduce: $F_{jk}(w^*) = G_{jk}(w^*) = H_{jk}(w^*) = 0$; para $j = 1; 2; 3, k = 1; 2; 3$

En la obtención de estos últimos dieciocho resultados se hace necesario la existencia de todas las cuartas derivadas parciales de f, g, h ; que sean continuas y acotadas en w^* . Los cuales hacen posible probar que el algoritmo propuesto es de orden de convergencia tres.

5. DERIVADAS PARCIALES DE DETERMINANTES $n \times n$

Para no causar confusión, seguiremos tomando los subíndices para referirnos a las derivadas parciales y superíndice para referirnos a una función que así lo indique. Por ejemplo f_{13}^4 significa las derivadas parciales con respecto a las variables x_1 y x_3 de la cuarta función.

Para el algoritmo propuesto, son definidos $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, J$ y $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)}, R$.

Así, tenemos algunos resultados:

$$\Delta^{(1)}(w^*) = \Delta^{(2)}(w^*) = \dots = \Delta^{(n)}(w^*) = 0$$

Es fácil deducir que:
$$\Delta_i^j(w^*) = \begin{cases} J(w^*) & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Para la validez de estos resultados es necesario que las n funciones f^1, f^2, \dots, f^n sean al menos de clase C^2 en w^* y sus segundas derivadas parciales continuas y acotadas en w^* .

Si hubiésemos definido:
$$P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i - \frac{\Delta^{(i)}}{J} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Obtenemos:
$$\left(\frac{\Delta^{(i)}}{J} \right)_k (w^*) = \begin{cases} 1 & ; i = k \\ 0 & ; i \neq k \end{cases}$$

Ya que:
$$\left(\frac{\Delta^{(i)}}{J} \right)_k = \frac{\Delta_k^{(i)} J - \Delta^{(i)} J_k}{J^2} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Luego, usando las definiciones anteriores, se obtiene:

$$(P_i)_k (w^*) = \left[x_i - \frac{\Delta^{(i)}}{J} \right]_k (w^*) = (x_i)_k - \left(\frac{\Delta^{(i)}}{J} \right)_k (w^*) = 0; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Ya que:
$$(x_i)_k = \begin{cases} 1 & ; i = k \\ 0 & ; i \neq k \end{cases}$$

Estos últimos n^2 resultados hacen posible probar que el algoritmo de Newton para un sistema no lineal $n \times n$ es de orden de convergencia dos.

Si recordamos como fueron definidos $F^1, F^2, \dots, F^n, F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)}, R$, siguiendo las reglas de derivación para estos determinantes, se obtienen los siguientes resultados:

$$F_i^{(k)}(w^*) = \begin{cases} J(w^*) & ; i = k \\ 0 & ; i \neq k \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

También en forma similar que en 3×3 se hallan R_1, R_2, \dots, R_n evaluados en w^* .

Note que, para obtener estos últimos $(n^2 + n)$ resultados se hace necesario que las funciones f^1, f^2, \dots, f^n sean al menos de clase C^3 en w^* .

Luego, es fácil deducir que:

$$\left(\frac{F^{(k)}}{R} \right)_j (w^*) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases} \quad \text{Donde } j = 1, 2, \dots, n ; k = 1, 2, \dots, n$$

Con estos últimos n^2 resultados, se garantiza que el algoritmo dado propuesto es al menos de orden de convergencia dos, de manera similar a la conclusión del algoritmo de Newton para sistemas $n \times n$.

Análogamente, se deduce:

$$F_{jk}^r(w^*) = 0 \quad ; \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \forall r = 1, 2, \dots, n$$

En la obtención de estos últimos $n^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)$ resultados, se hace necesario la existencia de que todas las cuartas derivadas parciales de las funciones del sistema de ecuaciones f^1, f^2, \dots, f^n , sean continuas y acotadas en w^* .

6. NORMAS EN \mathbb{R}^n

Sea $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tres de las Normas más conocidas son:

(1) LA NORMA EUCLIDIANA

Se denota y define como:

$$\|(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\|_e = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

(2) LA NORMA DE LA SUMA

Se denota y define como:

$$\|(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\|_s = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

(3) LA NORMA DEL MÁXIMO

Se denota y define como:

$$\|(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\|_\infty = \max \{ |x_k| \mid \forall k = 1, 2, 3, \dots, n \}$$

Es posible demostrar que estas tres normas son equivalentes.

En este trabajo he preferido usar la tercera de estas normas.

7. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES 2×2 ES DE ORDEN TRES

Para el sistema de ecuaciones no-lineal 2×2 dado por:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Donde las funciones f y g cumplen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6** (pág. 30) y las siguientes **condiciones adicionales**:

(4) $f, g \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon)$

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de f y g son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$

El algoritmo dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{F^{(2)}}{R} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (2)$$

Converge a la solución $w^* = (x^*, y^*)$ del sistema (1).

Donde $w_0 = (x_0, y_0) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño.

Además:

$$F^{(1)} = \begin{vmatrix} f + \frac{\Delta^{(1)} \cdot \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ g + \frac{\Delta^{(1)} \cdot \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} \quad F^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & f + \frac{\Delta^{(1)} \cdot \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & g + \frac{\Delta^{(1)} \cdot \Delta^{(2)}}{J^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

Donde $\Delta^{(1)}; \Delta^{(2)}; J$ son definidos como en el algoritmo de Newton del orden respectivo. Así:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} ; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)} ; \quad J = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

Se prueba que este algoritmo es de "Orden de Convergencia Tres".

JUSTIFICACIÓN:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = E(x, y) \\ y = G(x, y) \end{cases} \quad (13)$$

Luego si definimos iterativamente que:

$$\begin{cases} x_{n+1} = E(x_n, y_n) = x_n - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) = y_n - \frac{F^{(2)}}{R} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (14)$$

Probaremos que (14) converge al Punto Fijo de (13). Por tanto (13) converge a la solución del sistema (13).

Veamos que el desarrollo de Taylor alrededor de $w^* = (x^*, y^*)$, las funciones E y G son dadas por:

$$E(x, y) = E(w^*) + \frac{\partial E(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial E(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x^2}(x - x^*)^2 + 2 \frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x \partial y}(x - x^*)(y - y^*) + \frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y^2}(y - y^*)^2 \right] + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 E(\alpha)$$

$$G(x, y) = G(w^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2}(x - x^*)^2 + 2 \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y}(x - x^*)(y - y^*) + \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2}(y - y^*)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 G(\beta)$$

Se verifica que:

$$E(w^*) = x^* ; \quad \frac{\partial E(w^*)}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial E(w^*)}{\partial y} = 0$$

$$G(w^*) = y^* ; \quad \frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = 0$$

(15)

$$\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$$

Veamos; evaluando w^* en las funciones E y G se tiene:

$$E(w^*) = E(x^*, y^*) = x^* - \frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} = x^* \Rightarrow E(w^*) = x^*$$

$$G(w^*) = G(x^*, y^*) = y^* - \frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} = y^* \Rightarrow G(w^*) = y^*$$

Ya que: $F^{(1)}(w^*) = F^{(2)}(w^*) = 0$

Se tiene que:

$$\frac{\partial E(w^*)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E(w^*)}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial E(w^*)}{\partial y} = 0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E(w^*)}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

Ya que:

$$\frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta^{(1)}(w^*)}{\partial x} = J(w^*) ; \quad R(w^*) = J(w^*) ; \quad F^{(1)}(w^*) = 0 ; \quad \frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial y} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = 0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = 1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

Ya que:

$$\frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial y} = \frac{\partial \Delta^{(2)}(w^*)}{\partial y} = J(w^*) ; R(w^*) = J(w^*) ; F^{(2)}(w^*) = 0 ; \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial x} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = \frac{- \left[\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right]}{J(w^*)} = 0$$

Por tanto: $\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$

Ya que:

$$F^{(1)}(w^*) = 0 ; \quad \frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{w=w^*} + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}_{w=w^*}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial y} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial x} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = \frac{- \left[\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} \right]}{J(w^*)} = 0$$

Por tanto: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = 0$ (23)

Ya que:

$$F^{(2)}(w^*) = 0; \quad \frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} = 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{w=w^*}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = \frac{- \left[\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} \right]}{J(w^*)} = 0$$

Por tanto: $\frac{\partial^2 E(w^*)}{\partial y \partial x} = 0$ (24)

Ya que: $\frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial y} = 0$; $F^{(1)}(w^*) = 0$; $R(w^*) = J(w^*)$.

Además, se tiene que: $\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{vmatrix}_{w=w^*} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{w=w^*}$ y

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = \frac{- \left[\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right]}{J(w^*)} = 0$$

Por tanto:
$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (25)$$

Ya que:
$$\frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial x} = 0 ; \quad F^{(2)}(w^*) = 0 ; \quad R(w^*) = J(w^*)$$

Además, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right]_{w=w^*} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \end{array} \right]_{w=w^*}$$

Los detalles de las afirmaciones desde (15) a (25) y sus pasos intermedios puede verse en Apéndice (3).

El desarrollo de Taylor de las funciones E y G alrededor de w^* queda expresada como:

$$E(x, y) = x^* + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 E(\alpha)$$

$$G(x, y) = y^* + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 G(\beta)$$

Luego, al ser evaluadas en (x_n, y_n) se obtiene:

$$E(x_n, y_n) = x_{n+1} = x^* + \frac{1}{3!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 E(\alpha)$$

$$G(x_n, y_n) = y_{n+1} = y^* + \frac{1}{3!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 G(\beta)$$

Luego, desde que: $w_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$; $w_n = (x_n, y_n)$; $w^* = (x^*, y^*)$ se tiene:

$$\|w_{n+1} - w^*\|_s = \|(x_{n+1} - x^*, y_{n+1} - y^*)\|_s =$$

$$= |x_{n+1} - x^*| + |y_{n+1} - y^*| \leq \frac{1}{3!} \left(|x_n - x^*|^3 K_1 + 3|x_n - x^*|^2 |y_n - y^*| K_2 + 3|x_n - x^*| |y_n - y^*|^2 K_3 + |y_n - y^*|^3 K_4 \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{K_5}{3!} (|x_n - x^*| + |y_n - y^*|)^3 \quad ; \text{ si } K_5 = \max \{K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ &= K \|(x_n - x^*, y_n - y^*)\|_s^3 \quad ; \text{ donde } K = \frac{K_5}{3!} \\ &= K \|w_n - w^*\|_s^3 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|w_{n+1} - w^*\|_s \leq K \|w_n - w^*\|_s^3, \text{ donde } K > 0.$$

Entonces, este Algoritmo bajo las condiciones adicionales exigidas es de “**Orden de Convergencia Tres**”.

8. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES 3×3 ES DE ORDEN TRES

Para el sistema de ecuaciones no lineal 3×3 dado por:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Donde las funciones $f; g; h$ cumplen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6** (pág. 30) y las siguientes **condiciones adicionales**:

(4) $f, g, h \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon)$

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de f, g y h son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$

El algoritmo dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{F^{(2)}}{R} \\ z_{n+1} = z_n - \frac{F^{(3)}}{R} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (8)$$

Converge a la solución $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ del sistema (3).

Donde $w_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño y, además:

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} f + \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ g + \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ h + \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{pmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$F^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{pmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$F^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \left(\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \Delta^{(1)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \Delta^{(2)}\Delta^{(3)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \right) \frac{1}{J^2} \end{pmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(3)}}{J} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

Donde $\Delta^{(1)}$; $\Delta^{(2)}$; $\Delta^{(3)}$; J son definidos como en el algoritmo de Newton del orden respectivo. Así:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ h & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)} \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & h & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & g \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & h \end{vmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_n, y_n, z_n)}$$

Se prueba que este algoritmo es de “**Orden de Convergencia Tres**”.

JUSTIFICACIÓN:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = F(x, y, z) \\ y = G(x, y, z) \\ z = H(x, y, z) \end{cases} \quad (26)$$

Luego si definimos iterativamente que:

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n, z_n) = x_n - \frac{F^{(1)}}{R} \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n, z_n) = y_n - \frac{F^{(2)}}{R} \\ z_{n+1} = H(x_n, y_n, z_n) = z_n - \frac{F^{(3)}}{R} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^+ \quad (27)$$

Probaremos que (27) converge al Punto Fijo de (26). Por tanto (27) converge a la solución del sistema no lineal 3×3 . Veamos:

El desarrollo de Taylor alrededor de w^* de las funciones $F; G; H$ son dadas por:

$$F(x, y, z) = F(w^*) + \frac{\partial F(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial F(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(w^*) + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 F(w^*)$$

$$G(x, y, z) = G(w^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial G(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 G(w^*) + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 G(w^*)$$

$$H(x, y, z) = H(w^*) + \frac{\partial H(w^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial H(w^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{1}{2} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 H(w^*) + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 H(w^*)$$

Se verifica que:

$$F(w^*) = x^*; G(w^*) = y^*; H(w^*) = z^* ; \quad \frac{\partial F(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial F(w^*)}{\partial y} = \frac{\partial F(w^*)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = \frac{\partial G(w^*)}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial H(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial H(w^*)}{\partial y} = \frac{\partial H(w^*)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial z^2} = 0$$

Veamos que evaluando w^* en las funciones $F; G; H$ se tiene:

$$F(w^*) = x^* - \frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} = x^* \Rightarrow F(w^*) = x^*$$

$$G(w^*) = y^* - \frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} = y^* \Rightarrow G(w^*) = y^*$$

$$H(w^*) = z^* - \frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} = z^* \Rightarrow H(w^*) = z^*$$

Ya que fácilmente se verifica que:

$$F^{(1)}(w^*) = F^{(2)}(w^*) = F^{(3)}(w^*) = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial F(w^*)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 1 - \frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial x} F^{(1)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(w^*)}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial F(w^*)}{\partial y} = 0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial y} F^{(1)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(w^*)}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial F(w^*)}{\partial z} = 0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial z} F^{(1)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(w^*)}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

Ya que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = \frac{\partial \Delta^{(1)}(w^*)}{\partial x} = J(w^*); R(w^*) = J(w^*); F^{(1)}(w^*) = \frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial y} = \frac{\partial F^{(1)}(w^*)}{\partial z} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = 0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial x} F^{(2)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(w^*)}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = 1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 1 - \frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial y} F^{(2)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(w^*)}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial G(w^*)}{\partial z} = 0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial z} F^{(2)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(w^*)}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

Ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = \frac{\partial \Delta^{(2)}(w^*)}{\partial y} = J(w^*); R(w^*) = J(w^*); F^{(2)}(w^*) = \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial z} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial H(w^*)}{\partial x} = 0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial x} F^{(3)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(w^*)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial H(w^*)}{\partial y} = 0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial y} F^{(3)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(w^*)}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial H(w^*)}{\partial z} = 1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = 1 - \frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial}{\partial z} F^{(3)}(w^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial H(w^*)}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

Ya que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) = \frac{\partial \Delta^{(3)}(w^*)}{\partial z} = J(w^*); R(w^*) = J(w^*); F^{(3)}(w^*) = \frac{\partial F^{(3)}(w^*)}{\partial x} = \frac{\partial F^{(3)}(w^*)}{\partial y} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x^2} = 0$ (37)

Ya que:

$$F^{(1)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial x}; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$ (38)

Ya que:

$$F^{(1)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial y}; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial x \partial z} = 0$ (39)

Ya que:

$$F^{(1)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial z}; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y^2} = 0 \quad (40)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial F(w^*)}{\partial y} = 0; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z \partial y} \right) = 0$$

$$\text{Entonces: } \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial y \partial z} = 0 \quad (41)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z \partial y} = 0; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(1)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\text{Entonces: } \frac{\partial^2 F(w^*)}{\partial z^2} = 0 \quad (42)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}(w^*)}{\partial z^2} = 0; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\text{Entonces: } \frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial x} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$ (44)

Ya que:

$$F^{(2)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} = 0; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial x \partial z} = 0$ (45)

Ya que:

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial x \partial z} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y^2} = 0$ (46)

Ya que:

$$F^{(2)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} = 0; R(w^*) = J(w^*)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial z} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial y \partial z} = 0$ (47)

Ya que: $F^{(2)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial z} = 0; R(w^*) = J(w^*)$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(2)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial z^2} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 G(w^*)}{\partial z^2} = 0$ (48)

Ya que: $\frac{\partial^2 F^{(2)}(w^*)}{\partial z^2} = \frac{\partial F^{(2)}(w^*)}{\partial z} = 0$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x^2} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x^2} = 0$ (49)

Ya que: $\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial F^{(3)}(w^*)}{\partial x} = 0; R(w^*) = J(w^*)$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$ (50)

Ya que: $\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x \partial y} = 0$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x \partial z} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial x \partial z} = 0$ (51)

Ya que: $F^{(3)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial x} = 0; R(w^*) = J(w^*)$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial y^2} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y^2} = 0$. (52)

Ya que: $\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial y^2} = \frac{\partial F^{(3)}(w^*)}{\partial y} = 0; R(w^*) = J(w^*)$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial y} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial y \partial z} = 0$ (53)

Ya que: $F^{(3)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R(w^*)}{\partial y}; R(w^*) = J(w^*)$

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H(w^*)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F^{(3)}(w^*)}{R(w^*)} \right) \right) = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial z} \right) = 0$$

Entonces: $\frac{\partial^2 H(w^*)}{\partial z^2} = 0$ (54)

Ya que: $F^{(3)}(w^*) = 0; \frac{\partial^2 F^{(3)}(w^*)}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial z}; R(w^*) = J(w^*)$

Los detalles de las afirmaciones desde (28) a (54) y sus pasos intermedios puede verse en Apéndice (4).

Entonces el desarrollo de Taylor de las funciones $F ; G ; H$ alrededor de w^* queda expresada como:

$$F(x, y, z) = x^* + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 F(\alpha)$$

$$G(x, y, z) = y^* + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 G(\beta)$$

$$H(x, y, z) = z^* + \frac{1}{3!} \left[(x - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 H(\gamma)$$

Luego, al ser evaluadas en (x_n, y_n, z_n) se obtiene:

$$F(x_n, y_n, z_n) = x_{n+1} = x^* + \frac{1}{3!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 F(\alpha)$$

$$G(x_n, y_n, z_n) = y_{n+1} = y^* + \frac{1}{3!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 G(\beta)$$

$$H(x_n, y_n, z_n) = z_{n+1} = z^* + \frac{1}{3!} \left[(x_n - x^*) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y^*) \frac{\partial}{\partial y} + (z_n - z^*) \frac{\partial}{\partial z} \right]^3 H(\gamma)$$

Luego, desde que: $w_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$; $w_n = (x_n, y_n, z_n)$; $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ se tiene:

$$\|w_{n+1} - w^*\|_s = \|(x_{n+1} - x^*, y_{n+1} - y^*, z_{n+1} - z^*)\|_s = |x_{n+1} - x^*| + |y_{n+1} - y^*| + |z_{n+1} - z^*| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3!} \left(\begin{array}{l} |x_n - x^*|^3 K_1 + |y_n - y^*|^3 K_2 + |z_n - z^*|^3 K_3 + 3 \left(\begin{array}{l} |x_n - x^*|^2 |y_n - y^*| + |x_n - x^*|^2 |z_n - z^*| + \\ |y_n - y^*|^2 |z_n - z^*| + |y_n - y^*| |z_n - z^*|^2 + \\ |x_n - x^*| |y_n - y^*|^2 + |x_n - x^*| |z_n - z^*|^2 \end{array} \right) K_4 + \\ + 6 |x_n - x^*| |y_n - y^*| |z_n - z^*| K_5 \end{array} \right)$$

$$\leq \frac{K_6}{3!} (|x_n - x^*| + |y_n - y^*| + |z_n - z^*|)^3 \quad ; \text{ donde } K_6 = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$$

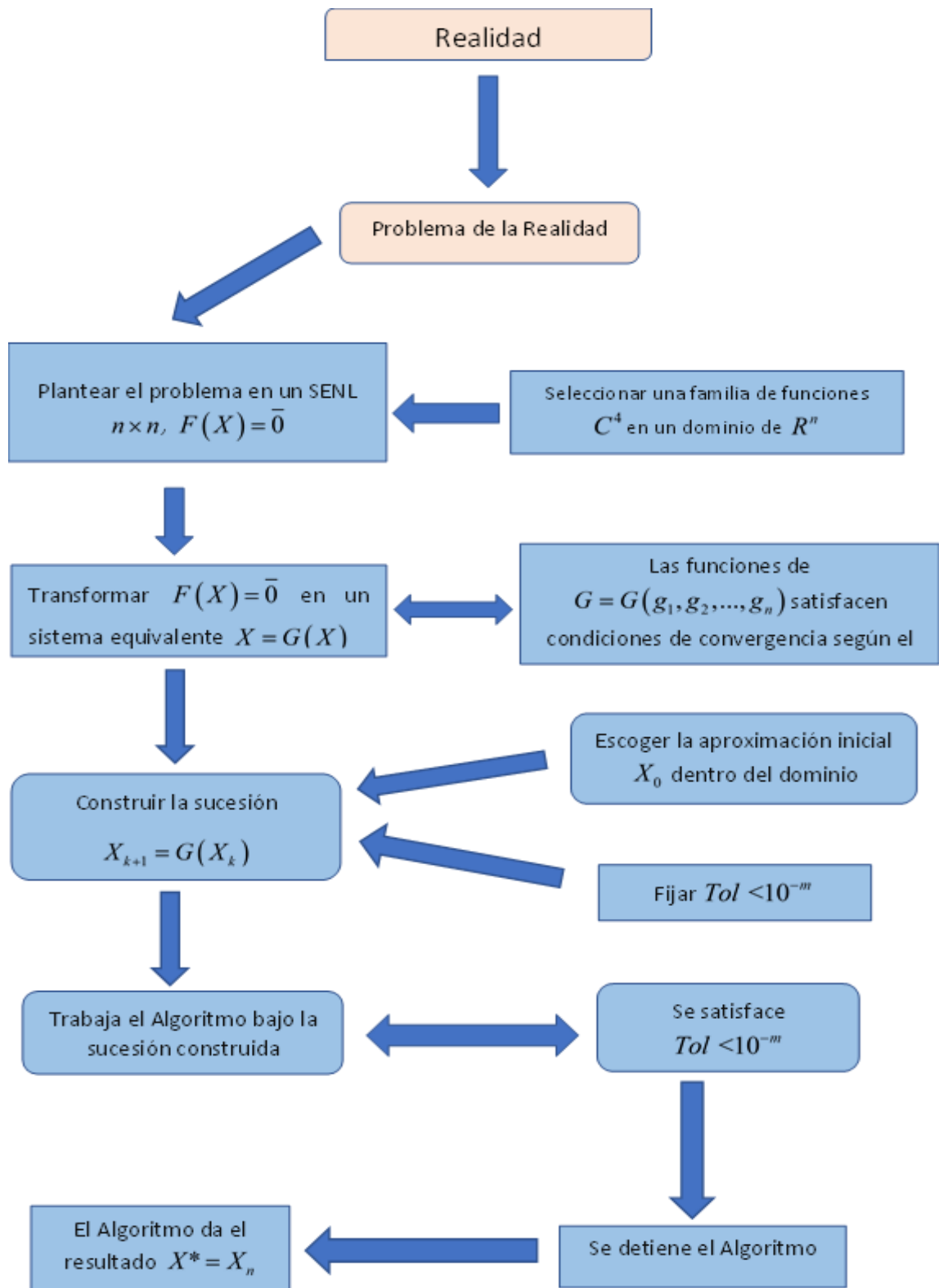
$$= K \|(x_n - x^*, y_n - y^*, z_n - z^*)\|_s^3 \quad ; \text{ donde } K = \frac{K_6}{3!}$$

$$= K \|w_n - w^*\|_s^3$$

Por tanto:

$$\|w_{n+1} - w^*\|_s \leq K \|w_n - w^*\|_s^3 . \text{ Donde } K > 0 .$$

Entonces, este algoritmo bajo las condiciones adicionales exigidas es de **“Orden de Convergencia Tres”**.



ESQUEMA N° 03: DEL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES

Fuente propia

9. JUSTIFICACIÓN QUE EL ALGORITMO PROPUESTO A RESOLVER UN SISTEMA NO LINEAL DE ECUACIONES $n \times n$ ES DE ORDEN TRES

Para el sistema de ecuaciones no lineal $n \times n$ dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Donde las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$ cumplen las condiciones (1), (2), (3) del **Teorema 6** (pág. 30) y las siguientes **condiciones adicionales**:

(4) $f_i \in C^4$ en $V(w^*, \varepsilon)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$

(5) Todas las terceras y cuartas derivadas parciales de f_i $\forall i = 1, 2, \dots, n$ son continuas y acotadas en $V(w^*, \varepsilon)$

(6) $R \neq 0$ en $V(w^*, \varepsilon)$

Entonces el Algoritmo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,m+1} = x_{1,m} - \frac{F^{(1)}}{R} \\ x_{2,m+1} = x_{2,m} - \frac{F^{(2)}}{R} \\ x_{3,m+1} = x_{3,m} - \frac{F^{(3)}}{R} \\ \dots \\ \dots \\ x_{n,m+1} = x_{n,m} - \frac{F^{(n)}}{R} \end{array} \right. \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (12)$$

Converge a la solución $w^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ del sistema (11).

Donde $w_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}) \in V(w^*, \varepsilon)$ y ε es suficientemente pequeño.

Además:

$$F^{(1)} = \left| \begin{array}{cccc} f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{array} \right|_{w=w_m}$$

$$F^{(2)} = \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{array} \right|_{w=w_m}$$

.....

$$F^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \dots & f_1 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \dots & f_2 + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \dots & f_n + \left(\sum \Delta^{(i)} \Delta^{(j)} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{1}{J^2} \end{pmatrix}_{w=w_m}$$

Donde la notación \sum es de la forma $\sum_{\substack{i=1; j=2 \\ i < j}}^{n-1; n}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(1)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(2)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{(n)}}{J} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{w=w_m}$$

Donde los $\Delta^{(k)}$; $\forall k = 1, 2, \dots, n$ y J son como en el Algoritmo de Newton respectivo.

Además, los valores de $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \dots, \Delta^{(n)}$ y J son definidos como:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{w=w_m}$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{w=w_m}$$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & f_1 & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & f_2 & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & f_n & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{w=w_m}$$

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & f_n \end{vmatrix}_{w=w_m}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{w=w_m}$$

Se prueba que este algoritmo es de “Orden de Convergencia tres”.

JUSTIFICACIÓN:

Sea el sistema $f_i(w) = 0; \forall i = 1, 2, \dots, n; w = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_i = F_i(w); \forall i = 1, 2, \dots, n$ (55)

Luego si definimos iterativamente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,m+1} = F_1(w_m) = x_{1,m} - \frac{F^{(1)}}{R} \\ x_{2,m+1} = F_2(w_m) = x_{2,m} - \frac{F^{(2)}}{R} \\ x_{3,m+1} = F_3(w_m) = x_{3,m} - \frac{F^{(3)}}{R} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n,m+1} = F_n(w_m) = x_{n,m} - \frac{F^{(n)}}{R} \end{array} \right. \quad \forall m \in \mathbb{N}_0^+ \quad (56)$$

Donde $w_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{n,m})$

Probaremos que (56) converge al Punto Fijo de (55). Por tanto (56) converge a la solución del sistema no lineal $n \times n$.

Veamos:

El desarrollo de Taylor alrededor de $w^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ para cada una de las funciones $F_k; \forall k = 1, 2, \dots, n$ es dado por:

$$F_k(w) = F_k(w^*) + \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] F_k(w^*) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 F_k(w^*) + \frac{1}{3!} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^3 F_k(\Omega_k)$$

Donde $\Omega_k \in \mathbb{R}^n; \forall k = 1, 2, \dots, n$; y Ω_k es un punto del segmento de recta entre los puntos w y w^* .

De manera similar, se puede afirmar que estas n funciones verifican:

$$F_k(w^*) = x_k^*; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial F_k(w^*)}{\partial x_j} = 0; \forall k = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial^2 F_k(w^*)}{\partial x_i \partial x_j} = 0; \forall k = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n; \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Nótese que hay $\frac{n}{2}(n+1)(n+2)$ verificaciones que hacer.

En efecto, desde que al evaluar w^* en cada una de las funciones $F_i; \forall i = 1, 2, \dots, n$

Se tiene:

$$F_i(w^*) = x_i^* - \frac{F^{(i)}(w^*)}{R(w^*)} = x_i^* \Rightarrow F_i(w^*) = x_i^* \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (57)$$

Ya que fácilmente se verifica que:

$$F^{(i)}(w^*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Además, se tiene que:

$$\frac{\partial F_j(w^*)}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (58)$$

Desde que:

$$\frac{\partial F_j(w^*)}{\partial x_i} = 1 - \frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial F^{(i)}(w^*)}{\partial x_i}; \text{ si } i = j \text{ y } \frac{\partial F^{(i)}(w^*)}{\partial x_i} = J(w^*)$$

$$\frac{\partial F_j(w^*)}{\partial x_i} = -\frac{1}{J(w^*)} \frac{\partial F^{(j)}(w^*)}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \text{ si } i \neq j \text{ y } \frac{\partial F^{(j)}(w^*)}{\partial x_i} = J(w^*)$$

También se cumple que:

$$\frac{\partial^2 F_k(w^*)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad ; \quad \forall i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad (59)$$

Desde que:

$$\frac{\partial^2 F_l(w^*)}{\partial x_k \partial x_j} = \begin{cases} -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(l)}(w^*)}{\partial x_k^2} - 2 \frac{\partial R(w^*)}{\partial x_k} \right) & \text{si } j = k = l \\ -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(k)}(w^*)}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial R(w^*)}{\partial x_j} \right) & \text{si } j \neq k = l \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F_k(w^*)}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{J(w^*)} \left(\frac{\partial^2 F^{(k)}(w^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad \text{si } i \neq j; j \neq k, i \neq k$$

Los detalles de las afirmaciones (57), (58), (59) y algunos pasos intermedios puede verse en Apéndice (5).

Entonces el desarrollo de Taylor de cada una de las funciones $F_k; \forall k = 1, 2, \dots, n$ alrededor de w^* quedan expresadas como:

$$F_k(w) = x_k^* + \frac{1}{3!} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^3 F_k(\Omega_k) \quad ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Luego, al ser evaluadas en $w = w_m$ se obtiene:

$$F_k(w_m) = x_{k,m+1} = x_k^* + \frac{1}{3!} \left[\sum_{i=1}^n (x_{i,m} - x_i^*) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^3 F_k(\Omega_k) \quad ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Luego, desde que:

$$w_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \quad ; \quad w_{m+1} = (x_{1,m+1}, x_{2,m+1}, \dots, x_{n,m+1})$$

y $w^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, se tiene:

$$\|w_{m+1} - w^*\|_s = \left\| (x_{1,m+1} - x_1^*, x_{2,m+1} - x_2^*, x_{3,m+1} - x_3^*, \dots, x_{n,m+1} - x_n^*) \right\|_s$$

$$= \sum_{k=1}^n |x_{k,m+1} - x_k^*| \quad ; \text{acotando cada sumando, como antes}$$

$$\leq \frac{1}{3!} \left(\sum_{k=1}^n |x_{k,m} - x_k^*| \right)^3 C_0 = C \left(\sum_{k=1}^n |x_{k,m} - x_k^*| \right)^3 \quad ; \text{donde } C = \frac{1}{3!} C_0$$

$$= C \left(\left\| (x_{1,m} - x_1^*, x_{2,m} - x_2^*, x_{3,m} - x_3^*, \dots, x_{n,m} - x_n^*) \right\|_s \right)^3 = C \|w_m - w^*\|_s^3$$

Entonces:

$$\|w_{m+1} - w^*\|_s \leq C \|w_m - w^*\|_s^3 ; C > 0$$

Por tanto, el Algoritmo con las condiciones adicionales exigidas es de “**Orden de Convergencia Tres**”.