UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR:

CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS

ASESOR:

Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA.

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Callao, 2024

PERÚ

CERTIFICADO DE ANÁLISIS
magister

CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR

7%
Textos sospechosos

2% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
0% entre las fuentes mencionadas
5% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR.pdf
ID del documento: 9217071c76e6df02c648b36498c127ebf649ac0d
Tamaño del documento original: 1,55 MB

Depositante: FCNM PREGRADO UNIDAD DE INVESTIGACION
Fecha de depósito: 1/8/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 1/8/2024

Número de palabras: 23.580
Número de caracteres: 104.680

Ubicación de las similitudes en el documento:

Fuentes principales detectadas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	repositorio.unac.edu.pe https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/8330/TESIS - LUZ SARA MORI TRUJIL... 4 fuentes similares	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (52 palabras)
2	TESIS - ANTAURCO_MENDOZA.pdf | TESIS - ANTAURCO_MENDOZA El documento proviene de mi grupo 4 fuentes similares	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (63 palabras)
3	repositorio.unac.edu.pe https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/4237/Fajardo Ampuero_PREGRADO...	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (50 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	cybertesis.unmsm.edu.pe https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/20.500.12672/7513/1/Castillo_je.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (38 palabras)
2	core.ac.uk https://core.ac.uk/download/pdf/323045648.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (37 palabras)
3	boundaryvalueproblems.springeropen.com | Stability result of a viscoelastic plat... https://boundaryvalueproblems.springeropen.com/articles/10.1186/s13661-020-01382-9	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (28 palabras)
4	repositorio.unac.edu.pe https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/20.500.12952/1221/1/T.511.N35.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)
5	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/matema/article/download/9594/8409	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS.

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Unidad de investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

TÍTULO: Solución débil para una ecuación viscoelástica de orden superior.

AUTOR: Bach. CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS.

ASESOR: Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA.

LUGAR DE EJECUCIÓN: UNAC-Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

TIPO DE INVESTIGACIÓN: Teórico.

UNIDAD DE ANÁLISIS: materiales que presentan comportamiento viscoelástico.

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
(Asesor)

Bach. Carlos Alexander Velásquez Porras
(Autor)

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

Solución débil para una ecuación viscoelástica de orden superior

Carlos Alexander Velasquez Porras

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en Matemática.

Aprobado por:

……………………………………

Dr: Sotelo Pejerrey Alfredo

Presidente

……………………………………

Dr: Nuñez Villa Julio Cesar

Vocal

……………………………………

Mg: Duran Quiñones Sofia Irene

Secretaria

……………………………………..

Lic. Ávila Celis Cesar Augusto

Suplente

……………………………………

Dr: Moreno Vega Dionicio Orlando

Asesor

Callao-Perú

2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
(Resolución N° 057-2024-D-FCNM)

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el Callao, en el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, sito en la Av. Juan Pablo II Nº 306, Bellavista, siendo las 16:00 horas del día martes dieciocho de junio del año dos mil veinticuatro, se reunieron a fin de proceder en primer término al acto de instalación del Jurado Evaluador de Tesis, titulado: **"SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR"**, presentado por el Bachiller CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS; Jurado Evaluador que está integrado por los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. SOTELO PEJERREY, Alfredo : Presidente
Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César : Vocal
Mg. DURAN QUIÑONES, Sofia Irena : Secretaria

Luego de la instalación, el Secretario del Jurado Evaluador dio lectura de la Resolución Decanal N° 047-2024-D-FCNM que designa a los miembros del Jurado Evaluador de Tesis, por la modalidad sin ciclo de tesis.

Se dio inicio a la sustentación de la tesis de acuerdo a lo normado por el Art.78° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 150-2023-CU de fecha 15 de junio del año 2023.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador proceden a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron absueltas.

Luego de la deliberación en privado del Jurado Evaluador y después de calificar la Tesis referida líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la sustentación realizada por el Bachiller **CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
18	**EXCELENTE**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el Secretario del Jurado Evaluador.

Siendo las 17:00 horas. del día martes dieciocho de junio del año dos mil veinticuatro, el señor Presidente del Jurado Evaluador de Tesis dio por concluido el acto de sustentación.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
DIRECCIÓN
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Dr. Julio César Núñez Villa
Vocal

Mg. Sofia Irena Duran Quiñones
Secretaria

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

Bellavista,01 de julio 2024

INFORME

El presidente del Jurado de Sustentación de Tesis designado mediante Resolución Decanal N° 047-2024-D-FCNM, informa que la Tesis titulada: **"SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR"**, expuesta por el Bachiller en Matemática Sr. Carlos Alexander Velásquez Porras, no presentó observaciones durante el acto de sustentación de tesis realizado el Martes 18 de junio del 2024 a las 16:00 horas.

Sin otro particular quedo, de usted.

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

FICHA CATALOGRÁFICA

CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS

Solución débil para una ecuación viscoelástica de orden superior.

IX, 86 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2024)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

1.UNAC/FCNM II. Título (Serie)

DEDICATORIA

Dedico con todo mi corazón mi tesis a mí
madre Dionisia Porras, mis hijos
Daylin y Dayiro velasquez, pues son el motor
y motivo que me impulsan a seguir
dando más pasos hacia adelante en mi vida.

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento total va dirigido a mis padres, hermanos María, Paul y Mercedes Velasquez pues ellos contribuyeron económicamente como emocionalmente y me motivaron constantemente hasta alcanzar la meta.

También agradezco a mi asesor de tesis el Doctor Orlando moreno gracias a él he podido completar este trabajo de tesis con éxito.

ÍNDICE

RESUMEN

SOLUCIÓN DÉBIL PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA DE ORDEN SUPERIOR

CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS
Marzo-2024

Asesor: Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo nos proponemos determinar la existencia y unicidad de la solución débil para el problema.

$$\begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s)Au\,ds = 0 & \text{en} \quad Q=\Omega\times\,]0,T[\\ u(x,t)=0;\ \dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial \nu^i}=0,\ \ i=1,2,...,S-1 & \text{sobre} \quad \Sigma=\Gamma\times\,]0,T[\\ u(x,0)=u_0(x);\ \ u'(x,0)=u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto acotado con frontera $\partial\Omega=\Gamma$, suficientemente regular y T un número real positivo. Consideremos $Q=\Omega\times\,]0,T[$ el cilindro abierto con frontera lateral $\Sigma=\Gamma\times\,]0,T[$ y ν es el vector unitario exterior a la frontera Γ, sea también $A=(-\Delta)^m$; $m\geq 1$, : Δ es el operador laplaciano, $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ de clase C^2 donde g es una función no creciente.

Palabras Claves:

- Ecuación viscoelástica de orden superior
- Método de Faedo-Galerking
- Existencia de soluciones
- Unicidad de solución

ABSTRACT

WEAK SOLUTION FOR A HIGHER ORDER VISCOELASTIC EQUATION

CARLOS ALEXANDER VELASQUEZ PORRAS
March-2024

Adviser: Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega

Title obtained: Licenciated in Mathematic

In the present work we propose to determine the existence and uniqueness of the weak solution for the problem.

$$\begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s)Au\, ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,T\right[\\ u(x,t) = 0;\ \dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i} = 0, \quad i = 1,2,...,m-1 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times \left]0,T\right[\\ u(x,0) = u_0(x);\quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, is an open set bounded with boundary $\partial\Omega = \Gamma$, sufficiently regular and T is a positive real number. Consider $Q = \Omega \times \left]0,T\right[$ the open cylinder with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times \left]0,T\right[$, and ν^i is the unit normal vector exterior to the boundary Γ, let also be $A = (-\Delta)^m$; $m \geq 1, : \Delta :$ is the Laplacian operator, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ off class C^2, where g is a non-creasing function.

Key Words:

- Higher order viscoelastic equation.
- Faedo-Galerking method
- Existence of solutions
- Uniqueness of solution

INTRODUCCIÓN

Las componentes internas de los materiales poliméricos conllevan mutuamente una interacción dual, combinando propiedades elásticas y viscosas. Por un lado, experimentan deformaciones instantáneas debido la acción de una fuerza o carga externa, mientras que, por otro lado, presentan una deformación que evoluciona en el tiempo por la acción a la aplicación de una carga constante. Este fenómeno de deformación progresiva con el tiempo se denomina fluencia viscoelástica.

Una manera frecuente de determinar cómo describen movimientos mecánicos en objetos con propiedades viscoelásticas se puede describir mediante la curva tensión-deformación, esto se da aplicando una tensión y es así como todos los materiales experimentan deformación. La descripción del estado de deformación o desplazamiento en dichos materiales, también se da en que las tensiones internas aplicadas al material no solo dependan de una deformación en ese instante del tiempo, sino que también va a depender de toda la historia (memoria) pasada o del tiempo total que llevo en deformarse y cuasi recuperarse a su estado original. Estos problemas surgen en contextos viscoelásticos, como por ejemplo en la termodinámica de materiales con memoria de desvanecimiento. Por lo tanto, una caracterización dinámica más general y aplicable a los materiales viscoelásticos, que refleja la descripción anterior, se formula en la siguiente ecuación:

$$(A1) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u ds = 0 & \text{en} \quad Q \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0(x); \quad u'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

En este contexto, el sistema (A1) se presenta como un modelo matemático que describe los movimientos oscilatorios uniaxiales. Este fenómeno puede manifestarse en situaciones diversas, como en el caso de una barra viscoelástica con memoria. O también:

$$
\text{(A2)} \quad \begin{cases} u'' + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u \, ds = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(0,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = 0 & \text{sobre} \quad (-l,l) \times (0,T) \\ u(\pi,y,t) = u_{xx}(\pi,y,t) = 0 & \text{sobre} \quad (-l,l) \times (0,T) \\ u_{yy}(x,\pm l,t) + \sigma u_{xx}(x,\pm l,t) = 0 & \text{sobre} \quad (0,\pi) \times (0,T) \\ u_{yyy}(x,\pm l,t) + (2-\sigma) u_{xxy}(x,\pm l,t) = 0 & \text{sobre} \quad (0,\pi) \times (0,T) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y); \;\; u'(x,y,0) = u_1(x,y) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

donde $\Omega = (0,\pi)\times(0,l),\ 0 < \sigma < \frac{1}{2};\ g,$ es una función positiva no creciente y condiciones de frontera específicas, el cual modela los movimientos oscilatorios de una placa viscoelástica.

Basándonos en los modelos mencionados anteriormente, llevamos a cabo una investigación para conceptualizar un modelo más integral que englobe las situaciones contempladas en (A1), (A2) y otros modelos específicos que se aproximen a las descripciones previas. Motivados por este propósito, desarrollamos un modelo en el cual generalizamos de manera particular mediante un operador específico "A". La descripción detallada del modelo se presenta a continuación:

$$
\text{(A3)} \quad \begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s) Au \, ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,T\right[\\ u(x,t) = 0; \;\; \dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i} = 0, \;\; i = 1,2,\ldots,\mathrm{m}-1 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times \left]0,T\right[\\ u(x,0) = u_0(x); \;\; u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

donde g es la función positiva no creciente, el operador $A = (-\Delta)^m;\ m \geq 1;$ $m \in \mathbb{N}$ y $u_0,\ u_1$ son los datos iniciales dados.

Considerando lo anterior demostraremos de manera concisa para la comprobación de la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (A3), Para abordar este análisis, nos valdremos del método de Faedo-Galerkin. Esto implica determinar soluciones aproximadas a la solución deseada. Posteriormente, realizamos estimativas pertinentes, llevamos a cabo el proceso de paso al límite, verificamos las condiciones iniciales y, finalmente, demostramos la unicidad de dicha solución.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Para esta investigación, nuestro objetivo es establecer la existencia local de soluciones débiles y demostrar su unicidad en relación con el siguiente problema:

$$
\text{(A3)} \quad \begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s)Au\,ds = 0 & \text{en} \quad V(\mathrm{Q}) \\ u(x,t) = 0;\ \dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,\mathrm{m}-1 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad V(\Omega) \\ u'(0) = u_1 & \text{en} \quad H(\Omega) \end{cases}
$$

donde V es el espacio de Hilbert separable, donde su producto interno simbolizado por $(\ .\ )_{\mathcal{V}}$ y la norma $\|.\|_V$, donde tambien H es un espacio de Hilbert separable, cuyo producto interno es denotado por $(\ ,\ )$ y cuya norma es $\|\ \ \|$, $V \subseteq H$ denso y la inmersión de V hacia H es compacta, lo que implica:

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$$

siendo $A = (-\Delta)^m$; $m \geq 1,\ m \in \mathbb{N}$, Δ operador Laplaciano y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de clase C^2 donde g es una función no creciente. Tal que $u : [0,T] \to V$ es una función a determinar en el sistema dado, siendo u_0 y u_1 los datos iniciales dados, también v el vector normal unitario de la frontera Γ. Para obtener una demostración concluyente y precisa utilizaremos el ya conocido método de Faedo-Galerkin donde nos ayudara a obtener aproximaciones de la solución y también usamos la teoría espectral de operadores autoadjuntos.

1.2. Formulación del problema

Problema General

¿Existe una única solución débil del problema (*A*3) que consiste en la ecuación viscoelástica, la cual se define como un modelo o sistema que tiene aplicación en las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de orden superior respecto sobre la variable espacial?

Problemas específicos

Encontraremos respuesta por medio de la Investigación aplicado a nuestro problema o sistema (A3) dadas en las siguientes interrogantes:
¿El sistema (*A*3) es un modelo genérico que es aplicable a diferentes situaciones?
¿Existirá solución del problema (*A*3) con la generalización dada?
¿Habrá para el problema (*A*3) solución única?

1.3. Objetivos

Objetivo General:

Este objetivo de tesis se embarca en la demostración exhaustiva de la existencia local y la unicidad de la solución débil de (A3). Este problema involucra una ecuación que se configura como un sistema en base a las aplicaciones de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de orden superior respecto a la variable espacial.

Objetivos Específicos:

Para hallar soluciones locales débiles para una ecuación viscoelástica, donde se abordará específicamente con la aplicación del método de Faedo-Galerkin, utilizando herramientas provenientes del análisis funcional, espacios de Sobolev, teoría espectral y teoría de operadores no limitados.

1.4. Justificación

El presente trabajo se sumerge en un nivel de investigación básica, dada mediante una descripción tanto teórica como práctica. El sector que se verá favorecido en las conclusiones de esta investigación serán los alumnos universidades de Ciencias e Ingeniería, así como profesionales relacionados con el ámbito de estudio. Para dicha demostración, nos avocaremos en el estudio analítico para la ecuación viscoelástica de orden superior en la variable espacial. Este enfoque reviste gran interés y relevancia para nuestro trabajo, especialmente al estudio de las EDP.

1.5. Delimitantes de la investigación

Teórico: Nuestra investigación se enmarca en la clasificación teórica y se encuentra delimitada por el ámbito del Análisis Funcional, centrándose en particular al estudio de las EDP en base a los espacios de Sobolev. Dichos espacios juegan un papel muy importante dentro del presente trabajo.

Temporal: Para este trabajo no se aplica.

Espacial: En este proceso de investigación no se aplica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Internacional

- Messaoudi S (2008), con el resultado de estudió de la siguiente ecuación viscoelástica

$$
\text{(A1)} \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u \, ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,T\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma = \partial(\Omega) \times \left]0,T\right[\\ u'(0) = u_1;\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y de frontera Γ. Se consideró hallar una función: $u(x,t) : \bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ con condiciones generales sobre la función de relajación g de la barra viscoelástica para la ecuación propuesta. Se demostró un decaimiento global de la energía, resultado que no necesariamente es de tipo exponencial o polinomial.

- Por otro lado, en Barreto R, Lapa E y Muñoz R (1996). consideraron la ecuación de cuarto orden

$$
\text{(A4)} \qquad \begin{cases} u'' + \gamma \Delta u'' + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u \, ds = 0 & \text{en} \quad V(Q) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad V(\Omega) \\ u'(t) = u_1 & \text{en} \quad H(\Omega) \end{cases}
$$

junto con las condiciones de contorno y los datos iniciales dados y se demostró que las energías asociadas al sistema decaen exponencialmente (polinomialmente) si el núcleo g decae exponencialmente (polinomialmente).

- Por otro lado, Messaoudi S y Mukiawa S (2016) consideraron el sistema:

$$
\text{(A2)} \quad \begin{cases} u'' + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u \, ds = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(0,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = 0 & \text{sobre} \quad (-l,l)\times(0,T) \\ u(\pi,y,t) = u_{xx}(\pi,y,t) = 0 & \text{sobre} \quad (-l,l)\times(0,T) \\ u_{yy}(x,\pm l,t) + \sigma u_{xx}(x,\pm l,t) = 0 & \text{sobre} \quad (0,\pi)\times(0,T) \\ u_{yyy}(x,\pm l,t) + (2-\sigma)u_{xxy}(x,\pm l,t) = 0 & \text{sobre} \quad (0,\pi)\times(0,T) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y); \;\; u'(x,y,0) = u_1(x,y) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

donde demuestran tanto la existencia global, así como también el decaimiento de la energía asociada a (A2).

Nacional

- Castillo Giménez (2017), en su tesis de Magister considera la siguiente ecuación

$$
\text{(A1)} \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u \, ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma = \partial(\Omega)\times]0,T[\\ u'(0) = u_1; \; u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

demostró la existencia global, también llego a probar que si la función g tiene un decaimiento exponencial de la solución del sistema (A1).

- Santiago Y (2011), en su trabajo estudio la existencia de solución y la estabilización de la ecuación integro diferencial

$$
u_{tt} = -\alpha_1 Au(t) + \alpha_2 \int_0^t K(t-s)Au \, ds + f(t)
$$

donde $f(t) = -B_0 u(t) - B_1 u_t(t)$, siendo B_0 , B_1; son operadores acotados lineales y de rango finito, A es el operador no acotado auto adjunto y positivo, K representa el núcleo de relajación. Se utiliza la teoría referente a la tasa de crecimiento en operadores resolventes que viene a ser una ampliación de la teoría de semigrupos de clase C^0, donde mencionamos a Desh W, Grimmer and Schappacher (1984).

- El objetivo de este trabajo es aprovechar las técnicas utilizadas anteriormente por los autores antes mencionados y con una adaptación de Piskin E and Irkil N (2021), para cumplir el objetivo de establecer la existencia de la solución débil y obtener los resultados generales de descomposición para problema (A3). Donde designamos específicamente al operador laplaciano exponencial de grado "m" en relación a las variables espaciales, *t* variable tiempo y u_0 , u_1 datos iniciales dados.

$$\text{(A3)} \quad \begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s)Au\,ds = 0 & \text{en} \quad V(Q) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad V(\Omega) \\ u'(t) = u_1 & \text{en} \quad H(\Omega) \end{cases}$$

  A diferencia de los trabajos en mención donde se estudia la ecuación viscoelástica de una EDP de orden 2 y 4, en esta investigación he seguido de Piskin E and Irkil N, (2021). y particularizando su investigación para una EDP de orden superior con respecto al operador laplaciano y que abarcan los dos modelos antes mencionado y otros similares al modelo particularizado, donde específicamente se toma el operador $A = (-\Delta)^m$; $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$.

2.2. Bases teóricas

Mencionaremos algunos conceptos y resultados básicos requeridos para nuestro tema en particular pues nos servirá de mucha ayuda en los procedimientos. Sus demostraciones serán omitidas por ser consideradas temas ya demostrados anteriormente por otros autores y se puede visualizar en sus trabajos de investigación. Y se citaran como corresponde para cada tema en particular.

Espacio de las Distribuciones

Las distribuciones son aplicaciones en el espacio $D(\Omega)\cong\left(C_0^\infty(\Omega),\to\right)$ dotadas de una topología.

Definición 2.1. Una distribución se define sobre un subconjunto abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ para todo funcional lineal y continua T el cual actúa sobre los espacios de las funciones de prueba $D(\Omega)$. Y sea $D'(\Omega)$ el conjunto distribucional sobre Ω seguido de una relación de convergencia, donde $\{T_k\}$ es una sucesión en $D'(\Omega)$ y $T\in D'(\Omega)$ tal que si $T_k\to T$ en $D'(\Omega)$ se tiene que la secuencia del producto interno $\{\langle T_k,\varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge sobre $\langle T,\varphi\rangle$ en $\mathbb{R},\forall\varphi\in D(\Omega)$. Esto implica que una distribución es considerada como una aplicación:

$$\begin{aligned} T: D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

tal que:

$$(i)\ T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 T(\varphi_1)+\alpha_2 T(\varphi_2);\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\ \text{ y }\ \forall\varphi_1,\varphi_2\in D(\Omega)$$

(ii) T es continua, lo que implica que $\left(\varphi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq D(\Omega)$ converge en φ sobre $D(\Omega)$ luego:

$$(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge en } (T(\varphi)) \text{ en } \mathbb{R}.$$

Denotemos al espacio vectorial las distribuciones sobre Ω donde la sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia T tal que $T_k\to T$ sí y solo si $(T_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacía $(T(\varphi))$ en $\mathbb{R}$, $\forall\varphi$ en $D(\Omega)$. Por otro sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ denotemos:

$$\begin{aligned} T_u: D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto (T_u,\varphi)=\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

la aplicación, cuya distribución de T sobre φ es denotado por $\langle T,\varphi\rangle$ y representa la dualidad con $D'(\Omega)$ sí y solo si es lineal, continua e inyectiva.

Observación 2.1. Se considera a $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ él funcional $T = T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ también denotado así:

$$< T, \phi > = < T_u, \phi > = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx \, .$$

Observación 2.2. Una distribución T_u definida en $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas, donde u es relacionada con las funciones y a T_u esta relacionada con la distribución donde se cumple que $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$.

Definición 2.2. Una función $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ se dice que tiene derivada débil sobre Ω si existe $v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y satisface lo siguiente:

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(\mathrm{x})dx \, ; \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Derivada Distribucional

Definición 2.3. Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, tal que la derivada de orden α de T denotado por $D^\alpha T$ en el sentido distribucional y definido como:

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > ; \ \forall \ \varphi \in D(\Omega)$$

Observación 2.3. De acuerdo con las definiciones anteriores se tiene y se comprueba trivialmente que $D^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es un operador lineal y continuo sobre $D'(\Omega)$.

Definición 2.4. Decimos que $u_k \to u$ casi siempre en Ω si $u_k(t) \to u(t)$ para casi todo $u \in \Omega$.

Definición 2.5. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$:

$$D'(\Omega) = \{ T : D(\Omega) \to \mathrm{K} / \ T \ \text{es lineal y continua} \}$$

donde $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre K.

Si $T \in D'(\Omega)$ y $\phi \in D(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ al valor T aplicado al elemento φ .

Los Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 2.6. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Llamemos a $L^p(\Omega)$ al conjunto (de las clases), de las funciones de Lebesgue medibles en u, donde $1 \leq p < \infty$ y sea, $|u|^p$ una función integrable en Ω, donde $L^p(\Omega)$ es denotado en términos de conjuntos como:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \, / \, u \text{ es medible, } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

cuya norma es representada de la siguiente manera:

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \; ; \; 0 \leq p < \infty$$

Se tiene también que $\left(L^p(\Omega), \|\,.\,\|_p \right)$ es un espacio de Banach. Por otro lado, si $p = 2$ tenemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar y norma dadas como siguen:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \; ; \; \|u\|_2 = \left[\int_\Omega |u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

También para $p = \infty$ se tiene al conjunto $L^\infty(\Omega)$ al conjunto denotada por:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \, / \, u \text{ es medible y } \exists C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ c.s en } \Omega \right\}$$

donde la constante positiva C es un mayorante esencial de u y caracterizada con el conjunto:

$$A = \left\{ C \in \mathbb{R} \, / \, |u(x)| \leq C \text{ c.s en } \Omega \right\}$$

cuya norma en $L^\infty(\Omega)$ es denotada por:

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf A.$$

de modo que $\left(L^\infty(\Omega), \|\,.\,\|_\infty \right)$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.1. (Desigualdad de Hölder) Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado tal que $1 \le p \le \infty$ y $1 \le q \le \infty$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$. Entonces;

$$u\,v \in L^1(\Omega) \text{ y } \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le \|u\|_p \|v\|_q \ .$$

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, capitulo 4)

Proposición 2.2. (Desigualdad de Young) Dados $1 < p, q < \infty$ cumpliendo que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y para $a, b > 0$ entonces:

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, capitulo 4)

Proposición 2.3. (Desigualdad de Minkowski) Sean $1 \le p \le \infty$ y $u, v \in L^p(\Omega)$ entonces:

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, capitulo 4)

Teorema 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \le p < q \le \infty$. Entonces:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_p \le (\mathrm{med}(\Omega))^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_q$$

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, p.28)

Teorema 2.2. Sean $1 < p < \infty$, $\phi \in \left(L^p(\Omega)\right)'$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Entonces existe una única función $u \in L^{p'}(\Omega)$ que cumple lo siguiente:

$$<\phi, v> = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ \ \forall v \in L^p(\Omega) \ \ y \ \ \| u \|_{L^{p'}(\Omega)} = \| \phi \|_{\left(L^p(\Omega)\right)'}$$

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, p.47-48)

Teorema 2.3. Sea $T \in \left(L^1(\Omega)\right)'$ entonces existe una única función $v \in L^\infty(\Omega)$ que cumple lo siguiente:

$$T(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \forall u\in L^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \|v\|_\infty=\|T\|_{\left(L^1(\Omega)\right)'}$$

Así $\left[L^1(\Omega)\right]'\cong L^\infty(\Omega)$

(la notación $\cong$ se, denota como un isomorfismo isométrico)

Demostración. Ver (Adams y Fourniers,2003, p.48)

Definición 2.7. Representaremos por $L^p_{Loc}(\Omega), 1\le p<\infty$ el espacio de funciones medibles sobre $u:\Omega\to\mathbb{R}$ donde $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue del conjunto compacto $K\subseteq\Omega$ tal que dada una sucesión (u_k) converge para $u\in L^p_{Loc}(\Omega)$ entonces se tiene:

$$P_K(u_v-u)=\left(\int_K|u_v(x)-u(x)|dx\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$$

Lema 2.1. Sea $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ entonces $T_u=0$ sí y solo si $u=0$ casi siempre en Ω. Tal que T_u es definida como sigue:

$$\langle T_u,\varphi\rangle=\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\ ;\ \forall\varphi\in D(\Omega)$$

Demostración. Ver (Medeiros y Miranda, 2019, p.11)

Proposición 2.5. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado tal que $1\le p\le\infty$ entonces:

$$L^p(\Omega)\hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$$

Demostración. Ver (Adams e Fournier,2003, p.29)

Proposición 2.6. $L^p(\Omega)$ es espacio de Banach si $1\le p<\infty$.

Demostración. Ver (Adams e Fournier Teorema 2.16,2003, p.29-30)

Lema 2.2. Dado Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ entonces se tiene que:

1. Si $1<p<\infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es reflexivo. Entretanto $L^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ no son reflexivos.
2. Si $1<p<\infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es separable. Entretanto $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

Demostración. Ver (Adams y Fournier,2003, p.49)

Definición 2.8. Dados V y W dos espacios de Banach con $V \subseteq W$ un subespacio vectorial. Si la aplicación inclusión:

$$i : V \to W$$

es continua, se denotará por $V \hookrightarrow W$, luego decimos que V tiene inmersión continua en W. Esto implica también que existe $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_W \leq C|u|_V \; ; \; \forall u \in V$$

Noción de derivada débil

Observación 2.4. (Funciones de Prueba)

Se dice que α es un múlti-índice de dimensión n y de una n-upla de números enteros positivos denotado por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ representamos a D^α al operador derivación de orden α definido por:

$$D^\alpha u = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{si } \alpha \neq (0,0,...,0) \\ u & \text{si } \alpha = (0,0,...,0) \end{cases}$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, bien regular. Donde la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, se dice que es una función de prueba (o función test) si φ es infinitamente diferenciable y de soporte compacto en Ω, tal que:

$$C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, \varphi \text{ es infinitamente diferenciable}\}$$

Luego φ es una función de prueba en Ω si y solo si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y existe K compacto en Ω tal que $\text{sop}(\varphi) \subseteq K$ donde:

$$\text{sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Por otro lado dado el siguiente conjunto

$$C_0(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, \varphi \text{ continua y con soporte compacto en } \Omega\}$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ al conjunto de las funciones $\varphi:\Omega \to K$, $(K=\mathbb{R}$ ó $K=\mathbb{C})$ que son infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω o sea:

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega) \qquad .$$

e introducimos una nueva topología sobre $C_0^\infty(\Omega)$ considerada por la siguiente definición de límite

Definición 2.9. Sea la sucesión $\left(\varphi_\gamma\right)_{\gamma \geq 1} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ diremos que $\varphi_\gamma \to \varphi$ (en $C_0^\infty(\Omega)$) cuando $\gamma \to \infty$. Si:

i) $\exists K$ compacto: $\mathrm{sop}(\varphi_\gamma - \varphi) \subseteq K;\ \forall \gamma \geq 1$.

ii) $D^\alpha \varphi_\gamma \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en *K*; $\forall \alpha \in \mathbb{N};\ \gamma \to \infty$.

es decir:

$$\underset{x\in K}{Sop}\left| D^\alpha \varphi_\gamma(x) - D^\alpha \varphi(x) \right| \to 0$$

Teorema 2.4. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ver (Adams e Fournier,2003, p. 31)

Espacios de Sobolev

Definición 2.10. Sean $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por $W^{\mathrm{m},p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones *u* de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq \mathrm{m},\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. El conjunto $W^{\mathrm{m},p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden *m* relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

$$W^{\mathrm{m},p}(\Omega) = \left\{\ u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq \mathrm{m}\ \right\}$$

Así cuando $p=2$ se denota $W^{\mathrm{m},2}(\Omega) = H^{\mathrm{m}}(\Omega)$, es decir:

$$H^{\mathrm{m}}(\Omega) = \left\{\ u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq \mathrm{m}\ \right\}$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos $H_0^{\mathrm{m}}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\,|\;|_{H^{\mathrm{m}}(\Omega)}}$; si $H_0^{\mathrm{m}}(\Omega) = H^{\mathrm{m}}(\Omega)$

entonces $\mathrm{med}\left(\mathbb{R}^n \setminus \Omega\right) = 0,$ en consecuencia:

$$H_0^{\mathrm{m}}(\Omega) = \left\{ \; u \in H^{\mathrm{m}}(\Omega) \, / \; u\big|_{\Gamma} = 0 \; \right\}$$

Definición 2.11. Para cada $u \in W^{\mathrm{m},p}(\Omega)$ se tiene que:

$$\|u\|_{\mathrm{m},p} = \left(\sum_{|\alpha| \le \mathrm{m}} \left\| D^{\alpha} u \right\|_{L^p(\Omega)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le \mathrm{m}} \int_{\Omega} \left| \, D^{\alpha} u(x) \right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty$$

ó

$\|u\|_{\mathrm{m},\infty} = \sum_{|\alpha| \le \mathrm{m}} \left\| D^{\alpha} u \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}$, si $p = \infty$, es la norma del espacio $W^{\mathrm{m},p}(\Omega)$.

Definición 2.12. Dados $1 \le p < \infty$ y $q > 1$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se representa a $W^{-\mathrm{m},p}(\Omega)$ como el dual topológico de $W_0^{\mathrm{m},p}(\Omega)$. También por otro lado se tiene que el dual topológico de $H_0^{\mathrm{m}}(\Omega)$ es $H^{-\mathrm{m}}(\Omega)$.

Inmersiones de Sobolev

Teorema 2.5. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase C^{m} con frontera limitada y sea *m* un entero tal que $\mathrm{m} \ge 1$ y $1 \le p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:

a) Si $\frac{1}{p} - \frac{\mathrm{m}}{n} > 0$ entonces $W^{\mathrm{m},p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; $q \in [1, \frac{np}{n - mp})$

b) Si $\frac{1}{p} - \frac{\mathrm{m}}{n} = 0$ entonces $W^{\mathrm{m},p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$

c) Si $\frac{1}{p} - \frac{\mathrm{m}}{n} < 0$ entonces $W^{\mathrm{m},p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, $k < m - \frac{n}{p} \le k + 1;\; k \in \mathbb{N}$

donde las inmersiones son continúas.

Demostración. Ver (Medeiros e Miranda,2019, p.83)

Teorema 2.6. Sea Ω un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de clase C^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces se cumple que:

(1) Si $p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[1, p^*\right]$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(2) Si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$,

(3) Si $p > n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Las inmersiones dadas son continuas.

Demostración. Ver (Kesavan, 1989, p.84)

Topologías débil y débil estrella

Consideremos en un inicio al dual topológico $X' = L(X, \mathbb{R})$ un espacio de Banach y cuya representación en base a la norma es:

$$\| f \|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \left| \langle f, x \rangle \right| : .$$

También se puede considerar al espacio bidual de Banach $X'' = L(X', \mathbb{R})$ de X, con norma:

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in X', \|f\|_{X'} \leq 1} \left| \langle \xi, f \rangle \right| .$$

por otro lado, la aplicación

$$J : X \to X''$$

$$X \to J_x : X' \to \mathbb{R}$$

$$f \to J_x(f) = \langle f, x \rangle$$

que es un isomorfismo de X sobre $J(X)$. Lo que nos permite identificar a X con $J(X) \subset X''$. Es así que para cada $f \in X'$ podemos considerar el funcional:

$$\varphi_f : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$$

es decir que con la función $f \in X'$ se obtiene una familia de aplicaciones $\left\{\varphi_f\right\}_{f \in X'}$.

Definición 2.13. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge débil para $x \in X$, si $\{x_n\}$ converge a X con la topología $\sigma(X, X')$; luego se tiene que:

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \text{ para todo } f \in X'$$

Definición 2.14. Diremos que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ converge débil estrella para $f \in X'$, cuando $\{f_n\}$ converge hacia f con la topología $\sigma(X', X)$; para todo $x \in X$ luego se tiene:

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$$

Proposición 2.7. Sea E un espacio de Banach y dado $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de E' entonces se cumple que:

a) $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E', E)$ si y solo si $< f_n, x_n > \longrightarrow < f, x >, \forall x \in E$;

b) $f_n \longrightarrow f$ fuerte en E' entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E', E'')$;

c) $f_n \longrightarrow f$ débil en $\sigma(E', E'')$ entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E', E)$;

d) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E', E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y $\|f\| \le \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|$;

e) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E', E)$, y si $x_n \longrightarrow x$ fuerte en E entonces $< f_n, x_n > \longrightarrow < f, x >$

donde ($\xrightarrow{*}$) denota la convergencia débil estrella.

Demostración. Ver (Brezis,2010, proposición 3.5, p.58)

Proposición 2.8. Sea X un espacio de Banach reflexivo y suponga que la secuencia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada, entonces existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge con la topología débil.

Demostración: Ver (Brezis,2010, teorema 3.18, p.69)

Proposición 2.9. Sea X un espacio de Banach y suponga que la secuencia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada en X', entonces existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge con la topología débil estrella.

Demostración: Ver (Brezis,2010,corolario 3.30,p.76)

Teorema 2.7. Dado E un espacio normado y separable, dotado también de una sucesión $\{x_m\}$ acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{x_k\}$ de $\{x_m\}$ y $x \in E'$ entonces se deduce que:

$$x_k \xrightarrow{*} x \text{ en } E'$$

Demostración: Ver (Kreyszig,1991, p. 235-236)

Lema 2.3. (Lema de Gronwall) Sean $f\,,\, g : [\mathrm{t}_0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}$ funciones continuas no decrecientes y $\mathrm{c} > 0$ una constante, tal que:

$$f(t) \leq g(t) + c\int_{t_0}^{t} f(s)ds\ ,\ \forall t \in [t_0, T]\,,$$

entonces se tiene que:

$$f(t) \leq g(t)e^{c(t-t_0)}\ ,\ \forall t \in [t_0, T]\ ,$$

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.82)

Los Espacios $L^p(0,T,V)$

Sea $0 < T < \infty$ y V un espacio de Banach, una función $u : [0,T] \to V$ se dice medible en $[0,T]$ cuando la función $t \to \langle f, u(t)\rangle_{V'\times V}$ real. es medible Lebesgue en el intervalo $[0,T]$ en una función $f \in V'$ tal que V' es dual topológico de V y su dualidad entre V' y V es denotado por $\langle\ .\ \rangle_{V'\times V}$ es así que la función u es medible en el sentido de Bochner.

Se dice que $u : [0,T] \to V$ se llama integrable en el sentido de Bochner en el intervalo $[0,T]$, si la función u es medible en $[0,T]$ donde la función $t \to \|u(t)\|_V$ es integrable en el sentido de Lebesgue del intervalo $[0,T]$, donde en consecuencia se sigue y cumple con la siguiente propiedad

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{V'\times V} dt \qquad \forall f \in V$$

Si $1\leq p<\infty$ denotaremos por $L^p(0,T,V)$ como el espacio de las funciones vectoriales $u:[0,T]\to V$ y para $t\to \|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $[0,T]$, cuya norma en base a la función u es denotada por:

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Para $p=2$ tenemos el espacio $L^2(0,T,V)$ que también es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es denotado por:

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)} = \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)\, dt$$

Si $p=\infty$ representaremos por $L^\infty(0,T,V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:[0,T]\to V$ medibles y donde el supremo esencial sobre $(\|u(t)\|_V ; t\in[0,T])$ es finito $L^\infty(0.T,V)$ y cuya norma es denotada por:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{u\in[0,T]} ess \|u(t)\|_V$$

Proposición 2.10. Sean X, Y espacios de Banach y se cumple que $X \hookrightarrow Y$ es una inmersión continua. Entonces para $1\leq p<q\leq\infty$ la inmersión $L^q(0,T,X)\hookrightarrow$ $L^p(0,T,Y)$ es también contínua.

Demostración. Ver (Zeidler E,1990, p.407)

Teorema 2.8. (Lions-Aubin)

Sean B_0, B_1 y B espacios de Banach, donde B_0 y B_1 son reflexivos, también se cumple que $B_0 \hookrightarrow B$ cuya inmersión es compacta y $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas.

Sea $W(0.T) = \{u\in L^p(0,T,B_0);\ u'\in L^q(0,T,B_1)\}$, donde $0<T<\infty$; $1<p,q<\infty$ con la norma definida por: $\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0.T,B_0)} + \|u'\|_{L^q(0.T,B_1)}$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T,B)$ es de inmersión continua.

Demostración. Ver (Lions, 1969,p.57)

Lema 2.4. (Lema de Lions). Dada (u_k) una sucesión de funciones que pertenecen en $L^q(Q)$, cumpliendo que $1 < q < \infty$. Luego si:

(i) $u_k \to u$ casi siempre en Q

(ii) $\|u_k\|_{L^q(Q)} \leq C$; $\forall k \in \mathbb{N}$

entonces se tiene que $u_k \to u$ débil en $L^q(Q)$.

Demostración. Ver(Lions,1969, Lema 1.3,capitulo 1)

Lema 2.5. Sean X e Y espacios de Banach, donde $X \hookrightarrow Y$, si $u \in L^p(0,T;X)$ y $u' \in L^p(0,T;Y)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $u \in C([0,T];Y)$.

Demostración. Ver (Zeidler,1985, problema 23.13, p.450)

Teorema 2.9. Sea X un espacio de Banach, tal que $u \in L^p(0,T;X)$ y $u' \in L^p(0,T;X)$, donde $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $u \in C([0,T];X)$, al menos en un conjunto de medida nula.

Demostración. Ver (Lions,1969, Capitulo 1, Lema 1.2)

Teorema 2.10. Sean X, Y, Z tres espacios de Banach con $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ y $1 \leq p,q \leq \infty$ para cada $T>0$, y para el conjunto:

$$W = \{u \in L^p(0,T;X) \,/\, u' \in L^q(0,T;Z)\}$$

así definido se tiene que:

i) Si $p < \infty$ entonces $W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;Y)$

ii) Si $p = \infty$ y $q > 1$ entonces $W \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];Y)$

Demostración: Ver (Boyer y Fabrie,2012, Teorema II.5.16, p.102)

Convergencia en $L^p(0,T,V)$

Dado V un espacio de Banach con una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en V. se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si $\exists\, u \in V$, tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando $k \to \infty$ donde también se denota por $u_k \to u$

También se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V , cuando existe $u \in V$ tal que

$$\langle f, u_k \rangle_{V' \times V} \to \langle f, u \rangle_{V' \times V};\ \forall f \in V'$$

cuya inmersión es compacta y continua, también denotada por $u_k \to u$.

por ejemplo, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^p(0,T,V)$ y $u \in L^p(0,T,V)$ se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $u \in L^p(0,T,V)$ si:

$$\langle f, u_k \rangle_{L^q(0,T,V) \times L^p(0,T,V')} \to \langle f, u \rangle_{L^q(0,T,V) \times L^p(0,T,V')};\ \forall f \in L^q(0,T,V'), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

esto significa que:

$$\int_0^T \langle f, u_k \rangle_{V' \times V} dt \to \int_0^T \langle f, u \rangle_{V' \times V} dt; \quad \forall f \in L^q(0,T,V').$$

Teorema 2.11. (Compacidad débil) Sea X espacio de Banach reflexivo. Si el conjunto $B \subset X$ es limitado y compacto con la topología débil $\sigma(X, X')$, es decir cualquier sucesión $\{x_n\} \subset B$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset B$ que converge en X en la topología débil $\sigma(X, X')$.

Demostración. Ver (Kreyszig,1991, p. 244-245)

Distribuciones Vectoriales.

Se dirá que una distribución T con valor en φ y denotado con $\langle T, \varphi \rangle$. se llamará el espacio de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$, y lo denotaremos por $D'(0.T,V)$.

Luego para una función $u \in L^p(0,T,V);\ \ 1 \le p \le \infty$ denotaremos la aplicación:

$$T_u : D(0,T) \to V \,/\, \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt$$

Y la integral está en el sentido de Bochner.

Observación 2.5. Se tiene que T_u es una distribución y son definidas por las funciones $u \in L^p(0,T,V)$ y $\varphi \in D(0,T)$. tal que $\boldsymbol{\varphi u \in L^1(0,T,V)}$ donde se afirma que:

a) T_u es lineal y continua en $D(0,T)$

b) T_u esta unívocamente determinado por u

Lema 2.6. Dado X un espacio de Banach y sea su dual X', tal que para u, g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T,X)$. Entonces son equivalentes

a) u es c.s igual a la primitiva de g es decir $\exists \xi \in X$ tal que:

$$u(t) = \xi + \int_0^T g(s)ds, \qquad c.s \quad t \in [0,T]$$

b) Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds = \int_0^T g(s)\varphi(s)ds$$

c) Para todo $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}(\eta, u(t))_{X' \times X} = (\eta, g(t))_{X' \times X}$$

todo esto tomado en el sentido distribucional sobre $]0,T[$.

Demostración. Ver (Temam,1979, Lema 1.1, p.250)

Lema 2.7. Sean V, H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso, es decir $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ siendo V' el dual de V. Si $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$, luego tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2(u'(t), u(t))_{V' \times V}$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales del intervalo $[0,T]$

Demostración. Ver (Temam,1979, Lema 1.2, p.260)

Operadores lineales no limitados

Definición 2.15. Dados $\left(W, |\ |_W, (.,.)_W\right)$ y $\left(H, |\ |_H, (.,.)_H\right)$ dos espacios de Hilbert, donde $W \hookrightarrow H$ con inclusión densa, continua y compacta. Sea también $\left\langle\, . \,, . \right\rangle$ la notación de dualidad entre W' y W. Por otro lado, se puede relacionar a H con su dual H', mediante el teorema de representación de Riesz y así obtener una cadena de inclusiones, así como sigue:

$$W \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow W'$$

Sea también $a(.,.): W \times W \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y continúa donde consideramos el operador lineal $W \to W'$ tal que:

$$\left\langle Au, v \right\rangle = a(u,v);\ \forall u, v \in W$$

donde el dominio de A está se define como:

$$D(A) = \left\{ u \in W \ / \ Au \in H \right\}$$

y decimos que el operador lineal A está definido por la terna $\left\{W, H, a(.,.)\right\}$ si $a(.,.)$ es continua, coercitiva y simétrica para tal caso se tiene el operador:

$$A: D(A) \subset W \to W'$$

donde el operador A es cerrado, autoadjunto, no acotado y positivo. Mas aun el dominio $D(A)$ cuya norma es $\|u\|_{D(A)} = \|Au\|_H$ entonces se obtiene que el dominio $D(A)$ es denso en H.

Observación 2.6. Se puede tomar como ejemplo de caso anterior tomando un operador A que está dotado de una terna $\left\{W, H, (.,.)_W\right\}$, con $A: D(A) \subset W \to W'$ tal que:

$$\left(Au, v\right)_H = \left(u, v\right)_W,\ \forall u \in D(A),\ \forall v \in W$$

cumpliendo las condiciones anteriores para el operador A y donde la inclusión $W \hookrightarrow H$ es compacta donde usando la teoría espectral nos proporciona la existencia de una base ortonormal y completa $\left[w_j\right]_{j\in\mathbb{N}}$; de H y $\left\{\lambda_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tales que:

$$0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots\ldots \le \lambda_j \ldots \text{ con } \lambda_j \to \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

$$w_j \in D(A) \text{ y } Aw_j = \lambda_j w_j \,,\ \forall j \in \mathbb{N}$$

y cumple las siguientes relaciones:

$$\left(w_i, w_j\right)_H = \delta_{ij} \quad \text{y} \quad a\left(w_i, w_j\right)_H = \lambda_i \delta_{ij} \ ; \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Definición 2.16. Dado $\alpha > 0$ un número real y sea el operador exponente $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset W \to W'$ lineal no acotado, positivo, auto adjunto e inyectivo, donde el dominio $D(A^\alpha)$ es denso en W, cuyo producto interno y norma están denotadas por:

$$(u,v)_{D(A^\alpha)} = \left(A^\alpha u, A^\alpha v\right)_H \quad \text{y} \quad \|u\|_{D(A^\alpha)} = \left\|A^\alpha u\right\|_H \,,$$

se obtiene que $D(A^\alpha)$ también es un espacio de Hilbert. también se tiene que $D(A^{-\alpha})$ es el dual de $D(A^\alpha)$. Así entonces A^α se puede relacionar con un isomorfismo de H en $D(A^{-\alpha})$.

Por otro lado, también el operador A^α en términos de su base $\left\{w_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ se tiene:

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \left(u, w_j\right)_H w_j \ ; \ \forall u \in D(A^\alpha) \,,$$

donde:

$$D\left(A^\alpha\right) = \left\{ u \in W \ / \ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \left|\left(u, w_j\right)_H\right|^2 < \infty \right\}$$

cuya norma en $D(A^\alpha)$ se denota:

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \left|\left(u, w_j\right)_H\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ ; \ \forall u \in D(A^\alpha)$$

más aún $D(A^{-\alpha})$ es el complemento de H para la norma $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \left|\left(u, w_j\right)_H\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ y $A^{-\alpha}$ es definido de igual modo con $-\alpha$ en lugar de α.

Observación 2.7. Un ejemplo de aplicación para los operadores fraccionarios sería el operador $A=(-\Delta)$ y $\alpha=m>0$, donde $D((-\Delta)^m)\subset H_0^m(\Omega)\to H_0^{-m}(\Omega)$, y usando la inclusión $H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta, se puede aplicar tal operador en términos de su base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ según la definición como sigue:

$(-\Delta)^m w_i=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j^m\left(w_i,w_j\right)_H w_j$; $\forall w_i\in D((-\Delta)^m)$; pero $\left(w_i,w_j\right)_H=\delta_{ij}$ luego para $j=i$;

se tiene lo siguiente:

$$(-\Delta)^m w_i=\gamma_i^m w_i;\ \forall w_i\in D((-\Delta)^m);\ \ \forall i=1,2,...,$$

por lo tanto, para $\gamma_i^m=\lambda_i$ tenemos también

$$(-\Delta)^m w_i=\lambda_i w_i;\ \forall w_i\in D((-\Delta)^m);\ \ \forall i=1,2,...$$

Lema 2.8. Sean $\alpha\geq 0$ y $\beta>0$ entonces $D\left(A^{\alpha+\beta}\right)\hookrightarrow D\left(A^{\alpha}\right)$ donde la inmersión es compacta.

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.82)

Observación 2.8. Se puede comprobar también que:

i) $V=D(A^{1/2})\hookrightarrow H$

ii) $(Au,u)=(A^{1/2}u,A^{1/2}u)=\left\|A^{1/2}u\right\|^2=\|u\|_V^2$

Un ejemplo tenemos como en la **observación 2.7** para el operador $A=(-\Delta)^m$ se tiene:

$$D((-\Delta)^{m/2})\subset H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$$

$$((-\Delta)^m u,u)=((-\Delta)^{m/2}u,(-\Delta)^{m/2}u)=\left\|(-\Delta)^{m/2}u\right\|^2=\|u\|_{D((-\Delta)^{m/2})}^2$$

Nota 2.1. También se puede denotar este operador $A^{1/2} = (-\Delta)^{m/2}$ en función del operador $A^{1/2}$ tenemos que $\left|A^{1/2}u\right|^2 = ((-\Delta)^{m/2}u)^2 = \left|\nabla^m u\right|^2$ el m-gradiente y también se define como una aplicación para el producto interno como sigue:

$$(Au,u) = ((-\Delta)^m u,u) = (\nabla^m u, \nabla^m u) = \left\|\nabla^m u\right\|^2 = \left\|A^{1/2}u\right\|^2.$$

Prolongamiento de Soluciones

En este tema se presentará las condiciones de Caratheodory y el prolongamiento de soluciones que son indispensables para demostrar la existencia de soluciones por el método de Faedo-Galerkin, Ver (Kesavan,1989, p.141).

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $Q = \Omega \times [0,T]$; $T > 0$ sea también $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función. Denotemos $x = f(t)$, diremos que una función $F : Q \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre Q si:

(i) $F(t,x)$ es medible en *t* para cada x fijo

(ii) $F(t,x)$ es continua en *x* para casi toda *t* fijo

(iii) Para cada compacto $K \subseteq Q$, existe una función real $m_K(t)$ integrable tal que:

$$\left|F(t,x)\right| \le m_K(t), \quad \forall (t,x) \in Q$$

Teorema 2.12. (Teorema de Caratheodory)

Sea $F : Q \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de Caratheodory. Entonces el sistema

$$\begin{cases} x' = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

admite una solución en un intervalo $[0,T)$, $t \le T.$,

Demostración. Ver (Halle,1997, p.28)

Teorema 2.13.(Teorema de prolongamiento) Sea $F:Q\to\mathbb{R}$ cumpliendo las condiciones de caratheodory y sea $x(t)$ la solución del sistema $(*)$. Si $\left|F(x,t)\right|\leq M$ independiente de t, entonces $x(t)$ posee un prolongamiento en todo el intervalo $\left[0,T\right]$

Demostración. Ver (Halle,1997, p.29)

2.3. Marco Conceptual

Los materiales plásticos o poliméricos adquieren un comportamiento viscoelástico es decir que simultáneamente presentan un comportamiento elástico y al mismo tiempo un comportamiento liquido viscoso. En el caso elástico se puede representar como un comportamiento de un resorte donde se definen proporcionalmente las tensiones y deformaciones gobernadas por la ley de Hooke donde las características de la respuesta elástica son en prioridad instantánea y además no depende de la variable tiempo. Por otro lado, la respuesta viscosa se estudia a través de un embolo o pistón, que obedece la ley de newton y plantea la proporcionalidad de las tensiones de cizalla en este caso ya no en la deformación, sino en la velocidad de la deformación con el paso del tiempo, como consecuencia de ello es fundamental en este caso tomar en cuenta la variable tiempo. Es así como las propiedades mecánicas de un material plástico vienen definidas por la terna de parámetros de tensión-deformación-tiempo debido a la naturaleza viscoelástica de los materiales y que conlleva a las aplicaciones en estudio que se producen a largo plazo en los materiales poliméricos a los fenómenos de fluencia y relajación.

Así la descripción de la deformación en objetos viscoelásticos y las tensiones microscópicas no solo requieren de las deformaciones ocurridas en ese instante, sino en base a toda la historia pasada o el tiempo que demora en deformarse. Este tipo de problemas surgen en la viscoelasticidad como por ejemplo en algunos materiales con memoria de desvanecimiento.

Es por ello que una caracterización dinámica más genérica y aplicada a los materiales viscoelásticos de orden superior en la variable espacial, en donde abordamos en nuestra investigación en base al sistema (A3) y tomando así, ciertas hipótesis para el operador A, la función g cumple la función de relajación y para datos iniciales aplicable para espacios de Sobolev, así como también usamos la teoría del análisis funcional y las EDP de orden superior en la variable espacial.

2.4. Definición de términos básicos

- Los espacios $L^p(\Omega)$**.** Se define $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones vectoriales $u:\Omega\to\mathbb{R}$ medibles y tales que $|u|^p$ es integrable. Si $u\in L^p(\Omega)$ se define:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$**.** Dado un dominio $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, es un espacio de Sobolev se define como:

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)/D^\alpha u\in L^p(\Omega),\forall\alpha\in N^n:|\alpha|\le m\right\}$$

  cuando $p=2$, están dotados de manera natural de la estructura de espacio de Hilbert y se denota $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$.
- Espacio Separable. - Se dice que un Espacio Métrico es separable si existe un subconjunto $D\subset E$ numerable y denso.
- Potencias fraccionarias del operador A.- Dado $\alpha>0$ un número real y sea el operador exponente $A^\alpha : D(A^\alpha)\subset W\to W'$ lineal no acotado, positivo, auto adjunto e inyectivo, donde el dominio $D(A^\alpha)$ es denso en W, cuyo producto interno y norma están denotadas por:

$$(u,v)_{D(A^\alpha)}=\left(A^\alpha u, A^\alpha v\right)_H \quad \text{y} \quad \|u\|_{D(A^\alpha)}=\left\|A^\alpha u\right\|_H ,$$

se obtiene que $D(A^{\alpha})$ también es un espacio de Hilbert. también se tiene que $D(A^{-\alpha})$ es el dual de $D(A^{\alpha})$. Así entonces A^{α} se puede relacionar con un isomorfismo de H en $D(A^{-\alpha})$.

Notaciones básicas

- $|\Omega| :=$ medida de Lebesgue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- $p' = \dfrac{p}{p-1}$ exponente conjugado de *p.*
- $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n}$ para todo $x = (x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $\hookrightarrow$ denota inclusión continua.
- $\hookrightarrow\hookrightarrow$ denota inclusión compacta.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota dualidad.
- $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ espacios de Banach.
- $D^{\alpha} u = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{si } \alpha \neq (0,0,\ldots,0) \\ u & \text{si } \alpha = (0,0,\ldots,0) \end{cases}$
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, denota el laplaciano de u.
- $(\cdot, \cdot)$, representa el producto interno de $L^2(\Omega)$.
- $|\cdot|_p$, representa la norma de $L^p(\Omega)$.
- $((\cdot, \cdot))_V$, representa el producto interno de $H_0^m(\Omega)$.
- $\|\cdot\|_V$, representa la norma en $H_0^m(\Omega)$.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General

Existe solución local débil y es única para el problema o sistema (A3) en ecuaciones en derivadas parciales de orden superior en la variable espacial.

Hipótesis Específicas

Para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces se determina que el sistema (A3) es un problema que engloba diferentes aplicaciones.

Para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces existe solución del problema (A3).

Para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces existe solución única del problema (A3).

3.1.1. Operacionalización de la variable

$u = u(x,t)$**:** función desplazamiento

Variable	Dimensiones	Indicadores
u	Existencia	Teoría espectral para operadores no acotados. Método de Faedo-Galerkin,
	Unicidad	Técnica de contradicción con la desigualdad de Gronwall.

IV. METODOLÓGIA DEL PROYECTO

4.1. Diseño Metodológico

Hay que mencionar que esté presente estudio es de característica básica y fundamental, donde no se requieren experimentos. El contenido es Longitudinal, para esto priorizamos en la demostración de la existencia y unicidad de solución del sistema (A3) en EDP de orden superior en la variable espacial.

4.2. Método de investigación

Para este estudio la técnica a seguir es del modo inductivo – deductivo, haciendo que el desarrollo del problema lleve un análisis de lo más practico posible en sus demostraciones según nuestra base teórica aplicable.

4.3. Población y muestra

En nuestro caso no existe población que estudiar por ser un problema de análisis matemático, sin obviar que dicha exploración forma parte y esta relacionado en el campo donde se encuentran las aplicaciones en EDP hiperbólicas

4.4. Lugar de estudio y período de desarrollo

El desarrollo del trabajo se realizó tanto, así como la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, La Facultad de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y gran parte de estudio se realizó en mi domicilio con el auxilio de la tecnología de internet estimando un periodo de ocho meses.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para tener como finalidad resultados importantes en nuestro trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada en cuanto al análisis funcional y la teoría espectral para operadores no acotados y otros temas relevantes de los cuales seleccionamos como información en base a sus definiciones lemas, corolarios, teoremas etc. y estableciendo así la técnica deductiva en base de las EDP y adaptándolo para desarrollar la solución de nuestro problema (A3).

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Como el trabajo que realizamos es esencialmente demostrativo en el ámbito de la matemática pura no hubo la necesidad de realizar algún análisis y procesamiento de datos, por ser un trabajo no experimental.

4.7. Aspectos éticos en investigación

Este proyecto de tesis es un problema de Investigación que generaliza las aplicaciones de las ecuaciones de onda viscoelástica en nuestro caso una EDP de orden superior en la variable espacial es por ello que es aplicable tanto para el campo de las ciencias e ingeniería y será de aporte tanto en las diversas facultades y áreas afines tomando como finalidad el contenido de esta tesis que se ha elaborado lo más detallado que se pudo hacer.

El campo que será beneficiado con los aportes significativos dados en nuestra investigación son las personas con conocimientos básicos y avanzados de Física, Matemática, e Ingeniería civil de forma específica, motivo por el cual consideramos de mucha relevancia haber realizado este trabajo pues está relacionado con las EDP de orden superior en la variable espacial.

V. RESULTADOS

Existencia Local y Unicidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto acotado, con frontera bien regular Γ y sea $T > 0$ un número real en $Q = \Omega \times (0,T)$ consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'' + Au - \int_0^t g(t-s)Au\,ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u(x,t) = 0;\ \dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i} = 0,\ \ i = 1,2,...,m-1 & \text{sobre} \ \ \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x);\ \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Hipótesis

$[\mathrm{H}_1]$ $A = (-\Delta)^m$; $m \geq 1,\ m \in \mathbb{N}$ y $u_0 \in H_0^m(\Omega) \cong V, u_1 \in L^2(\Omega) \cong H$;
donde $D(A) = D\left((-\Delta)^m\right) = V \hookrightarrow W \equiv D(A^{1/2}) = D\left((-\Delta)^{m/2}\right)$

$[\mathrm{H}_2]$ $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de clase C^2 donde g es una función no creciente tal que:

(a) $\ g(0) > 0,\ \int_0^\infty g(s)\,ds < \infty,\ 1 - \int_0^\infty g(s)\,ds = \eta_0 > 0$

(b) $\ -a_0 g(t) \leq g'(t) \leq -a_1 g(t);$

(c) $\ 0 \leq g''(t) \leq a_2 g(t);$

siendo a_0, a_1, a_2 y η_0 constantes positivas

El propósito principal de esta sección es demostrar la existencia y unicidad de la solución débil del problema (5.1) tomando a u_0 y u_1 datos suficientemente regulares.

Nota 5.1. Denotaremos a las dos identidades de memoria como sigue

$(\bullet)$ $\ (g * u)(t) := \int_0^t g(t-s)u(s)\,ds$

$(\bullet)$ $\ (g \square u)(t) := \int_0^t g(t-s)\left\|u(t) - u(s)\right\|^2 ds$

Nota 5.2. también se tiene que:

$$(\bullet)\ \frac{d}{dt}(g*u)(t):=\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)u(s)\,ds=\int_0^t g'(t-s)u(s)\,ds+g(0)u(t)$$

$$(\bullet)\ \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)(u(s),u(t))\,ds=\int_0^t g'(t-s)(u(s),u(t))\,ds+\int_0^t g(t-s)(u(s),u'(t))\,ds$$

$$+g(0)\|u(t)\|^2$$

$$(\bullet)\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |u(t)-u(s)|^2 dxds\right)=\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega |u(t)-u(s)|^2 dxds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)-u(s)|^2 dxds+g(0)\int_\Omega |u(t)-u(s)|^2 dx$$

Definición 5.1. dado $u_0\in V;\, u_1\in H$ decimos que $u:Q\to\mathbb{R}$ es solución débil de (5.1) si satisface:

- $u\in L^\infty\left(0,T;D\left((-\Delta)^{m/2}\right)\right)$
- $u'\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\cap D\left((-\Delta)^{m/2}\right)\right)$
- $u''\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$
- $\frac{d}{dt}(u',v)+((-\Delta)^{m/2}u,(-\Delta)^{m/2}v)-\int_0^t g(t-s)((-\Delta)^{m/2}u,(-\Delta)^{m/2}v)\,ds=0;\ \forall v\in W$ en $D'(\Omega)$. En el sentido distribucional
- $(u'',v)+((-\Delta)^m u,v)-\int_0^t g(t-s)((-\Delta)^m u,v)\,ds=0;\ \forall v\in H$ en $D'(\Omega)$. En el sentido distribucional
- $u(0)=u_0$ y $u'(0)=u_1$

Teorema 5.1. (Existencia local y unicidad de la solución débil)

Sean $u_0\in H_0^m(\Omega);\, u_1\in L^2(\Omega)$ y asumiendo las hipótesis $[\mathrm{H}_1]$ y $[\mathrm{H}_2]$,entonces el problema (5.1) admite una única solución débil tal que:

$$
\begin{aligned}
u \; &\in L^{\infty}\left(0,T\,;D\left(\left(-\Delta\right)^{m/2}\right)\right)\\
u' \; &\in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\cap D\left(\left(-\Delta\right)^{m/2}\right)\right)\\
u'' &\in L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega))
\end{aligned}
$$

Demostración

Usaremos el método de Faedo- Galerkin, "ver Kesavan (1989, p.141)" para probar la existencia de soluciones locales como sigue:

Problema Aproximado.

Denotemos a los $(w_j)_{j\in IN}$ una base ortonormal de $L^2(\Omega)$, que también es ortogonal a $H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ y que están representadas por las autofunciones del operador $\left(-\Delta\right)^m = A$, con condiciones de frontera en $u=\left(-\Delta\right)^m = 0$ y para toda $\dfrac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i}=0,\ \ i=1,2,...,m-1$ sobre Γ. De la **Definición 2.16 y la Observación 2.7** el operador $A=\left(-\Delta\right)^m$ admite una descomposición espectral tal que:

$$
Aw_j = \lambda_j w_j \quad ; \quad w_j \in D(A) \tag{5.2}
$$

donde $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son los correspondientes autovalores de $\left(-\Delta\right)^m = A$, siendo,

$$
0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_j \le ....\ y\ \lambda_j \to \infty \text{ cuando } j \to \infty
$$

Así mismo como los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ y en particular $H_0^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert separables, se puede sustraer una base finita $V_m=\left\{w_1,w_2,...,w_m\right\}\subset V = H_0^m(\Omega)$, Luego el problema finito dimensional es hallar una solución aproximada $u_m\left(t\right)\in V_m \subset H_0^m\left(\Omega\right)=V$ tal que:

$$
\begin{aligned}
u_m : (0,t_m) \;&\to\; V_m \subset V\\
t \quad &\to\; u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} h_{im}(t)w_i
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

estas funciones $h_{im}(t)$ son funciones reales definidas en un intervalo $[0,t_m)$ y que cumplen las condiciones iníciales del problema aproximado como se sigue a continuación:

$$\left| \begin{array}{l} (u_m''(t),w_j)+(Au_m(t),w_j)-\int_0^t g(t-s)(Au_m(s),w_j)\,ds=0 \quad \forall w_j\in V_m \\ u_k(0)=u_{0m}\to u_0\in V \qquad \text{cuando } m\to\infty \\ u_k'(0)=u_{1m}\to u_1\in H \qquad \text{cuando } m\to\infty \end{array} \right. \tag{5.4}$$

para $1\le j\le m$

El sistema (5.4) admite una solución sobre el intervalo $\left[0,T_m\right)$ por medio del **teorema 2.12** de Caratheodory.

Efectuando en el (P.A) y tomando en cuenta que:

$$(Au_m(t),w_j)=(A^{1/2}u_m(t),A^{1/2}w_j)$$

tenemos de (5.2) y (5.3) en (5.4) y desarrollando cada término del problema aproximado y luego haciendo $j=i$ tenemos los siguientes resultados

- $$(u_k''(t),w_j)=(\sum_{i=1}^{k}h_{ik}''(t)w_i,w_j)=\sum_{i=1}^{k}h_{ik}''(t)(w_i,w_j)=a_ih_k'' \tag{5.5}$$

- $$(Au_m(t),w_j)=\sum_{i=1}^{m}h_{im}(t)(Aw_i,w_j)=\sum_{i=1}^{m}h_{im}(t)(\lambda_iw_i,w_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ih_{im}(t)(w_i,w_j)=\lambda_ia_ih_m(t) \tag{5.6}$$

- $$\int_0^t g(t-s)(Au_m(s),w_j)\,ds=\int_0^t g(t-s)(\sum_{i=1}^{m}h_{im}(s)Aw_i,w_j)\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_iw_i,w_j)\int_0^t g(t-s)h_{im}(s)\,ds=\lambda_ia_i\int_0^t g(t-s)h_{im}(s)\,ds \tag{5.7}$$

de (5.5), (5.6), (5.7) y teniendo en cuenta que $a_i>0$, tenemos entonces:

$$h_{im}''+\lambda_ih_{im}(t)-\lambda_i\int_0^t g(t-s)h_{im}(s)\,ds=0 \tag{5.8}$$

$\forall i=1,2,......,m$

También por otro lado como, u_{0m} y $u_{1m} \in V_m$, tal que $u_{0m} \to u_0$ converge en V y $u_{1m} \to u_1$ converge en H. Para adecuar los datos iniciales al problema (5.1), nos basamos en tomar un conjunto $\{w_j\}_{j\geq 1}$, como una base Hilbertiana de V,

luego que $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = V$. Entonces dado $u_0 \in V$, existe una sucesión $(u_{0m}) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$,

tal que $u_{0m} \to u_0$ en *V* luego:

$u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} h_{im}(0) w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{im} w_j = u_{0m}$ entonces podemos hacer

$$h_m(0) = (\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{mm}) = h_{0m} \in \mathbb{R}^m.$$

análogamente existe una sucesión $(u_{1m}) \subseteq V_m$, tal que $u_{1m} \to u_1$ en H, luego

$u'_m(0) = \sum_{j=1}^{m} h'_{im}(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} d_{jm} w_j = u_{1m}$ y finalmente podemos hacer:

$$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j w_j(x), \qquad u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j w_j(x)$$

también concluimos que:

$$h_{jm}(0) = c_j \quad \text{y} \quad h'_{jm}(0) = d_j \tag{5.9}$$

de (5.8) y (5.9) tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} h''_{im} + \lambda_i h_{im}(t) - \lambda_i \int_0^t g(t-s) h_{im}(s)\, ds = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{en} \quad \mathrm{V} \\ u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{en} \quad \mathrm{H} \end{array} \right. \tag{5.10}$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots, m$

también el sistema (5.10) en $\mathbb{R}^m$ se puede expresar como sigue:

$$h''_m + \lambda_M h_m(t) - \lambda_M (g * h)_m(s) = 0 \tag{5.11}$$

donde:

- $h_m(t) = (h_{1m}(t), \ldots, h_{mm}(t))^T$,

- $\lambda_M = [\lambda_1 \lambda_2, \ldots \lambda_m] I_{m\times m}$
- $(g * h)_m (s) = \left(\int_0^t g(t-s) h_{1m}(s)\, ds, \ldots, \int_0^t g(t-s) h_{mm}(s)\, ds\right)^T$

que es lo mismo representar como:

$$h_m(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}, h'_m(t) = \begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \text{ y } h''_m(t) = \begin{bmatrix} h''_{1m}(t) \\ \vdots \\ h''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \tag{5.12}$$

luego:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} h_m(t) \\ h'_m(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \\ h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1},$$

entonces:

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} h'_m(t) \\ h''_m(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ h''_{1m}(t) \\ \vdots \\ h''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ -\lambda_1 h_{im}(t) + \lambda_1 \int_0^t g(t-s) h_{1m}(s)\, ds \\ \vdots \\ -\lambda_m h_{mm}(t) + \lambda_m \int_0^t g(t-s) h_{mm}(s)\, ds \end{bmatrix}_{2m\times 1} \tag{5.13}$$

Luego de (5.13), tenemos también:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 h_{1m}(t) \\ \vdots \\ \lambda_m h_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m}}_{\lambda_M} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \lambda_M G(t) \tag{5.14}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \int_0^t g(t-s) h_{im}(s)\,ds \\ \vdots \\ \lambda_m \int_0^t g(t-s) h_{mm}(s)\,ds \end{bmatrix}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m}}_{\lambda_M} \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^t g(t-s) h_{im}(s)\,ds \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-s) h_{mm}(s)\,ds \end{bmatrix}_{m\times 1}}_{(g*h)_m(t)} \tag{5.15}$$

luego:

$$G''(t) = \lambda_M G(t) + \lambda_M (g*h)_m(t) \tag{5.16}$$

también se puede representar como:

$$\begin{aligned} G'(t) &= \overline{0} \times G(t) + I \times G'(t) \\ G''(t) &= \lambda_M G(t) + \lambda_M (g*h)_m(t) \end{aligned} \tag{5.17}$$

tal que:

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} G'(t) \\ G''(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{0} & I \\ \lambda_M & \overline{0} \end{bmatrix}_{2m\times 2m}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} G(t) \\ G'(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}}_{Y(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{0} \\ \lambda_M (g*h)_m(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}}_{H(t)} \tag{5.18}$$

por lo tanto:

$$\boldsymbol{Y'(t) = CY(t) + H(t) = F(t,Y)} \tag{5.19}$$

donde:

$\overline{0}$ = matriz nula $m\times m$, $I = \text{matriz identidad } m\times m$

también se tiene:

$$\begin{bmatrix} h_{1m}(0) \\ \vdots \\ h_{mm}(0) \\ h'_{1m}(0) \\ \vdots \\ h'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} G(0) \\ G'(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = Y(0) = Y_0 \qquad (5.20)$$

así tenemos el siguiente sistema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F(t,Y) \\ \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \qquad (5.21)$$

ahora probemos que (5.21) satisface las condiciones de Caratheodory entonces sí: $F: R \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m}$, donde $R = [0,T] \times B,\ T \text{ finito} > 0,$

$B = \{Y \in \mathbb{R}^{2m}, \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C_R;\ C_R > 0\}, Y_0 \in G$ tal que:

$$\begin{array}{ll} F: [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m} & \\ \quad (t,Y) \quad \to F(t,Y) = CY + H \end{array} \qquad (5.22)$$

donde $Y = (h,h') \in \mathbb{R}^{2m}$.

luego:

a) $F(t,Y)$ es medible en *t,* para cada Y fijo.

Si fijamos Y, tenemos que Y, H y C no dependen de t. En general $F(t,Y)$ no depende de t entonces F es medible en $t \in]0,T[$ **.**

b) $F(t,Y)$ es continua en Y para cada *t* fijo.

I) Si *t* es fijado, entonces el vector F es continua en Y.

Como $Y = (h,h') \in \mathbb{R}^{2m}$ luego consideramos $Y_k = (h^k, h'^k) \in \mathbb{R}^{2m}$; $\forall g^k, g'^k \in \mathbb{R}^n$

tal que $Y_k = (h^k, h'^k) \to Y = (h,h')$; $k \to \infty$

esto implica que $h^k \to h$ cuando $k \to \infty$

siendo $h^k = (h^k_{1m}, \ldots\ldots\ldots, h^k_{mm})$ y $h = (h_{1m}, \ldots\ldots\ldots h_{mm})$;

se sigue también para cada elemento $h^k_{im} \to h_{im}$ en $\mathbb{R}$; $k \to \infty \ \forall i = 1, 2 \ldots, m$.

luego se tiene $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i h_{im}^k(t) \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i h_{jm}(t)$ cuando $k \to \infty$. Así tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 h_{1m}^k(t) \\ \vdots \\ \lambda_m h_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 h_{1m}^k(t) \\ \vdots \\ \lambda_m h_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \tag{5.23}$$

luego

$$\lambda_M G^k(t) \xrightarrow{k\to\infty} \lambda_M G(t)$$

también se tiene

$$\lambda_i \int_0^t g(t-s) h_{im}^k(s)\, ds \to \lambda_i \int_0^t g(t-s) h_{im}(s)\, ds$$
$$\text{cuando } k \to \infty \; .$$

así tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \int_0^t g(t-s) h_{1m}^k(s)\, ds \\ \vdots \\ \lambda_m \int_0^t g(t-s) h_{mm}^k(s)\, ds \end{bmatrix}_{2mx1} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \int_0^t g(t-s) h_{1m}(s)\, ds \\ \vdots \\ \lambda_m \int_0^t g(t-s) h_{mm}(s)\, ds \end{bmatrix}_{2mx1} \tag{5.24}$$

luego

$$\lambda_M (g*h)_m(t) \xrightarrow{k\to\infty} \lambda_M (g*h)_m(t)$$

c) Para cada compacto K en D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que:

$$\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le I_K(t) \quad \forall (t,Y) \in R$$

donde $R = [0.T] \times B \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{2m}$ es un subconjunto compacto cualquiera tal que T es finito, $T > 0$ y $B = \{Y \in \mathbb{R}^{2m}; \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le C_R ;\; C_R > 0\}$. Luego para todo

$$(t,Y) = (t,h,h') \in R \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{2m}$$

tenemos $\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \|CY + \mathrm{H}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le \|CY\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\mathrm{H}\|_{\mathbb{R}^{2m}}$

$$\le |C|\|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\mathrm{H}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \tag{5.25}$$

luego usando el factor de que $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^{2m}} R$ es un compacto de $\mathbb{R}^{2m}$ e $Y \in \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^{2m}} R$ también se deduce que $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^m} R$ es un compacto de $\mathbb{R}^m$ siendo $h = (h_1, h_2, ..., h_m),\ h' = (h'_1, h'_2, ..., h'_m) \in \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^m} R$ entonces existe una constante C_R tal que $\|h\|_{\mathbb{R}^m} \le C_R$, $\|h'\|_{\mathbb{R}^m} \le C_R$. Como $Y \in G$ deducimos que $\forall i = 1, ..., m$. También se tiene

(i) $\|Y\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} = \sum_{i=1}^{m} \left[|h_{im}|^2 + |h'_{im}|^2 \right] \le C_R^2 \Rightarrow |h_{im}| \le C_R$, $|h'_{im}| \le C_R$; $\forall i = 1, ..., m$

(ii) $\tilde{\lambda} = \max\{\lambda_i ;\quad 1 \le i \le m\}$

como $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega}) \hookrightarrow V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$ entonces luego de (i) y (ii) se tienen

$a)$ $\|CY\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \le \tilde{\lambda}\|Y\|^2 \le \tilde{\lambda} C_R$

$$b)\ \|\mathrm{H}\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \le \tilde{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^t g(t-s) h_{im}(s)\, ds \right)^2 \right)$$

$$\le \tilde{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \int_0^t |g(t-s) h_{im}(s)|^2\, ds$$

$$\le \tilde{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^t |g(t-s)|^2 ds \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^t |h_{im}(s)|^2\, ds \right) \le \tilde{\lambda} C_g C_h \tag{5.26}$$

luego de (5.25) y (5.26) tenemos

$$\|F(t,Y)\| \le \tilde{\lambda} C_R + \tilde{\lambda} C_g C_h = m_k(t) \tag{5.27}$$

Siendo $m_K(t)$ una función real integrable en $\operatorname{proj}_t R \subseteq [0, T_m]$ por lo tanto concluimos que (5.22) satisface las condiciones de Caratheodory y por lo tanto se puede aplicar el **teorema 2.12 (Teorema de caratheodory).** Entonces tenemos que existe $Y(t)$ una solución en $[0, T_m[$, $0 < t < T_m$, siendo $Y(t)$ absolutamente continua y derivable casi siempre en $[0, T_m[$. Entonces las funciones $h_{im}(t),\ h'_{im}(t)$ con $i = 1, 2, ..., m$ son soluciones locales del problema aproximado (5.4) (sistema E.D.O) en $[0,T_m[$. Así tenemos que para cada $m\in\mathbb{N}$ el problema aproximado tiene una solución local $u_m(t)$ en algún intervalo $[0,T_m[$ con $0<t<T_m$.

Estimativa a priori

El propósito de las estimativas que usaremos a continuación nos permitirá extender las soluciones locales de una función $u_m(t)$ del (P.A) a un intervalo $[0,T]$, para un $T>0$ e independiente de "*m*". Usando en este caso el **teorema 2.13 (de prolongamiento de soluciones).** Luego tenemos a continuación las siguientes estimativas:

Estimativa 1

Multiplicando a (5.3) por $h'_{jm}(t)$ y sumando de *j =1* hasta *j = m* se tiene

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)+(Au_m(t),\sum_{i=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)-$$

$$-\int_0^t g(t-s)(Au_m(s),\sum_{i=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)ds=0 \qquad (5.28)$$

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)+(A^{1/2}u_m(t),A^{1/2}\sum_{i=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)-$$

$$-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s),A^{1/2}\sum_{i=1}^{m}h'_{jm}(t)w_j)\,ds=0$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+(A^{1/2}u_m(t),A^{1/2}u'_m(t))-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s),A^{1/2}u'_m(t))\,ds=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s),A^{1/2}u'_m(t))\,ds=0 \qquad (5.29)$$

por otro, lado podemos adecuar el siguiente término como sigue:

$$(*)-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s),A^{1/2}u'_m(t))\,ds=\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s),A^{1/2}u'_m(t))\,ds$$

$$-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u'_m(t))\,ds$$

$$-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\,ds = \int_0^t g(t-s)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds$$

$$-\int_0^t g(t-s)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds \qquad (5.30)$$

también se sigue:

$$(*)-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\,ds = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds\right)$$

$$-\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds$$

$$+\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds\right)-\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds\right)+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 \qquad (5.31)$$

$$(*)-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))ds = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds$$

$$-\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds$$

$$+\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 g(t) \qquad (5.32)$$

luego de (5.32) en (5.29) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds-$$

$$\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)$$

$$=\int_0^t g'(t-s)\left|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right|^2 ds-\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds \qquad (5.33)$$

así tenemos reducida la ecuación, como sigue:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_m'(t)\|^2+\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds-\int_0^t g(s)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 ds\right)$$

$$=\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds-\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 g(t)\le 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_m'(t)\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds\right)$$

$$=\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(t)-A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds-\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2 g(t)\le 0 \qquad (5.34)$$

ya que por hipótesis de la función $[\mathrm{H}_2]-b$ sobre g' se tiene por lo tanto se tiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\|u_m'(t)\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)\right)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\int_0^t g(t-s)\|u_m(t)-u_m(s)\|_V^2\,dsdx\right]}_{E_m(t)}\le 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\|u_m'(t)\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+(g\square A^{1/2}u)(t)\right]}_{E_m(t)}\le 0 \qquad (5.35)$$

luego integrando de 0 a *t* se tiene:

$$E_m(t)\le E_m(0) \qquad (5.36)$$

donde $E_m(0)$ se denota como:

$$E_m(0) = \|u_m'(0)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m(0)\right\|^2$$

también

$$\|u_m'(t)\|^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|A^{1/2} u_m(t)\right\|^2 + (g\square A^{1/2}u)(t) \le \|u_m'(0)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m(0)\right\|^2$$

$$\|u_m'(t)\|^2 + \eta_0 \left\|A^{1/2} u_m(t)\right\|^2 + (g\square A^{1/2}u)(t) \le \|u_m'(0)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m(0)\right\|^2 \qquad (5.37)$$

por otro lado, de las condiciones iniciales se sigue:

$(i)\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 = u'(0)$ en H

$$\Rightarrow \|u_{1m}\|_H \to \|u_1\|_H \Rightarrow \|u_{1m}\|_H \le c_1 \qquad (5.38)$$

$(ii)\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ en $V \hookrightarrow W$ luego en particular se tiene:

$$\Rightarrow \|u_{0m}\|_W \le C\|u_{0m}\|_V \le c_2 \to \|u_0\|_W \le C\|u_0\|_V \le c_2$$

$$\Rightarrow \|u_{0m}\|_W \le c_2 \qquad (5.39)$$

luego

$$\|u_m'(t)\|^2 + \eta_0 \left\|A^{1/2} u_m(t)\right\|^2 + (g\square A^{1/2}u)(t) \le E_m(0) \qquad (5.40)$$

también

$$\|u_m'(t)\|^2 + \eta_0 \|u_m(t)\|_W^2 + (g\square A^{1/2}u)(t) \le E_m(0) \le C \qquad (5.41)$$

luego teniendo en cuenta que $(g\square A^{1/2}u)(t) \ge 0$, esto implica que:

$$\|u_m'(t)\|^2 + n_0 \|u_m(t)\|_W^2 \le C \qquad (5.42)$$

para todo $t \in [0,T]$ y $m \in \mathbb{N}$, en este caso C no depende de t y m, luego:

$$\begin{aligned} &\{u_m'\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H) \\ &\{u_m\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;W) \end{aligned} \qquad (5.43)$$

Estimativa 2

Del problema aproximado (P.A) haciendo tender $t \to 0$ y luego multiplicando por $h''_{jm}(0)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene

$$(u''_m(0), \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t) w_j) + (A^{1/2} u_m(0), \sum_{i=1}^{m} h''_{jm}(t) A^{1/2} w_j) = 0 \tag{5.44}$$

$$(u''_m(0), u''_m(0)) + (A^{1/2} u_m(0), A^{1/2} u''_m(0)) = \|u''_m(0)\|^2 + (Au_m(0), u''_m(0)) = 0$$

$$\|u''_m(0)\|^2 = -(Au_m(0), u''_m(0)) \leq \frac{1}{2}\|Au_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|u''_m(0)\|^2$$

$$\|u''_m(0)\|^2 \leq 2\|Au_m(0)\|^2 \leq 2\|u_m(0)\|_V^2 \leq C$$

$$\|u''_m(0)\|^2 \leq C \tag{5.45}$$

Estimativa 3

Derivando el (P.A) respecto de *t* y luego multiplicando a (5.3) por $h''_{jm}(t)$ y sumando de *j =1* hasta *j = m* se tiene respectivamente:

$$(u'''_m(t), w_j) + (A^{1/2} u'_m(t), A^{1/2} w_j) - \int_0^t g'(t-s)(A^{1/2} u_m(s), A^{1/2} w_j)\, ds$$

$$-g(0)(A^{1/2} u_m(t), A^{1/2} w_j) = 0 \tag{5.46}$$

$$(u'''_m(t), \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t) w_j) + (A^{1/2} u'_m(t), \sum_{i=1}^{m} h''_{jm}(t) A^{1/2} w_j) -$$

$$-\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2} u_m(s), \sum_{i=1}^{m} h''_{jm}(t) A^{1/2} w_j)\, ds - g(0)(A^{1/2} u_m(s), \sum_{i=1}^{m} h''_{jm}(t) A^{1/2} w_j) = 0$$

$$(u'''_m(t), u''_m(t)) + (A^{1/2} u'_m(t), A^{1/2} u''_m(t)) - \int_0^t g'(t-s)(A^{1/2} u_m(s), A^{1/2} u''_m(t))\, ds = 0$$

$$-g(0)(A^{1/2} u_m(t), A^{1/2} w_j) = 0 \tag{5.47}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2} u'_m(t)\right\|^2 - \int_0^t g'(t-s)(A^{1/2} u_m(s), A^{1/2} u''_m(t))\, ds -$$

$$-g(0)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u''_m(t)) = 0 \quad (5.48)$$

también para cada término tenemos

$$(*)\ g(0)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u''_m(t)) = g(0)\frac{d}{dt}(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u'_m(t)) - g(0)\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|^2 \quad (5.49)$$

$$(*)\ \int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u''_m(t))\,ds = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\,ds\right)$$

$$-\int_0^t g''(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\,ds - g'(0)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u'_m(t))$$

$$(*)\ \int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u''_m(t))\,ds \le \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\,ds\right)$$

$$+a_2\int_0^t g(t-s)\left|(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\right|ds + a_0 g(0)\left|(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u'_m(t))\right| \quad (5.50)$$

también por otro lado tenemos

$$a_2\int_0^t g(t-s)\left|(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\right|ds \le a_2\int_0^t g(t-s)\left|(A^{1/2}u_m(s), A^{1/2}u'_m(t))\right|ds$$

$$\le a_2\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(s)\right\|\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|ds$$

$$\le \left(a_2\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(s)\right\|ds\right)\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|$$

usando la desigualdad de Young, para $ab \le \eta a^2 + \frac{1}{4\eta}b^2$ se tiene

$$\le \frac{a_2}{4\eta}\left[\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}u_m(s)\right\|ds\right]^2 + \eta\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|^2 \quad (5.51)$$

luego usando la desigualdad de Holder para la primera componente tenemos

$$\le \frac{a_2}{4\eta}\left(\int_0^t |g(t-s)|^2\,ds\right)\left(\int_0^t\left\|A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds\right) + \eta\left\|A^{1/2}u''_m(t)\right\|^2$$

$$\le \frac{a_2}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)^2\int_0^t\left\|A^{1/2}u_m(s)\right\|^2 ds + \eta\left\|A^{1/2}u''_m(t)\right\|^2$$

también por la hipótesis $[\mathrm{H}_2]-(a)$ sobre g tenemos

$$\leq \underbrace{\left(1-\eta_9\right)^2 \frac{a_2}{4\eta}}_{c_3} \int_0^t \left\| A^{1/2} u_m(s) \right\|^2 ds + \eta \left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2$$

$$\leq c_3 \int_0^t \left\| A^{1/2} u_m(s) \right\|^2 ds + \eta \left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2$$

también se tiene de la primera estimativa

$$c_3 \left\| A^{1/2} u_m(t) \right\|^2 \leq c_3 C \Rightarrow \int_0^t \left\| A^{1/2} u_m(s) \right\|^2 ds \leq c_3 C t = C(t)$$

luego tenemos

$$a_2 \int_0^t g(t-s)(A^{1/2} u_m(s), A^{1/2} u_m'(t)) ds \leq C(t) + \eta \left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \tag{5.52}$$

entonces de (5.49) y (5.52) en (5.48)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| u_m''(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \leq C(t) + \eta \left\| u_m''(t) \right\|^2 +$$

$$g(0)\frac{d}{dt}(A^{1/2} u_m(t), A^{1/2} u_m'(t)) - g(0)\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \tag{5.53}$$

también $\left\| u_m'(t) \right\|^2 \leq K_1 \left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \Rightarrow -\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \leq -\frac{1}{K_1}\left\| u_m'(t) \right\|^2$ luego se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| u_m''(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \leq C(t) + \eta \left\| u_m''(t) \right\|^2 +$$

$$+ g(0)\frac{d}{dt}(A^{1/2} u_m(t), A^{1/2} u_m'(t)) - \frac{g(0)}{K_1}\left\| u_m'(t) \right\|^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| u_m''(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 + \frac{g(0)}{K_1}\left\| u_m'(t) \right\|^2 \leq C(t) + \eta \left\| u_m''(t) \right\|^2 +$$

$$+ g(0)\frac{d}{dt}(A^{1/2} u_m(t), A^{1/2} u_m'(t))$$

pero como $\frac{g(0)}{K_1}\left\| u_m'(t) \right\|^2 \geq 0$ tenemos también:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| u_m''(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| A^{1/2} u_m'(t) \right\|^2 \leq C(t) + \eta \left\| u_m''(t) \right\|^2 +$$

$$+g(0)\frac{d}{dt}(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}u'_m(t)) \qquad (5.54)$$

denotando y acotando la siguiente expresión como sigue

$$E_{2m}(t)=\frac{1}{2}\left[\|u''_m(t)\|^2+\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|^2\right] \qquad (5.55)$$

también se tiene

$$E_{2m}(0)=\frac{1}{2}\left[\|u''_m(0)\|^2+\left\|A^{1/2}u'_m(0)\right\|^2\right]\leq\frac{1}{2}\left[\|u''_m(0)\|^2+K\|u'_m(0)\|^2\right] \qquad (5.56)$$

luego usando (5.45) y (5.42) en (5.57) tenemos

$$E_{2m}(0)\leq\frac{1}{2}\left[C+KC\right]=C_1 \qquad (5.57)$$

de (5.57) en (5.55) e Integrando de 0 a t se tiene

$$E_{2m}(t)\leq C_1+C_1(t)+\eta\int_0^t\|u''_m(s)\|^2\,ds+g(0)\left|(A^{1/2}u_m(t),A^{1/2}u'_m(t))\right|$$

$$-g(0)(A^{1/2}u_m(0),A^{1/2}u'_m(0))$$

$$E_{2m}(t)\leq C_1+C_1(t)+\eta\int_0^t\|u''_m(s)\|^2\,ds+g(0)\left|(A^{1/2}u_m(t),A^{1/2}u'_m(t))\right|$$

$$+g(0)\left|(A^{1/2}u_m(0),A^{1/2}u'_m(0))\right| \qquad (5.58)$$

también usando la desigualdad de Hölder, para cada caso en (5.58) se tiene

$$E_{2m}(t)\leq C_1+C_1(t)+\eta K_1\int_0^t\|u''_m(s)\|^2\,ds+g(0)\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|$$

$$+g(0)K\left\|A^{1/2}u_m(0)\right\|\|u'_m(0)\| \qquad (5.59)$$

luego usando la desigualdad de Young en (5.59) se tiene:

$$E_{2m}(t)\leq C_1+C_1(t)+\eta K_1\int_0^t\|u''_m(s)\|^2\,ds+\left(g(0)\right)^2\left\|A^{1/2}u_m(t)\right\|^2+\frac{1}{4}\left\|A^{1/2}u'_m(t)\right\|^2+g(0)KC$$

$$E_{2m}(t) \le C_1 + C_1(t) + \left(g(0)\right)^2 C + g(0)KC + \eta K_1 \int_0^t \|u_m''(s)\|^2\, ds + \frac{1}{4}\left\|A^{1/2} u_m'(t)\right\|^2 \qquad (5.60)$$

luego acotando por la primera estimativa

$$\|u_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{1/2} u_m'(t)\right\|^2 \le 2(C_1 + C_1(t) + \left(g(0)\right)^2 C + g(0)KC) + \eta K_1 \int_0^t \|u_m''(s)\|^2\, ds$$

$$\|u_m''(t)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m'(t)\right\|^2 \le 4(C_1 + C_1(t) + \left(g(0)\right)^2 C + g(0)KC) +$$

$$+4\eta K_1 \int_0^t \|u_m''(s)\|^2\, ds \qquad (5.61)$$

luego haciendo $C_2(t) = 4(C_1 + C_1(t) + \left(g(0)\right)^2 C + g(0)KC)$ tenemos:

$$\|u_m''(t)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m'(t)\right\|^2 \le C_2(t) + K_2 \int_0^t \left(\|u_m''(s)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m'(s)\right\|^2 \right) ds \qquad (5.62)$$

usando la desigualdad de Gronwall del **Lema 2.3** en (5.62) se tiene

$$\|u_m''(t)\|^2 + \left\|A^{1/2} u_m'(t)\right\|^2 \le C_3(t)$$

también

$$\|u_m''(t)\|^2 + \|u_m'(t)\|_W^2 \le C_3(t) \qquad (5.63)$$

para todo $t \in [0,T]$ ya que en este caso la acotación depende de *"t"*, luego tenemos del resultado (5.63) que:

$$\begin{aligned} &\{u_m'\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;W) \\ &\{u_m''\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H) \end{aligned} \qquad (5.64)$$

Pasaje al límite

Convergencia de las soluciones aproximadas

De (5.43) y (5.64) existe una subsucesión $\{u_m\}$ y que denotando de la misma forma luego se tiene:

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ en } L^\infty(0,T;W);$$
$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ en } L^\infty(0,T;W)$$
$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ en } L^\infty(0,T;H);$$
$$u''_m \xrightarrow{*} u'' \text{ en } L^\infty(0,T;H); \quad (5.65)$$

de las estimativas a priori deducimos la existencia de una subsucesión de (u_m) que denotaremos de la misma manera, y de una función *u* tal que:

$$u''_m \to u'' \text{ debilmente en } L^\infty(0,T;H);$$
$$u_m \to u \text{ debilmente en } L^\infty(0,T;W); \quad (5.66)$$

luego se tiene de (5.65) tenemos que (u_m) también esta acotada en el siguiente espacio:

$$W_1 = \left\{u \in L^2(0,T;W);\ u' \in L^2(0,T;H)\right\}$$
$$W_2 = \left\{u' \in L^2(0,T;W);\ u'' \in L^2(0,T;H)\right\} \quad (5.67)$$

definidos con la siguiente norma:

$$|u|_{W_1} = |u|_{L^2(0,T;W)} + |u'|_{L^2(0,T;H)}$$
$$|u|_{W_2} = |u'|_{L^2(0,T;W)} + |u''|_{L^2(0,T;H)} \quad (5.68)$$

entonces existe una subsucesión y denotándola de la misma forma $\{u_m\}$ tal que:

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad W_1$$
$$u'_m \to u' \quad \text{en} \quad W_2 \quad (5.69)$$

y como $W \hookrightarrow H$, luego aplicando el **teorema (Lions-Aubin)** se tiene: $W_1 \hookrightarrow L^2(0,T;W)$, $W_2 \hookrightarrow L^2(0,T;W)$. Por lo tanto:

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;W)$$
$$u'_m \to u' \quad \text{en} \quad L^2(0,T;W) \quad (5.70)$$
$$u''_m \to u'' \quad \text{en} \quad L^2(0,T;W)$$

por lo tanto, se tiene que u_m, u, u'_m, u', u''_m y $u'' \in L^2(0,T;W)$ y por el **teorema 2.10,** resulta que $u_m, u, u'_m, u' \in C([0,T];W)$ por lo tanto de (5.46) se deduce que

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad C([0,T];W)$$
$$u'_m \to u' \quad \text{en} \quad C([0,T];W)$$

(5.71)

teniendo en cuenta las convergencias anteriores podemos pasar al límite en el problema aproximado (5.3) y así obtener solución débil para el problema (5.1). Una manera de concretar estos resultados es tomando una función de prueba $\theta \in D(0,T)$ y luego multiplicando (5.3) por θ e integrando sobre $(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T \left\{ (u_m''(t), w_j) + (A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}w_j) - \int_0^t g(t-s)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}w_j)ds \right\} \theta(t)dt = 0 \qquad (5.72)$$

desarrollando se tiene

$$\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}w_j)\theta(t)\,dt$$

$$-\int_0^T \int_0^r g(r-s)(A^{1/2}u_m(t), A^{1/2}w_j)dr\theta(t)\,dt = 0 \qquad (5.73)$$

luego tomando el límite cuando $m \to \infty$ y para todo $w_j = v$ se tiene:

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (A^{1/2}u(t), A^{1/2}v)\theta(t)\,dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^r g(r-s)(A^{1/2}u, A^{1/2}v)dr\theta(t)\,dt = 0 \qquad (5.74)$$

y teniendo en cuenta $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$ se deduce que:

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (Au(t), v)\theta(t)\,dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^r g(r-s)(Au, v)dr\theta(t)dt = 0 \qquad (5.75)$$

esto prueba el límite anterior y por lo tanto se tiene que:

$$(u'', v) + (Au, v) - \int_0^T g(t-s)(Au, v)ds = 0 \qquad (5.76)$$

en $D'(0,T)$ y $\forall v \in V'$.

luego la solución del problema (5.1) será:

$$u \in L^2(0,T;V)$$
$$u'' \in L^2(0,T;H)$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} &u \in L^2(0,T;H_0^m(\Omega)) \\ &u' \in L^2\left(0,T;D\left((-\Delta)^{m/2}\right)\right) \\ &u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned} \qquad (5.77)$$

Verificación de los datos iniciales

El propósito en este caso será comprobar que dada una función esta satisface las condiciones iniciales dadas en (5.3) esto es:

$$u(0)=u_0 \qquad \text{y} \qquad u'(0)=u_1 \tag{5.78}$$

Verificación de $u(0)$: Por el **teorema 2.9** y los resultados de **(5.65)** tenemos la siguiente deducción para garantizar las condiciones iniciales, luego deducimos que $u\in C([0,T];W)$ y $u'\in C([0,T];H)$, los cuales tiene sentido calcular $u(0)$ y $u'(0)=u_1$

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \quad \text{en} \quad L^{\infty}(0,T;W)$$

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad \text{en} \quad L^{\infty}(0,T;H)$$

es decir

$$\langle u'_m, w\rangle \to \langle u', w\rangle \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

$$\langle u_m, w\rangle \to \langle u, w\rangle \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

luego tomando para cada caso respectivamente $w=v\theta$ y $w=v\theta'$ con $v\in V\subset L^2(\Omega)$ y $\theta\in C^1(0,T)$ se tiene para cada caso que y teniendo en cuenta que $\theta(0)=0$ y $\theta(T)=1$, tenemos luego:

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\,\theta(t)\,dt \quad\to\quad \int_0^T (u'(t),v)\,\theta(t)\,dt \tag{5.79}$$

$$\int_0^T (u_m(t),v)\,\theta'(t)\,dt \quad\to\quad \int_0^T (u(t),v)\,\theta'(t)\,dt \tag{5.80}$$

para todo $v\in V\hookrightarrow H$ luego sumando (5.79) y (5.80) se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(t),v)\,\theta(t)\right]\\ &= -(u_m(0),v)\end{aligned} \tag{5.81}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t),v)\,\theta(t)\right]\\ &= -(u(0),v)\end{aligned} \tag{5.82}$$

de (5.81) y (5.82)

$$\left(u_m(0),v\right)\rightarrow\left(u(0),v\right) \qquad (5.83)$$

también se tiene $u_m(0)=u_{0m}\rightarrow u_0$ fuerte en V y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$\left(u_m(0),v\right)\rightarrow\left(u_0,v\right) \qquad (5.84)$$

de (5.83), (5.84) y por la unicidad de limite se concluye que:

$$u(0)=u_0 \qquad (5.85)$$

Verificación de $u'(0)$**:** siguiendo el mismo procedimiento que el anterior teniendo en cuenta que $u''_m\rightarrow u''$ débil estrella en $L^2(0,T;H)$

$$\int_0^T\left(u''_m(t),v\right)\theta(t)dt \quad\rightarrow\quad \int_0^T\left(u''(t),v\right)\theta(t)dt \qquad (5.86)$$

$$\int_0^T\left(u_m(t),v\right)\theta'(t)dt \quad\rightarrow\quad \int_0^T\left(u(t),v\right)\theta'(t)dt \qquad (5.87)$$

para todo $v\in V\hookrightarrow H$ luego sumando (5.86) y (5.87) se tiene que:

$$\int_0^T\left(u''_m(t),v\right)\theta(t)dt+\int_0^T\left(u_m(t),v\right)\theta'(t)dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[\left(u'_m(t),v\right)\theta(t)\right]$$

$$=-\left(u'_m(0),v\right) \qquad (5.88)$$

por otro lado

$$\int_0^T\left(u''(t),v\right)\theta(t)dt+\int_0^T\left(u(t),v\right)\theta'(t)dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[\left(u'(t),v\right)\theta(t)\right]$$

$$=-\left(u'(0),v\right) \qquad (5.89)$$

por lo tanto, de (5.88) y (5.89) se tiene:

$$\left(u'_m(0),v\right)\rightarrow(u'(0),v) \qquad (5.90)$$

más aun como $u'_m(0)=u_{1m}\rightarrow u_1$ fuerte en H, luego:

$$\left(u'_m(0),v\right)\rightarrow(u_1,v) \qquad (5.91)$$

y por densidad de W en H se tiene luego por la unicidad de límite:

$$u'(0)=u_1 \qquad (5.92)$$

Unicidad de la Solución

Para probar la unicidad de (5.1), asumimos que existen u, v dos soluciones y que satisfacen las condiciones del **teorema 5.1.** También se tiene que $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ luego el nuevo sistema de (5.1) será como sigue:

$$\left| \begin{array}{l} w''+Aw-\int_0^t g(t-s)Aw\,ds=0 \\ w(0)=0 \\ w'(0)=0 \end{array} \right. \qquad (5.93)$$

luego multiplicando por w' e integrando sobre Ω se obtiene:

$$\int_\Omega w''w'dx+\int_\Omega Aww'dx-\int_0^t g(t-s)\int_\Omega Aww'dxds=0 \qquad (5.94)$$

$$(w'',w')+(Aw,w')-(\int_0^t g(t-s)Aw\,ds,w')=0$$

$$(w'',w')+(Aw,w')-(\int_0^t g(t-s)Aw\,ds,w')=0$$

$$(w'',w')+(A^{1/2}w,A^{1/2}w')-\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w,A^{1/2}w')\,ds=0$$

$$(w''(t),w'(t))+(A^{1/2}w(t),A^{1/2}w'(t))=\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w'(t))\,ds$$

$$(w''(t),w'(t))+(A^{1/2}w(t),A^{1/2}w'(t))=\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w'(t))\,ds$$

$$(w''(t),w'(t))+(A^{1/2}w(t),A^{1/2}w'(t))=\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w(t))\,ds$$

$$-\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w(t))ds-g(0)(A^{1/2}w(t),A^{1/2}w(t))$$

$$\frac{1d}{2dt}\left[\|w'(t)\|^2+\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2\right]=\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w(t))\,ds\right)$$

$$-\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w(t))\,ds-g(0)\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2$$

$$\frac{1d}{2dt}\left[\|w'(t)\|^2+\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2\right]\le\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s),A^{1/2}w(t))\,ds\right)$$

$$+\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}w(s), A^{1/2}w(t))\,ds + g(0)\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2 \quad (5.95)$$

luego por otro lado tenemos:

$$\int_0^t g'(t-s)(A^{1/2}w(t), A^{1/2}w(t))\,ds \le \int_0^t |g'(t-s)|\left|(A^{1/2}w(s), A^{1/2}w(t))\right| ds$$

$$\le -K_4\int_0^t g'(t-s)\left\|A^{1/2}w(s)\right\|\left\|A^{1/2}w(t)\right\| ds$$

$$\le a_0K_4\int_0^t g(t-s)\left\|A^{1/2}w(s)\right\|\left\|A^{1/2}w(t)\right\| ds$$

(5.96)

siguiendo el proceso de (5.52) se tiene

$$\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s), A^{1/2}w(t))\,ds \le \underbrace{c_1a_0K_4}_{c_4}\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds + \eta\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2 \quad (5.97)$$

de (5.96), (5.97) en (5.95) obtenemos

$$\frac{1d}{2dt}\left[\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2\right] \le \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s), A^{1/2}w(t))\,ds\right)$$

$$+c_4\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds + \eta\left\|A^{1/2}w_m(t)\right\|^2 + g(0)\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2 \quad (5.98)$$

integrando (5.98) sobre (0, t) tenemos:

$$\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2 \le 2\int_0^t g(t-s)(A^{1/2}w(s), A^{1/2}w(t))\,ds$$

$$+2c_4\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds + 2\eta\left\|A^{1/2}w'_m(t)\right\|^2 + 2g(0)\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2$$

$$\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2 \le 2c_3\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds + 4\eta\left\|A^{1/2}w_m(t)\right\|^2$$

$$+2c_4\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds + 2\eta\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2 + 2g(0)\left\|A^{1/2}w(t)\right\|^2 \quad (5.99)$$

de la primera estimativa podemos acotar y reordenar términos:

$$\|w'(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2 \le \left(6\eta + 2g(0)\right)\left\|A^{1/2}w\right\|^2 + \left(2c_3 + 2c_4\right)\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds \quad (5.100)$$

luego también se tiene y haciendo $\eta_1 = 6\eta + 2g(0)$ y $\eta_2 = 2c_3 + 2c_4$ y teniendo en cuenta que $\|w'\|^2 \geq 0$ tenemos entonces:

$$\eta_1\left(\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2\right) \leq \|w'\|^2 + (1-\eta_1)\left\|A^{1/2}w\right\|^2 \leq \eta_2\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds$$

$$\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2 \leq \frac{\eta_2}{\eta_1}\int_0^t \left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 ds \qquad (5.101)$$

Teniendo en cuenta que $0 < \eta_1 < 1$, $\|w'\|^2 \geq 0$ y haciendo $\eta_3 = \dfrac{\eta_2}{\eta_1}$ tenemos luego

$$\|w'\|^2 + \left\|A^{1/2}w\right\|^2 \leq \eta_3\int_0^t \left(\left\|A^{1/2}w(s)\right\|^2 + \|w'\|^2\right) ds \qquad (5.102)$$

luego, utilizando el **Lema de Gronwall (Lema 2.3)** se concluye que

$$\|w'(t)\| = \left\|A^{1/2}w(t)\right\| = \|u - v\|_V = 0$$

lo cual concluye la prueba de la unicidad

$$u = v \qquad (5.103)$$

□

5.1. Resultados descriptivos

Siguiendo nuestra línea de estudio referida a nuestra investigación no se necesitó de datos estadísticos que se puedan aplicar en los resultados de tesis en base a la estadística descriptiva, es por ello que no tenemos resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales

Por lo descrito en la referencia anterior, nuestro trabajo de tesis no requirió de datos estadísticos ni resultados inferenciales.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo con la naturaleza del problema y la hipótesis

En recurrencia a lo descrito anteriormente referido a nuestra investigación de tesis no se requirió de datos estadísticos ni hubo alguna otra similitud para obtener resultados con datos estadísticos.

VI. DISCUSION DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Una consecuencia de nuestra investigación de tesis, según lo demostrado con la hipótesis en este trabajo obtuvimos algunos resultados significativos:

a) Para datos iniciales $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$ dadas en espacios de Sobolev constituyen significativa y esencialmente en el desarrollo de la tesis para establecer la existencia y unicidad de la solución del sistema (5.1).

b) Con la obtención de la proyección del problema aproximado así complementado con las tres estimativas a priori obtenidas en la tesis logramos acotar las soluciones para luego con el pasaje al límite determinar la convergencia para demostrar así la existencia de soluciones en el problema (5.1).

c) Con respecto a la unicidad de la solución, se tomó como cierta dos soluciones diferentes para el problema (5.1) y mediante el método de contradicción encontramos que ambas resultaron ser iguales.

d) La gran variedad de modelos matemáticos cubre la casi totalidad de los materiales y estructuras usadas en ingeniería y aplicaciones científicas para el campo del análisis de vibraciones mecánicas. En general, un modelo viscoelástico se caracteriza por la siguiente característica: las fuerzas disipativas que intervienen en la ecuación del movimiento dependen de la historia temporal de la respuesta a través de una integral de convolución afectada por una función núcleo, llamada función viscoelástica

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

- Se pudo determinar que de nuestro trabajo aplicando para $m=1$ se tiene el resultado de MESSAOUDI S. del estudio de la ecuación viscoelástica

$$
\text{(A1)} \quad \begin{cases} u''' + \Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u \, ds = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma = \partial(\Omega) \times]0,T[\\ u'(0) = u_1; \; u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto con frontera Γ. Se consideró hallar una función: $u(x,t): \bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R};$ y con condiciones generales sobre la función de relajación g de la barra viscoelástica para la siguiente ecuación. Y demostró un decaimiento global de la energía, resultado que no es necesariamente de tipo exponencial o polinomial.

- También para **m=2** se da el resultado de BARRETO R, LAPA E y MUÑOZ R. (1986), consideraron la ecuación de cuarto orden

$$
\text{(A4)} \quad \begin{cases} u''' + \gamma \Delta u'' + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u \, ds = 0 & \text{en} \quad V(Q) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad V(\Omega) \\ u'(t) = u_1 & \text{en} \quad H(\Omega) \end{cases}
$$

junto con las condiciones de contorno y los datos iniciales dados y se demostró que las energías asociadas al sistema decaen exponencialmente (polinomialmente) si el núcleo g decae exponencialmente (polinomialmente).

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes

De acuerdo al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) aprobada por consejo universitario y con resolución N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, este trabajo de investigación cumple con las normativas institucionales que verifican su proceso y se comprobó su validación, confiabilidad y originalidad con relación a los métodos y fuentes de consulta utilizados con la mayor transparencia requerida.

VII. CONCLUSIONES

Las conclusiones de nuestra investigación son las siguientes:

a) Considerando que $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$ y las hipótesis del problema dado, se obtiene la existencia de la solución débil del problema (5.1).

b) Considerando que $u_0 \in H_0^m(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$ y las hipótesis del problema dado, se obtiene la unicidad de solución débil del problema (5.1).

c) Con las condiciones iniciales definidas para espacios de Sobolev y seguidas de las tres estimativas, demuestro la solución local débil del problema (5.1) y con las hipótesis del teorema 5.1 demuestro la unicidad del problema (5.1), estos resultados corroboran con situaciones experimentales en lo referente a nuestra investigación analítica aportando significativamente su valor, en lo que respecta a los resultados obtenidos en nuestra tesis.

d) En el estudio del análisis funcional abordando los espacios de Sobolev y aplicando específicamente en este proyecto de investigación como tesis, se deja como aporte importante en cuanto a las ecuaciones diferenciales parciales aplicadas específicamente a las ecuaciones de onda viscoelásticas con memoria, que en términos físicos se aproxima a la realidad de las vibraciones estructurales, por el cual sus aplicaciones son importantes en diversas ramas como las Ciencias, la Ingeniería civil o de estructuras y la Física donde se pueden adaptar e implementar en cuanto a una futura investigación.

VIII. RECOMENDACIONES

a) Una posible ampliación a nuestro modelo (5.1) y en base a nuestro estudio seria demostrar también la existencia, unicidad y el comportamiento asintótico de las soluciones para una ecuación con un operador abstracto no lineal del tipo:

$$\text{(A1)} \quad \begin{cases} u''' + Au + \int_0^t g(t-s)Au\, ds + h(u) = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0, T\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma = \partial(\Omega) \times \left]0, T\right[\\ u'(0) = u_1;\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

trabajando con los mismos argumentos dados en el problema (5.1) donde h es una función no lineal con ciertas condiciones y f es una función arbitraria dada, A es operador abstracto lineal simétrico y coercitivo.

b) También otro método de resolver el problema (5.1) se hubiese resuelto con el método de la teoría general de semigrupos para problemas de evolución abstracta tipo ecuación de Cauchy abstracto y con problemas de valor inicial.

c) En nuestro trabajo unas de las interpretaciones físicas del problema (5.1) por ejemplo para $m = 1; \Rightarrow A = -\Delta$, se producen en una ecuación viscoelástica aplicada en las oscilaciones transversales con memoria de una viga y para $m = 2 \Rightarrow A = \Delta^2$ que representa la ecuación de las oscilaciones transversales viscoelásticas con memoria de una placa.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R., Fournier, (2003) J. *Sobolev spaces*. 2ª ed. New York: Academic Press.

Al-Gharabli, M., Guesmia, A. and Mesaoudi, S. (2020), *Well-posedness and asymptotic stability results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic, nonlinearity* Applicable Analysis 99 (1), 50-74.

Al-Gharabli, M., Guesmia, A. and Mesaoudi, S. (2018), Existence *and general decay result for a plate equation with nonlinear damping and a logarithmic source term*, Journal of Evolution Equations 18 (1) , 105-125.

Barreto R., Lapa E., y Muñoz R., (1996). *Decay rates for viscoelastic plates With memory,* J. Elasticity, 44 no.1 ,61-87.

Boyer F. and Fabrie P., (2012). *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*. Springer Science & Business Media, volume 183.

Breszis H., (1983). *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Madrid, Alianza Editorial.

Castillo Giménez, E. (2017). *Existencia y decaimiento de la solución débil de la ecuación viscoelástica*. Lima-Perú, Tesis de magister en matemática pura UNMSM

Dafernos, C. (1970). *On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity,* J. Differential Equations 7: 554-569.

Desh, W. Grimmer and Schappacher (1984), *Some considerations for linear integrodifferential equation*. J. Math Anal. Appl. 104: 219- 234.

Hale, J. (1997), *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Dover Publications, INC.

Kesavan, S, (1989), *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Delhi, John Wiley & Sons.

Kreyszig, E, (1991). *introductory Functional Analysis with Applications*, New York, Willey.

Medeiros, L, y Milla, M, (1989), *Introdução aos Espaços de Sobolev e as Ecuaçoes Diferenciais Parciais.* IM - UFRJ.

Medeiros, L, y Miranda M. (2019), *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ.

Messaoudi, S. (2008), *General decay of solutions of a viscoelastic equation*, J. Math. Anal. Appl., 341 1457-1467.

Messaoudi, S y Mukiawa, S, (2016), *Existence and decay of solutions to a Viscoelastic plate equation*., Vol. 2016 N°. 22, p. 1–14.

Peyravi, A, (2020), General *stability and exponential growth for a class of semi-linear wave equations with logarithmic source and memory terms*, Applied Mathematics Optimization., Vol 81 N° 2, p. 545-561

Piskin, E and Irkil. N, (2021). *Existence and decay of solutions for a higher-order viscoelastic wave equation whit logarithmic nonlinearity*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Volume 70, Number 1, Pages 300-319

Santiago, Y, (2011). *Estabilización del movimiento de un cuerpo viscoelástico bajo un control* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol. XIV N°2, pp. 87-96

Teman R**;** *Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holand, Amsterdam 1979

Zeidler E (1985). *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*: II/A: Linear Monotone Operators. Springer Science & Business Media.

ANEXOS
ANEXO 1: Matriz de consistência
TITULO: Solución débil para una ecuación viscoelástica de orden superior

Problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de variables			Diseño metodologico
Problema General ¿Existe una única solución débil del problema (*A*3) que consiste en la ecuación viscoelástica, la cual se define como un modelo o sistema que tiene aplicación en las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de orden superior respecto sobre la variable espacial? **Problema especifico** Encontraremos respuesta por medio de la Investigación aplicado a nuestro problema o sistema (A3) dadas en las siguientes interrogantes: ¿El sistema (*A*3) es un modelo genérico que es aplicable a diferentes situaciones? ¿Existirá solución del problema (*A*3) con la generalización dada? ¿Habrá para el problema (*A*3) solución única?	**Objetivo General** Este objetivo de tesis se embarca en la demostración exhaustiva de la existencia local y la unicidad de la solución débil de (A3). Este problema involucra una ecuación que se configura como un sistema en base a las aplicaciones de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de orden superior respecto a la variable espacial. **Objetivo Especifico** Para hallar soluciones locales débiles para una ecuación viscoelástica, donde se abordará específicamente con la aplicación del método de Faedo-Galerkin, utilizando herramientas provenientes del análisis funcional, espacios de Sobolev, teoría espectral y teoría de operadores no limitados.	**Hipótesis General** Existe solución local débil y es única para el problema o sistema (A3) en ecuaciones en derivadas parciales de orden superior en la variable espacial. **Hipótesis Especifica** Para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces se determina que el sistema (A3) es un problema que engloba diferentes aplicaciones. para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces existe solución del problema (A3). Para datos iniciales $u_0 \in L^\infty\left(0,T;D(-\Delta)^m\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ entonces existe solución única del problema (A3).	**Variable** Dependiente $u(x,t)$ Independiente $x\ ,\ t$	**Dimensión** Existencia Unicidad	**Indicador** Método de Faedo-Galerkin Técnica de contradicción con la desigualdad de Gronwal	Hay que mencionar que esté presente estudio es de característica básica y fundamental, donde no se requieren experimentos. El contenido es Longitudinal, para esto priorizamos en la demostración de la existencia y unicidad de solución del sistema (A3) en EDP de orden superior en la variable espacial.